ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2006, том 411, № 3, с. 1–7

МАТЕМАТИКА

УДК 517.938.5

О ЯЗЫКАХ АРНОЛЬДА В ЗАДАЧЕ О ПЕРИОДИЧЕСКИХ ТРАЕКТОРИЯХ БОЛЬШИХ АМПЛИТУД

© 2006 г. В. С. Козякин, А. М. Красносельский, Д. И. Рачинский

Представлено академиком Н.А. Кузнецовым 21.04.2006 г.

Поступило 21.04.2006 г.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим конечномерную динамическую систему с дискретным временем

$$x_{k+1} = U_\lambda x_k, \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{1}$$

зависящую от комплексного параметра λ. Пусть система 1 имеет положение равновесия $x_* = 0$ ($U_\lambda 0 \equiv 0$), в окрестности которого свойства отображения U_λ определяются его ведущей линейной частью $A_\lambda x$. Если матрица A_λ имеет собственные значения вблизи единичной окружности $S \in \mathbb{C}$, то у системы (1) в окрестности нуля могут возникать периодические орбиты различных периодов. Традиционно отображение U_λ предполагалось достаточно гладким по x в окрестности нуля. Для того чтобы система (1) имела периодические режимы минимального периода n, собственные значения матрицы $A_\lambda = \left.\dfrac{\partial U_\lambda}{\partial x}\right|_{x=0}$ должны принимать значения из некоторого множества $\mathfrak{A}(n) \in \mathbb{C}$. Каждое множество $\mathfrak{A}(n)$ состоит из собрания узких клювов синхронизации $\mathfrak{A}_q$, называемых также языками Арнольда[1], каждый из которых упирается в точку $\lambda_q = e^{2\pi qi} \in S$ с рациональным $q = \dfrac{m}{n}$ (см., например, [1, 2]).

Если у матрицы A_λ лишь единственное собственное значение σ_λ близко к точке λ_q, то при $\sigma_\lambda \in \mathfrak{A}_q$ у системы 1 есть периодические орбиты x_k^λ периода n, $x_k^\lambda \to 0$ при $\sigma_\lambda \to \lambda_q$. Для значений $n > 4$ типичный язык Арнольда $\mathfrak{A}_q$ в этой ситуации заключен между двумя гладкими соприкасающимися в точке λ_q кривыми, как это изображено на рис.1 слева. При этом языки Арнольда $\mathfrak{A}_q$ для значений $n > 4$ являются "очень узкими": длина дуги $\mathfrak{A}_q \cap S_q(\varepsilon)$ окружности $S_q(\varepsilon) = \{\sigma\colon |\sigma - \lambda_q| = \varepsilon\}$ при малых ε убывает к нулю как $\varepsilon^{n/2-1}$. Такое устройство языков Арнольда обусловливается в первую очередь структурой так называемых резонансных членов в тейлоровском разложении отображения U_λ в нуле и тем фактом, что порядок резонансных членов, отвечающих за существование периодических траекторий периода n, растет с ростом n.

Клювообразность языков Арнольда означает, что для существования произвольно малых периодических траекторий фиксированного минимального периода $n > 4$ должны выполняться достаточно ограничительные условия. В частности, в ситуации общего положения у гладкой системы нет малых периодических траекторий фиксированного периода $n > 4$ [3], а рождающиеся периодические траектории в естественном смысле имеют "короткое время жизни" (по параметру λ) и трудно наблюдаемы на практике [4].

Отметим, что за существование периодических режимов малых периодов $n \le 4$ отвечают так называемые главные резонансные члены в тейлоровском разложении отображения U_λ. Структура языков Арнольда в этом случае рис. 1 изображена на рис. 1 справа. Соответственно периодические режимы малых периодов наблюдаются достаточно часто и являются в этом смысле типичными.

Внешне аналогичная ситуация возникает, когда система (1) рассматривается на бесконечности в предположении, что оператор U_λ имеет вид

$$U_\lambda x = A_\lambda x + \text{“ограниченная нелинейность”} \tag{2}$$

с главной на бесконечности линейной частью $A_\lambda x$. В этом случае можно считать, что система (1) имеет бесконечно удаленное положение равновесия, и, как и в нуле, естественно возникает вопрос о структуре множеств $\mathfrak{A}(n)$.

Цель настоящего сообщения – изучение множеств $\mathfrak{A}(n)$ для систем 1 на бесконечности; в

[1] Этот термин используется также в некоторых других задачах.

Институт проблем передачи информации Российской Академии наук, Москва

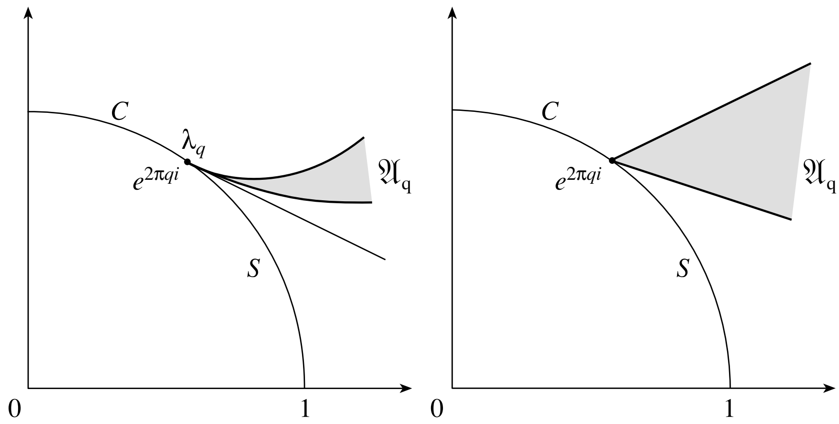

Рис. 1. Типичные контуры языков Арнольда в нуле (слева) и на бесконечности (справа).

окрестности окружности S эти множества также распадаются в объединение языков Арнольда $\mathfrak{A}_q$, границы которых в типичной ситуации уже не соприкасаются (см. рис. 1 справа), хотя угловая ширина языков $\mathfrak{A}_q$ стремится к нулю при возрастании n. Для систем (1), (2) существование траекторий больших амплитуд фиксированного периода является ситуацией общего положения. Типичный сценарий рождения периодических траекторий больших амплитуд оказывается ближе к сценарию рождения малых периодических режимов для гладких систем в случае одного из главных резонансов, а не к сценарию рождения малых длиннопериодических режимов, как естественно было бы ожидать.

Причина различия языков Арнольда в нуле и на бесконечности заключается в неполимиальности основных нелинейных слагаемых в infcond. Соответственно для этих слагаемых нет тейлоровского разложения и формального понятия резонансных или нерезонансных членов. Однако свойства фурье-разложений для угловых координат слагаемых (2) оказываются близкими к свойствам фурье-разложений для угловых координат главных резонансных членов в локальном случае. Аналоги теорем о бифуркации периодических траекторий на бесконечности оказываются справедливыми для систем с негладкими однородными старшими слагаемыми в окрестности нулевого положения равновесия.

2. ЛОКАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА

Рассмотрим систему (1) с отображением $U_\lambda x = A(\lambda)x + \Phi(x; \lambda) + \xi(x; \lambda)$. В целях упрощения формулировок простое, близкое к окружности S собственное значение λ матрицы $A = A(\lambda)$ используется в качестве параметра системы. Пусть параметр λ меняется в некоторой окрестности D замкнутого множества $\Lambda \subset S$ и все отличные от λ и $\bar{\lambda}$ собственные значения $\sigma_j(\lambda)$ матрицы $A(\lambda)$ квалифицированно отделены от S: $\|\sigma_j(\lambda)| - 1| \geq \delta > 0$ при $\lambda \in D$, $j = 1, 2, \ldots, N - 2$.

Пусть при всех $\lambda \in D$ функция $\Phi(x; \lambda)$ ограничена, положительно однородна: $\Phi(\theta x; \lambda) = \Phi(x; \lambda)$ при $x \neq 0$, $\theta > 0$ и удовлетворяет условию Гёльдера

$$|\Phi(x_1; \lambda) - \Phi(x_2; \lambda)| \leq K|x_1 - x_2|^\tau, \quad |x_1| = |x_2| = 1, \quad 0 < \tau \leq 1, \tag{3}$$

причем

$$\lim_{|x| \to \infty} \sup \sup_{\lambda \in D} |x|^{-s} |\xi(x; \lambda)| < \infty, \quad s > 0. \tag{4}$$

Обозначим через E_λ собственное подпространство матрицы $A(\lambda)$, отвечающее паре простых собственных значений λ и $\bar{\lambda}$, а через E'_λ – инвариантное подпространство размерности $N - 2$, дополняющее E_λ. Пусть P_λ – коммутирующий с $A(\lambda)$ линейный проектор на плоскость E_λ вдоль E'_λ. Выберем такой непрерывно зависящий от λ базис $\{e_1^\lambda, e_2^\lambda\}$ в E_λ, чтобы матрица $A(\lambda)$ имела в нем элементы $a_{11} = a_{22} = \mathrm{Re}\lambda$, $a_{21} = -a_{12} = \mathrm{Im}\lambda$. Непрерывно зависящее от $\lambda \in D$ линейное отображение Q_λ: $\mathbb{C} \to E_\lambda$, задаваемое равенствами $Q_\lambda 1 = e_1^\lambda$, $Q_\lambda i = e_2^\lambda$, определяет на E_λ комплексную структуру.

Рассмотрим 2π-периодическую функцию $\Psi_\lambda(\varphi) = Q_\lambda^{-1} P_\lambda \Phi(Q_\lambda e^{i\varphi}; \lambda)$, пусть

$$\Psi_\lambda(\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_k^\lambda e^{ik\varphi}, \quad \psi_k^\lambda \in \mathbb{C}. \tag{5}$$

Для каждого $q = \frac{m}{n} > 0$ с взаимно простыми m и n определим непрерывную 2π-периодическую функцию $\Psi_q^{\mathrm{res}}: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$:

$$\Psi_q^{\mathrm{res}}(\varphi) = -\sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_{kn+1}^{\lambda_q} e^{ik\varphi} \equiv \equiv -\frac{e^{-i\varphi/n}}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \Psi_{\lambda_q}\left(\frac{\varphi + 2j\pi}{n}\right) e^{-2j\pi i/n}. \quad (6)$$

Рассмотрим множество $\mathfrak{D}_q = \{\varphi \in \mathbb{R}: \Psi_q^{\mathrm{res}}(\varphi) \neq 0\}$, оно состоит из не более чем счетного числа непересекающихся интервалов $d_\mu = (\varphi_1^\mu, \varphi_2^\mu)$ ($\mu \in \mathcal{M}$ – индекс пересчета). Зафиксируем ветвь комплексного аргумента так, чтобы функция $\Psi_q^{\mathrm{res}}: \mathfrak{D}_q \to \mathbb{R}$ была непрерывна на каждом интервале $d_\mu \subset \mathfrak{D}_q$, пусть $\mathfrak{V}_q$ – множество ее значений. Основное предположение о невырожденности – это

$$\mathrm{Int}\,\mathfrak{V}_q \neq \varnothing. \quad (7)$$

Если $\Psi_q^{\mathrm{res}}(\varphi) \neq 0$, то множество $\mathrm{Int}\,\mathfrak{V}_q$ является открытым интервалом, если оно не пусто. Например, так будет, если $\psi_1^{\lambda_q} \neq 0$ и n достаточно велико.

Обозначим через $\mathfrak{R}^\mu$ множество значений функции $\arg \Psi_q^{\mathrm{res}}$ на интервале $d_\mu \subset \mathfrak{D}_q$. В силу (7) по крайней мере один из интервалов $\mathfrak{R}^\mu$ имеет внутренние точки. Поэтому множество $\mathfrak{V}^* = \bigcup_{\mu \in \mathcal{M}} \mathrm{Int}\,\mathfrak{R}^\mu$ непусто. Почти всегда $\mathfrak{V}^* = \mathrm{Int}\,\mathfrak{V}_q$, контрпримеры громоздки и вырождены.

Т е о р е м а 1. *Пусть для некоторого* $q = \frac{m}{n}$ *выполнено основное условие* (7).

Тогда для каждого непустого замкнутого множества $\mathfrak{V} \subset \mathfrak{V}^*$ *найдется такое* $\varepsilon = \varepsilon(q, \mathfrak{V}) > 0$, *что при любом* $\lambda \in \{\lambda: 0 < |\lambda - \lambda_q| \le \varepsilon, \arg(\lambda - \lambda_q) \in \in \mathfrak{V}\}$ *система* 1 *имеет по крайней мере одну периодическую точку* x_λ *минимального периода* n *и удовлетворяющее* $\varepsilon \le |x_\lambda| \cdot |\lambda - \lambda_q|^{-1} \le \varepsilon^{-1}$.

Пусть $\nu \in \mathfrak{V}^*$ и $\arg \Psi_q^{\mathrm{res}}(\varphi_\nu) = \nu$. В ситуации общего положения функция $\arg \Psi_q^{\mathrm{res}}$ строго монотонна в окрестности точки φ_ν; множество таких "грубых" значений φ_ν конечно. Каждое из них определяет n-периодическую орбиту $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ системы (1), для которой справедливо асимптотическое соотношение $x_k = |\Psi_q^{\mathrm{res}}(\varphi_\nu)| \cdot |\lambda - \lambda_q|^{-1} Q_{\lambda_q}(e^{i(\varphi_\nu + 2\pi k)/n}) + o(|\lambda - - \lambda_q|^{-1})$ при $\lambda \to \lambda_q$. Таким образом, для каждого ν количество больших периодических орбит равно количеству грубых решений φ_ν уравнения $\arg \Psi_q^{\mathrm{res}}(\varphi_\nu) = \nu$ на интервале $[0, 2\pi)$.

Теорему 1 дополняет следующее утверждение. Пусть открытое множество $\mathfrak{V}'$ содержит замыкание $\overline{\mathfrak{V}}_q$ множества $\mathfrak{V}_q$. Система 1 не имеет n-периодических точек достаточно больших норм при $\arg(\lambda - \lambda_q) \notin \mathfrak{V}'$, даже если $|\lambda - \lambda_q|$ мало: теорема 1 описывает язык Арнольда $\mathfrak{A}_q$ достаточно точно.

3. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ТЕОРЕМЫ 1

В этом разделе рассматриваются двумерные системы 1, в которых $U_\lambda z = \lambda z + \Phi(e^{i\varphi}; \lambda) + o(1)$, где $o(1) \to 0$ при $z \to \infty$, $z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}$. Значения параметра λ выбираются из малой окрестности точки λ_q, $q = \frac{m}{n}$. Итерации такого отображения U_λ удовлетворяют равенствам $U^n(z; \lambda) = \lambda^n z - n\lambda_q^{-1} e^{i\varphi} \Psi_q^{\mathrm{res}}(n\varphi) + + o(1)$, где $o(1) \to 0$ при $z \to \infty$, $\lambda \to \lambda_q$, функция Ψ_q^{res} определена соотношением (6) с $\Psi_\lambda(x) = \Phi(x; \lambda)$. Если ввести малый параметр $\xi = \lambda - \lambda_q$, то $\lambda^n = = 1 + \lambda_q^{-1} n\xi + o(\xi)$ и уравнение $z - U_\lambda^n z = 0$ для n-периодических точек U_λ можно переписать в виде $(n\lambda_q^{-1}\xi + o(\xi))z = n\lambda_q^{-1} e^{i\varphi} \Psi_q^{\mathrm{res}}(n\varphi) + o(1)$. Отбросив малые слагаемые, приходим к приближенному уравнению $\xi r = \Psi_q^{\mathrm{res}}(n\varphi)$. Его решения $z = re^{i\varphi}$ и множества значений параметра ξ, для которых эти решения существуют, описываются в терминах кривой $\Gamma_q = \{\Psi_q^{\mathrm{res}}(n): \varphi \in \mathbb{R}\}$ и множеств $\mathfrak{S}_q = = \{\tilde{\xi} \in \mathbb{C}: \tilde{\xi} = \theta \Psi_q^{\mathrm{res}}(\varphi), \theta \ge 0, \varphi \in \mathbb{R}\}$. В основных ситуациях $\mathfrak{S}_q$ является углом (как на рис. 2), но может иметь и более сложную структуру (рис. 3). Приближенное уравнение имеет ненулевое решение z при $\xi \neq 0$, если и только если $\xi \in \mathfrak{S}_q$. Более того, каждое трансверсальное пересечение луча $L_\xi = \{\tilde{\xi} \in \mathbb{C}: \tilde{\xi} = \theta\xi, \theta > 0\} \subset \mathfrak{S}_q$ с кривой Γ_q определяет свое решение $z_\xi^j = r_\xi^j e^{i\varphi_\xi^j}$, где $0 \le n\varphi_\xi^j < 2\pi$. Так как функция Ψ_q^{res} имеет период 2π, то n точек $z_\xi^{j,s} = r_\xi^j e^{i(\varphi_\xi^j + 2\pi s/n)}$ являются решениями уравнения $\xi r = \Psi_q^{\mathrm{res}}(n\varphi)$; эти n точек приближают n-периодическую орбиту системы $z_{k+1} = U_\lambda z_k$ при $\xi \to 0$. Число различных больших n-периодических орбит в ситуации общего положения совпадает с числом трансверсальных пересечений луча L_ξ и кривой Γ_q.

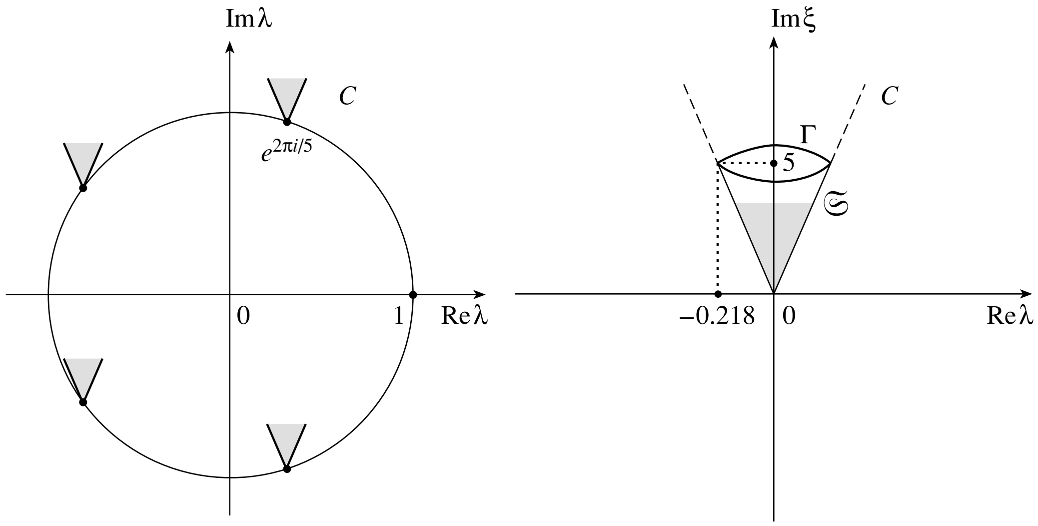

Рис. 2. Треугольные языки Арнольда для $n = 5$, $\Phi(\varphi) = 3|\sin\varphi| + i\cos\varphi$.

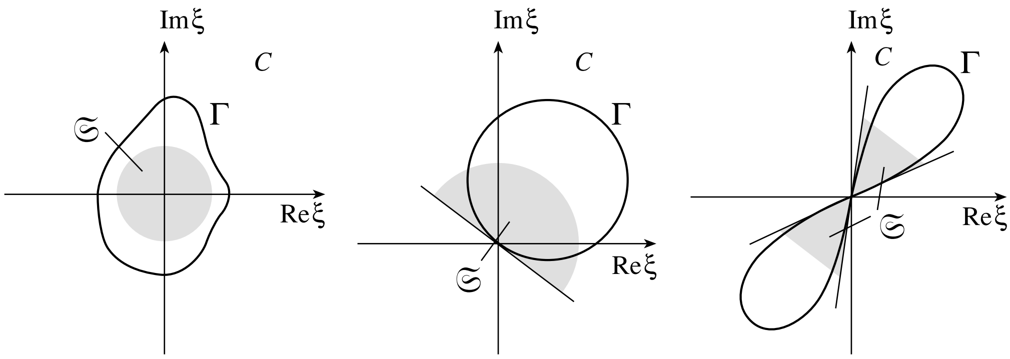

Рис. 3. Различные кривые $\Gamma = \Gamma_q$ и соответствующие множества $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_q$.

Рисунки 2 и 3 демонстрируют различные кривые $\Gamma = \Gamma_q$ и множества $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_q$. На рис. 2 справа представлена типичная ситуация. Нуль лежит вне области, ограниченной кривой Γ_q, и каждый луч (за исключением граничных) $L_\xi \subset \mathfrak{S}_q$ пересекает Γ_q в двух точках. Другая ситуация общего положения показана Рис. 3 на рис.21 слева: кривая Γ_q окружает начало координат, $\mathfrak{S}_q = \mathbb{C}$, каждый луч L_ξ пересекает Γ_q трансверсально в единственной точке. Если n велико, то для реализации ситуации $\mathfrak{S}_q = \mathbb{C}$ необходимо условие типа равенства $\int\limits_0^{2\pi} \Psi_q^{\mathrm{res}}(\varphi)d\varphi = 0$. Две другие ситуации на рис. 3 имеют коразмерности 1 и 2.

Условие (7) означает, что угол $\mathfrak{S}_q$ имеет непустую внутренность $\mathrm{Int}\,\mathfrak{S}_q$. Предположим, что $\mathfrak{B}^* = \mathrm{Int}\,\mathfrak{B}_q$. Рассмотрим любой замкнутый угол $\tilde{\mathfrak{S}} \subset \mathrm{Int}\,\mathfrak{S}_q \cup \{0\}$. Теорема 1 утверждает, что пересечение $\tilde{\mathfrak{S}}$ с проколотым кругом $0 < |\lambda - \lambda_q| \le \varepsilon$ достаточно малого радиуса ε является частью языка Арнольда $\mathfrak{A}_q$ после сдвига на λ_q (см. рис. 2). Язык Арнольда $\mathfrak{A}_q$ с острым углом при вершине λ_q направлен внутрь единичного круга, если $\mathrm{Re}(\lambda_q^{-1}\Psi_q^{\mathrm{res}}(\varphi)) < 0$ для всех φ, и наружу, если $\mathrm{Re}(\lambda_q^{-1}\Psi_q^{\mathrm{res}}(\varphi)) > 0$. Если функция $\mathrm{Re}(\lambda_q^{-1}\Psi_q^{\mathrm{res}}(\varphi))$ принимает значения разных знаков, язык Арнольда $\mathfrak{A}_q$ покрывает часть окружности S.

К изучаемой задаче может быть применим принцип смены индекса [5]. При всех $\lambda \ne \lambda_q$ определен индекс γ_λ на бесконечности плоского векторного поля $z - U_\lambda^n z$ и $\gamma_\lambda = 1$. Для $\lambda = \lambda_q$ индекс γ_{λ_q} заведомо определен, если $0 \notin \Gamma_q$. В случае, показанном на рис. 3 слева, $\gamma_{\lambda_q} \ne 1$, следовательно, применим принцип смены индекса, и при λ, близких к λ_q, существует большая по амплитуде n-периодическая траектория (см.[6]). В случае, когда кривая λ_q имеет вид, показанный на рис. 2, $\gamma_{\lambda_q} = \gamma_\lambda = 1$ и принцип смены индекса неприменим.

4. ОЦЕНКИ ДЛИНЫ ЯЗЫКА АРНОЛЬДА

В этом разделе даются асимптотические (при $n \to \infty$) оценки длины языка Арнольда $\mathfrak{A}_q$ системы (1) и длины его треугольной части. Пусть

$$\psi(\lambda) := -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i\varphi}\Psi_\lambda(\varphi)d\varphi \neq 0, \quad \lambda \in \Lambda. \tag{8}$$

Очевидно, $-\psi(\lambda)$ совпадает с коэффициентом ψ_1^λ в (5); $\psi(\lambda_q)$ равняется среднему функции (6). Зададимся $\nu > 0$ и рациональным q и рассмотрим угол

$$\mathcal{A}_q = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\mathrm{Im}((\lambda - \lambda_q)\bar{\psi}(\lambda_q))| \leq \leq \nu\mathrm{Re}((\lambda - \lambda_q)\bar{\psi}(\lambda_q))\}. \tag{9}$$

Будем говорить, что длина языка Арнольда $\mathfrak{A}_q$ внутри угла (9) не меньше δ, если на каждой непрерывной кривой $L = \{\lambda \in \mathbb{C}: \lambda = \lambda^*(\rho), \rho \in [0, 1]\} \subset \subset \mathcal{A}_q \cap \{\lambda \in \mathbb{C}: 0 < |\lambda - \lambda_q| < \delta\}$ с концами на различных сторонах угла (9) лежит по крайней мере одна такая точка $\lambda = \lambda^*(\rho_0) \in L$, что система 1 при этом λ имеет n-периодическую точку x_L и $|x_L| \to \infty$ при $\max\{|\lambda - \lambda_q|: \lambda \in L\} \to 0$ (т.е., когда L стягивается к λ_q).

Т е о р е м а 2. *Для каждого* $\nu > 0$ *найдется такое* $\varepsilon = \varepsilon(\nu, \Lambda) > 0$, *что при любом рациональном* $q = \frac{m}{n} > 0$ *с достаточно большим* n *и* $\lambda_q \in \Lambda$ *длина языка Арнольда* $\mathfrak{A}_q$ *внутри угла* (9) *не меньше* $\frac{\varepsilon}{n}$.

В этой теореме нет предположения о справедливости условия (7) и нет никаких выводов о форме $\mathfrak{A}_q$. На рис. 4 язык Арнольда схематически изображен состоящим из двух частей: короткой закрашенной треугольной части и более длинной, условно изображенной в виде пунктирной линии. Треугольная часть короче ε/n; если L пересекает язык Арнольда в треугольной части, множество точек $\lambda^*(\rho_0)$ заполняют невырожденный промежуток.

Из предположения (8) вытекает, что угловая ширина языков $\mathfrak{A}_q$ стремится к нулю при возрастании знаменателей n: кривая Γ_q стягивается в точку $\psi(\lambda_q)$ и угол $\mathfrak{S}_q$ стягивается в луч при $n \to \infty$.

Обозначим через $\Lambda_\triangle$ множество всех таких $\lambda_q \in \Lambda$ с рациональными $q = \frac{m}{n}$, для которых выполнено условие невырожденности (7). Предположим, что $\Lambda_\triangle$ бесконечно. Из (8) следует, что,

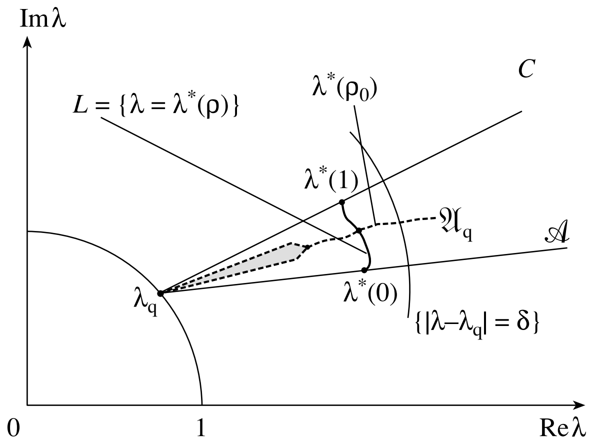

Рис. 4. К определению длины языка Арнольда.

если $\lambda_q \in \Lambda_\triangle$ и знаменатель n достаточно велик, то функция Ψ_q^{res} не обращается в нуль и множество $\mathfrak{B}_q$ является невырожденным промежутком: $\mathfrak{B}_q = [M_q^-, M_q^+]$, где $M_q^+ > M_q^-$. Положим $\Delta_q = M_q^+ - M_q^-$. Теорема 1 утверждает, что для каждого $\theta \in (0, 1)$ найдется такое $\delta_q(\theta) > 0$, что при любом λ из множества $\{0 < |\lambda - \lambda_q| \leq \delta_q(\theta)\} \cap \left\{\lambda: \left|\arg(\lambda - \lambda_q) - \frac{M_q^+ + M_q^-}{2}\right| \leq \frac{\theta\Delta_q}{2}\right\}$, система (1) имеет периодические точки x_λ минимального периода n с нормой $|x_\lambda| \in (r_1^q|\lambda - \lambda_q|^{-1}, r_2^q|\lambda - \lambda_q|^{-1})$, где $r_j^q > 0$ не зависят от λ. Назовем число $\delta_q(\theta)$ нижней границей длины треугольной части языка Арнольда $\mathfrak{A}_q$ при этом θ.

Пусть $A(\lambda)$ и $\Phi(x; \lambda)$ липшицевы по λ. Пусть $0 < < s_1 < s$ и $0 < \tau_1 < \tau$, где s и τ – показатели степени в (4) и (3). Пусть $\rho_n > 0$ удовлетворяет условию[2]

$$\sup_{q = m/n,\, \lambda_q \in \Lambda_\triangle} (n^{\tau_1}\rho_n^{\tau_1} + \rho_n^{s_1})\Delta_q^{-1} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty, \tag{10}$$

где supremum берется при фиксированном n по всем взаимно простым с ним m.

Т е о р е м а 3. *Пусть верны соотношения* (8), (10). *Тогда при любом* $\theta \in (0, 1)$ *величина* $\delta_q(\theta) = \rho_n$ *является нижней границей длины треугольной части языка Арнольда* $\mathfrak{A}_q$ *с вершиной* $\lambda_q \in \Lambda_\triangle$ *для каждого рационального* q *с достаточно большим знаменателем* n.

[2] Формула (10) корректна, $\Delta_q > 0$ для любых $q = \frac{m}{n}$ с достаточно большими n при $\lambda_q \in \Lambda_\triangle$.

5. СИСТЕМЫ СО СКАЛЯРНЫМ ПАРАМЕТРОМ

Пусть теперь $\lambda = \lambda(\mu)$, $\mu \in (0, 1)$. Если кривая $\lambda(\mu)$ пересекает трансверсально окружность S в точке $\lambda_0(\mu_0) = \lambda_q$, то при близких к μ_0 значениях μ может возникать явление субфуркации, замеченное в [7] для периодических траекторий в окрестности нуля. Это явление заключается в том, что при стремлении параметра μ к μ_0 (на плоскости λ этому соответствует стремление параметра λ вдоль кривой $\lambda(\mu)$ к точке λ_q) у системы спорадически рождаются и умирают малые периодические траектории растущего минимального периода.

Будем говорить, что у системы $x_{k+1} = U_\mu x_k$, зависящей от параметра $\mu \in \mathbb{R}$, в точке μ_0 наблюдается субфуркация на бесконечности, если в любой окрестности точки μ_0 найдется μ, при котором у системы есть периодическая точка x_μ с минимальным периодом $p > p_0$ и нормой $|x_\mu| > p_0$ при любом p_0.

В нуле для гладких систем субфуркация возникает во всех общих ситуациях [7], кроме главных резонансов. В условиях теоремы 1 это явление наблюдается в случае, когда кривая $\lambda(\mu)$ не лежит в секторе $\mathfrak{S}$.

Т е о р е м а 4. *Предположим, что* $\psi(\lambda) \neq 0$ *на замкнутом множестве* $\Lambda \subset S$. *Пусть* $\arg\lambda - \arg b \neq$ $\neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $\arg\psi(\lambda) - \arg b \neq \pi k$ *для некоторого* $b \neq 0$ *при всех* $\lambda \in \Lambda$ *и всех целых* k.

Тогда при $\dfrac{d\lambda}{d\mu(\mu_0)} = b$ *и* $\lambda(\mu_0) = \lambda_q \in \Lambda$ *при любом рациональном* q *с достаточно большим знаменателем или иррациональном* q *у системы* 1 *с* $\lambda = \lambda(\mu)$ *наблюдается субфуркация на бесконечности в точке* μ_0.

Геометрически причина субфуркации – пересечение бесконечного числа языков Арнольда кривой $\lambda(\mu)$ в окрестности $\lambda(\mu_0)$. Если q иррациональное, то естественными кандидатами на периоды траекторий являются знаменатели подходящих и промежуточных дробей q. Если $q = \dfrac{m}{n}$ рациональное, то хорошие кандидаты – это знаменатели дробей $\dfrac{m_1}{n_1}$, для которых $|m_1 n - m n_1| = 1$.

6. СИСТЕМЫ, ПОРОЖДЕННЫЕ ОПЕРАТОРОМ СДВИГА

Системы (1) могут определяться оператором сдвига за период T для уравнений $x' = g(t, x)$, $x \in \mathbb{R}^N$ с T-периодическими по t правыми частями. Если $g(t, x) = Bx + G(t, x) + o(1)$, $|x| \to \infty$, где B – это матрица $N \times N$ и $G(t, x) \equiv G\left(t, \dfrac{x}{|x|}\right)$ при $x \neq 0$, то оператор сдвига имеет вид $U(x) = Ax + \Phi(x) + o(1)$, $|x| \to \infty$, где $A = e^{TB}$, а нелинейность $\Phi(x) = \int_0^T e^{(T-t)B} G(t, e^{tB}x)dt$, $x \in \mathbb{R}^N$, положительно однородна степени нуль: $\Phi(x) \equiv \Phi\left(\dfrac{x}{|x|}\right)$.

Рассмотрим двумерный пример, который запишем в комплексной форме

$$z' = \nu z + a(t) f z + b(t), \quad z \in \mathbb{C}; \tag{11}$$

здесь a, b: $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ – это 2π-периодические функции, $\nu \in \mathbb{C}$ – параметр. Пусть функция f: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ имеет радиальный предел F на бесконечности: $\lim\limits_{\theta \to \infty} \sup\limits_{z \in S} |f(\theta z) - F(z)| = 0$, $F(z) = F(z/|z|)$. Тогда оператор сдвига для (11) имеет на бесконечности вид $U(z; \nu) = \lambda z + \Phi(z; \nu) + o(1)$, где $\lambda = e^{2\pi\nu}$ – параметр, лежащий вблизи окружности S, если $\mathrm{Re}\,\nu$ мало, а положительно однородное слагаемое Φ определяется равенством

$$\Phi(z; \nu) = \Psi_\lambda(\varphi) =$$

$$= \int_0^{2\pi} e^{\nu(2\pi - t)}(a(t)F(e^{\nu t + i\varphi}) + b(t))dt, \quad \varphi = \arg z.$$

При $q = \dfrac{m}{n}$, $\nu = iq$ и λ_q функция (6) имеет вид

$$\Psi_q^{\mathrm{res}}(\varphi) = -2\pi\lambda_q \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_{-mk}\phi_{nk+1}e^{ik\varphi},$$

где

$$a(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{ikt}, \quad F(e^{i\varphi}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi_k e^{ik\varphi}.$$

Подчеркнем, что при $a(t) \equiv \alpha_0$ теорема 1 не применима; здесь $\Psi_q^{\mathrm{res}} \equiv \mathrm{const}$.

Радиальный предел F в естественных приложениях может оказаться разрывным, например для скалярного уравнения $x'' + \nu_1 x' + \nu_2 x = b(t) + a(t) f(x)$, если f – нелинейность с насыщением: $f(x) \to f_\pm$ при $x \to \pm\infty$. Для малых ν_1 и положительных ν_2 это уравнение имеет комплексную форму comp с ν близким к мнимой оси. Соответствующая предельная функция $F(z) = F(e^{i\varphi})$ разрывна (кусочно-постоянна), но оператор сдвига непрерывен и теорема 1 применима.

Д.И. Рачинский поддержан Science Foundation Ireland по программе Research Frontiers Programme, Д.И. Рачинский и А.М. Красносельский поддержаны грантом Enterprise Ireland IC/2006/0004. Все авторы поддержаны Российским фондом фундаментальных исследований (гранты 04-01-00330 и 06-01-00256).

Авторы особо благодарны Клаусу Шнайдеру из института Вейерштрасса в Берлине, с участием которого были начаты обсуждения по теме сообщения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арнольд В.И.* Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Ижевск: Изд-во МЦНМО, 1999.
2. *Kuznetsov Yu.A.* Elements of Applied Bifurcation Theory. N.Y.: Springer, 1998.
3. *Козякин В.С.* В сб.: Дифференциальные уравнения. Куйбышев: Изд-во Куйбышев. гос. ун-та, 1976. С. 39–44.
4. *Козякин В.С.* // Автоматика и телемеханика. 1985. № 9. С. 42–48.
5. *Красносельский М.А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М.: Гостехтеориздат, 1956.
6. *Krasnosel'skii A.M., Pokrovskii A.V.* // Discrete Contin. Dyn. Syst. 2001. V. 7. № 7. P. 100–114.
7. *Козякин В.С.* // ДАН. 1977. Т. 232. № 1. С. 25–27.