ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2008, том 419, № 1, с. 1–5

МАТЕМАТИКА

УДК 517.938

ДВОЙНОЕ ВЫРОЖДЕНИЕ В ЗАДАЧЕ О НЕОГРАНИЧЕННЫХ ВЕТВЯХ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

 А. М. Красносельский

Представлено академиком Н.А. Кузнецовым 18.09.2007 г.

Поступило 20.09.2007 г.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В сообщении изучается уравнение

$$\mathcal{L}(p;\lambda)x = f(t, x; \lambda), \quad p = \frac{d}{dt}, \tag{1}$$

с параметром $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}$. Здесь $\mathcal{L}$ – вещественный многочлен от переменной p, нелинейность f непрерывна по совокупности переменных, равномерно ограничена и периодична по t с общим для всех λ периодом 2π. Пусть $\lambda_0 \in \operatorname{Int}\Lambda$. Если у многочлена $L(p) = \mathcal{L}(p; \lambda_0)$ нет корней вида ki при целых k, то множество $\mathfrak{P}_\varepsilon$ всех 2π-периодических решений уравнения $\mathcal{L}x = f$ при всех $|\lambda - \lambda_0| \le \varepsilon$ ограничено, если $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Если у многочлена L есть корни вида ki, то множество $\mathfrak{P}_\varepsilon$ может быть неограниченным при любом ε. В сообщении приводятся условия неограниченности $\mathfrak{P}_\varepsilon$, изучается его структура.

Далее предполагаем, что $\mathcal{L}(p; \pi) = L(p) + (\lambda - \lambda_0)M(p; \lambda)$, т.е. уравнение (1) имеет вид $L(p)x + (\lambda - \lambda_0)M(p; \lambda)x = f(t, x; \lambda)$. Предполагаем также, что $\deg L > \deg M$, что коэффициенты многочлена $\mathcal{L}$ не зависят от t, а коэффициенты M липшицевы по λ. Основное предположение: $L(\pm i) = 0$, $L(ki) \ne 0$, $k \ne 1$, $k \in \mathbb{Z}$, близкий случай $L(\pm ni) = 0$ для натурального $n > 1$ не рассматривается.

Задача о неограниченных множествах решений операторных уравнений с параметром была впервые исследована топологическими методами М.А. Красносельским в 1950-х годах в книге [1], там введено понятие асимптотической точки бифуркации (см. также [2]) и предложен общий принцип смены индекса, позволяющий устанавливать наличие неограниченных множеств решений. Если в окрестности некоторого значения параметра происходит вырождение нечетной кратности линейной части системы, то происходит смена индекса на бесконечности и это значение является асимптотической точкой бифуркации. У уравнения (1) (и эквивалентных ему операторных уравнений) происходит вырождение кратности два; для анализа необходимо использовать свойства ограниченной нелинейности f. Неограниченные множества решений могут существовать в условиях, когда принцип смены индекса неприменим. Для потенциальных задач множества решений не ограничены и при четной кратности вырождения линейной части [3]. Вообще говоря, множество $\mathfrak{P}_\varepsilon$ является объединением конечного числа (двух) связных неограниченных непрерывных ветвей [2].

Уравнение (1) при $\lambda = \lambda_0$ (без параметра) впервые было исследовано в [4]. Далее результаты развиты разнообразными методами (библиографию и часть результатов см. в [5, 6]). Для уравнения (1) с нелинейностью вида $b(t) + f(x)$, удовлетворяющей условию насыщения $f(x) \to \pm\bar{f} \ne 0$, $x \to \pm\infty$, и с четными многочленами L и M в работе [7] исследована структура множества 2π-периодических решений, определено количество неограниченных ветвей. Если

$$\bar{b} = \int_0^{2\pi} b(t)e^{ti}dt \ne 0,$$

то существуют ровно две непрерывные ветви 2π-периодических решений, уходящих при $\lambda \to \lambda_0$ к бесконечности. Если $\bar{b} = 0$, то количество неограниченных ветвей не меньше 6. Приведен алгоритм подсчета количества ветвей и для более общих случаев, однако многочлен $\mathcal{L}$ всегда четный и нелинейность f обязательно имеет вид $b(t; \lambda) + f(x; \lambda)$. В [8] близкая конструкция применена для исследования существования и оценки количества неограниченных ветвей периодических колебаний в системах с гистерезисной нелинейностью Прейсаха. Для уравнений с нелинейностями, зависящими от времени (например, вида $a(t)f(x)$), или с многочленом $\mathcal{L}$ со слагаемыми нечетной степени, техника из [7, 8] неприменима. Новый

Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича Российской Академии наук, Москва

общий подход, основанный на точных асимптотиках проекций нелинейностей, позволяет проанализировать все дважды вырожденные случаи для нелинейностей с насыщением максимально общего вида.

Пусть B – функциональное пространство, состоящее из 2π-периодических функций (например, $B = L^2$). Назовем пару (x, λ), составленную из функции $x \in B$ и значения параметра λ, расширенным решением уравнения (1), если x удовлетворяет (1) при этом значении λ. Пусть $\mathfrak{M}_B$ – множество всех расширенных решений (x, B), $x \in B$. Значение λ_0 параметра назовем асимптотической точкой бифуркации в В, если для любой окрестности $U(\lambda_0)$ точки λ_0 множество $\{x: (x, \lambda) \in \mathfrak{M}_B, \lambda \in U(\lambda_0)\}$ не ограничено по норме B.

Положим $Z_\rho = \{(x, \lambda): \|x\|_B < \rho, \lambda \in \Lambda\}$. Следуя [1, 2], назовем множество $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}_B$ (состоящее из расширенных решений) неограниченной непрерывной ветвью, если при любом достаточно большом $\rho > 0$ на границе каждого содержащего Z_ρ ограниченного множества $\Gamma \subset B \times \mathbb{R}$ есть хотя бы одна точка $(x, \lambda) \in \mathfrak{N}\backslash Z_\rho$. Если $\mathfrak{N}$ – неограниченная ветвь и при $\lambda \neq \lambda_0$ у дифференциального многочлена $\mathcal{L}$ нет корней вида ki при целых k, то

$$\lim_{\rho \to \infty} \sup_{(x, \lambda) \in \mathfrak{N}\backslash Z_\rho} |\lambda - \lambda_0| = 0 \qquad (2)$$

и λ_0 является асимптотической точкой бифуркации. Неограниченную ветвь $\mathfrak{N}$ назовем направленной при $\lambda \to \lambda_0$, если верно соотношение (2) и

$$\lim_{\rho \to \infty} \sup_{(x, \lambda) \in \mathfrak{N}\backslash Z_\rho} \left\| \frac{x}{\|x\|_B} - e \right\|_B = 0;$$

вектор (функцию) e назовем предельным для $\mathfrak{N}$. Направленная неограниченная непрерывная ветвь может не быть непрерывной кривой в пространстве $B \times \mathbb{R}$.

НЕВЫРОЖДЕННЫЙ СЛУЧАЙ

Предполагаем что функция f непрерывна по совокупности переменных $t, x \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \Lambda$, глобально ограничена и периодична по t с периодом 2π:

$$f(t + 2\pi, x; \lambda) = f(t, x; \lambda), \quad |f(t, x; \lambda)| \le C_F$$

и допускает представление

$$f(t, x; \lambda) = b(x; \lambda) + a(t; \lambda)\operatorname{sign}(x) + g(t, x; \lambda), \qquad (3)$$

причем нелинейность g равномерно мала на бесконечности:

$$\lim_{|x| \to \infty} \sup_{t \in [0, 2\pi];\, \lambda \in \Lambda} |g(t, x; \lambda)| = 0.$$

Если $a \not\equiv 0$, то g имеет разрыв в нуле, компенсирующий скачок функции $\operatorname{sign}(x)$. Каждая функция $f(t, x; \lambda)$, удовлетворяющая равномерному условию насыщения

$$\lim_{x \to \pm\infty} \sup_{t \in [0, 2\pi];\, \lambda \in \Lambda} \left| f(t, x; \lambda) - f^{\pm}(t; \lambda) \right| = 0,$$

имеет вид (3) при $b(t; \lambda) = \frac{1}{2}(f^+(t; \lambda) + f^-(t; \lambda))$ и $a(t; \lambda) = \frac{1}{2}(f^+(t; \lambda) - f^-(t; \lambda))$.

Пусть $M(\pm i, \lambda_0) \neq 0$. Поскольку корней вида $\pm ki$ $(k \neq 1)$ у многочлена L нет, то при достаточно малых $|\lambda - \lambda_0| \neq 0$ у многочлена $\mathcal{L}$ нет корней вида ki при целых k, будем предполагать, что их нет при всех $\lambda \in \Lambda$, $\lambda \neq \lambda_0$. Условие $M(\pm i; \lambda_0) \neq 0$ не нарушает общности: если $M(\pm i; \lambda_0) = 0$, то надо выбирать другой параметр.

Рассмотрим непрерывную π-периодическую по φ функцию

$$V(\varphi; \lambda) = \int_0^{2\pi} e^{(t+\varphi)i} a(t; \lambda) \operatorname{sign}(\sin(t + \varphi))dt \equiv$$
$$\equiv \int_0^{2\pi} e^{ti} a(t - \varphi; \lambda) \operatorname{sign}(\sin t)dt.$$

Пусть $a(t; \lambda) = a_1(t; \lambda) + a_2(t; \lambda)$, где $a_1(t; \lambda) = -a_1(t + \pi; \lambda)$, $a_2(t; \lambda) = a_2(t + \pi; \lambda)$; в a_1 собраны все гармоники с нечетными номерами, а в a_2 – с четными. Пусть

$$a_2(t; \lambda) = \alpha(2t; \lambda),$$

$$\alpha(t; \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(\lambda) \sin(kt + \psi_k),$$

для определенности пусть $\psi_0 = \frac{\pi}{2}$. Справедлива формула

$$V(\varphi; \lambda) = 4\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k(\lambda)}{4k^2 - 1}(2k\cos(2k\varphi - \psi_k) + i\sin(2k\varphi - \psi_k));$$

нечетные гармоники функции $a(t; \lambda)$ (из них составлена функция a_1) в формулу для V не входят. Положим при каждом $\lambda \in \Lambda$

$$\bar{b}(\lambda) = \int_0^{2\pi} e^{it} b(t; \lambda)dt,$$

$$\rho(\varphi) = \operatorname{Re}(M(i; \lambda_0)(e^{\varphi i}\bar{b}(\lambda_0) + V(\varphi; \lambda_0))).$$

Т е о р е м а 1. *Пусть функция* ρ *не равна нулю тождественно. Если* $|\rho| > 0$, *то все* 2π-*периодические решения* x_λ *уравнения* (1) *допускают общую априорную оценку. Каждому робастному*[1] *нулю* φ_* *функции* ρ *соответствует направленная неограниченная ветвь с пределом* $\sin(t + \varphi_*)$.

В теореме 1 приведены условия, использующие только главную однородную часть $b(t; \lambda) + a(t; \lambda)\mathrm{sign}(x)$ функции f. Теорема 1 получена автором совместно с Д.И. Рачинским, она объясняет и обосновывает происхождение и естественность дальнейших предположений.

ВЫРОЖДЕННЫЙ СЛУЧАЙ

Далее в сообщении мы предполагаем, что основное условие теоремы 1 – функция ρ не равна нулю тождественно – не выполняется. Простые выкладки показывают, что $\rho \equiv 0$, если и только если одновременно выполнены три условия:

$$\bar{b}(\lambda_0) = 0; \quad \alpha_0(\lambda_0)\mathrm{Im}M(i; \lambda_0) = 0; \quad \alpha_k(\lambda_0) = 0 \text{ при } k = 1, 2, \ldots; \tag{4}$$

они предполагаются выполненными во всех теоремах этого раздела.

Если $\alpha_0(\lambda_0) = 0$, то функция a антипериодична. В частности, сюда включается случай $a(t; \lambda_0) \equiv 0$, т.е. f имеет вид $b(t; \lambda) + g(t, x; \lambda)$, где $g \to 0$ при $x \to \infty$. При $\alpha_0(\lambda_0) = 0$ существенно различаются случаи $\mathrm{Re}M(i; \lambda_0) \neq 0$ (теорема 2) и $\mathrm{Re}M(i; \lambda_0) = 0$ (теорема 3).

Случай $\alpha_0(\lambda_0) \neq 0$ рассмотрен в теореме 4, она обобщает часть результатов работы [7], там методы используют четность многочлена $\mathscr{L}$ и равенство $a \equiv \mathrm{const}$. Возможность случая $\alpha_0(\lambda_0) \neq 0$ определяется тем, что нулевая гармоника комплекснозначной функции V чисто мнимая.

Пусть g липшицева по t и пусть при $t, s, x \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \Lambda$ справедливы оценки

$$|g(t, x; \lambda)| \le G(|x|),$$
$$|g(t, x; \lambda) - g(s, x; \lambda)| \le G(|x|)|t - s|,$$

где $G\colon [0, \infty] \to (0, \infty)$ непрерывна, монотонно убывает и удовлетворяет условию

$$\int^{\infty} G(u)du < \infty. \tag{5}$$

Пусть функции a, b и g (а следовательно, и f) липшицевы по переменной λ:

$$|b(t; \lambda_1) - b(t; \lambda_0)|, |a(t; \lambda_1) - a(t; \lambda_0)|,$$
$$|g(t, x; \lambda_1) - g(t, x; \lambda_0)| \le K|\lambda_1 - \lambda_0|.$$

[1] Нуль функции назовем робастным, если он изолирован и в его окрестности функция меняет знак.

Условие (5) означает достаточно быструю сходимость функции G к нулю на бесконечности. Ранее (см. [9]) изучалась лишь противоположная ситуация, когда функция g, наоборот, убывает квалифицированно медленно и сохраняет знак: выполнены условия

$$g(t, x; \lambda)\,\mathrm{sign}(x) \ge \varphi(|x|), \quad \int^{\infty} \varphi(u)du = \infty.$$

Для случая $a \equiv 0$ близкие условия рассматривались и ранее (см. [6] и имеющуюся там библиографию).

В силу условий (4) в правой части уравнения

$$L(p)x = b(t; \lambda_0) + a(t; \lambda_0)\,\mathrm{sign}(\sin(t + \varphi)) - \frac{4}{\pi}\alpha_0(\lambda_0)\sin(t + \varphi) \tag{6}$$

стоит функция, не имеющая первых гармоник к ряду Фурье. В силу условия $L(ki) \neq 0$ при целых $k \neq \pm 1$ и альтернативы Фредгольма при каждом φ существует единственное 2π-периодическое решение h_φ уравнения (6), не содержащее гармоники $\sin t$ и $\cos t$. По решению h_φ построим функции $\Theta = \Theta_1 + \Theta_2$, где

$$\begin{gathered}\Theta_1(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} (g(-\varphi, u; \lambda_0) - g(\pi - \varphi, u; \lambda_0))du, \\ \Theta_2(\varphi) = 2a(-\varphi; \lambda_0)h_\varphi(-\varphi) - 2a(\pi - \varphi; \lambda_0)h_\varphi(\pi - \varphi),\end{gathered} \tag{7}$$

и $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$, где

$$\Psi_1(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} u(g(-\varphi, u + h_\varphi(-\varphi); \lambda_0) + g(\pi - \varphi, u + h_\varphi(\pi - \varphi); \lambda_0))du,$$

$$\Psi_2(\rho) = -a(-\varphi; \lambda_0)h_\varphi^2(-\varphi) - a(\pi - \varphi; \lambda_0)h_\varphi^2(\pi - \varphi).$$

Т е о р е м а 2. *Пусть* $\alpha_0(\lambda_0) = 0$, $\mathrm{Re}M(i; \lambda_0) \neq 0$ *и пусть антипериодическая функция* Θ *не равна нулю тождественно.*

Тогда каждый ее робастный нуль φ_* *порождает направленную неограниченную ветвь* 2π-*периодических решений. Если дополнительно*

$$\int^{\infty} uG(u)du < \infty, \tag{8}$$

то эта ветвь имеет асимптотику $x_r(t) = r\sin(t + \varphi_r) + h_{\varphi_*}(t) + o(1)$,

$$\lambda_r = \lambda_0 + \frac{\Psi(\varphi_*)}{\pi \mathrm{Re} M(i;\lambda_0)} r^{-3} + o(r^{-3}),$$
$$\varphi_r = \varphi_* + o(1).$$

В условиях теоремы 2 каждому отрезку, на котором функция Θ меняет знак (необязательно окрестности робастного нуля), соответствует (возможно, не направления) неограниченная непрерывная ветвь 2π-периодических решений.

Поскольку Θ антипериодична, то ее нули существуют и количество робастных нулей четно. Теорема не работает для функции $f(t, x; \lambda) = b(t; \lambda) + g(x; \lambda)$, в этом случае $a(t; \lambda) \equiv 0$ и $\Theta_1 \equiv \Theta_2 \equiv \Theta \equiv 0$.

Другой пример: $f(t, x; \lambda) = b(t) + a(t)f(x)$, $f(x) = \mathrm{sign}(x) + g(x)$. Тогда

$$\Theta(\varphi) = 2a(-\varphi)\gamma(\varphi),$$
$$\gamma(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)du + h_\varphi(-\varphi) + h_\varphi(\pi - \varphi).$$

У функции Θ в этом случае есть по крайней мере два нуля антипериодической функции a плюс сколько-то нулей сомножителя γ. Если число

$$\int_0^{2\pi} \gamma(\varphi)d\varphi = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} g(u)du + \int_0^{2\pi}(h_\varphi(-\varphi) + h_\varphi(\pi-\varphi))d\varphi$$

достаточно мало, то у этого сомножителя есть по крайней мере четыре нуля (h_φ не содержит первой гармоники), у функции Θ есть по крайней мере шесть нулей.

Заключение теоремы 2 сохраняет силу, если f имеет вид (3) только при $\lambda = \lambda_0$.

Пусть $\alpha_0(\lambda_0) = \mathrm{Re}M(i; \lambda_0) = 0$. Здесь амплитуды 2π-периодических решений имеют порядок не $|\lambda - \lambda_0|^{-1/3}$, как в теореме 2, а порядок $|\lambda - \lambda_0|^{-1/2}$.

Т е о р е м а 3. *Пусть* $\bar{b}(\lambda) = \bar{b}'(\lambda - \lambda_0) + o(\lambda - \lambda_0)$ *при* $\bar{b}' \neq 0$. *Пусть*

$$|g(t, x; \lambda) - g(t, x; \lambda)| \le G(|x|)|\lambda - \lambda_0|, \quad x, t \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \Lambda, \tag{9}$$

и пусть G *удовлетворяет* (8).

Тогда каждый робастный нуль φ_* *функции*

$$\Phi(\varphi) = \mathrm{Im}(\bar{b}'e^{\varphi i})\Theta(\varphi) + \pi\Psi(\varphi)\mathrm{Im}M(i; \lambda_0)$$

определяет направленную неограниченную ветвь 2π-*периодических решений, она имеет асимптотику* $x_r(t) = r\sin(t + \varphi_r) + h_{\varphi_*}(t) + o(1)$,

$$\lambda_r = \lambda_0 + \frac{\Theta(\varphi_*)}{\pi \mathrm{Im} M(i;\lambda_0)} r^{-2} + o(r^{-2}),$$
$$\varphi_r = \varphi_* + o(1).$$

В условиях теорем 2 и 3 функции Θ_2 и Ψ_2 определяются равенствам

$$\Theta_2(\varphi) = 2a(-\varphi; \lambda_0)(h_\varphi(-\varphi) + h_\varphi(\pi - \varphi)),$$
$$\Psi_2(\varphi) = -a(-\varphi; \lambda_0)(h_\varphi^2(-\varphi) - h_\varphi^2(\pi - \varphi)).$$

Пусть $\alpha_0(\lambda_0) \neq 0$, $\mathrm{Im}M(i; \lambda_0) = 0$. Теперь функция а не антипериодическая: $a(t; \lambda_0) = \alpha_0(\lambda_0) + a_1(t; \lambda_0)$. Пусть

$$\mathrm{Im}M(i; \lambda) = (\lambda - \lambda_0)M'_{\mathfrak{I}} + o(\lambda - \lambda_0),$$
$$\bar{b}(\lambda) = \bar{b}'(\lambda - \lambda_0) + o(\lambda - \lambda_0).$$

По функциям (7) определим функцию

$$\Xi(\varphi) = \Theta_1(\varphi) + \Theta_2(\varphi) + \mathrm{Re}(\bar{b}'e^{\varphi i})\frac{4\alpha_0(\lambda_0)}{\pi M(i;\lambda_0)} - \frac{16M'_{\mathfrak{I}}\alpha_0^2(\lambda_0)}{\pi M^2(i;\lambda_0)}.$$

Т е о р е м а 4. *Пусть* $M(i; \lambda_0)\alpha_0(\lambda_0) = \mathrm{Re}M(i; \lambda_0)\alpha_0(\lambda_0) \neq 0$. *Пусть выполнено условие Липшица* (9). *Пусть функция* Ξ *не равна нулю тождественно*.

Тогда каждый робастный нуль φ_* *функции* Ξ *порождает направленную неограниченную ветвь* 2π-*периодических решений* $x_r(t) = r\sin(t + \varphi_r) + h_{\varphi_*}(t) + o(1)$,

$$\lambda_r = \lambda_0 + \frac{4\alpha_0(\lambda_0)}{\pi M(i;\lambda_0)} r^{-1} + o(r^{-1}), \quad \varphi_r = \varphi_* + o(1).$$

Если $\Xi \neq 0$, то множество 2π-периодических решений ограничено.

Приведем п р и м е р. Пусть $\mathrm{Im}M(i; \lambda) = 0$ и $f(t, x; \lambda) = b(t) + f(x)$, $\bar{b} = 0$ и f удовлетворяет условию насыщения $f \to \pm\bar{f} \neq 0$ при $x \to \pm\infty$. Тогда количество неограниченных ветвей в окрестности точки $\lambda = \lambda_0$ не менее, чем количество робастных нулей антипериодической функции $h_\varphi(-\varphi) - h_\varphi(\pi - \varphi)$, не содержащей первой гармоники. В силу теоремы Штурма–Гурвица (см., например, задачу 1996-5 в [10]) эта функция имеет не менее шести перемен знака, каждая из которых, вообще говоря, соответствует ее робастному нулю.

Функция $h_\varphi(-\varphi) - h_\varphi(\pi - \varphi)$ в виде ряда Фурье, построенного по ряду Фурье функции b, использовалась в [7] для случая $\mathrm{Im}\mathcal{L}(i; \lambda) \equiv 0$.

ПРОЕКЦИИ НЕЛИНЕЙНОСТЕЙ

Здесь сформулировано вспомогательное утверждение об асимптотиках проекций нелинейностей, оно представляют самостоятельный интерес и используется при исследовании различных вырожденных задач о периодических колебаниях.

Пусть на $[t_1, t_2]$ определена скалярная функция $e \in C^1$, у которой есть единственный нуль $t_0 \in (t_1, t_2)$. Пусть

$$e(t_0) = 0, \quad e(t) = (t - t_0)(e' + \beta(t)),$$
$$e' \neq 0, \quad |\beta'(t)| \leq c_\beta, \quad |\beta(t)| \to 0, \quad t \to t_0.$$

Зафиксируем целое неотрицательное целое неотрицательное k, при доказательствах теорем используются случаи $k = 0$ и $k = 1$.

Рассмотрим множество $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}(k, \alpha, \eta_q)$ ($\alpha(t) \to 0$ при $t \to t_0$) всех непрерывных скалярных 2π-периодических функций q, удовлетворяющих условию

$$\left|q(t)(t - t_0)^{-k} - q^{(k)}\right| \leq \alpha(t), \quad \alpha(t) \to 0, \quad t \to t_0,$$

при некотором $q^{(k)} \in \mathbb{R}$, $|q^{(k)}| \leq \eta_q$. Очевидно если $k = 0$, то $q^{(0)} = q(t_0)$; если $k = 1$, то $q(t_0) = 0$ и $q^{(1)} = q'(t_0)$ и т.д.

Зададимся убывающей функцией G: $[0, \infty) \to (0, \infty)$, удовлетворяющей

$$\int^{\infty} u^k G(u) du < \infty. \qquad (10)$$

При $k = 0$ условие (10) совпадает с (5), при $k = 1$ условие (10) – с (8). Построим по функции G множество $\mathcal{G} = \mathcal{G}(G)$ функций g: $[t_1, t_2] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для которых

$$|g(t, x)| \leq G(|x|),$$
$$|g(t, x) - g(s, x)| \leq |t - s| G(|x|).$$

Оценим при всех $g \in \mathcal{G}$, $q \in \mathfrak{Q}$ интегралы

$$I_0(r) = I_0(r; q, r, h, g) = \int_{t_1}^{t_2} q(t) g(t, re(t) + h(t)) dt,$$

$$I_1(r) = I_1(r; q, r, h) = $$
$$= \int_{t_1}^{t_2} q(t)(\operatorname{sign}(re(t) + h(t)) - \operatorname{sign}(e(t))) dt.$$

Т е о р е м а 5. *При каждом* $\eta, \eta_q > 0$ *справедливы соотношения*

$$\lim_{r \to \infty} \sup_{g \in \mathcal{G};\, q \in \mathfrak{Q};\, \|h\|_{C^1} \leq \eta} \Bigg| r^{k+1} I_0(r) - \operatorname{sign}(e')(e')^{-k-1} q^{(k)} \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} u^k g(t_0, u + h(t_0)) du \Bigg| = 0,$$

$$\lim_{r \to \infty} \sup_{q \in \mathfrak{Q};\, \|h\|_{C^1} \leq \eta} \times$$
$$\times \left| r^{k+1} I_1(r) - \frac{2q^{(k)} \operatorname{sign}(-e')}{k+1} \left(\frac{-h(t_0)}{e'}\right)^{k+1} \right| = 0.$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 06-01-00256 и 06-01-72552).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красносельский М.А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М.: Гостехтеориздат, 1956.
2. *Красносельский М.А., Забрейко П.П.* Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука, 1975.
3. *Schmitt K., Wang Z.Q.* // Different. Integral Equats. 1991. V. 4. № 5. P. 933–944.
4. *Lazer A.C., Leach D.E.* // Ann. mat. pura ed appl. 1969. V. 82. P. 49–68.
5. *Mawhin J., Willem M.* Critical Point Theory and Hamiltonian Systems.N.Y.: Springer, 1989.
6. *Красносельский А.М.* Асимптотика нелинейностей и операторные уравнения. М.: Наука, 1992.
7. *Красносельский А.М., Рачинский Д.И.* // Функцион. анализ и его прил. 2005. Т. 39. № 3. 37–53.
8. *Krasnosel'skii A.M., Rachinskii D.I.* // J. Phys. Conf. Ser. 2005. V. 22. P. 93–102.
9. *Krasnosel'skii A.M., Mawhin J.* // Discrete Contin. Dyn. Syst. 1995. V. 1. № 2. P. 207–216.
10. *Арнольд В.И.* Задачи Арнольда. М., Фазис, 2000.