ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2009, том 45, № 3, с. 334–353

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.42.926

НЕОГРАНИЧЕННЫЕ ВЕТВИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

© 2009 г. А. М. Красносельский

Изучаются квазилинейные обыкновенные дифференциальные уравнения старшего порядка, зависящие от скалярного параметра λ и состоящие из стационарной главной на бесконечности линейной части и периодической с общим периодом при всех λ нелинейности с насыщением. Предполагается, что при некотором значении λ_0 параметра линейная часть становится резонансной. Если старшие нелинейные слагаемые (положительно-однородные нулевого порядка) в определенном смысле не вырождены, то они определяют существование и количество неограниченных ветвей периодических решений при λ, близких к λ_0. Полностью исследуется случай "двойного вырождения", когда вырождаются и линейные, и старшие нелинейные слагаемые, а основную роль играют члены, убывающие к нулю на бесконечности. Для их учета разработан новый метод вычисления точных асимптотик проекций ограниченных функциональных нелинейностей на двумерное резонансное подпространство.

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается квазилинейное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\mathcal{L}(p;\lambda)x = f(t,x;\lambda), \quad p = \frac{d}{dt}, \tag{1}$$

с параметром $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}$ (Λ – некоторый фиксированный промежуток). Здесь $\mathcal{L}$ – вещественный многочлен переменной p, нелинейная правая часть непрерывная по совокупности переменных, равномерно ограниченная: $|f| \le C_F$ и периодическая по t с общим для всех λ периодом 2π. Уравнение (1) изучается при значениях параметра из малой окрестности некоторой точки $\lambda_0 \in \operatorname{Int}\Lambda$. Если у многочлена $L(p) = \mathcal{L}(p;\lambda_0)$ нет корней вида ki при целых k, то при достаточно малых $\varepsilon > 0$ ограничено множество $\mathfrak{P}_\varepsilon$ всех 2π-периодических решений уравнения $\mathcal{L}x = f$ при всех $|\lambda-\lambda_0| \le \varepsilon$. Если у многочлена L есть корни указанного вида, то $\mathfrak{P}_\varepsilon$ может быть неограниченным при любом ε; в работе приводятся условия неограниченности множества $\mathfrak{P}_\varepsilon$ и исследуется его структура (количество связных неограниченных ветвей решений и их асимптотики).

Всюду предполагается, что $\mathcal{L}(p;\lambda) = L(p) + (\lambda-\lambda_0)M(p;\lambda)$, коэффициенты многочленов

$$L(p) = p^\ell + a_1p^{\ell-1} + \ldots + a_\ell, \quad M(p;\lambda) = b_0(\lambda)p^m + b_1(\lambda)p^{m-1} + \ldots + b_m(\lambda), \quad \ell > m,$$

не зависят от t и коэффициенты многочлена M липшицевы по λ.

Основным при изучении уравнения $L(p)x + (\lambda-\lambda_0)M(p;\lambda)x = f(t,x;\lambda)$ является предположение о том, что многочлен L имеет пару простых корней $\pm i$ и не имеет других корней вида ki, $k \in \mathbb{Z}$. Аналогичный случай $L(\pm ni) = 0$ для натурального $n > 1$ не содержит качественно новых идей и не рассматривается. Предположение $L(\pm i) = 0$ дополняется условием $M(\pm i;\lambda_0) \ne 0$. Тогда при достаточно малых $|\lambda-\lambda_0| \ne 0$ у многочлена $\mathcal{L}$ нет корней вида ki при целых k, и будем считать, что их нет при всех $\lambda \in \Lambda$, $\lambda \ne \lambda_0$. Условие $M(\pm i;\lambda_0) \ne 0$ не нарушает общности: если $M(\pm i;\lambda_0) = 0$, то надо выбирать другой параметр.

Задача о неограниченных множествах решений операторных уравнений с параметром была впервые исследована топологическими методами М.А. Красносельским в 50-х годах прошлого века в монографии [1], было введено понятие асимптотической точки бифуркации (см. также [2]). Был предложен общий принцип смены индекса, позволяющий устанавливать наличие неограниченных множеств решений. При его использовании бывает достаточно линейной части системы. Если при изменении параметра происходит ее вырождение нечетной кратности, то соответствующее значение параметра всегда является асимптотической точкой бифуркации. У уравнения (1) (и у эквивалентных ему операторных уравнений) в сделанных предположениях происходит двукратное вырождение; для анализа необходимо использовать свойства ограниченной нелинейности f.

Неограниченные множества 2π-периодических решений могут существовать в условиях, когда принцип смены индекса неприменим. Для потенциальных задач множества решений не ограничены и при четной кратности вырождения линейной части [3]. В естественных предположениях множество $\mathfrak{P}_\varepsilon$ является объединением конечного числа связных неограниченных непрерывных ветвей (определение см. в [2], необходимая переформулировка приведена в п. 2.2).

Для уравнения (1) с четными многочленами L и M и нелинейностью вида $b(t)+f(x)$, удовлетворяющей условию насыщения

$$f(x)\to\pm\bar f\neq 0,\quad x\to\pm\infty, \tag{2}$$

в [4] исследована ограниченность множества 2π-периодических решений, даны оценки количества ветвей. В общем положении, когда

$$\bar b=\int\limits_0^{2\pi} b(t)e^{ti}\,dt\neq 0,$$

существуют ровно две непрерывные ветви 2π-периодических решений, уходящих при $\lambda\to\lambda_0$ в бесконечность. Если $\bar b=0$, то количество неограниченных ветвей не меньше шести. Приведен алгоритм подсчета количества ветвей решений и для более общих случаев, однако многочлен $\mathcal{L}$ всегда четный и нелинейность f обязательно имеет вид $b(t;\lambda)+f(x;\lambda)$.

В работе [5] близкая конструкция применена для исследования существования и оценки количества неограниченных ветвей периодических колебаний в системах с гистерезисной нелинейностью Прейсаха [6]; при $\bar b=0$ в ответах важную роль играет "ширина" петли гистерезиса. Если петля широкая, то неограниченных ветвей решений нет, если петля узкая, то снова количество неограниченных ветвей не меньше шести. Для нелинейностей, зависящих от времени (например, вида $a(t)f(x)$), или для многочленов L и M со слагаемыми нечетной степени основная техника, использованная в [4, 5], неприменима. В настоящей работе предложен более общий подход, основанный на точных асимптотиках проекций нелинейностей (см. п. 4.4). В результате удалось провести классификацию всех дважды вырожденных случаев для нелинейностей с насыщением максимально общего вида. Оказалось, что возможны три существенно различных случая с различной скоростью возрастания амплитуды периодических решений к бесконечности при $\lambda\to\lambda_0$.

Уравнение $L(p)x=b(t)+f(x)$ (без параметра) с нелинейностью f, удовлетворяющей условию (2), впервые исследовано при условии вырождения линейной части в работе [7]; дальнейшую библиографию и часть результатов см. в [8, 9]. В [7] установлено так называемое условие Ландесмана–Лазера $|\bar b|<4|\bar f|$ существования по крайней мере одного 2π-периодического решения. Если $|\bar b|<4|\bar f|$, то индекс на бесконечности некоторого тесно связанного с уравнением $L(p)x=f(t,x)$ бесконечномерного векторного поля равен ±1, если $|\bar b|>4|\bar f|$, то этот индекс равен нулю.

При исследовании вырожденных на бесконечности в линейном приближении задач о периодических решениях использовались (А. Амброзетти, Н. Данцер, А.М. Красносельский, А. Лазер, Ж. Мавен, С. Фучик, П. Хесс и др.) проекции

$$\mathcal{P}(r,h,\varphi)=\int\limits_0^{2\pi}\sin(t+\varphi)f(t,r\sin t+h(t))\,dt$$

нелинейностей на двумерное подпространство функций вида $r\sin(t+\varphi)$. Для нелинейностей f, удовлетворяющих условию насыщения

$$\lim_{x\to\pm\infty}\sup_{t\in[0,2\pi]}|f(t,x)-f^{\pm}(t)|=0,$$

эти проекции содержат старшие слагаемые, которые удается выписать в явной форме. Эти слагаемые определяют ответы на многие вопросы о периодических решениях. Простейшие асимптотики вида $\mathcal{P}(r,h,\varphi)=p_1(\varphi)+o(1)$ явно или неявно использовались во всех работах о вынужденных периодических колебаниях в вырожденных в линейном приближении системах. Одно из основных наблюдений настоящей работы, применимое не только к задачам о бифуркациях, это то, что проекции $\mathcal{P}$ имеют вид $\mathcal{P}(r,h,\varphi)=p_1(\varphi)+r^{-\gamma}p_2(\varphi)+o(r^{-\gamma})$ равномерно по h при некоторых p_j и γ, причем p_2 и γ эффективно вычислимы. Величины γ, определяющие скорость убывания малых слагаемых, могут быть различными; они не определяются скоростью насыщения на бесконечности нелинейности f.

Было бы интересно хоть для каких-то случаев выяснить, как выписывать слагаемые следующего порядка, т.е. как получать разложения вида $\mathcal{P}(r,h,\varphi)=p_1(\varphi)+r^{-\gamma}p_2(\varphi)+r^{-\gamma_1}p_3(\varphi)+o(r^{-\gamma_1})$, $\gamma_1>\gamma$. Для сравнения отметим, что для задач в окрестности нуля трудности возникают только если уравнения содержат негладкие нелинейности, в гладком случае все определяется разложениями типа тейлоровских.

В п. 2.1 сформулированы общие предположения об уравнении, в п. 2.2 – необходимые определения. Далее, в п. 2.3 приведено утверждение (А.М. Красносельский–Д.И. Рачинский) о существовании-несуществовании неограниченных множеств 2π-периодических решений уравнений (1) в случае невырожденных главных слагаемых в правой части. Это утверждение объясняет основные предположения из пп. 2.4 и 2.5.

В § 3 сформулированы основные результаты. В п. 3.4 выписаны предельные скалярные уравнения, возникающие при доказательствах теорем. Именно эти уравнения во многом определяют формулировки теорем и асимптотику неограниченных ветвей 2π-периодических решений.

В § 4 содержится общая часть доказательств всех теорем, в частности, в п. 4.3 приведены представляющие самостоятельный интерес общие технические леммы, из которых следуют асимптотики проекций $\mathcal{P}$ нелинейностей, возникающие в разнообразных задачах о периодических колебаниях. Эти леммы, доказанные в п. 4.5, являются основой асимптотических разложений проекций $\mathcal{P}$ нелинейностей с насыщением. Следствия этих лемм для задачи о вынужденных колебаниях приведены в п. 4.4. В § 5 приведены некоторые части доказательства отдельных теорем.

§ 2. ОБЩИЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ

2.1. Предположения о нелинейности. Всюду предполагается, что функция f непрерывна по совокупности переменных $t,x\in\mathbb{R}$, $\lambda\in\Lambda$, глобально ограничена и периодична по t с периодом 2π при всех λ:

$$f(t+2\pi,x;\lambda)=f(t,x;\lambda),\quad |f(t,x;\lambda)|\le C_F,\quad t,x\in\mathbb{R},\quad \lambda\in\Lambda. \tag{3}$$

Всюду, если специально не оговаривается противное, считается, что*)

$$f(t,x;\lambda)=b(t;\lambda)+a(t;\lambda)\operatorname{sign}(x)+g(t,x;\lambda),\quad t\in[0,2\pi],\quad x\in\mathbb{R},\quad \lambda\in\Lambda, \tag{4}$$

причем нелинейность g мала на бесконечности:

$$\lim_{|x|\to\infty}\sup_{t\in[0,2\pi];\ \lambda\in\Lambda}|g(t,x;\lambda)|=0. \tag{5}$$

*) Естественно, все функции a, b, g периодичны по t с периодом 2π.

Если $a \not\equiv 0$, то g имеет разрыв в нуле, компенсирующий скачок функции $\operatorname{sign}(x)$. Каждая функция $f(t,x;\lambda)$, удовлетворяющая равномерному условию насыщения

$$\lim_{x\to\pm\infty} \sup_{t\in[0,2\pi];\ \lambda\in\Lambda} |f(t,x;\lambda) - f^{\pm}(t;\lambda)| = 0, \tag{6}$$

допускает представление (4) при $b(t;\lambda) = (1/2)(f^{+}(t;\lambda) + f^{-}(t;\lambda))$ и $a(t;\lambda) = (1/2)(f^{+}(t;\lambda) - - f^{-}(t;\lambda))$.

2.2. Определения. Пусть B – нормированное пространство, состоящее из 2π-периодических функций (например, $B = L^2$). Назовем пару (x,λ), составленную из функции $x \in B$ и значения параметра λ, расширенным решением уравнения (1), если x удовлетворяет (1) при этом значении λ. Пусть $\mathfrak{M}$ – множество всех расширенных решений (x,λ). Значение λ_0 параметра назовем *асимптотической точкой бифуркации в* B, если для любой окрестности $U(\lambda_0)$ точки λ_0 множество $\{x:\ (x,\lambda)\in\mathfrak{M},\ \ \lambda\in U(\lambda_0)\}$ не ограничено по норме B.

Положим $Z_\rho = \{(x,\lambda):\ \|x\|_B < \rho,\ \ \lambda\in\Lambda\}$. Следуя работам [1, 2], назовем множество $\mathfrak{N}\subset\mathfrak{M}$ (состоящее из расширенных решений) *неограниченной непрерывной ветвью* 2π*-периодических решений,* если при любом достаточно большом $\rho > 0$ на границе каждого содержащего Z_ρ ограниченного множества $\Gamma\subset B\times\mathbb{R}$ есть хотя бы одна точка $(x,\lambda)\in\mathfrak{N}\setminus Z_\rho$. Если $\mathfrak{N}$ – неограниченная непрерывная ветвь 2π-периодических решений и при $\lambda\neq\lambda_0$ у дифференциального многочлена $\mathcal{L}$ нет корней вида ki при целых k, то

$$\lim_{\rho\to\infty} \sup_{(x,\lambda)\in\mathfrak{N}\setminus Z_\rho} |\lambda-\lambda_0| = 0, \tag{7}$$

поэтому λ_0 является асимптотической точкой бифуркации. Ветвь $\mathfrak{N}$ назовем *направленной при* $\lambda\to\lambda_0$, если верно соотношение (7) и

$$\lim_{\rho\to\infty} \sup_{(x,\lambda)\in\mathfrak{N}\setminus Z_\rho} \|x/\|x\|_B - e\|_B = 0;$$

вектор (функцию) e назовем *предельным* для $\mathfrak{N}$. Направленная неограниченная непрерывная ветвь при дополнительных предположениях о гладкости является непрерывной кривой в пространстве $B\times\mathbb{R}$.

2.3. Невырожденные старшие нелинейные слагаемые. В этом пункте формулируется утверждение, использующее лишь однородное слагаемое $b(t;\lambda) + a(t;\lambda)\operatorname{sign}(x)$. От нелинейности g требуется лишь выполнение условия (5). Утверждение этого пункта не является новым и приведено в качестве объяснения и обоснования происхождения и естественности дальнейших предположений. Рассмотрим π-периодическую по φ функцию

$$V(\varphi;\lambda) = \int_0^{2\pi} e^{(t+\varphi)i} a(t;\lambda)\operatorname{sign}(\sin(t+\varphi))\,dt \equiv \int_0^{2\pi} e^{ti} a(t-\varphi;\lambda)\operatorname{sign}(\sin t)\,dt.$$

Пусть $a(t;\lambda) = a_1(t;\lambda) + a_2(t;\lambda)$, где $a_1(t;\lambda) + a_1(t+\pi;\lambda) = 0$ и $a_2(t;\lambda) = a_2(t+\pi;\lambda)$, т.е. в a_1 собраны все гармоники с нечетными номерами, а в a_2 – с четными. Пусть

$$a_2(t;\lambda) = \alpha(2t;\lambda), \quad \alpha(t;\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(\lambda)\sin(kt+\psi_k),$$

для определенности пусть $\psi_0 = \pi/2$. Справедлива формула

$$V(\varphi;\lambda) = 4\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k(\lambda)}{4k^2-1}(2k\cos(2k\varphi-\psi_k) + i\sin(2k\varphi-\psi_k));$$

нечетные гармоники функции $a(t;\lambda)$ (из них составлена функция a_1) в формулу для V не входят. Положим при каждом $\lambda \in \Lambda$

$$\bar{b}(\lambda) = \int_0^{2\pi} e^{it} b(t;\lambda)\,dt, \quad \rho(\varphi) = \mathrm{Re}(M(i;\lambda_0)(e^{\varphi i}\bar{b}(\lambda_0) + V(\varphi;\lambda_0))).$$

Утверждение 1. *Пусть непрерывная 2π-периодическая функция ρ не равна нулю тождественно. Если ρ не обращается в нуль, то все 2π-периодические решения уравнения (1) допускают общую априорную оценку. Каждому робастному*) нулю φ_* функции ρ соответствует направленная неограниченная ветвь 2π-периодических решений с пределом* $\sin(t + \varphi_*)$.

В условиях утверждения 1 точка λ_0 является асимптотической точкой бифуркации периодической задачи для уравнения (1).

2.4. Основное предположение. Утверждение 1 может не отвечать на вопрос, существуют ли неограниченные ветви, по двум причинам. Во-первых, функция ρ может обращаться в нуль на множестве сложной природы, ее нули могут быть или не быть изолированными, изолированные нули могут не быть робастными. Все эти ситуации не рассматриваются. Во-вторых, функция ρ может обращаться в нуль тождественно. Именно этот случай изучается в основной части настоящей работы. Предположение $\rho \equiv 0$ является основным ограничением во всех теоремах 1–3; оно выполнено, если и только если одновременно выполнены следующие условия:

1) $\alpha_0(\lambda_0)\,\mathrm{Im}\,M(i;\lambda_0) = 0$;
2) $\bar{b}(\lambda_0) = 0$;
3) $\alpha_k(\lambda_0) = 0$ при $k = 1, 2, \ldots$

Отдельно рассматриваются три случая: $\alpha_0(\lambda_0) = 0$ и $\mathrm{Re}\,M(i;\lambda_0) \neq 0$ (теорема 1); $\alpha_0(\lambda_0) = 0$, $\mathrm{Im}\,M(i;\lambda_0) \neq 0$ и $\mathrm{Re}\,M(i;\lambda_0) = 0$ (теорема 2); $\alpha_0(\lambda_0) \neq 0$ и $\mathrm{Im}\,M(i;\lambda_0) = 0$ (теорема 3). Второе и третье условия предполагаются выполненными во всех случаях. В этих трех случаях существование и количество неограниченных ветвей определяется совершенно разными уравнениями, ветви имеют различные асимптотики по λ.

Если $\alpha_0(\lambda_0) = 0$, то функция $a \equiv a_1$ должна быть антипериодична. В частности, сюда включается случай $a(t;\lambda_0) \equiv 0$, т.е. f имеет вид $b(t;\lambda) + g(t,x;\lambda)$, где $g \to 0$ при $x \to \infty$. Случай $\alpha_0(\lambda_0) \neq 0$ рассмотрен в п. 3.3, он обобщает часть результатов работы [4], в которой методы построены на четности многочлена $\mathcal{L}$. Возможность этого особого случая следует из того, что нулевая гармоника комплекснозначной функции V чисто мнимая.

Условия $\mathrm{Im}\,M(i;\lambda_0) \neq 0$ и $\mathrm{Re}\,M(i;\lambda_0) \neq 0$ естественно назвать условиями трансверсальности. Кривая $\Gamma = \mathcal{L}(i;\lambda) \in \mathbb{C}$, являющаяся образом промежутка Λ при отображении $\mathcal{L}(i;\lambda) = (\lambda - \lambda_0)M(i;\lambda_0) + o(\lambda - \lambda_0)$, проходит на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ при $\lambda = \lambda_0$ через начало координат. Если какое-то из условий трансверсальности выполнено, то при значениях λ, близких к λ_0, кривая Γ трансверсально пересекает соответствующую координатную ось. Кривая Γ состоит из собственных значений дифференциального оператора $\mathcal{L}(p;\lambda)$, отвечающих первым гармоникам $\sin t$ и $\cos t$ при 2π-периодических краевых условиях.

2.5. Дополнительные предположения о нелинейности. В этом пункте приведены необходимые предположения теорем из § 3, не использованные в утверждении 1. Пусть функция g липшицева по переменной t и справедливы оценки

$$|g(t,x;\lambda)| \le G(|x|), \quad |g(t,x;\lambda) - g(s,x;\lambda)| \le G(|x|)|t-s|, \quad t,s,x \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \Lambda, \tag{8}$$

где непрерывная функция $G:\ [0,\infty] \to (0,\infty)$ монотонно убывает и удовлетворяет условию

$$\int^{\infty} G(u)\,du < \infty. \tag{9}$$

*) Нуль функции назовем робастным, если он изолирован и в его окрестности функция меняет знак.

Пусть функции a, b и g (следовательно, и f) липшицевы по переменной λ в точке λ_0:

$$|b(t;\lambda)-b(t;\lambda_0)|,\ |a(t;\lambda)-a(t;\lambda_0)|,\ |g(t,x;\lambda)-g(t,x;\lambda_0)| \le K|\lambda-\lambda_0|, \quad t,x\in\mathbb{R}, \quad \lambda\in\Lambda. \tag{10}$$

Условие (9) означает достаточно быструю сходимость функции G к нулю на бесконечности. Ранее (см. [10]) изучалась лишь противоположная ситуация, когда функция g, наоборот, убывает квалифицированно медленно и сохраняет знак: при всех t, λ, x выполнены условия

$$g(t,x;\lambda)\operatorname{sign}(x) \ge \varphi(|x|), \qquad \int^{\infty}\varphi(u)\,du = \infty. \tag{11}$$

В случае $a\equiv 0$ аналогичные условия рассматривались и в [9]. Условия (11) и им аналогичные использовались в основном для уравнений без параметра в задачах существования и при вычислении индекса на бесконечности. Работы об использовании условия (11) непосредственно в задачах об асимптотических точках бифуркации нам не известны.

§ 3. ТЕОРЕМЫ О НЕОГРАНИЧЕННЫХ ВЕТВЯХ РЕШЕНИЙ

3.1. Случай $\alpha_0(\lambda_0)=0$ **и** $\operatorname{Re} M(i;\lambda_0)\ne 0$. Так как $\bar b(\lambda_0)=0$ и $a(t;\lambda_0)=-a(\pi+t;\lambda_0)\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a(t;\lambda_0)\equiv a_1(t;\lambda_0)$, то в правой части линейного неоднородного уравнения

$$L(p)x = b(t;\lambda_0)+a(t;\lambda_0)\operatorname{sign}(\sin(t+\varphi)) \tag{12}$$

стоят функции $b(t;\lambda_0)$, не содержащая первой гармоники в ряду Фурье, и $a(t;\lambda_0)\times$ $\times\operatorname{sign}(\sin(t+\varphi))$, содержащая только гармоники с четными номерами. Поэтому в силу альтернативы Фредгольма при каждом φ существует единственное 2π-периодическое решение h_φ уравнения (12), не имеющее гармоник $\sin t$ и $\cos t$.

Рассмотрим непрерывные 2π-периодические функции

$$\begin{gathered}\Theta_1(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty}(g(-\varphi,u;\lambda_0)-g(\pi-\varphi,u;\lambda_0))\,du,\\ \Theta_2(\varphi) = 2a(-\varphi;\lambda_0)h_\varphi(-\varphi)-2a(\pi-\varphi;\lambda_0)h_\varphi(\pi-\varphi).\end{gathered} \tag{13}$$

Теорема 1. *Пусть выполнено условие трансверсальности* $\operatorname{Re}M(i;\lambda_0)\ne 0$ *и функция* $\Theta=\Theta_1+\Theta_2$ *не равна нулю тождественно. Тогда каждый робастный нуль* φ_* *порождает направленную неограниченную ветвь* 2π*-периодических решений. Если дополнительно*

$$\int^{\infty} u\,G(u)\,du < \infty, \tag{14}$$

то ветвь, порожденная нулем φ_*, *имеет асимптотику*

$$x_r(t) = r\sin(t+\varphi_r)+h_{\varphi_*}(t)+o(1), \quad \lambda_r = \lambda_0+\frac{\Psi(\varphi_*)}{\pi\operatorname{Re}M(i;\lambda_0)}r^{-3}+o(r^{-3}), \quad \varphi_r=\varphi_*+o(1),$$

где $\Psi=\Psi_1+\Psi_2$ *и*

$$\begin{gathered}\Psi_1(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty}u(g(-\varphi,u+h_\varphi(-\varphi);\lambda_0)+g(\pi-\varphi,u+h_\varphi(\pi-\varphi);\lambda_0))\,du,\\ \Psi_2(\varphi) = -a(-\varphi;\lambda_0)h_\varphi^2(-\varphi)-a(\pi-\varphi;\lambda_0)h_\varphi^2(\pi-\varphi).\end{gathered} \tag{15}$$

В условиях теоремы 1 формулы для Θ_2 и Ψ_2 могут быть записаны в виде

$$\Theta_2(\varphi) = 2a(-\varphi;\lambda_0)(h_\varphi(-\varphi) + h_\varphi(\pi-\varphi)), \quad \Psi_2(\varphi) = -a(-\varphi;\lambda_0)(h_\varphi^2(-\varphi) - h_\varphi^2(\pi-\varphi)). \tag{16}$$

В теореме 1 каждому отрезку, на котором функция Θ меняет знак (не обязательно окрестности робастного нуля), соответствует (возможно, не направленная) неограниченная непрерывная ветвь 2π-периодических решений.

Теорема неприменима для функции $f(t,x;\lambda) = b(t;\lambda) + g(x;\lambda)$. В этом случае $a(t;\lambda) \equiv 0$ и $\Theta_1 \equiv \Theta_2 \equiv \Theta \equiv 0$. Другой пример: $f(t,x;\lambda) = b(t) + a(t)f(x)$, $f(x) = \operatorname{sign}(x) + g(x)$. Тогда

$$\Theta_1(\varphi) = 2a(-\varphi)\int_{-\infty}^{\infty} g(u)\,du, \quad \Theta_2(\varphi) = 2a(-\varphi)(h_\varphi(-\varphi) + h_\varphi(\pi-\varphi))$$

и

$$\Theta(\varphi) = 2a(-\varphi)\gamma(\varphi), \quad \gamma(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)\,du + h_\varphi(-\varphi) + h_\varphi(\pi-\varphi).$$

У функции Θ в этом случае есть по крайней мере два нуля антипериодической функции a плюс сколько-то нулей сомножителя γ. Если число

$$\int_0^{2\pi} \gamma(\varphi)\,d\varphi = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} g(u)\,du + \int_0^{2\pi}(h_\varphi(-\varphi) + h_\varphi(\pi-\varphi))\,d\varphi$$

достаточно мало, то у этого сомножителя есть по крайней мере четыре нуля (h_φ не содержит первой гармоники), у функции Θ есть по крайней мере шесть нулей.

Из доказательства теоремы 1 видно, что ее заключение сохраняет силу, если одно из основных условий (функция f имеет вид (4)) справедливо только при $\lambda = \lambda_0$.

3.2. Случай $\alpha_0(\lambda_0) = \operatorname{Re} M(i;\lambda_0) = 0$. Здесь общая картина совершенно другая. Главное отличие – амплитуда 2π-периодического решения имеет порядок не $|\lambda-\lambda_0|^{-1/3}$ (если $\Psi(\varphi_k) \neq 0$), как в теореме 1, а порядок $|\lambda-\lambda_0|^{-1/2}$.

Определим h_φ так же, как в теореме 1, и снова построим по ней функции (13) и (15).

Теорема 2. *Пусть* $\bar b(\lambda) = \bar b'(\lambda-\lambda_0) + o(\lambda-\lambda_0)$ *при* $\bar b' \neq 0$. *Пусть выполнено условие*

$$|g(t,x;\lambda) - g(t,x;\lambda_0)| \le G(|x|)|\lambda-\lambda_0|, \quad x,t \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \Lambda, \tag{17}$$

и функция G *удовлетворяет условию (14). Тогда каждый робастный нуль* φ_* *функции*

$$\Phi(\varphi) = \operatorname{Im}(\bar b' e^{\varphi i})\Theta(\varphi) + \pi\Psi(\varphi)\operatorname{Im} M(i;\lambda_0) \tag{18}$$

определяет направленную ветвь решений уравнения (1), имеющую асимптотику

$$x_r(t) = r\sin(t+\varphi_r) + h_{\varphi_*}(t) + o(1), \quad \lambda_r = \lambda_0 + \frac{\Theta(\varphi_*)}{\pi\operatorname{Im} M(i;\lambda_0)}r^{-2} + o(r^{-2}), \quad \varphi_r = \varphi_* + o(1).$$

В условиях теоремы 2 функции Θ_2 и Ψ_2 определяются равенствами (16).

3.3. Случай $\alpha_0(\lambda_0) \neq 0$, $\operatorname{Im} M(i;\lambda_0) = 0$. Теперь функция a не антипериодическая: $a(t;\lambda_0) = \alpha_0(\lambda_0) + a_1(t;\lambda_0)$. В правой части уравнения*)

$$L(p)x = b(t;\lambda_0) + a(t;\lambda_0)\operatorname{sign}(\sin(t+\varphi)) - \frac{4}{\pi}\alpha_0(\lambda_0)\sin(t+\varphi)$$

*) В обозначениях п. 4.1 это уравнение имеет вид $L(p)x = b(t;\lambda_0) + Q(a(t;\lambda_0)\operatorname{sign}(\sin(t+\varphi)))$.

стоит функция, не имеющая первых гармоник в ряду Фурье, поэтому существует его единственное 2π-периодическое решение h_φ без гармоник $\sin t$ и $\cos t$.

Пусть $\operatorname{Im} M(i;\lambda) = (\lambda-\lambda_0)M'_{\Im} + o(\lambda-\lambda_0)$, $\bar b(\lambda) = \bar b'(\lambda-\lambda_0) + o(\lambda-\lambda_0)$. Рассмотрим функцию $\Xi = \Theta_1+\Theta_2+\Theta_3-\Theta_4$, где Θ_1 и Θ_2 определены соотношениями (13),

$$\Theta_3(\varphi) = \mu \operatorname{Re}(\bar b' e^{\varphi i}), \quad \Theta_4 = \pi\mu M'_{\Im}, \quad \mu = \frac{4\alpha_0(\lambda_0)}{\pi M(i;\lambda_0)}.$$

Теорема 3. *Пусть $M(i;\lambda_0)\alpha_0(\lambda_0) = \operatorname{Re} M(i;\lambda_0)\alpha_0(\lambda_0) \neq 0$, выполнено условие Липшица (17). Пусть функция Ξ не равна нулю тождественно. Тогда каждый робастный нуль φ_* функции Ξ порождает непрерывную направленную неограниченную ветвь 2π-периодических решений, имеющую асимптотику*

$$x_r(t) = r\sin(t+\varphi_r) + h_{\varphi_*}(t) + o(1), \quad \lambda_r = \lambda_0 + \mu r^{-1} + o(r^{-1}), \quad \varphi_r = \varphi_* + o(1).$$

Если функция Ξ отделена от нуля, то множество 2π-периодических решений ограничено.

Приведем пример. Пусть $\operatorname{Im} M(i;\lambda) = 0$ и $f(t,x;\lambda) = b(t) + f(x)$, $\bar b = 0$ и f удовлетворяет условию насыщения $f \to \pm\bar f \neq 0$ при $x \to \pm\infty$. Тогда количество неограниченных ветвей в окрестности точки $\lambda = \lambda_0$ не меньше, чем количество робастных нулей антипериодической функции $h_\varphi(-\varphi) - h_\varphi(\pi-\varphi)$, не содержащей первой гармоники. В силу теоремы Штурма–Гурвица (см., например, задачу 1996-5 в [11, с. 123]) эта функция имеет не менее шести перемен знака, каждая из которых, вообще говоря, соответствует ее робастному нулю.

Функция $h_\varphi(-\varphi) - h_\varphi(\pi-\varphi)$ в других обозначениях (в виде ряда Фурье, построенного по ряду Фурье функции b) использовалась в [4] для случая $\operatorname{Im} \mathcal{L}(wi;\lambda) \equiv 0$, $w \in \mathbb{R}$.

3.4. Предельные уравнения. Решения уравнения (1) ищутся ниже при некоторых априори неизвестных значениях λ в виде $x(t) = r\sin(t+\varphi) + h(t)$. В условиях всех сформулированных теорем геометрия неограниченных множеств 2π-периодических решений определяется двумя простыми равенствами, связывающими величины r, φ и λ. Эти равенства получаются, если приравнять все слагаемые старшего порядка в проекциях уравнения (1) на функции $\sin(t+\varphi)$ и $\cos(t+\varphi)$ (равенствах (23), (24) ниже) и отбросить все меньшие слагаемые. Из этих равенств в случае каждой теоремы следует уравнение для φ и асимптотическая формула для $r^\gamma(\lambda-\lambda_0)$; при этом $\gamma = 3$ в теореме 1, $\gamma = 2$ в теореме 2, $\gamma = 1$ в теореме 3. Выделение главных при $r \to \infty$ слагаемых в равенствах (23), (24) основано на следствиях (см. п. 4.4) лемм из п. 4.3.

Предельные равенства для теоремы 1. Пусть выполнено условие (14). В условиях этой теоремы перейдем в уравнении (23), умноженном на r^2, к пределу при $r \to \infty$, полагая $|\lambda-\lambda_0| \sim r^{-3}$. В левой части после отбрасывания малых слагаемых останется величина $\pi \operatorname{Re} M(i;\lambda_0)(\lambda-\lambda_0)r^3$, справа – величина $\Psi(\varphi)$. Уравнение (24), умноженное на r, после предельного перехода превращается в равенство $0 = \Theta(\varphi)$; окончательно, предельные равенства имеют вид

$$\pi \operatorname{Re} M(i;\lambda_0)(\lambda-\lambda_0)r^3 = \Psi(\varphi), \quad \Theta(\varphi) = 0.$$

Предельные равенства для теоремы 2. В условиях этой теоремы полагаем $|\lambda-\lambda_0| \sim r^{-2}$. Равенство (23), умноженное на r^2, с точностью до меньших слагаемых имеет вид $0 = (\lambda-\lambda_0)r^2 \operatorname{Im}(\bar b' e^{\varphi i}) + \Psi(\varphi)$, равенство (24), умноженное на r, – вид $\pi(\lambda-\lambda_0)r^2 \operatorname{Im} M(i;\lambda_0) = \Theta(\varphi)$. Из этих соотношений вытекает уравнение $\Phi(\varphi) = 0$ и формула для $r(\lambda-\lambda_0)^2$, предельные равенства имеют вид

$$\pi(\lambda-\lambda_0)r^2 \operatorname{Im} M(i;\lambda_0) = \Theta(\varphi), \quad \Phi(\varphi) = 0.$$

В (23) в меньшие слагаемые попадает величина $\operatorname{Re} M(i;\lambda)(\lambda-\lambda_0)r^3$ (в силу липшицевости M), в (24) – величина $r(\lambda-\lambda_0)\operatorname{Re}(\bar b' e^{\varphi i})$.

Предельные равенства для теоремы 3. Перейдем в уравнении (23) к пределу при $r \to \infty$, полагая величину $|\lambda-\lambda_0| \sim r^{-1}$. После удаления бесконечно малых в левой части останется величина $\pi(\lambda-\lambda_0)rM(i;\lambda_0)$ (по предположению $M(i;\lambda_0)\in\mathbb{R}$), а в правой части все слагаемые стремятся к нулю, кроме

$$\int_0^{2\pi}\sin(t+\varphi)\alpha_0(\lambda_0)\,\mathrm{sign}(\sin(t+\varphi))\,dt=4\alpha_0(\lambda_0).$$

Таким образом, первое равенство запишется в виде $\pi(\lambda-\lambda_0)rM(i;\lambda_0)=4\alpha_0(\lambda_0)$, оно определяет асимптотику $r(\lambda-\lambda_0)\sim\mu$.

В равенстве (24) слагаемые и слева, и справа являются бесконечно малыми, причем обе части имеют порядок r^{-1}. Умножим обе части равенства (24) на r и перейдем к пределу при $r\to\infty$. Слева будет

$$\pi(\lambda-\lambda_0)^2M'_{\Im}r^2=\pi M'_{\Im}\mu^2=\Theta_4,$$

справа появятся два слагаемых первого порядка. Первое слагаемое имеет вид

$$\Theta_3(\varphi)=r\int_0^{2\pi}\cos(t+\varphi)b(t;\lambda)\,dt=\mathrm{Re}(\bar{b}'e^{\varphi i})r(\lambda-\lambda_0),$$

слагаемые $\Theta_1(\varphi)$ и $\Theta_2(\varphi)$ имеют такое же происхождение, как и в других теоремах. В результате второе равенство принимает вид $\Theta_4=\Theta_1+\Theta_2+\Theta_3$, что эквивалентно $\Xi=0$. Предельные равенства имеют вид

$$\pi(\lambda-\lambda_0)rM(i;\lambda_0)=4\alpha_0(\lambda_0),\quad \Xi=0.$$

§ 4. ОБЩАЯ ЧАСТЬ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ

4.1. Основная конструкция. В доказательствах всех теорем используются ортогональные в пространстве L^2 проекторы

$$Px=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos(t-s)x(s)\,ds,\quad Qx=x-Px.$$

Они проецируют L^2 на подпространства $E=PL^2\subset L^2$ и $E^{\perp}=QL^2\subset L^2$.

Оба подпространства E и $E^{\perp}$ инвариантны относительно дифференциального оператора $\mathcal{L}(d/dt;\lambda)$ при каждом λ: если $x\in E^{\perp}$ достаточное количество раз дифференцируема, то $\mathcal{L}(d/dt;\lambda)x\in E^{\perp}$. При всех $\lambda\in\Lambda$ числа $0,\pm2i,\pm3i,\ldots$ не являются корнями многочлена $\mathcal{L}$, и множество $\{\mathcal{L}(ki),\ \pm1\neq k\in\mathbb{Z}\}$ отделено от нуля. Поэтому в подпространстве $E^{\perp}$ при каждом*) λ определен обратный оператор $A_\lambda=(\mathcal{L}(d/dt;\lambda))^{-1}$. Каждый оператор A_λ действует в $E^{\perp}$ и вполне непрерывен**), более того, он действует из $E^{\perp}$ в пространства C, $C^{\ell-1}$ и также вполне непрерывен. Нормы

$$\|A_\lambda\|_{E^{\perp}\to E^{\perp}}=\|A_\lambda Q\|_{L^2\to L^2}=\max_{k=0,\pm2,\pm3}|\mathcal{L}(ki;\lambda)|^{-1}$$

ограничены в совокупности:

$$\sup_{\lambda\in\Lambda}\|A_\lambda\|=C_A<\infty. \tag{19}$$

*) Формально при λ, достаточно близком к λ_0, без ограничения общности считаем, что при всех $\lambda\in\Lambda$.

**) Оператор $A_\lambda x:\ \Lambda\times L^2\to L^2$ вполне непрерывен по совокупности переменных λ, x.

Аналогично справедлива общая априорная оценка

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} \|A_\lambda Q\|_{L^2 \to C^1} = C_A^* < \infty \tag{20}$$

(оценки норм операторов $A_\lambda Q : L^2 \to C^k$ при $k > 1$ не используются). Каждой функции $u \in E^\perp$ оператор A_λ ставит в соответствие единственное решение $x \in E^\perp$ уравнения $\mathcal{L}(d/dt; \lambda)x = u$.

В силу предположения о липшицевости многочлена M операторы A_λ липшицевы по λ:

$$\|A_{\lambda_1} - A_{\lambda_2}\|_{L^2 \to C^1} \le K_A |\lambda_1 - \lambda_2|. \tag{21}$$

Каждая 2π-периодическая функция x имеет вид $r\sin(t+\varphi)+h(t)$, $r \ge 0$, $Px = r\sin(t+\varphi)$, $Qx = h(t)$. Для каждого 2π-периодического решения x уравнения (1) верно равенство $h = A_\lambda Q f(t, x; \lambda)$. Справедливы общие априорные оценки (C_F – постоянная из (3))

$$\|h\|_{L^2} \le C_A C_F \sqrt{2\pi}, \quad \|h\|_{C^1} \le C_A^* C_F \sqrt{2\pi}. \tag{22}$$

Отсюда следует, что множество 2π-периодических решений x уравнения (1) может быть не ограниченным вместе со множеством скаляров r и неограниченные множества решений следует искать в виде $r\sin(t+\varphi) + h(t)$, причем $r \to \infty$.

Функция $x(t) = r\sin(t+\varphi) + h(t)$ является 2π-периодическим решением x уравнения (1), если и только если она и ее компоненты r, φ, h удовлетворяют системе разветвления

$$\pi(\lambda - \lambda_0) \operatorname{Re} M(i; \lambda) r = \int_0^{2\pi} \sin(t+\varphi) f(t, x(t); \lambda)\, dt, \tag{23}$$

$$\pi(\lambda - \lambda_0) \operatorname{Im} M(i; \lambda) r = \int_0^{2\pi} \cos(t+\varphi) f(t, x(t); \lambda)\, dt, \tag{24}$$

$$h = A_\lambda Q f(t, x(t); \lambda). \tag{25}$$

В системе (23)–(25) удобно считать неизвестными переменные $\lambda \in \Lambda$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ и $h \in E^\perp$, а переменную r – большим параметром. В пространстве троек (λ, φ, h), $\lambda \in \Lambda$, $\varphi \in \mathbb{R}$, $h \in E^\perp$, выбирается множество $\Omega = \Omega(r)$, на границе $\partial\Omega$ которого при каждом достаточно большом r определено и отлично от нуля вращение некоторого векторного поля, нули которого совпадают с нулями системы (23)–(25). Для вычисления вращения векторное поле вкладывается в гомотопию к простому векторному полю, вращение которого легко находится. Гомотопия в условиях теорем 1–3 выбирается по-разному. Из общих принципов теории вращения векторных полей (см. [1, 2]) следует существование непрерывных неограниченных ветвей. Их направленность с пределом $\sin(t + \varphi_*)$ в условиях каждой теоремы очевидна.

Основой реализации предложенной схемы является предельный переход (при $r \to \infty$) компонент гомотопии. На первом этапе делается предельный переход бесконечномерной компоненты h, в результате равномерно по λ, φ и r оцениваются те значения h, которые могут являться компонентами нулей гомотопии. Далее, для всех таких h выполняется предельный переход в одномерных компонентах гомотопии, отвечающих переменным λ и φ.

Полученные предельные векторные поля определяют формулировки теорем.

4.2. Оценки бесконечномерной компоненты. В этом пункте приводятся вспомогательные утверждения, которые используются при доказательстве всех теорем.

Вложим уравнение (25) в семейство

$$h = h_\varphi + \xi(A_\lambda Q f(t, x(t); \lambda) - A_{\lambda_0} Q(b(t; \lambda_0) + a(t; \lambda_0) \operatorname{sign}(\sin(t+\varphi)))), \quad \xi \in [0, 1]. \tag{26}$$

Для функции h_φ верно равенство $h_\varphi = A_{\lambda_0} Q(b(t; \lambda_0) + a(t; \lambda_0) \operatorname{sign}(\sin(t+\varphi)))$. При $\xi = 1$ – это уравнение (25), при $\xi = 0$ – это тривиальное “уравнение” $h = h_\varphi$.

Лемма 1. *Существует* $C_h > 0$ *такое, что все функции* h, *для которых выполнено уравнение (26), удовлетворяют* $\|h\|_{C^1} \le C_h$ *и имеют вид* $h = h_\varphi + \tilde{h}$, *причем*

$$\|\tilde{h}\|_{C^1} \le C_h(|\lambda - \lambda_0| + r^{-1/3}). \tag{27}$$

Доказательство. Вначале отметим, что априорная оценка $\|h\|_{C^1} \le C_h$ всех решений h всех уравнений (26) следует из свойств операторов A_λ и ограниченности нелинейностей. Теперь утверждение леммы вытекает из липшицевости операторов A_λ и функций a, b, g по λ, а также соотношений

$$\|\operatorname{sign}(\sin(t+\varphi)) - \operatorname{sign}(r\sin(t+\varphi) + h(t))\|^2_{L^2} \le 4\operatorname{mes}\{r|\sin(t+\varphi)| \le |h(t)|\} \le \frac{32C_h}{\pi r}$$

(если $r|\sin(t+\varphi)| > |h(t)|$, то функции $\operatorname{sign}(\sin(t+\varphi))$ и $\operatorname{sign}(r\sin(t+\varphi)+h(t))$ совпадают) и

$$\|g(t,x(t);\lambda)\|^2_{L^2} \le \|G(|x(t)|)\|^2_{L^2} \le \int\limits_0^{2\pi} G^2(|r\sin(t+\varphi) + h(t)|)\,dt =$$

$$= \int\limits_{\{|r\sin(t+\varphi)+h(t)| \le r^{1/3}\}} \ldots + \int\limits_{\{|r\sin(t+\varphi)+h(t)| > r^{1/3}\}} \ldots \le$$

$$\le G^2(0)\operatorname{mes}\{|\sin(t+\varphi)| \le r^{-2/3} + C_h r^{-1}\} + 2\pi G^2(r^{1/3}) \le cr^{-2/3}.$$

4.3. Основные леммы о проекциях нелинейностей. Пусть на $[t_1, t_2]$ определена скалярная функция $e \in C^1$, имеющая единственный нуль $t_0 \in (t_1, t_2)$ и удовлетворяющая условиям:

$$e(t_0) = 0, \quad e(t) = (t - t_0)(e' + \beta(t)), \quad e' \ne 0, \quad |\beta'(t)| \le c_\beta, \quad |\beta(t)| \to 0, \quad t \to t_0. \tag{28}$$

Пусть на этом же промежутке задана еще функция $q(t) \in C$, причем

$$|q(t)(t - t_0)^{-k} - q^{(k)}| \le \alpha(t), \quad \alpha(t) \to 0, \quad t \to t_0; \quad q^{(k)} \in \mathbb{R} \tag{29}$$

при некотором целом неотрицательном k, ниже используются случаи $k = 0$ и $k = 1$. Если $k = 0$, то условие (29) всегда выполнено при $q^{(0)} = q(t_0)$. Если $k > 0$, то при $q \in C^k$ условие (29) означает, что $q(t_0) = q'(t_0) = \ldots = q^{(k-1)}(t_0) = 0$; $q^{(0)} = q^{(k)}(t_0)$.

Введем монотонно убывающую функцию $G: [0,\infty) \to (0,\infty)$, удовлетворяющую условию

$$\int\limits^{\infty} u^k G(u)\,du < \infty \tag{30}$$

(k – число из (29)). При $k = 0$ условие (30) совпадает с (9), а при $k = 1$ – с (14). Построим по функции G множество $\mathcal{G} = \mathcal{G}(G)$ функций $g: [t_1, t_2] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих неравенствам

$$|g(t,x)| \le G(|x|), \quad |g(t,x) - g(s,x)| \le |t - s|G(|x|). \tag{31}$$

Оценим при всех $g \in \mathcal{G}$ интеграл

$$I_0 = I_0(q,e,h) = \int\limits_{t_1}^{t_2} q(t) g(t, re(t) + h(t))\,dt.$$

Лемма 2. *При каждом* $\eta > 0$ *справедливо соотношение*

$$\lim_{r\to\infty} \sup_{g\in\mathcal{G};\ \|h\|_{C^1}\le\eta} \left| r^{k+1} I_0 - \operatorname{sign}(e')(e')^{-k-1} q^{(k)} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^k g(t_0, u + h(t_0))\,du \right| = 0. \tag{32}$$

Теперь рассмотрим интеграл

$$I_1 = I_1(q, e, h) = \int_{t_1}^{t_2} q(t)(\operatorname{sign}(re(t) + h(t)) - \operatorname{sign}(e(t)))\, dt$$

и множество $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(k, \alpha, \eta_q, t_0)$ ($\alpha(t) \to 0$ при $t \to t_0$) всех непрерывных скалярных 2π-периодических функций q, удовлетворяющих условиям (29) при некотором $q^{(k)} \in \mathbb{R}$, $|q^{(k)}| \le \eta_q$.

Лемма 3. *При каждых* η, η_q *выполнено равенство*

$$\lim_{r\to\infty} \sup_{q\in\mathcal{Q},\ \|h\|_{C^1}\le\eta} \left| r^{k+1} I_1 - \frac{2q^{(k)} \operatorname{sign}(-e')}{k+1} \left(\frac{-h(t_0)}{e'} \right)^{k+1} \right| = 0.$$

Справедлив равномерный по $q \in \mathcal{Q}$ аналог леммы 2.

4.4. Следствия лемм 2 и 3. Пусть $e(t) = \sin t$. Применим леммы 2 и 3 отдельно к промежуткам $(-\delta, \delta)$ и $(\pi - \delta, \pi + \delta)$, где $\delta > 0$ – фиксированное число (например, $1/10$), на каждом из этих промежутков e удовлетворяет условиям (28) ($e' = (-1)^j$ при $t_0 = \pi j \in \in (\pi j - \delta, \pi j + \delta)$).

При всех φ функции $g(t - \varphi, x; \lambda_0)$ в силу (9) принадлежат классу $\mathcal{G}$. Пусть задано 2π-периодическое отображение $\varphi \mapsto h_\varphi \in C^1$. В частности, это отображение может быть определено, как в теоремах 1–2 или как в теореме 3. Рассмотрим класс $\mathcal{H} = \mathcal{H}(r, \eta)$ функций h, имеющих вид $h = h_\varphi + \tilde{h}$, причем $\|h\|_{C^1}, \|\tilde{h}'\|_C \le \eta$, $\|\tilde{h}\|_C \le \eta r^{-1/3}$.

Следствие 1. *Пусть выполнено условие (9), тогда при любом* $\eta > 0$

$$\lim_{r\to\infty} \sup_{\varphi\in\mathbb{R};\ h\in\mathcal{H}} \left| r \int_0^{2\pi} \sin(t + \varphi) g(t, r\sin(t + \varphi) + h(t); \lambda_0)\, dt \right| = 0 \tag{33}$$

и

$$\lim_{r\to\infty} \sup_{\varphi\in\mathbb{R};\ h\in\mathcal{H}} \left| r \int_0^{2\pi} \cos(t + \varphi) g(t, r\sin(t + \varphi) + h(t); \lambda_0)\, dt - \Theta_1(\varphi) \right| = 0. \tag{34}$$

Действительно, равенство (33) следует из леммы 2. Положим $e(t) = q(t) = \sin t$, $k = 0$; в силу леммы при $t_0 = \pi j$ равномерно по φ, h

$$r \int_{\pi j-\delta}^{\pi j+\delta} \sin t\, g(t - \varphi, r\sin t + h(t - \varphi); \lambda_0)\, dt \to 0,$$

так как $q(t_0) = q^{(0)} = 0$ при $t_0 = \pi j$. Интегралы по промежуткам $(\delta, \pi - \delta)$ и $(\pi + \delta, 2\pi - \delta)$ бесконечно малые более высокого порядка, чем r^{-1} в силу предположения (9).

Аналогично равенство (34) также следует из леммы 2. Положим $e(t) = \sin t$, $q(t) = \cos t$, $k = 0$; в силу леммы при $t_0 = \pi j$ $(j = 0, 1)$ равномерно по φ, h

$$r \int_{\pi j-\delta}^{\pi j+\delta} \cos t\, g(t - \varphi, r\sin t + h(t - \varphi); \lambda_0)\, dt \to (-1)^j \int_{-\infty}^{\infty} g(\pi j - \varphi, u; \lambda_0)\, du, \quad j = 0, 1.$$

В нуле $e' = q^{(0)} = 1$, в точке π, очевидно, $e' = q^{(0)} = -1$.

Следствие 2. *Пусть выполнено условие (14), тогда при любом* $\eta > 0$

$$\lim_{r\to\infty} \sup_{\varphi\in\mathbb{R};\ h\in\mathcal{H}} \left| r^2 \int_0^{2\pi} \sin(t + \varphi) g(t, r\sin(t + \varphi) + h(t); \lambda_0)\, dt - \Psi_1(\varphi) \right| = 0. \tag{35}$$

Доказательство этого следствия леммы 2 совершенно аналогично: $e(t) = q(t) = \sin t$, $k = 1$; в силу леммы при $t_0 = \pi j$ $(j = 0, 1)$ равномерно по φ, h

$$r^2 \int\limits_{\pi j-\delta}^{\pi j+\delta} \sin t\, g(t-\varphi, r\sin t + h(t-\varphi); \lambda_0)\, dt \to \int\limits_{-\infty}^{\infty} u\, g(\pi j - \varphi, u + h_\varphi(\pi j - \varphi); \lambda_0)\, du,$$

снова $e' = q^{(1)} = (-1)^j$ в точке πj. Интегралы по промежуткам $(\delta, \pi-\delta)$ и $(\pi+\delta, 2\pi-\delta)$ бесконечно малые более высокого порядка, чем r^{-2} в силу предположения (14).

Лемму 3 применим аналогично к двум семействам $\mathcal{Q}$: при $k = 0$ – к семейству функций q вида $a(t-\varphi; \lambda_0)\cos t$ и при $k = 1$ – к семейству функций вида $a(t-\varphi; \lambda_0)\sin t$.

Следствие 3. *При любом* $\eta > 0$ *справедливы соотношения*

$$\lim_{r\to\infty} \sup_{\varphi\in\mathbb{R};\ h\in\mathcal{H}} \left| r^2 \int\limits_0^{2\pi} \sin(t+\varphi) a(t; \lambda_0)(\operatorname{sign}(r\sin(t+\varphi) + h(t)) - \operatorname{sign}(\sin(t+\varphi)))\, dt - \Psi_2(\varphi) \right| = 0 \quad (36)$$

и

$$\lim_{r\to\infty} \sup_{\varphi\in\mathbb{R};\ h\in\mathcal{H}} \left| r \int\limits_0^{2\pi} \cos(t+\varphi) a(t; \lambda_0)(\operatorname{sign}(r\sin(t+\varphi) + h(t)) - \operatorname{sign}(\sin(t+\varphi)))\, dt - \Theta_2(\varphi) \right| = 0. \quad (37)$$

В силу леммы 3 при $j = 0, 1$ справедливы соотношения

$$r^2 \int\limits_{\pi j-\delta}^{\pi j+\delta} \sin t\, a(t-\varphi; \lambda_0)(\operatorname{sign}(r\sin t + h(t-\varphi)) - \operatorname{sign}(\sin t))\, dt \to -a(\pi j - \varphi; \lambda_0) h_\varphi^2(\pi j - \varphi),$$

$$r \int\limits_{\pi j-\delta}^{\pi j+\delta} \cos t\, a(t-\varphi; \lambda_0)(\operatorname{sign}(r\sin t + h(t-\varphi)) - \operatorname{sign}(\sin t))\, dt \to (-1)^j \cdot 2a(\pi j - \varphi; \lambda_0) h_\varphi(\pi j - \varphi).$$

Ниже в доказательствах теорем используются функции Θ^λ, Ψ^λ. В доказательстве теоремы 2 нам понадобится аналогичная (15) непрерывная по совокупности переменных (λ, φ) функция $\Psi^\lambda = \Psi_1^\lambda + \Psi_2^\lambda$, где

$$\Psi_1^\lambda(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(g(-\varphi, u + h_\varphi(-\varphi); \lambda) + g(\pi - \varphi, u + h_\varphi(\pi - \varphi); \lambda))\, du,$$

$$\Psi_2^\lambda(\varphi) = -a(-\varphi; \lambda) h_\varphi^2(-\varphi) - a(\pi - \varphi; \lambda) h_\varphi^2(\pi - \varphi),$$

условие (17) гарантирует липшицевость функции Ψ_1^λ по λ. При любом $\eta > 0$ справедливо соотношение

$$\lim_{r\to\infty} \sup_{\lambda\in\Lambda;\ \varphi\in\mathbb{R};\ h\in\mathcal{H}} \left| r^2 \int\limits_0^{2\pi} \sin(t+\varphi)(f(t, r\sin(t+\varphi) + h(t); \lambda) - b(t; \lambda))\, dt - \Psi^\lambda(\varphi) \right| = 0. \quad (38)$$

Оно отличается от непосредственного объединения формул (35) и (36) равномерностью по λ. Для доказательства равенства (38) надо лишь заметить, что функции $g(t-\varphi, x; \lambda)$ в силу (9) принадлежат общему классу $\mathcal{G}$ при всех φ и λ так же, как функции $a(t-\varphi; \lambda)\sin t$ принадлежат общему семейству $\mathcal{Q}$, и воспользоваться леммами 2 и 3.

В доказательстве теоремы 3 нам понадобится аналогичная Θ непрерывная по совокупности переменных (λ, φ) функция $\Theta^\lambda = \Theta_1^\lambda + \Theta_2^\lambda$, где

$$\Theta_1^\lambda(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (g(-\varphi, u; \lambda) - g(\pi - \varphi, u; \lambda))\, du, \quad \Theta_2^\lambda(\varphi) = 2a(-\varphi; \lambda) h_\varphi(-\varphi) - 2a(\pi - \varphi; \lambda) h_\varphi(\pi - \varphi),$$

условие (17) гарантирует липшицевость функции Θ_1^λ по λ. Справедливо соотношение

$$\lim_{r\to\infty} \sup_{\lambda\in\Lambda;\ \varphi\in\mathbb{R};\ h\in\mathcal{H}} \left| r\int\limits_0^{2\pi} \cos(t+\varphi)(f(t, r\sin(t+\varphi) + h(t); \lambda) - b(t;\lambda))\, dt - \Theta^\lambda(\varphi)\right| = 0. \qquad (39)$$

4.5. Доказательство лемм 2 и 3. При доказательстве лемм r достаточно велико.

Доказательство леммы 2. Проведем его для случая $e' > 0$. Положим $\delta = \delta(r) = (\ln(\ln r))^{-1}$, переменная δ выбрана так, чтобы $\delta \to 0$, $r\delta \to \infty$ и $r^{k+1}G(\varkappa r\delta) \to 0$ при любом $\varkappa$.

Вначале оценим при больших r интеграл

$$J_r = \int\limits_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} |t-t_0|^k G(|re(t) + h(t)|)\, dt,$$

его оценки понадобятся нам при получении асимптотик интеграла

$$J_r^* = \int\limits_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} (t-t_0)^k g(t_0, re(t) + h(t))\, dt.$$

Величина δ мала, поэтому при $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ верны соотношения $r|e(t)| > (1/2)re'|t - t_0|$, по построению $|h(t)| \le \eta$. Тогда $|re(t) + h(t)| > (1/2)re'|t-t_0| - \eta$ при $|t - t_0| > 2\eta/(re')$. Теперь

$$\int\limits_{t_0+2\eta/(re')}^{t_0+\delta} (t-t_0)^k G(|re(t)+h(t)|)\, dt \le \int\limits_{2\eta/(re')}^{\delta} \tau^k G\left(\frac{1}{2}re'\tau - \eta\right) d\tau \le$$

$$\le \frac{2}{re'} \int\limits_0^\infty \left(\frac{2(u+\eta)}{re'}\right)^k G(u)\, du = C_1 r^{-k-1},$$

аналогично имеем

$$\int\limits_{t_0-\delta}^{t_0-2\eta/(re')} |t-t_0|^k G(|re(t)+h(t)|)\, dt \le C_1 r^{-k-1}.$$

Теперь из соотношений

$$\int\limits_{t_0-2\eta/(re')}^{t_0+2\eta/(re')} |t-t_0|^k G(|re(t)+h(t)|)\, dt \le \frac{2}{k+1}\left(\frac{2\eta}{re'}\right)^{k+1} G(0) = C_0 r^{-k-1}$$

следует оценка $|J_r| \le Cr^{-k-1}$. Перейдем к интегралу J_r^*.

При $r > r_0$ функция $re(t) + h(t)$ на $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ в силу (28) монотонная (r_0 не зависит от h), сделаем в интеграле J_r^* замену переменных $u = re(t) + h(t)$. При этом (снова в силу (28))

$$t = t_0 + \frac{u - h(t)}{r(e' + \beta(t))}, \quad du = re'\nu(t)\,dt, \quad \nu(t) = 1 + (e')^{-1}\left(t\beta'(t) + \beta(t) + \frac{h'(t)}{r}\right).$$

Так как

$$|\nu(t) - 1| \le |e'|^{-1}(\delta c_\beta + \sup_{t\in(t_0-\delta,t_0+\delta)} |\beta(t)| + \eta r^{-1}) \le c_\nu(r), \quad c_\nu(r) \to 0, \quad r \to \infty,$$

и

$$\left|t - t_0 - \frac{u - h(t_0)}{re'}\right| = \frac{1}{r}\left|\frac{u - h(t)}{e' + \beta(t)} - \frac{u - h(t_0)}{e'}\right| \le c_u(r), \quad c_u(r) \to 0, \quad r \to \infty,$$

то

$$\left|J_r^* - (e'r)^{-k-1}\left(\int\limits_{-r\delta}^{r\delta} (u - h(t_0))^k g(t_0, u)\,du\right)\right| \le c_J(r) r^{-k-1}, \quad c_J(r) \to 0, \quad r \to \infty.$$

Отсюда следует оценка

$$\left|J_r^* - (e'r)^{-k-1}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (u - h(t_0))^k g(t_0, u)\,du\right)\right| \le c_J(r) r^{-k-1}, \quad c_J(r) \to 0, \quad r \to \infty.$$

При доказательстве соотношения (32) отбросим от интеграла в определении I_0 слагаемые порядка $o(r^{-k-1})$:

$$\left|\int\limits_{t_1}^{t_0-\delta} q(t) g(t, re(t) + h(t))\,dt\right|, \left|\int\limits_{t_0+\delta}^{t_2} q(t) g(t, re(t) + h(t))\,dt\right| \le cG\left(\frac{1}{2}e'r\delta - c\right) = o(r^{-k-1}),$$

$$\left|\int\limits_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} \alpha(t)(t - t_0)^k g(t, re(t) + h(t))\,dt\right| \le \max_{t\in(t_0-\delta,t_0+\delta)} |\alpha(t)| J_r = o(r^{-k-1})$$

и

$$\left|\int\limits_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} (t - t_0)^k (g(t_0, re(t) + h(t)) - g(t, re(t) + h(t)))\,dt\right| \le \delta J_r = o(r^{-k-1}).$$

Таким образом, $|I_0 - J_r^*| = o(r^{-k-1})$ и утверждение леммы 2 доказано.

Доказательство леммы 3. Функция $\operatorname{sign}(re(t) + h(t)) - \operatorname{sign}(e(t))$ не равна нулю, если и только если $e(t)h(t) < 0$ и $|e(t)| < |h(t)|r^{-1}$, при этом

$$\operatorname{sign}(re(t) + h(t)) - \operatorname{sign}(e(t)) \equiv -2\operatorname{sign} e(t) = 2\operatorname{sign} h(t),$$

следовательно,

$$I_1 = -2 \int\limits_{\{e>0,\ h<0,\ r|e|<|h|\}} q(t)\,dt + 2 \int\limits_{\{e<0,\ h>0,\ r|e|<|h|\}} q(t)\,dt.$$

Оба множества $\Gamma_1=\{e>0,\ h<0,\ r|e|<|h|\}$ и $\Gamma_2=\{e<0,\ h>0,\ r|e|<|h|\}$ включены во множество $\{t:\ r|e(t)|\le\eta\}$, поэтому $|t-t_0|\to 0$ при $r\to\infty$, если $t\in\Gamma_1\cup\Gamma_2$. Следовательно, при достаточно больших r верно включение

$$\Gamma_1\cup\Gamma_2\subset\left\{t:\ \frac{1}{2}(re')^{-1}|t-t_0|\le|e(t)|\le 2(re')^{-1}|t-t_0|\right\}.$$

Доказательство леммы проведем для случая $e'>0$ и $h(t_0)\ge 0$, остальные три варианта: $e'>0$ и $h(t_0)\le 0$; $e'<0$ и $h(t_0)\ge 0$; $e'<0$ и $h(t_0)\le 0$ рассматриваются аналогично.

Вначале рассмотрим множество Γ_1. Так как $\Gamma_1\subset\{t:\ t>t_0,\ re(t)<\eta\}\subset\{t_0,t_0+2\eta(re')^{-1}\}$ и $h(t)\ge h(t_0)-\eta|t-t_0|\ge-\eta|t-t_0|$, то $\Gamma_1\subset\{|h|\le 2\eta^2(re')^{-1}\}$, следовательно,

$$\Gamma_1\subset\{t:\ t>t_0,\ r|e(t)|\le 2\eta^2(re')^{-1}\}\subset\{|t-t_0|\le 4\eta^2(re')^{-2}\}$$

и $\mathrm{mes}\Gamma_1\le 4\eta^2(re')^{-2}$. Поэтому в силу $|q|\le 2\eta_q|t-t_0|^k$

$$\left|\int\limits_{\Gamma_1}q(t)\,dt\right|\le 2\eta_q\int\limits_0^{4\eta^2(re')^{-2}}\tau^k\,d\tau=\frac{2\eta_q}{k+1}(4\eta^2(re')^{-2})^{k+1},$$

т.е. это бесконечно малая высшего чем r^{-k-1} порядка.

Теперь пусть $t\in\Gamma_2$, оценим величины

$$\gamma=\left|\int\limits_{\Gamma_2}(q(t)-q^{(k)}(t-t_0)^k)\,dt\right|,\quad \gamma^*=\left|\int\limits_{\Gamma_2\setminus(t_0-h(t_0)/(re'),t_0)}(t-t_0)^k\,dt\right|$$

и покажем, что они бесконечно малые по сравнению с r^{-k-1}: главной будет величина

$$\int\limits_{t_0-h(t_0)/(re')}^{t_0}(t-t_0)^k\,dt=-\frac{1}{k+1}\left(\frac{-h(t_0)}{re'}\right)^{k+1},$$

имеющая порядок r^{-k-1}.

Так как $\Gamma_2\subset(t_0-2\eta(re')^{-1},t_0)$, то для величины γ верна оценка

$$\gamma\le|\alpha(2\eta(re')^{-1})|\int\limits_0^{2\eta(re')^{-1}}\tau^k\,d\tau=\frac{\alpha(2\eta(re')^{-1})}{k+1}(\alpha(2\eta(re')^{-1}))^{k+1}.$$

А так как $\left\{\Gamma_2\setminus\left(t_0-\dfrac{h(t_0)}{re'},t_0\right)\right\}\subset\left(t_0-\dfrac{h(t_0)+2\eta(re')^{-1}}{re'},t_0-\dfrac{h(t_0)}{re'}\right)$, то

$$(k+1)\gamma^*\le(k+1)\int\limits_{h(t_0)/(re')}^{(h(t_0)+2\eta(re')^{-1})/(re')}\tau^k\,d\tau=$$

$$=\left(\frac{h(t_0)+2\eta(re')^{-1}}{re'}\right)^{k+1}-\left(\frac{h(t_0)}{re'}\right)^{k+1}\le Cr^{-k-1}\varepsilon(r),$$

постоянная C зависит только от e', η и k. Лемма 3 доказана.

§ 5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ

5.1. Выбор множества Ω. Пусть φ^* – нуль функции Θ, Φ или Ξ, в зависимости от номера теоремы. Зафиксируем достаточно большое $R > 0$ и положим при больших r

$$\Omega = \Omega(r) = \{(\lambda, \varphi, h): \ |\lambda - \lambda_0| \le r^{-1/3}, \ |\varphi^* - \varphi| \le R^{-1}, \ \|h\|_{L^2} \le R\}.$$

Граница $\partial\Omega$ множества Ω в пространстве троек (λ, φ, h) состоит из трех частей:

$$\Omega^\lambda = \{(\lambda, \varphi, h): \ |\lambda - \lambda_0| = r^{-1/3}, \ |\varphi^* - \varphi| \le R^{-1}, \ \|h\|_{L^2} \le R\},$$

$$\Omega^\varphi = \{(\lambda, \varphi, h): \ |\lambda - \lambda_0| \le r^{-1/3}, \ |\varphi^* - \varphi| = R^{-1}, \ \|h\|_{L^2} \le R\},$$

$$\Omega^h = \{(\lambda, \varphi, h): \ |\lambda - \lambda_0| \le r^{-1/3}, \ |\varphi^* - \varphi| \le R^{-1}, \ \|h\|_{L^2} = R\}.$$

5.2. Доказательство теоремы 1. Рассмотрим в пространстве троек (λ, φ, h) деформацию $\Phi^\xi = \Phi^\xi(\lambda, \varphi, h) = (\Phi^\xi_\lambda(\lambda, \varphi, h), \Phi^\xi_\varphi(\lambda, \varphi, h), \Phi^\xi_h(\lambda, \varphi, h))$, компоненты которой при $\xi \in [0, 1]$ определим соотношениями

$$\Phi^\xi_\lambda = \Phi^\xi_\lambda(\lambda, \varphi, h) = \lambda - \lambda_0 - \frac{\xi}{\pi r \operatorname{Re} M(i;\lambda)} \int\limits_0^{2\pi} \sin(t + \varphi) f(t, x(t); \lambda)\, dt,$$

$$\Phi^\xi_\varphi = \Phi^\xi_\varphi(\lambda, \varphi, h) = \Theta(\varphi) - \xi\pi(\lambda - \lambda_0) \operatorname{Im} M(i;\lambda) r^2 + \xi\biggl(r \int\limits_0^{2\pi} \cos(t + \varphi) f(t, x(t); \lambda)\, dt - \Theta(\varphi)\biggr),$$

$$\Phi^\xi_h = \Phi^\xi_h(\lambda, \varphi, h) = h - (1 - \xi) h_\varphi - \xi A_\lambda Q f(t, x(t); \lambda).$$

При $\xi = 0$ поле Φ^ξ имеет простейший вид $(\lambda - \lambda_0, \Theta(\varphi), h - h_\varphi)$, а также единственную особую точку $(\lambda_0, \varphi^*, h_{\varphi^*})$, его вращение (в силу робастности нуля φ^*) на границе любой области, содержащей эту точку, равно ее индексу и равно 1, если $\Theta(\varphi) > 0$ при $\varphi > \varphi^*$, или равно -1, если $\Theta(\varphi) < 0$ при $\varphi > \varphi^*$.

При $\xi = 1$ поле Φ^ξ имеет нули, совпадающие с решениями системы (23)–(25). Для доказательства теоремы достаточно заметить, что деформация Φ^ξ является гомотопией на границе $\partial\Omega$ множества Ω, т.е. деформация не вырождена на $\partial\Omega$.

На каждой части границы не вырождена по крайней мере одна компонента деформации.

На Ω^λ не вырождена компонента Φ^ξ_λ: из $\Phi^\xi_\lambda = 0$ следует $|\lambda - \lambda_0| \le c r^{-1}$, а на Ω^λ выполнено равенство $|\lambda - \lambda_0| = r^{-1/3}$.

В силу липшицевости функции f при некотором c

$$\biggl| \int\limits_0^{2\pi} \sin(t + \varphi) f(t, x(t); \lambda)\, dt - \int\limits_0^{2\pi} \sin(t + \varphi) f(t, x(t); \lambda_0)\, dt \biggr| \le c|\lambda - \lambda_0|,$$

поэтому из $\Phi^\xi_\lambda = 0$ при некотором c_1 следует оценка

$$|\lambda - \lambda_0| \le c_1 r^{-1} \biggl| \int\limits_0^{2\pi} \sin(t + \varphi) f(t, x(t); \lambda_0)\, dt \biggr|.$$

Из $\Phi^\xi_h = 0$ и леммы 1 вытекают неравенства $\|h\|_{C^1} \le C_h$ и (27). Применим следствия из лемм 2 и 3. В силу (33) и предположения $\rho \equiv 0$ справедливо соотношение

$$\int\limits_0^{2\pi} \sin(t + \varphi) f(t, x(t); \lambda_0)\, dt = o(r^{-1}).$$

Таким образом, $|\lambda-\lambda_0|=o(r^{-2})$. Теперь в силу (34) и (37) (и снова липшицевости f по λ) верно соотношение

$$r\int\limits_0^{2\pi}\cos(t+\varphi)f(t,x(t);\lambda)\,dt-\Theta(\varphi)=o(1).$$

Окончательно $\Phi^\xi_\varphi(\lambda,\varphi,h)=\Theta(\varphi)+o(1)$ и если R настолько велико, что $\Theta(\varphi^*\pm R^{-1})\neq 0$ (нуль φ^* изолирован), то при больших r на Ω^φ не вырождена компонента Φ^ξ_φ. На Ω^h при $R>C_h$ не вырождена компонента Φ^ξ_h. Асимптотика ветви x_r следует из (36). Теорема доказана.

5.3. Доказательство теоремы 2. Рассмотрим на Ω деформацию с компонентами

$$\Phi^\xi_\lambda=(1-\xi)(\operatorname{Im}(\bar b'e^{\varphi i})(\lambda-\lambda_0)r^2+\Psi(\varphi))+$$
$$+\xi r^2\Bigg(\int\limits_0^{2\pi}\sin(t+\varphi)f(t,x(t);\lambda)\,dt-\pi\operatorname{Re}M(i;\lambda)(\lambda-\lambda_0)r\Bigg),$$
$$\Phi^\xi_\varphi=(1-\xi)(\pi\operatorname{Im}M(i;\lambda_0)(\lambda-\lambda_0)r^2-\Theta(\varphi))+$$
$$+\xi\Bigg(\pi\operatorname{Im}M(i;\lambda)(\lambda-\lambda_0)r^2-r\int\limits_0^{2\pi}\cos(t+\varphi)f(t,x(t);\lambda)\,dt\Bigg),$$
$$\Phi^\xi_h=h-(1-\xi)h_\varphi-\xi A_\lambda Qf(t,x(t);\lambda).$$

Как и при доказательстве теоремы 1, при $\xi=0$ поле Φ^ξ имеет простейший вид

$$(\operatorname{Im}(\bar b'e^{\varphi i})(\lambda-\lambda_0)r^2+\Psi(\varphi),\ \pi\operatorname{Im}M(i;\lambda_0)(\lambda-\lambda_0)r^2-\Theta(\varphi),\ h-h_\varphi)),$$

это поле (при больших R) имеет единственную особую точку

$$\Bigg(\lambda_0+\frac{\Theta(\varphi_*)}{\pi\operatorname{Im}M(i;\lambda_0)}r^{-2},\varphi^*,h_{\varphi^*}\Bigg)\in\Omega,$$

его вращение (в силу робастности нуля φ^* функции Φ) на границе любой области, содержащей эту точку, равно ее индексу и равно ±1.

При $\xi=1$ поле Φ^ξ имеет нули, совпадающие с решениями системы (23)–(25). Для доказательства теоремы достаточно заметить, что деформация Φ^ξ является гомотопией на $\partial\Omega$. Докажем невырожденность деформации Φ^ξ на $\partial\Omega$.

Вначале отметим, что

$$\Phi^\xi_\varphi=\pi\operatorname{Im}M(i;\lambda_0)(\lambda-\lambda_0)r^2-\Theta(\varphi)+\xi\pi(\operatorname{Im}M(i;\lambda)-\operatorname{Im}M(i;\lambda_0))(\lambda-\lambda_0)r^2+$$
$$+\xi\Bigg(\Theta(\varphi)-r\int\limits_0^{2\pi}\cos(t+\varphi)f(t,x(t);\lambda)\,dt\Bigg).$$

Последнее слагаемое в силу липшицевости функции f и следствий из лемм имеет порядок $o(1)+|\lambda-\lambda_0|r$, слагаемое перед ним имеет порядок не более $(\lambda-\lambda_0)^2r^2$ в силу липшицевости M. Поэтому $|\lambda-\lambda_0|\le cr^{-2}$ при некотором c, а отсюда уже следует равенство

$$\pi\operatorname{Im}M(i;\lambda_0)(\lambda-\lambda_0)r^2-\Theta(\varphi)=o(1). \tag{40}$$

Теперь уже можно оценить компоненту

$$\Phi^\xi_\lambda=\operatorname{Im}(\bar b'e^{\varphi i})(\lambda-\lambda_0)r^2+\Psi(\varphi)-\xi\pi\operatorname{Re}M(i;\lambda)(\lambda-\lambda_0)r^3+$$
$$+\xi\Bigg(r^2\int\limits_0^{2\pi}\sin(t+\varphi)f(t,x(t);\lambda)\,dt-\operatorname{Im}(\bar b'e^{\varphi i})(\lambda-\lambda_0)r^2-\Psi(\varphi)\Bigg).$$

Для оценки слагаемого в скобках воспользуемся соотношением (38) и липшицевостью в силу условия (17) функции Ψ^λ:

$$\left| r^2 \int\limits_0^{2\pi} \sin(t+\varphi) f(t, x(t); \lambda)\, dt - \operatorname{Im}(\bar{b}' e^{\varphi i})(\lambda - \lambda_0) r^2 - \Psi(\varphi) \right| \le$$

$$\le \left| r^2 \int\limits_0^{2\pi} \sin(t+\varphi) b(t; \lambda)\, dt + \Psi^\lambda(\varphi) + o(1) - \operatorname{Im}(\bar{b}' e^{\varphi i})(\lambda - \lambda_0) r^2 - \Psi(\varphi) \right| =$$

$$= |\operatorname{Im}(\bar{b}(\lambda) e^{\varphi i}) r^2 + o(1) - \operatorname{Im}(\bar{b}' e^{\varphi i})(\lambda - \lambda_0) r^2| = o(1).$$

Так как $|\operatorname{Re} M(i; \lambda)| \le c_2 |\lambda - \lambda_0|$ при некотором c_2 в силу липшицевости M, то

$$|\xi \pi \operatorname{Re} M(i; \lambda)(\lambda - \lambda_0) r^3| \le c_3 |\lambda - \lambda_0|^2 r^3 \le c_3 c_2^2 r^{-1}.$$

Итак, для всех нулей деформации доказано равенство

$$\operatorname{Im}(\bar{b}' e^{\varphi i})(\lambda - \lambda_0) r^2 + \Psi(\varphi) = o(1). \tag{41}$$

Теперь можно доказать невырожденность деформации Φ^ξ в условиях теоремы 2.

На Ω^λ не вырождена компонента Φ^ξ_λ. Доказано, что $|\lambda - \lambda_0| \le c r^{-2}$, а на Ω^λ выполнено равенство $|\lambda - \lambda_0| = r^{-1/3}$. Из (40) и (41) вытекает соотношение $\Phi(\varphi) = o(1)$ (функция Φ определена формулой (18)). Это означает, что на Ω^φ не вырождена линейная комбинация $\pi \operatorname{Im} M(i; \lambda_0) \Phi^\xi_\lambda - \operatorname{Im}(\bar{b}' e^{\varphi i}) \Phi^\xi_\varphi$. На Ω^h при достаточно большом R не вырождена компонента Φ^ξ_h. Теорема доказана.

5.4. Доказательство теоремы 3. Вначале заметим, что

$$\lim_{r\to\infty} \sup_{(\lambda,\varphi,h)\in\Omega} \left| \int\limits_0^{2\pi} \sin(t+\varphi) f(t, x(t); \lambda) - 4\alpha_0(\lambda_0) \right| = 0.$$

Рассмотрим на Ω деформацию с компонентами

$$\Phi^\xi_\lambda = (1-\xi)(\lambda - \lambda_0 - \mu r^{-1}) + \frac{\xi}{\pi r M(i; \lambda_0)} \left(\pi \operatorname{Re} M(i; \lambda)(\lambda - \lambda_0) r + \int\limits_0^{2\pi} \sin(t+\varphi) f(t, x(t); \lambda)\, dt \right),$$

$$\Phi^\xi_\varphi = (1-\xi)\Xi(\varphi) + \xi \left(\pi \operatorname{Im} M(i; \lambda)(\lambda - \lambda_0) r^2 - r \int\limits_0^{2\pi} \cos(t+\varphi) f(t, x(t); \lambda)\, dt \right),$$

$$\Phi^\xi_h = h - (1-\xi) h_\varphi - \xi A_\lambda Q f(t, x(t); \lambda).$$

Как и при доказательстве предыдущих теорем, при $\xi = 0$ поле Φ^ξ имеет простейший вид

$$(\lambda - \lambda_0 - \mu r^{-1}, \Xi(\varphi), h - h_\varphi)),$$

при больших R имеет единственную особую точку, его вращение на $\partial\Omega$ равно ± 1.

При $\xi = 1$ поле Φ^ξ имеет нули, совпадающие с решениями системы (23)–(25). Для доказательства теоремы достаточно заметить, что деформация Φ^ξ является гомотопией на $\partial\Omega$.

Поскольку из равенства $\Phi^\xi_\lambda = 0$ при некотором $c > 0$ следует оценка $|\lambda - \lambda_0| \le c r^{-1}$, то на Ω^λ не вырождена компонента Φ^ξ_λ.

Так как $\Phi^{\xi}_{\lambda} = \lambda - \lambda_0 - 4\alpha_0(\lambda_0)/(\pi r M(i;\lambda_0)) + o(r^{-1})$, то (опустим выкладки с применением липшицевости, следствий 1 и 3 и использованием равенства (39)) $\Phi^{\xi}_{\varphi} = \Xi(\varphi) + o(1)$ и на Ω^{φ} не вырождена компонента Φ^{ξ}_{φ}. На Ω^h при достаточно большом R не вырождена компонента Φ^{ξ}_{h}. Теорема доказана.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 06-01-72552 и 06-01-00256).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красносельский М.А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М., 1956.
2. *Красносельский М.А., Забрейко П.П.* Геометрические методы нелинейного анализа. М., 1975.
3. *Schmitt K., Wang Z.Q.* On bifurcation from infinity for potential operators // Differ. Integral Equat. 1991. V. 4. № 5. P. 933–944.
4. *Красносельский А.М., Рачинский Д.И.* О числе неограниченных ветвей решений в окрестности асимптотической точки бифуркации // Функц. анализ и его приложения. 2005. Т. 39. № 3. С. 37–53.
5. *Krasnosel'skii A.M., Rachinskii D.I.* Bifurcation of forced periodic oscillations for equation with Preisach hysteresis // J. of Physics: Conference Series. 2005. V. 22. P. 93–102.
6. The Science of Hysteresis. 3-volume set / Ed. by Mayergoyz Isaak and Bertotti Giorgio. Elsevier, 2006.
7. *Lazer A.C., Leach D.E.* Bounded perturbations of forced harmonic oscillators at resonance // Ann. Mat. Pura Appl. 1969. V. 82. P. 49–68.
8. *Mawhin J., Willem M.* Critical point theory and Hamiltonian systems. New York, 1989.
9. *Красносельский А.М.* Асимптотика нелинейностей и операторные уравнения. М., 1992.
10. *Krasnosel'skii A.M., Mawhin J.* The index at infinity of some twice degenerate compact vector fields // Discrete and Continuous Dynamical Systems. 1995. V. 1. № 2. P. 207–216.
11. *Арнольд В.И.* Задачи Арнольда. М., 2000.

Институт проблем передачи информации РАН,
г. Москва

Поступила в редакцию
05.10.2007 г.