©2007г. А.М. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ, д-р физ.-мат. наук
(Институт проблем передачи информации РАН, Москва),
Д.И. РАЧИНСКИЙ, д-р физ.-мат. наук
(University College Cork
и Институт проблем передачи информации РАН, Москва)

Критерии возникновения резонанса в одноконтурной системе управления с насыщением [1]

Изучаются вынужденные периодические колебания в одноконтурной системе управления с параметром, динамика которой описывается резонансными в линейном приближении уравнениями. Предложены критерии возникновения резонанса, понимаемому как возрастание к бесконечности амплитуды вынужденных колебаний при приближении параметра к некоторым критическим значениям. Основные результаты относятся к случаю, когда ответы определяются ограниченными нелинейностями порядка константы; убывающие к нулю слагаемые не играют роли.

1. Постановка задачи

Статья посвящена исследованию вынужденных периодических колебаний в одноконтурных системах управления, состоящих из линейного интегрирующего звена с рациональной передаточной функцией и ограниченной функциональной нелинейности. Изучается явление резонанса, понимаемое как резкое возрастание (к бесконечности) амплитуды вынужденных колебаний при приближении параметров системы к критическим значениям. Для одноконтурной системы управления такие критические значения определяются частотой входного периодического воздействия и свойствами линейного звена. Если параметры системы отделены от таких критических значений, то резонанс невозможен: амплитуды всех возможных периодических режимов допускают общую априорную оценку. Для зависящей от скалярного параметра одноконтурной системы с автономной функциональной нелинейностью с насыщением предложены точные условия существования и несуществования неограниченных множеств периодических колебаний.

Рассмотрим уравнение

$$L(p;\lambda)x = N(p;\lambda)F(t,x;\lambda), \qquad p = \frac{d}{dt}. \tag{1}$$

Предполагается, что вещественный параметр λ принимает значения из некоторого промежутка Λ; коэффициенты дифференциальных многочленов

$$L(p;\lambda) = p^\ell + a_1(\lambda)p^{\ell-1} + \ldots + a_\ell(\lambda), \quad N(p;\lambda) = p^n + \beta_1(\lambda)p^{n-1} + \ldots + \beta_n(\lambda), \qquad n < \ell,$$

[1] Авторы поддержаны грантами РФФИ (06-01-00256 и 06-01-72552), грантом Science Foundation Ireland (06/RFP/MAT048) и грантом Enterprise Ireland (IC/2006/4).

непрерывно зависят от λ. Пусть $\ell = \deg L \geqslant 2$, и пусть многочлен L при значениях λ, близких к $\lambda_0 \in \operatorname{Int}\Lambda$, имеет вид

$$L(p;\lambda) = \big(p^2+1\big)\tilde{L}(p) + (\lambda-\lambda_0)M(p;\lambda), \qquad \deg M < \ell, \tag{2}$$

многочлен M непрерывно зависит от λ. Это предположение означает, что при $\lambda = \lambda_0$ числа $\pm i$ являются корнями многочлена L, дифференцируемого по λ в точке λ_0. Пусть многочлены L и N степеней ℓ и n взаимно просты при каждом λ (в частности, это означает $N(i;\lambda_0) \neq 0$), ограниченная непрерывная функция F периодична по переменной t с общим для всех значений параметра периодом 2π.

Обозначим через $\mathfrak{N}(\lambda)$ множество 2π-периодических решений уравнения (1) при фиксированном λ. Отсутствие в системе резонанса определяется ограниченностью множества $\mathfrak{M} = \bigcup_{(\lambda_0-\varepsilon,\lambda_0+\varepsilon)} \mathfrak{N}(\lambda)$ всех 2π-периодических решений уравнения (1) при значениях параметра λ из окрестности точки λ_0. При $\lambda = \lambda_0$ линеаризация $L(p;\lambda_0)x = 0$ на бесконечности уравнения (1) имеет неограниченное двупараметрическое множество 2π-периодических решений вида $r\sin(t+\varphi)$, $r > 0$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Как будет показано ниже, множество $\mathfrak{M}$ может быть ограниченным (в L^2, в C), а может быть неограниченным: тогда в естественных ситуациях 2π-периодические решения образуют непрерывные ветви ([1]), уходящие к бесконечности. Обычно таких ветвей ровно две, и каждая является кривой в $L^2 \times \Lambda$.

Задача о неограниченных множествах решений краевых задач и эквивалентных им операторных уравнений с параметром была впервые исследована топологическими методами М.А. Красносельским в 50х годах прошлого века. В книге [2] было введено понятие асимптотической точки бифуркации (см. также [1]). Был предложен принцип смены индекса (в нуле и на бесконечности), позволяющий устанавливать наличие неограниченных множеств нулей векторного поля по его простым топологическим характеристикам. В силу этого принципа, если при изменении параметра происходит вырождение главной линейной части системы нечетной кратности, то соответствующее значение параметра является асимптотической точкой бифуркации или, что то же, точкой бифуркации из бесконечности. У уравнения (1) происходит двукратное вырождение линейной части и для исследования ограниченности множества 2π-периодических решений необходимо использовать свойства нелинейности.

При вырожденной линейной части старшие нелинейные слагаемые могут определять индекс на бесконечности соответствующего эквивалентного векторного поля, см. [3]. Анализ уравнений (1) при $\lambda = \lambda_0$ топологическими методами берет свое начало в известной работе [4]; далее результаты развивались многими авторами (библиографию и часть результатов см. в [5]). В разделе 3.2 проводится сравнение достаточных условий наличия резонанса в нелинейной системе с насыщением, следующих из принципа смены индекса, и "почти необходимых и достаточных" условий, полученных прямым анализом системы разветвления. Для случая $N \equiv 1$, то есть для обыкновенного дифференциального уравнения

$$L(p;\lambda)x = F(t,x;\lambda), \qquad p = \frac{d}{dt} \tag{3}$$

старшего порядка выделены условия, когда принцип смены индекса не применим, однако неограниченные ветви периодических решений существуют.

В настоящей работе исследуются только те случаи, когда ответы удается получить по главным слагаемым нелинейностей и свойства убывающих на бесконечности слагаемых можно не использовать. Если нелинейность $F(t,x;\lambda)$ имеет "общий вид", то уходящие на бесконечность множества решений могут быть устроены достаточно сложно. В разделе 3 подробно рассматривается сравнительно простая ситуация, когда $F(t,x;\lambda) = b(t;\lambda) + f(x;\lambda)$ и f удовлетворяет условиям насыщения. Для уравнений с такими нелинейностями формулируются и доказываются точные результаты, в разделе 4 указаны разнообразные пути для обобщений.

2. Общие предположения

2.1. Предположения о нелинейности. Везде предполагается, что функция F непрерывна по совокупности переменных $t, x \in \mathbb{R}, \lambda \in \Lambda$, глобально ограничена и периодична по t с периодом 2π:

$$F(t+2\pi, x;\lambda) = F(t,x;\lambda),\ |F(t,x;\lambda)| \leqslant C_F, \qquad t,x \in \mathbb{R}, \lambda \in \Lambda.$$

Если специально не оговаривается противное, считается, что

$$F(t,x;\lambda) = b(t;\lambda) + a(t;\lambda)\operatorname{sign}(x) + g(t,x;\lambda), \qquad t \in [0,2\pi],\ x \in \mathbb{R},\ \lambda \in \Lambda, \tag{4}$$

где нелинейность g мала на бесконечности:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \sup_{t \in [0,2\pi];\ \lambda \in \Lambda} |g(t,x;\lambda)| = 0$$

и имеет разрыв в нуле, компенсирующий скачок функции $\operatorname{sign}(x)$. Заметим, что каждая функция $F(t,x;\lambda)$, удовлетворяющая равномерному условию насыщения

$$\lim_{x \to \pm\infty} \sup_{t \in [0,2\pi];\ \lambda \in \Lambda} \big|F(t,x;\lambda) - f^{\pm}(t;\lambda)\big| = 0, \tag{5}$$

допускает представление (4) при $b(t;\lambda) = \frac{1}{2}\big(f^+(t;\lambda) + f^-(t;\lambda)\big)$ и $a(t;\lambda) = \frac{1}{2}\big(f^+(t;\lambda) - f^-(t;\lambda)\big)$.

Во всех дальнейших построениях используется комплексное число

$$\bar{b}(\lambda) = \int_0^{2\pi} e^{it} b(t;\lambda)\, dt.$$

2.2. Предположения о линейной части. Относительно многочлена L делаются два основных предположения: нерезонансность $\tilde{L}$ и трансверсальность M.

Нерезонансность означает, что многочлен $\tilde{L}$ не имеет корней вида $ki,\ k \in \mathbb{Z}$, то есть

$$\tilde{L}(ki) \neq 0, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Трансверсальность означает условие

$$\Im m\left(M(i;\lambda_0)N(-i;\lambda_0)\right) \neq 0$$

в силу которого кривая $L(i;\lambda)/N(i;\lambda)$ на комплексной плоскости при значениях λ из окрестности точки $\lambda=\lambda_0$ трансверсально пересекает вещественную ось в начале координат.

Ниже 2π-периодические решения изучаются при значениях λ из малой окрестности точки λ_0. Не теряя общности, предположим, что для всех $\lambda\in\Lambda$ многочлен L не имеет корней вида $\pm ki$ за исключением пары простых корней $\pm i$ при $\lambda=\lambda_0$. В достаточно малой окрестности точки λ_0 это свойство вытекает из нерезонансности и трансверсальности.

2.3. Определения. Зафиксируем функциональное пространство B (например, $B=L^2$). Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество всех 2π-периодических решений[2] (x,λ) уравнения (1). Назовем λ_0 *асимптотической точкой бифуркации в* B, если для любой окрестности $U(\lambda_0)\subset\Lambda$ точки λ_0 множество $\mathfrak{F}=\{(x,\lambda)\in\mathfrak{M}:\lambda\in U(\lambda_0)\}$ не ограничено в $B\times\Lambda$.

Положим $Z_\rho=\{(x,\lambda):\|x\|_B<\rho,\lambda\in\Lambda\}$. Следуя [1, 2], назовем множество $\mathfrak{N}\subset\mathfrak{M}$ *неограниченной непрерывной ветвью решений*, если при любом достаточно большом $\rho>0$ на границе каждого ограниченного множества $\Gamma\subset B\times\Lambda$, $\Gamma\supset Z_\rho$ есть хотя бы одна точка $(x,\lambda)\in\mathfrak{N}\backslash Z_\rho$. В силу предположений предыдущего раздела, для любой окрестности $U(\lambda_0)\subset\Lambda$ точки λ_0 множество $\{(x,\lambda)\in\mathfrak{M}:\lambda\notin U(\lambda_0)\}$ ограничено. Поэтому для неограниченной ветви решений справедливо равенство

$$\lim_{\rho\to\infty}\sup_{(x,\lambda)\in\mathfrak{N}\backslash Z_\rho}|\lambda-\lambda_0|=0, \tag{6}$$

в силу которого λ_0 является асимптотической точкой бифуркации. Ветвь $\mathfrak{N}$ назовем *направленной*, если существует предел

$$\lim_{\rho\to\infty}\sup_{(x,\lambda)\in\mathfrak{N}\backslash Z_\rho}\big\|x/\|x\|_B-e\big\|_B=0;$$

вектор e назовем *предельным* для $\mathfrak{N}$. Направленная неограниченная непрерывная ветвь может не быть непрерывной кривой в пространстве $B\times\mathbb{R}$. При дополнительных предположениях о гладкости непрерывная ветвь является кривой.

3. Критерии существования и отсутствия резонанса

3.1. Основные результаты. Рассмотрим нелинейность частного вида $F(t,x;\lambda)=b(t;\lambda)+f(x;\lambda)$, где $b(t+2\pi;\lambda)=b(t;\lambda)$. Уравнение (1) с такой нелинейностью принимает вид

$$L(p;\lambda)x=N(p;\lambda)\big(b(t;\lambda)+f(x;\lambda)\big). \tag{7}$$

Этот случай соответствует системе управления с входом b и автономной нелинейностью f.

Теорема 1. *Пусть $\bar f(\lambda_0)\neq 0$ и справедливо условие*

$$|\bar b(\lambda_0)M(i;\lambda_0)N(-i;\lambda_0)|<4|\bar f(\lambda_0)\Im m\left(M(i;\lambda_0)N(-i;\lambda_0)\right)|. \tag{8}$$

Тогда в системе, описываемой уравнением (7) *резонанса нет: при некотором $\rho>0$ все 2π-периодические решения x_λ уравнения* (7) *допускают общую априорную оценку $\|x_\lambda\|_{C^{\ell-1}}\leqslant\rho$.*

[2]Решениями называются и сами функции $x=x(t)$, и пары (x,λ); из контекста ясно, о чем идет речь.

Т е о р е м а 2. *Пусть $\bar f(\lambda_0) \neq 0$ и справедливо условие*

$$|\bar b(\lambda_0) M(i;\lambda_0) N(-i;\lambda_0)| > 4 |\bar f(\lambda_0) \Im m \big(M(i;\lambda_0) N(-i;\lambda_0)\big)|. \tag{9}$$

Тогда в системе, описываемой уравнением (7) есть резонанс: множество 2π-периодических решений x_λ уравнения (7) при λ из любой окрестности точки λ_0 не ограничено в L^2.

В условиях теоремы 2 точка λ_0 является асимптотической точкой бифуркации в L^2 (и в $C^{\ell-1}$) для периодической задачи. Вообще говоря, в условиях теоремы 2 существуют ровно две различных направленных непрерывных ветви решений, уходящих на бесконечность. Предельные функции в L^2 для этих ветвей имеют вид $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(t + \varphi_0^j)$, где φ_0^j, $j = 1, 2$ — это 2 корня скалярного трансцендентного уравнения

$$\big|\bar b(\lambda_0) M(i;\lambda_0) N(-i;\lambda_0)\big| \cos(\varphi_0^j + \theta_0) = 4 \bar f(\lambda_0) \Im m \big(M(i;\lambda_0) N(-i;\lambda_0)\big),$$

причем $\theta_0 = \arg\big(\bar b(\lambda_0) M(i;\lambda_0) N(-i;\lambda_0)\big)$.

3.2. Связь с принципом смены индекса. Отдельно сформулируем следствия из этих теорем для уравнения (3); с нелинейностью F вида $b + f$ оно принимает вид

$$L(p;\lambda)x = b(t;\lambda) + f(x;\lambda), \tag{10}$$

а условие насыщения (5) — вид

$$\lim_{x \to \pm\infty} \sup_{\lambda \in \Lambda} \big| f(x;\lambda) \pm \bar f(\lambda) \big| = 0. \tag{11}$$

В этом разделе для уравнения (10) будет проведен анализ связи условий (8) и (9) с аналогичными условиями, вытекающими из смены индекса.

С л е д с т в и е 1. *Пусть $\bar f(\lambda_0) \neq 0$ и справедливо условие*

$$|\bar b(\lambda_0) M(i;\lambda_0)| < 4 |\bar f(\lambda_0) \Im m\, M(i;\lambda_0)|. \tag{12}$$

Тогда при некотором $\rho > 0$ все 2π-периодические решения x_λ уравнения (10) допускают общую априорную оценку $\|x_\lambda\|_{C^{\ell-1}} \leqslant \rho$.

С л е д с т в и е 2. *Пусть $\bar f(\lambda_0) \neq 0$ и справедливо условие*

$$|\bar b(\lambda_0) M(i;\lambda_0)| > 4 |\bar f(\lambda_0) \Im m\, M(i;\lambda_0)|. \tag{13}$$

Тогда точка λ_0 является асимптотической точкой бифуркации в L^2 (и в $C^{\ell-1}$) для периодической задачи: множество всех 2π-периодических решений x_λ уравнения (10) при λ из любой окрестности точки λ_0 не ограничено.

Выберем α такое, что многочлен $L(p;\lambda)+\alpha$ не имеет корней вида $ki,\ k\in\mathbb{Z}$ при $\lambda\in\Lambda$. Добавим к обеим частям уравнения (10) слагаемое αx. Линейный дифференциальный оператор $L(d/dt;\lambda)+\alpha$ с периодическими краевыми условиями непрерывно обратим; положим $\mathfrak{A}_\lambda=\big(L(d/dt;\lambda)+\alpha\big)^{-1}$.

Рассмотрим векторное поле $\Phi_\lambda x=x-\mathfrak{A}_\lambda\big(\alpha x+b(t;\lambda)+f(x;\lambda)\big)$. По построению, множество его нулей совпадает с множеством решений уравнения (10) (при каждом λ). Векторное поле Φ_λ вполне непрерывно в пространстве L^2 вместе с оператором $\mathfrak{A}_\lambda$. Так как $L(i;\lambda_0)=0$ и $L(i;\lambda)\neq 0$ при $\lambda\neq\lambda_0$, то у оператора $\alpha\mathfrak{A}_\lambda$ при $\lambda=\lambda_0$ есть двукратное собственное значение 1; при других значениях λ число 1 не является собственным значением этого оператора. Поэтому индекс γ_λ на бесконечности векторного поля Φ_λ при $\lambda\neq\lambda_0$ определяется линеаризованным полем $x-\alpha\mathfrak{A}_\lambda x$: индекс γ_λ имеет одно и то же значение при всех $\lambda\neq\lambda_0$ и равен либо $+1$, либо -1. При $\lambda=\lambda_0$ либо $\gamma_{\lambda_0}=0$, если $|\bar b(\lambda_0)|>4|\bar f(\lambda_0)|$, либо $\gamma_{\lambda_0}=\gamma_\lambda$ при $\lambda\neq\lambda_0$, если $|\bar b(\lambda_0)|<4|\bar f(\lambda_0)|$ (см. [5]).

Пусть $\Re e\, M(i;\lambda_0)\neq 0$ и, следовательно, $|M(i;\lambda_0)|>|\Im m\, M(i;\lambda_0)|$. В верхней части рис. 1 на полуоси $|\bar b(\lambda_0)|$ отмечены зоны применимости принципа смены индекса и зоны существования и несуществования неограниченных множеств решений.

Рис. 1

В нижней части рис. 1 изображены схематичные графики типичных зависимостей норм 2π-периодических решений от λ для трех различных зон значений $|\bar b(\lambda_0)|$. При $|\bar b(\lambda_0)|>4|\bar f(\lambda_0)|$ неограниченные ветви существуют с обеих сторон от точки бифуркации: при $\lambda>\lambda_0$ и при $\lambda<\lambda_0$. При $4\big|\bar f(\lambda_0)\sin\big(\arg(M(i;\lambda_0))\big)\big|<|\bar b(\lambda_0)|<4|\bar f(\lambda_0)|$ неограниченные ветви существуют только с одной стороны от точки бифуркации, либо при $\lambda>\lambda_0$, либо при $\lambda<\lambda_0$ (как изображено на нижней средней части рис. 1).

Если $|\bar b(\lambda_0)|$ велико, то выполнены и неравенство (13), и неравенство $|\bar b(\lambda_0)|>4|\bar f(\lambda_0)|$. Неограниченные ветви есть и ловятся принципом смены индекса: $|\gamma_\lambda|=1$ при $\lambda\neq\lambda_0$ и $\gamma_{\lambda_0}=0$ при $\lambda=\lambda_0$. При уменьшении $|\bar b(\lambda_0)|$ неравенство (13) сохраняется, но $|\bar b(\lambda_0)|<4|\bar f(\lambda_0)|$: неограниченные ветви есть, но они не ловятся принципом смены индекса. При дальнейшем уменьшении $|\bar b(\lambda_0)|$ соотношение (13) нарушается и переходит в (12), резонанс исчезает.

4. Замечания

I. Многочлен L, имеющий пару простых корней $\pm i$ при $\lambda=\lambda_0$, может быть записан в отличной от (2) форме $L(p;\lambda)=\big(p^2+\alpha(\lambda)p+\beta(\lambda)\big)R(p;\lambda)$. Если коэффициенты многочлена R и функции α и β дифференцируемы в точке λ_0, то, положив $\tilde L(p)=R(p;\lambda_0)$, легко прийти к виду (2). Для наших целей вид (2) более удобен.

II. Можно обобщить теоремы 1 и 2 на уравнения с неавтономными нелинейностями $F(t,x;\lambda)$ вида (4), в котором $a(t;\lambda)=\bar f(\lambda)+\tilde a(t;\lambda)$, где $\tilde a$ — непрерывная антипериодическая функция: $a(t+\pi;\lambda)=-a(t;\lambda)$ (ряд Фурье такой функции содержит только нечетные гармоники). Для каждой антипериодическая функции $\tilde a$ справедливо тождество

$$\int\limits_0^{2\pi}\tilde a(t)\,e^{(t+\varphi)i}\,\mathrm{sign}\big(\sin(t+\varphi)\big)\,dt\equiv 0,$$

позволяющее расширить применимость теорем 1 и 2; основные условия (8) и (9) сохраняются.

Рассмотрим нелинейность $F(t,x;\lambda) = b(t;\lambda) + a(t;\lambda)\operatorname{sign}(x) + g(t,x;\lambda)$ общего вида (4). Пусть $M(i;\lambda) \neq 0$. Введем в рассмотрение π-периодическую функцию

$$V(\varphi;\lambda) = \int_0^{2\pi} e^{(t+\varphi)i} a(t;\lambda)\operatorname{sign}\bigl(\sin(t+\varphi)\bigr)\,dt.$$

Пусть $a(t;\lambda) = a_1(t;\lambda) + a_2(t;\lambda)$, где $a_1(t;\lambda) + a_1(t+\pi;\lambda) = 0$ и $a_2(t;\lambda) = a_2(t+\pi;\lambda)$, то есть в a_1 собраны все гармоники с нечетными номерами, а в a_2 — с четными. Пусть

$$a_2(t;\lambda) = \alpha(2t;\lambda), \qquad \alpha(t;\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(\lambda)\sin(kt+\psi_k).$$

Для определенности пусть $\psi_0 = \pi/2$. Тогда справедлива формула

$$V(\varphi;\lambda) = 4\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k(\lambda)}{4k^2-1}\bigl(2k\cos(2k\varphi-\psi_k) + i\sin(2k\varphi-\psi_k)\bigr).$$

Теорема 3. *Пусть функция*

$$\rho(\varphi) = \Re e\Bigl(M(i;\lambda_0)N(-i;\lambda_0)\bigl(e^{\varphi i}\bar{b}(\lambda_0) + V(\varphi;\lambda_0)\bigr)\Bigr)$$

не равна тождественно нулю. Если функция ρ не обращается в нуль, то все 2π-периодические решения x_λ уравнения (1) с нелинейностью (4) допускают общую априорную оценку. Если у функции ρ есть $2N$ робастных нулей, то точка λ_0 является асимптотической точкой бифуркации в L^2 для периодической задачи и существует по крайней мере $2N$ направленных непрерывных неограниченных ветвей периодических решений.

Доказательство этой теоремы идейно не отличается от доказательств теорем 1 и 2, поэтому оно не приводится. Ограничимся простым примером. Если $\bar{b}(\lambda_0) = 0$ и

$$\int_0^{2\pi} a(t;\lambda_0)\,dt = 0,$$

(например, $b(t;\lambda) = 1+\sin 3t$, $a(t;\lambda) = \sin t + \cos 2t$), то существует по крайней мере 4 неограниченных непрерывных ветви периодических решений.

III. Каждой функции $f(x;\lambda)$ поставим в соответствие нечетную функцию, определяемую при $r > 0$ равенством

$$\Phi_\lambda(r) = \int_0^{2\pi} \sin t\, f(r\sin t;\lambda)\,dt.$$

Такие *описывающие функции* были использованы Андроновым, Боголюбовым и Крыловым [6] для приближенного описания нелинейных систем[3].

[3] В англоязычной литературе по теории управления используется термин “describing function” (см. [7]).

Если f удовлетворяет условию (11), то

$$\Phi_\lambda(r) \to 4\bar{f}(\lambda) \qquad \text{при} \qquad r \to \infty; \tag{14}$$

именно это условие является основным в доказательстве. Многие другие функции f, не удовлетворяющие условию (11), также имеют описывающую функцию, для которой справедливо предельное соотношение (14). Например, если функция f_0 четная, то ее описывающая функция Φ — тождественный нуль. Приведем еще один пример, подробнее см. в [8, 9]. Пусть функция f_1 имеет сублинейную первообразную:

$$\lim_{\xi\to\infty} \frac{1}{\xi} \int\limits_0^\xi f_1(u)\, du = 0.$$

Тогда построенная по f_1 описывающая функция стремится к нулю на бесконечности:

$$\lim_{r\to\infty} \int\limits_0^{2\pi} \sin t\, f_1(r\sin t)\, dt = 0.$$

Следовательно, если функция f удовлетворяет соотношению (14), то функция $f + f_0 + f_1$, где f_0 четна, а f_1 сублинейна, тоже удовлетворяет (14).

Сублинейны первообразные всех периодических и почти периодических функций с нулевым средним, функций $\sin\sqrt[3]{x}$, $\sin^3 x$ и разнообразных других. Простым примером ограниченной функции, первообразная которой не сублинейна, служит $f(x) = \operatorname{sign}(x)\sin\ln(1+|x|)$.

Теоремы 1 и 2 справедливы для нелинейностей $f(x;\lambda)$, описывающая функция которых удовлетворяет соотношению (14).

IV. Аналоги теорем 1 и 2 справедливы для уравнений с некоторыми гистерезисными нелинейностями. Приведем один пример. Обозначим через $\mathcal{P}x$ гистерезисную нелинейность (оператор) Прейсаха. Описание и свойства этой нелинейности можно найти, например, в книгах [10, 11]. В [12] доказана асимптотическая однородность нелинейности Прейсаха и ряда других гистерезисных нелинейностей, аналогичная рассматриваемому ниже свойству асимптотической однородности (П.6) оператора суперпозиции функциональной нелинейности с насыщением. Пусть уровни насыщения нелинейности Прейсаха зависят от параметра λ и равны $\pm\bar{f}(\lambda)$. Тогда для уравнения $L(p;\lambda)x = N(-i;\lambda_0)\big(b(t;\lambda) + \mathcal{P}_\lambda x\big)$ без изменений справедливы заключения теорем 1 и 2.

V. Все теоремы легко модифицируются на случай, когда $L(p;\lambda) = \big(p^2+n^2\big)\tilde{L}(p) + (\lambda - \lambda_0)M(p;\lambda)$, $n > 1$ — натуральное число. При этом вместо $\bar{b}(\lambda_0)$ используется число

$$\bar{b}_n(\lambda) = \int\limits_0^{2\pi} e^{int} b(t;\lambda)\, dt.$$

VI. Предположение $\tilde{L}(i) \neq 0$ не используется в доказательствах. Теоремы сохраняют силу, если $L = (p^2+1)^k\tilde{L}(p) + (\lambda-\lambda_0)M(p;\lambda)$ и $k > 1$. Это неожиданный на первый взгляд (все доказательства сохраняются) факт справедлив, так как при увеличении k кратность 2 нулевого собственного значения дифференциального оператора $L(p;\lambda_0)$ не изменится. Если же проводить конструкции в фазовом пространстве, то там при увеличении k не меняется размерность подпространства собственных векторов, а возрастает лишь размерность множества присоединенных векторов, которая не играет роли во многих бифуркационных задачах.

VII. При дополнительных предположениях о липшицевости нелинейности f и всех коэффициентов линейной части уравнения неограниченные непрерывные ветви 2π-периодических решений являются кривыми в разумно выбранных пространствах, например в $L^2 \times \Lambda$. При этом можно точно указать их количество — в условиях теоремы 2 существует ровно две кривых, уходящих в бесконечность. Условия липшицевости включают липшицевость по параметру λ и липшицевость по x с константой, убывающей на бесконечности к нулю:

$$|f(x;\lambda) - f(y;\lambda)| \leqslant d(r)|x-y|, \qquad r = \min\{|x|,|y|\}, \qquad d(r) \to 0,\ r \to \infty.$$

Последнее предположение вполне естественно для нелинейностей с насыщением.

VIII. Теоремы 1 и 2 охватывают ситуации, когда

$$|\bar{b}(\lambda_0)M(i;\lambda_0)N(-i;\lambda_0)| \neq 4|\bar{f}(\lambda_0)\Im m\, M(i;\lambda_0)N(-i;\lambda_0)|.$$

Если справедливо равенство $|\bar{b}(\lambda_0)M(i;\lambda_0)N(-i;\lambda_0)| = 4|\bar{f}(\lambda_0)\Im m\, M(i;\lambda_0)N(-i;\lambda_0)|$, то существование неограниченных ветвей периодических решений уравнения (1) определяется меньшими слагаемыми, в частности свойствами убывающей к нулю на бесконечности функции g в разложении (4).

IX. Рассмотрим аналогичное (10) уравнение

$$L(p;\xi)x = f(x;\xi) + b(t;\xi) \tag{15}$$

с двумерным параметром $\xi = (\xi^1, \xi^2)$. Как и ранее, предположим, что при некотором $\xi = \xi_0$ у многочлена L есть корни $\pm i$ и верно представление $L(p;\xi) = (p^2+1)\tilde{L}(p) + (\xi^1 - \xi^1_0)M_1(p;\xi) + (\xi^2 - \xi^2_0)M_2(p;\xi)$. Задача о существовании больших периодических решений для уравнения (15) упрощается при переходе к естественному комплексному параметру $\mu = L(i;\xi)$, обращающемуся в нуль при $\xi = \xi_0$. Предположим, что такой переход возможен, то есть выполнено условие невырожденности, гарантирующее обратимость замены параметра ξ на μ в окрестности точки $\mu_0 = 0$. Тогда для 2π-периодических решений уравнения (15) верно равенство

$$\mu r\pi = i\int_0^{2\pi} e^{-i(t+\varphi)}\big(f(x;\xi(\mu)) + b(t;\xi(\mu))\big)\,dt,$$

где r и φ — амплитуда и фаза первой гармоники решения $x(t)$ (это комплексное равенство аналогично приводимой ниже в доказательствах паре равенств (П.3), (П.4) для уравнения (1)). Переходя здесь к пределу при $r \to \infty$ и используя асимптотическую однородность (П.6) нелинейности f, получим равенство $\mu r\pi = ie^{-i\varphi}\bar{b}^*(\xi(\mu)) + 4\bar{f}(\xi(\mu))$, где звездочка означает комплексное сопряжение. Отбрасывая в правой части этого равенства малые слагаемые порядка $o(\mu)$, приходим к уравнению разветвления

$$\mu r\pi = ie^{-i\varphi}\bar{b}^*(\xi_0) + 4\bar{f}(\xi_0) \tag{16}$$

задачи о бифуркации периодических решений из бесконечности, определяющему асимптотику больших по амплитуде периодических решений уравнения (15) и асимптотику границы области существования таких решений в окрестности начала координат комплексной плоскости изменения параметра μ. Эту область естественно называть областью синхронизации или языком Арнольда по аналогии с другими подобными задачами.

При переменных φ и $r > 0$ и фиксированном μ правая часть уравнения (16) определяет окружность $\{\zeta : |\zeta - 4\bar{f}(\xi_0)| = |\bar{b}(\xi_0)|\} \subset \mathbb{C}$, левая — луч $\{\zeta : \zeta = r\mu,\ r > 0\} \subset \mathbb{C}$, выходящий из начала координат. Каждая точка трансверсального пересечения этих окружности и луча соответствует периодическому решению уравнения (15) с нормой, удовлетворяющей оценкам $c_1/|\mu| \le \|x\|_C \le c_2/|\mu|$. При $|\bar{b}(\xi_0)| > 4|\bar{f}(\xi_0)|$ начало координат лежит внутри окружности, поэтому луч трансверсально пересекает ее при любом μ в единственной точке. В этой ситуации область существования периодических решений содержит все проколотую малую окрестность нулевого значения параметра μ ("круглый" язык Арнольда). При $|\bar{b}(\xi_0)| < 4|\bar{f}(\xi_0)|$ луч трансверсально пересекает окружность в двух точках при значениях параметра μ из открытого сектора S, ограниченного касательными к окружности, проведенными из нуля; при значениях μ из дополнения к замыканию сектора S окружность и луч не пересекаются. Поэтому сектор S служит линейной асимптотикой "треугольного" языка Арнольда, криволинейные границы которого касаются сторон сектора в его вершине в нуле. Границы сектора S определяются равенством $|\bar{b}(\xi_0)| = 4|\bar{f}(\xi_0)\sin(\arg\mu)|$. Как в случае круглого, так и треугольного языка Арнольда значение $\mu = 0$ является точкой его границы, при приближении к которой вдоль языка амплитуды периодических решений растут как $|\mu|^{-1}$; при μ из дополнительной к языку области больших по амплитуде периодических решений нет.

Если комплексный параметр μ меняется вдоль кривой $\mu(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)\nu(\lambda)$, то (15) переходит в уравнение типа (3) с одним скалярным параметром λ. Множество периодических решений этого уравнения не ограничено в ситуации, когда хотя бы одна из ветвей кривой $\mu(\lambda)$ (при $\lambda < \lambda_0$, либо при $\lambda > \lambda_0$) или обе эти ветви, — содержится в языке Арнольда при малых $|\lambda - \lambda_0|$. Если же кривая лишь задевает язык в вершине, то множество периодических решений допускает априорную оценку. Уравнение разветвления (16) содержит дополнительную информацию. В общем случае, когда кривая $\mu = (\lambda - \lambda_0)\nu(\lambda)$ не выходит на границу языка, достаточно рассмотреть ее касательную $\mu = (\lambda - \lambda_0)\nu(\lambda_0)$ в нуле. Если окружность, определяемая правой частью уравнения (16), охватывает нуль, то прямая $\mu = (\lambda - \lambda_0)\nu(\lambda_0)$ пересекает ее в двух точках: один раз при $\lambda < \lambda_0$, другой раз при $\lambda < \lambda_0$. Точки пересечения определяют асимптотику (предельная функция) двух неограниченных направленных ветвей периодических решений, как на рис. 1 справа. Если нуль лежит вне окружности и прямая $\mu = (\lambda - \lambda_0)\nu(\lambda_0)$ проходит через сектор S, то $\lambda - \lambda_0$ имеет одинаковый знак для обеих точек пересечения и направленные неограниченные ветви расположены так, как показано на рис. 1 в центре. Если прямая пересекает замыкание сектора S лишь в его вершине, то неограниченных ветвей нет, как на рис. 1 слева.

X. Методы использованные при доказательстве теорем 1 и 2 применимы при анализе периодических решений уравнений $L(p;\lambda)x = N(p;\lambda)F(t, x, x', x(t-h);\lambda)$ и более общих уравнений с несколькими различными запаздываниями, в которых $|F(t,x,y,z;\lambda) - \Psi(t,x,y,z;\lambda)| \to 0$ на бесконечности и $\Psi(t,rx,ry,rz;\lambda) = \Psi(t,x,y,z;\lambda)$ при $r > 0$.

XI. В условиях теоремы 2, периодические решения, норма которых стремится к бесконечности при $\lambda \to \lambda_0$, устроены, вообще говоря, следующим образом. В пространстве $L^2 \times \Lambda$ есть ровно 2 непрерывные кривые решений, уходящие в бесконечность. Асимптотами этих кривых в бесконечности служат полупрямые

$$\lambda = \lambda_0, \quad x(t) = r\sin(t+\varphi_j) + A_{\lambda_0} Q\bigl(b(t;\lambda_0) + \bar f(\lambda_0)\,\mathrm{sign}\bigl(\sin(t+\varphi_j)\bigr)\bigr), \quad r > 0,$$

где операторы Q, A определены явно в начале следующего раздела.

В работе [13] рассмотрен случай четного многочлена L и $N \equiv 1$. При этом не выполнено условие трансверсальности, и этот случай не связан с теоремами 1 и 2. Если нелинейность f имеет вид $b(t) + f(x)$ $(f(x) \to \pm\bar f,\ x \to \pm\infty)$ и $\bar b = 0$, то в окрестности точки бифуркации существует по крайней мере 6 неограниченных ветвей периодических решений. Приведен алгоритм подсчета количества ветвей решений и для более общих случаев, однако многочлен L всегда четный и нелинейность f обязательно имеет вид $b(t;\lambda) + f(x;\lambda)$. Для нелинейностей другого вида (например, $a(t)f(x)$), как и для многочленов L общего вида, основная конструкция работы [13] не действует.

5. Заключение

В работе получены критерии возникновения резонанса в одноконтурной систем управления с параметром, содержащих нелинейности с насыщением.

Условия несуществования неограниченных множеств периодических колебаний могут быть интерпретированы как возможность защиты от резонанса линейного звена нелинейной обратной связью: при выполнении условий нерезонансности и трансверсальности в системах с достаточно большим соотношением уровня насыщения к амплитуде главной гармоники входа резонанс невозможен даже при вырождении линейной части.

Впервые приведен содержательный пример гладкой бесконечномерной задачи с параметром, в которой не применим принцип смены индекса для бифуркаций на бесконечности, однако у которой существуют асимптотические точки бифуркации (множество решений априори не ограничено).

П Р И Л О Ж Е Н И Е

1. Общая часть доказательств. Во всех доказательствах используются ортогональные в $L^2 = L^2(0,2\pi)$ проекторы

$$Px = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos(t-s)x(s)\,ds, \qquad Qx = x - Px.$$

Они проектируют на подпространства $E = PL^2 \subset L^2$ и $E^\perp = QL^2 \subset L^2$.

Из предположений о многочлене L вытекает, что при всех $\lambda \in \Lambda$ числа $0, \pm 2i, \pm 3i, \ldots$ не являются его корнями и множество его значений в этих точках отделено от нуля. Подпространства E и $E^{\perp}$ инвариантны относительно оператора d/dt, поэтому в подпространстве $E^{\perp}$ при каждом[4] λ определен оператор $A_\lambda = N(d/dt;\lambda)/L(d/dt;\lambda)$ с 2π-периодическими краевыми условиями, ставящий в соответствие каждой достаточно гладкой функции $u(t) \in E^{\perp}$ решение периода 2π уравнения $Lx = Nu$. Каждый оператор A_λ непрерывно продолжим до всего $E^{\perp}$ и вполне непрерывен. Более того, он действует из $E^{\perp}$ в пространства C, $C^{\ell-n-1}$ и также вполне непрерывен. Нормы операторов A_λ в L^2, то есть величины

$$\|A_\lambda\| = \|A_\lambda Q\|_{L^2 \to L^2} = \max_{k=0,\pm 2,\pm 3} \bigl|N(ki;\lambda)/L(ki;\lambda)\bigr|$$

допускают общую оценку сверху:

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} \|A_\lambda\| = C_A < \infty.$$

Аналогично, справедлива общая априорная оценка

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} \|A_\lambda Q\|_{L^2 \to C} = C_A^* < \infty \tag{П.1}$$

(оценки норм операторов $A_\lambda Q : L^2 \to C^{\ell-n-1}$ не используются).

Рассмотрим представление $x(t) = r\sin(t+\varphi) + h(t)$, $r \geqslant 0$, $Px = r\sin(t+\varphi)$, $Qx = h(t)$ функции x. Так как каждое 2π-периодическое решение x уравнения (3) удовлетворяет равенству $h = A_\lambda QF(t,x(t);\lambda)$, то справедливы общие априорные оценки

$$\|h\|_{L^2} \leqslant C_A C_F \sqrt{2\pi}, \qquad \|h\|_C \leqslant C_A^* C_F \sqrt{2\pi}. \tag{П.2}$$

Отсюда следует, во-первых, что множество 2π-периодических решений x уравнения (3) может быть неограниченным, только если множество соответствующих скаляров r не является ограниченным, и, во-вторых, неограниченные множества решений следует искать в виде $x(t) = r\sin(t+\varphi) + h(t)$, где $r \to \infty$, $h \in E^{\perp}$.

Ортогонально проектируя уравнение (3) на подпространства E и $E^{\perp}$, получим, что функция $x(t) = r\sin(t+\varphi) + h(t)$ является 2π-периодическим решением уравнения (3), если и только если она и ее компоненты r, φ, h удовлетворяют системе уравнений[5]

$$\pi(\lambda-\lambda_0)\Re e\, W(i;\lambda) r - \int_0^{2\pi} \sin(t+\varphi) F\bigl(t,x(t);\lambda\bigr)\,dt = 0, \tag{П.3}$$

$$\pi(\lambda-\lambda_0)\Im m\, W(i;\lambda) r - \int_0^{2\pi} \cos(t+\varphi) F\bigl(t,x(t);\lambda\bigr)\,dt = 0, \tag{П.4}$$

$$h - A_\lambda QF\bigl(t,x(t);\lambda\bigr) = 0, \tag{П.5}$$

[4]Формально, при λ достаточно близком к λ_0; без ограничения общности считаем, что при всех $\lambda \in \Lambda$.

[5]Так как $N(i;\lambda_0) \neq 0$, то без ограничения общности считаем, что $N(i;\lambda) \neq 0$ при всех λ.

где $W(i;\lambda) = M(i;\lambda)/N(i;\lambda)$. В системе (П.3) – (П.5) удобно считать неизвестными переменные $\lambda \in \Lambda$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ и $h \in E^{\perp}$, а переменную r — большим параметром.

2. Асимптотическая однородность. Пусть выполнено условие (11), то есть соотношение $f(x;\lambda) \to \pm\bar{f}(\lambda)$ верно равномерно по λ при $x \to \pm\infty$. Тогда оператор суперпозиции $x(\cdot) \mapsto f\big(x(\cdot);\lambda\big)$ асимптотически однороден: при каждом $c > 0$ справедливо равенство

$$\lim_{r\to\infty} \sup_{\varphi\in[0,2\pi],\,\lambda\in\Lambda,\,\|h\|_C\leqslant c} \left|\int\limits_0^{2\pi} e^{ti}\Big(f\big(r\sin(t+\varphi)+h(t);\lambda\big) - \bar{f}(\lambda)\,\mathrm{sign}\big(\sin(t+\varphi)\big)\Big)\,dt\right| = 0. \qquad (\text{П}.6)$$

Доказательство может быть найдено в [5]. Справедливо более сильное равенство

$$\lim_{r\to\infty} \sup_{\varphi\in[0,2\pi],\,\lambda\in\Lambda,\,\|h\|_C\leqslant c} \Big\|f\big(r\sin(t+\varphi)+h(t);\lambda\big) - \bar{f}(\lambda)\,\mathrm{sign}\big(\sin(t+\varphi)\big)\Big\|_{L^2} = 0.$$

3. Доказательство теоремы 1. Пусть множество 2π-периодических решений x уравнения (10) не является ограниченным. Значит, найдутся последовательности чисел $r_n \in \mathbb{R}^+$, $\lambda_n \in \Lambda$, $\varphi_n \in [0,2\pi]$ и функций $h_n \in E^{\perp}$, такие что $r_n \to \infty$, $\lambda_n \to \lambda_0$, $\varphi_n \to \varphi_0$ и функция $x_n(t) = r_n\sin(t+\varphi_n) + h_n(t)$ является решением уравнения (10) при $\lambda = \lambda_n$.

Покажем, что существование таких последовательностей противоречит основному условию (12) теоремы 1. Из (П.3) и (П.4) следует равенство

$$\Im m\, W(i;\lambda_n)\int\limits_0^{2\pi}\sin(t+\varphi_n)F\big(t,x_n(t);\lambda_n\big)\,dt - \Re e\, W(i;\lambda_n)\int\limits_0^{2\pi}\cos(t+\varphi_n)F\big(t,x_n(t);\lambda_n\big)\,dt = 0. \quad (\text{П}.7)$$

Перейдем в нем к пределу, используя представление $F(t,x;\lambda) = b(t,\lambda) + f(x;\lambda)$, априорные оценки (П.2) и асимптотическую однородность (П.6) оператора суперпозиции. Заменяя $F\big(t,x_n(t);\lambda_n\big)$ на $\bar{f}(\lambda_0)\,\mathrm{sign}\big(\sin(t+\varphi_0)\big)$ в (П.7), запишем предельное соотношение в виде

$$\Im m\, W(i;\lambda_0)\int\limits_0^{2\pi}\sin(t+\varphi_0)b(t;\lambda_0)\,dt - \Re e\, W(i;\lambda_0)\int\limits_0^{2\pi}\cos(t+\varphi_0)b(t;\lambda_0)\,dt = -4\bar{f}(\lambda_0)\Im m\, W(i;\lambda_0),$$

где использованы тождества

$$\int\limits_0^{2\pi}\sin(t+\varphi)\,\mathrm{sign}\big(\sin(t+\varphi)\big)\,dt = 4 \quad \text{и} \quad \int\limits_0^{2\pi}\cos(t+\varphi)\,\mathrm{sign}\big(\sin(t+\varphi)\big)\,dt = 0.$$

Теперь, после простых преобразований приходим к соотношению

$$\sin\varphi_0 \Im m\left(W(i;\lambda_0)\bar{b}(\lambda_0)\right) - \cos\varphi_0 \Re e\left(W(i;\lambda_0)\bar{b}(\lambda_0)\right) = -4\bar{f}(\lambda_0)\Im m\, W(i;\lambda_0),$$

которое эквивалентно равенству

$$\big|W(i;\lambda_0)\bar{b}(\lambda_0)\big|\cos(\varphi_0+\theta_0) = 4\bar{f}(\lambda_0)\Im m\, W(i;\lambda_0), \quad \text{где} \quad \theta_0 = \arg\big(W(i;\lambda_0)\bar{b}(\lambda_0)\big). \qquad (\text{П}.8)$$

Это равенство противоречит (12). Теорема 1 доказана.

4. Доказательство теоремы 2. Фактически доказательство этой теоремы — это обратное к доказательству теоремы 1 рассуждение. Схематично его можно представить себе так: если выполнено условие (13), то уравнение (П.8) имеет 2 решения φ_0^1 и φ_0^2; для доказательства теоремы достаточно показать, что при любом $\varepsilon > 0$ и каждом достаточно большом $r \geq r_0(\varepsilon) > 0$ найдутся такие $\lambda \in (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon)$, $\varphi \in (\varphi_0^j - \varepsilon, \varphi_0^j + \varepsilon)$ и функция $h \in E^\perp$, что верна система (П.3) – (П.5).

Обозначим через $\Phi_1 = \Phi_1(\lambda, \varphi, h)$ выражение в левой части равенства (П.4), через $\Phi_2 = \Phi_2(\lambda, \varphi, h)$ — выражение в левой части равенства (П.7) (где $\lambda_n, \varphi_n, x_n$ заменены на λ, φ, x) и через $\Phi_3 = \Phi_3(\lambda, \varphi, h)$ — левую часть равенства (П.5). Так как пара уравнений (П.3), (П.4) эквивалентна паре (П.4), (П.7), то нам нужно доказать существование нуля у вполне непрерывного векторного поля $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$, две первые компоненты которого скалярны, а третья лежит в подпространстве $E^\perp \cap C$ пространства C.

Зададимся $j \in \{1, 2\}$ и любым интервалом $|\varphi - \varphi_0^j| \leq \Delta$, $\Delta > 0$, на котором функция $\cos(\varphi + \theta_0)$ строго монотонна. Выберем произвольно малое $\varepsilon > 0$ и рассмотрим поле Φ в области

$$G = \{(\lambda, \varphi, h) : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times(E^\perp \cap C) : \ |\lambda - \lambda_0| \leq \varepsilon, \ |\varphi - \varphi_0^j| \leq \Delta, \ \|h\|_C \leq C_1\}, \qquad C_1 = C_A^* C_F \sqrt{2\pi} + 1.$$

Покажем, что при достаточно больших $r > 0$ на границе области G нет нулей поля Φ или, что то же, решений системы (П.3) – (П.5). Действительно, из (П.1) следует равномерная оценка

$$\|h - \Phi_3(\lambda, \varphi, h)\|_C \leq C_A^* C_F \sqrt{2\pi} < C_1, \tag{П.9}$$

в силу которой $\|h\|_C < C_1$ для любого нуля поля Φ. Далее, по определению $\Phi_1(\lambda, \varphi, h) = \pi(\lambda - \lambda_0)\Im m\, W(i;\lambda) r + O(1)$ и в силу соотношения $\Im m\, W(i;\lambda) \neq 0$, вытекающего из условия трансверсальности и малости ε, при всех достаточно больших r:

$$\Phi_1(\lambda_0 \pm \varepsilon, \cdot, \cdot) \neq 0, \qquad \Phi_1(\lambda_0 - \varepsilon, \cdot, \cdot)\Phi_1(\lambda_0 + \varepsilon, \cdot, \cdot) < 0, \tag{П.10}$$

поэтому $\Phi \neq 0$ при $\lambda = \lambda_0 \pm \varepsilon$. Наконец, из асимптотической однородности (П.6) следует равномерное при $(\lambda, \varphi, h) \in G$ равенство

$$\Phi_2(\lambda, \varphi, h) = -|W(i;\lambda)\bar{b}(\lambda)| \cos(\varphi + \theta(\lambda)) + 4\bar{f}(\lambda)\Im m\, W(i;\lambda) + o(1), \quad r \to \infty,$$

где $\theta(\lambda) = \arg\bigl(W(i;\lambda)\bar{b}(\lambda)\bigr)$, $\theta(\lambda_0) = \theta_0$, и так как $\varphi_0 = \varphi_0^j$ — это корень уравнения (П.8), то из определения интервала $|\varphi - \varphi_0^j| \leq \Delta$ вытекает, что при достаточно малом ε и всех достаточно больших r верны соотношения

$$\Phi_2(\lambda, \varphi_0^j \pm \Delta, h) \neq 0, \quad \Phi_2(\lambda, \varphi_0^j - \Delta, h)\Phi_2(\lambda, \varphi_0^j + \Delta, h) < 0; \qquad |\lambda - \lambda_0| \leq \varepsilon, \ \|h\|_C \leq C_1. \tag{П.11}$$

Следовательно, $\Phi \neq 0$ на части границы ∂G области G, где $\varphi = \varphi_0^j \pm \Delta$, и на всей ∂G.

Так как вполне непрерывное векторное поле Φ не имеет нулей на ∂G, то определено его вращение $\gamma(\Phi, G)$. Более того, по теореме о произведении вращений (см., например, [1]) из соотношений (П.9) – (П.11) вытекает, что $|\gamma(\Phi, G)| = 1$ и поэтому векторное поле Φ имеет хотя бы один нуль в области G. Этим завершается доказательство теоремы 2.

Список литературы

1. *Красносельский М.А., Забрейко П.П.* Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука, 1975.

2. *Красносельский М.А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М.: Гос. изд-во технико-теоретической лит., 1956.

3. *Красносельский А.М., Красносельский М.А.* Векторные поля в произведении пространств и приложения к дифференциальным уравнениям // Дифференциальные уравнения. 1997. Т. 33. №1. с. 60-67.

4. *Lazer A.C., Leach D.E.* Bounded perturbations of forced harmonic oscillators at resonance // Ann. Mat. Pura Appl. 1969. V. 82. P. 49-68.

5. *Красносельский А.М.* Асимптотика нелинейностей и операторные уравнения. М.: Наука, 1992.

6. *Боголюбов Н.Н., Н. М. Крылов Н.М.* Введение в нелинейную механику. Ижевск: R&C Dynamics, 2004.

7. *Vidyasagar M.* Nonlinear systems analysis. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1993.

8. *Alonso J.M., Ortega R.* Unbounded solutions of semilinear equations at resonance // Nonlinearity, 1996. V. 9. P. 1099-1111.

9. *Krasnosel'skii A.M., Mawhin J.* Periodic solutions of equations with oscillating nonlinearities // Math. and Comp. Modelling. 2000. V. 32. P. 1445-1455.

10. *Красносельский М.А., Покровский А.В.* Системы с гистерезисом. М.: Наука, 1983.

11. The Science of Hysteresis (3-volume set). *ed. by Mayergoyz I.D., Bertotti G.* Amsterdam: Elsevier, 2005.

12. *Krasnosel'skii A.M.* Asymptotic homogeneity of hysteresis operators // ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 1996. V. 76. № 2. P. 313-316.

13. *Красносельский А.М., Рачинский Д.И.* О числе неограниченных ветвей решений в окрестности асимптотической точки бифуркации // Функциональный анализ и его приложения. 2005. Т. 39. № 3. с. 37-53.

Правильные переводы русских изданий на английский язык:

1. Krasnosel'skii M.A., Zabreiko P.P. Geometrical Methods of Nonlinear Analysis. Springer, Berlin - Heidelberg - New York - Tokyo, 1984

2. Krasnosel'skii M.A. Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations. Pergamon Press, Oxford – London – New York – Paris, 1964

3. Krasnosel'skii A.M., Krasnosel'skii M.A. Vector fields in a product of spaces and applications to differential equations, Differential equations, 33, №1, (1997) 59-66

5. Krasnosel'skii A.M. Asymptotics of nonlinearities and operator equations, Basel – Boston, Birkh"auser, 1995

10. Krasnosel'skii M.A., Pokrovskii A.V. Systems with Hysteresis. Springer, Berlin – Heidelberg – New York – London – Paris – Tokyo, 1989

13. Krasnosel'skii A.M., Rachinskii D.I. On a number of solution branches at asymptotic bifurcation point, Functional analysis and applications, 39, №3 (2005) 194-206

Рисунок к статье:

А.М. Красносельский, Д.И. Рачинский

Критерии возникновения нелинейного резонанса

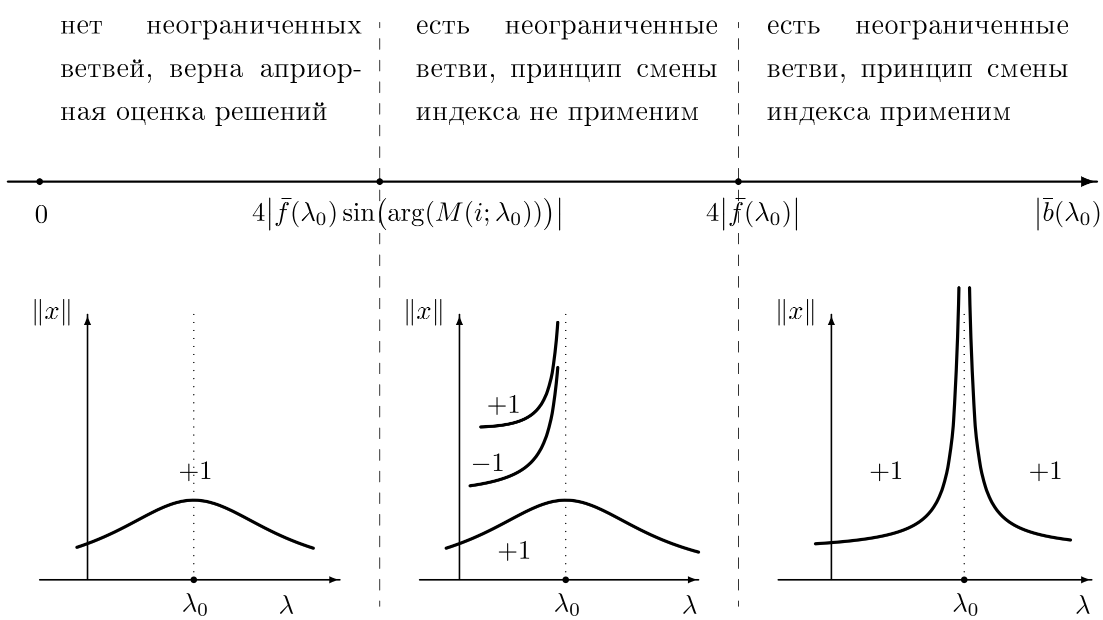

Рис. 1. Сравнение условий следствий 1 и 2 и принципа смены индекса. Возможные значения индекса решений (при фиксированном λ) обозначены $+1$ и -1.

А.М. Красносельский, Д.И. Рачинский

Критерии возникновения нелинейного резонанса

Р Е Ф Е Р А Т

Изучаются вынужденные периодические колебания в одноконтурной системе управления с параметром, динамика которой описывается резонансными в линейном приближении уравнениями. Предложены критерии возникновения резонанса, понимаемому как возрастание к бесконечности амплитуды вынужденных колебаний при приближении параметра к некоторым критическим значениям. Основные результаты относятся к случаю, когда ответы определяются ограниченными нелинейностями порядка константы; убывающие к нулю слагаемые не играют роли.

Контактные телефоны:

Красносельский Александр Маркович

Домашний: **420-59-39**,

мобильный: **916-494-1576**,

служебный: **699-83-54**

E-mail: `Sashaamk@iitp.ru`