Топологически устойчивые субгармоники больших периодов и амплитуд*

Красносельский А.М.[†] Покровский А.В.[‡]

Для нерезонансных неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений, типа квазилинейного уравнения Дуффинга, предлагаются условия существования последовательностей топологически устойчивых субгармоник с возрастающими к бесконечности амплитудами и периодами. Существование таких последовательностей определяется близостью рассматриваемых уравнений к некоторым нелинейным уравнениям с резонансной главной линейной частью. Основные условия представляют собой соотношения между скоростью насыщения нелинейности на бесконечности, гладкостью вынуждающей силы (насколько быстро убывают гармоники ее ряда Фурье) и тем, как иррациональная собственная частота линейного осциллятора приближается рациональными числами.

1. Введение

1.1. Объект исследования. В работе в основном рассматриваются квазилинейные уравнения типа

$$x'' + \alpha^2 x = b(t) + f(x). \tag{1}$$

Здесь α — иррациональное число, f — скалярная непрерывная ограниченная нелинейность, а функция b является 2π-периодической.

Исследуется вопрос о существовании субгармоник (т.е. периодических решений кратного периода $2n\pi$, $n > 1$) сколь угодно больших амплитуд. В настоящей работе изучаются субгармоники больших амплитуд. Так как число $\alpha > 0$ предполагается иррациональным, то множество амплитуд всех $2n\pi$-периодических решений уравнения (1) при каждом n ограничено, оценка зависит от числа n. Поэтому амплитуды последовательности субгармоник могут возрастать к бесконечности, только если их минимальные периоды также неограниченно возрастают. Обратное неверно: могут быть субгармоники больших периодов, амплитуды которых не стремятся к бесконечности.

---

*Авторы поддержаны грантами РФФИ 04-01-00330 и Enterprise Ireland, Grant SC/2003/376.

†Институт проблем передачи информации РАН, Москва. Красносельский А.М. поддержан грантом РФФИ 03-01-00258 и грантом Президента РФ НШ-1532.2003.1; работа частично выполнена во время визитов А.М. Красносельского в University College Cork, Корк, Ирландия в 2003-2005гг.

‡University College, Cork.

Нас интересуют субгармоники обладающие специальными свойствами грубости (точные формулировки приведены ниже). Например, для каждой такой субгармоники можно добавить малое трение и субгармоника сохраниться. Малость возмущения индивидуальна для каждой субгармоники, не удается добавить такое малое линейное трение, чтобы сохранилась все неограниченная последовательность субгармоник. Однако, если добавлять малое нелинейное трение, достаточно быстро затухающее на бесконечности, то может сохраниться существование неограниченной последовательности субгармоник.

Без дополнительных предположений о нелинейности субгармоники могут и не существовать. Простой и естественный пример — неоднородное линейное уравнение $x'' + \alpha^2 x = \sin t$. У него есть единственное периодическое решение $x_{per}(t) = (\alpha^2 - 1)^{-1} \sin t$, остальные решения имеют вид $x_{per}(t) + c \sin(\alpha t + \psi)$, где $c \neq 0$ и ψ — произвольные постоянные, эти решения почти периодические.

Другого типа примеры возникают при рассмотрении автономных уравнений вида

$$x'' + \alpha^2 x = g(x), \quad g(0) = 0, \quad xg(x) < 0, \; x \neq 0.$$

Фазовый портрет любого такого уравнения состоит из замкнутых кривых, определяемых периодическими решениями уравнения. Однако, сколь угодно малая добавка $\varepsilon x'$ разрушает все непостоянные периодические решения нашего уравнения: уравнение $x'' + \varepsilon x' + \alpha^2 x = g(x)$ ненулевых периодических решений не имеет.

Обозначим через F оператор сдвига вдоль траекторий уравнения (1) за время 2π (за период вынуждающей силы b). Иными словами, для каждой пары $\bar{x}_0 = (x_0, x'_0) \in \mathbb{R}^2$ значение $\bar{y} = F\bar{x}_0$ — это двумерный вектор $(x(2\pi), x'(2\pi))$, где $x(t)$ — решение задачи Коши $x(0) = x_0, x'(0) = x'_0$ для уравнения (1).

Субгармоники $x(t)$ уравнения (1) с минимальным периодом $2n\pi$ определяются периодическими точками $\bar{x}$ отображения F с минимальным периодом n: $F^n \bar{x} = \bar{x}$.

Напомним некоторые обозначения. Если $F : R^d \mapsto R^d$ — это непрерывное отображение, $D \subset R^d$ — ограниченное открытое множество и $z_* \in R^d$ не принадлежит образу $F(\partial D)$ границы ∂D множества D, то $\deg(F, D, z_*)$ обозначает *топологическую степень* [1] отображения F в z_* относительно D. Если $0 \notin F(\partial D)$, то определено *вращение* $\gamma(F, D) = \deg(f, D, 0)$ *векторного поля* F *на* ∂D. Свойства целого числа $\gamma(F, D)$ детально описаны в [2]. Если a — это изолированная особая точка векторного поля F (т.е., если $F(a) = 0$), то индексом $\mathrm{Ind}(a, F)$ называется общее значение чисел $\gamma(F, B_a(\varepsilon))$, где $B_a(\varepsilon)$ обозначает открытый шар радиуса ε с центром в точке a; здесь $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Таким образом, индекс характеризует алгебраическую кратность изолированного решения a уравнения $F(z) = 0$.

Для $d = 2$ число $\gamma(F, D)$ допускает простую геометрическую интерпретацию, объясняющую происхождение своего названия. Пусть D — открытая область в R^2, ограниченная жордановой кривой ∂D и $F(z) \neq 0$ при $z \in \partial D$. Изобразим поле $F(z)$, $z \in \partial D$ в виде набора векторов, начинающихся в точке z [3]. Зафиксируем некоторую точку $z_0 \subset \partial D$, обойдем кривую ∂D против часовой стрелки и вычислим количество полных оборотов, совершенных вектором $F(z)$. Полученное целое число и является вращением $\gamma(F, \partial D)$.

Будем говорить, что *уравнение* (1) *имеет топологически устойчивую неограниченную последовательность субгармоник*, если для каждого $R > 0$ можно указать такое натуральное число n и такую область D, целиком лежащую вне круга радиуса R с центром в начале координат, что верно соотношение

$$\gamma(I - F^n, D) \neq 0. \tag{2}$$

Соотношение (2) влечет существование по крайней мере одной неподвижной точки оператора F^n в множестве D и, так как все неподвижные точки оператора F допускают априорную оценку, существование “большой” субгармоники уравнения (1).

Более того, соотношение (2) грубое по отношению ко многим возмущениям уравнения (1) и позволяет делать важные заключения о качественном поведении решений при малых возмущениях. Приведем один пример. Если уравнение (1) имеет топологически устойчивую неограниченную последовательность субгармоник, то каждому $R > 0$ можно поставить в соответствие такое $\varepsilon > 0$, что уравнение с трением

$$x'' + \delta x' + \alpha^2 x = b(t) + f(x), \qquad 0 < \delta < \varepsilon,$$

обязательно имеет периодические решения амплитуды, больше чем R. Для контраста отметим, что все решения линейного уравнения $x'' + \delta x' + \alpha^2 x = b(t)$ втекают в круг, радиус которого не зависит от значения параметра δ.

1.2. Обсуждение. Рассмотрим предварительно вопрос о топологически устойчивых субгармониках с более общей точки зрения.

Отображение, F является частным (весьма важным!) случаем сохраняющего площадь отображения двумерной плоскости $\mathbb{R}^2$. Неожиданно богатое и сложное поведение такие отображений детально изучались начиная с классических трудах Пуанкаре и Биркгофа — см, например, библиографию в [4]. Отметим некоторые свойства таких отображений, ограничимся случаем, когда “на бесконечности” отображение похоже на поворот вокруг начала координат на иррациональный угол α (именно так будет для оператора сдвига за период, если нелинейность f ограничена).

Три типа геометрических структур наиболее часто встречаются при численном моделировании сохраняющих площадь отображений. Во первых, это большие, окружающие начало координат инвариантные кривые. Во-вторых, это так называемые [5] “цепочки островов”. В третьих, это области неустойчивости Мазера [4] . По-видимому, в общем случае эти три типа структур присутствуют, чередуясь и комбинируясь достаточно причудливым образом. Наиболее хорошо известны условия существования инвариантных кривых [4].

Удобно привести в графической форме типичные результаты численных экспериментов. Все иллюстрации представляют “длинные траектории” отображения F^n (на картинках слева $n = 1$, на картинках справа $n > 1$), построенного по уравнению

$$x'' + 2x = \sin t + \operatorname{arctg} x. \tag{3}$$

Это отображение рассматривается как обычно в плоскости (x, x').

Рис. 1: Типичные траектории и остров из цепочки длины 11

Рис. 2: Сложная траектория Мазера

На левой части Рис. 1 изображены графики траекторий отображения сдвига за период для 6 начальных значений: инвариантная кривая, окружающая начало координат; цепочка из 11 островов; снова инвариантная кривая, окружающая начало координат; странно выглядящая траектория Мазера (кажется, что две замкнутые инвариантные кривые пересекаются. что невозможно!); два острова; еще одна инвариантная кривая вокруг начала координат. В правой части Рис. 1 изображен отдельно увеличенный нижний остров, принадлежащий цепочке из 11 островов. Подчеркнем, что говоря об инвариантных кривых и островах, мы имеем в виду лишь графические образы и результаты численного моделирования. Мы не знаем строгих утверждений гарантирующих, например, что какая-то конкретная бесконечная траектория действительно лежит на простой замкнутой кривой. Возможно, что "при очень большом увеличении" произойдет распадение "кривой" на цепочку очень большого числа маленьких островов или мы увидим нечто, похожее на правую часть Рис. 2.

Для нас наиболее интересны цепочки островов. Каждый индивидуальный остров из цепочки длины $n > 1$, является траекторией отображения F^n с соответствующим начальным значением. Интуитивно ясно, что "центр" такого острова — это топологически устойчивая субгармоника периода $2n\pi$. Для индивидуального острова это можно доказать строго, если рассмотреть соответствующее векторное поле (см. правую часть Рис. 3 для острова из цепочки длины 11, и правую часть Рис. 4 для острова из цепочки длины 2).

Строгие утверждения о существовании, локализации и размере неограниченного числа "цепочек островов" для индивидуальных уравнений нам не известны, хотя правдоподобные рассуждения о изобилии таких структур часто приводятся в "квазидоказательствах" геометрической теоремы Пуанкаре (см. ниже). Однако, в условия теоремы Пуанкаре вписывается отображение поворота на некоторый (переменный) угол, которое не образует структур типа "цепочка островов" или область неустойчивости Мазера (хотя топологически неустойчивых периодических точек возникает бесконечное множество). Более того, орбиты, построенные по далеким от начала координат начальным условиям, всегда "выглядят как круги" (даже при существенном увеличении масштаба). Типичные траектории изображены на Рис. 5.

Интуитивно ясно, что существование "дальних" цепочек островов, сколь угодно далеко отстоящих от начала координат, гарантирует наличие топологически устойчивой неограниченной последовательности субгармоник. В этом смысле, вопрос о существовании топологически устойчивой неограниченной последовательности субгармоник близок к вопросу о существовании "дальних" цепочек островов. Более того, численные эксперименты предпо-

Рис. 3: Векторное поле $x - F(x)$ на цепочке из 11 островов

Рис. 4: Векторное поле $\overline{x} - F(\overline{x})$ на цепочке из 2 островов

Рис. 5: Слева — типичные далекие траектории. Справа — увеличенный фрагмент одной из траекторий

лагают, что в условиях формулируемых ниже теорем, существуют именно субгармоники, окруженные островами.

Надо отметить, что существование бесконечного множества субгармоник (не обязательно обладающих свойствами топологической устойчивости) во многих случаях можно доказать, пользуясь так называемой геометрической теоремой Пуанкаре [4]. Грубо говоря, теорема Пуанкаре гарантирует существование бесконечного числа субгармоник внутри каждого инвариантного кольца с разным числом вращения на граничных окружностях. Для интересующего нас уравнения (1) существование больших колец такого типа при дополнительных ограничениях было доказано в [6]. Р. Ортега в [7] применил классический подход Мозера и доказал сводимость задачи об ограниченности всех решений уравнения (1) (с кусочно-линейной правой частью) к изучению некоторого закручивающего ([4]) отображения. Подчеркнем, что методы, примененные в [6, 7], не приспособлены для доказательства существования топологически устойчивых субгармоник. Причина заключается в том, что выделяемые (после серии специальных преобразований) в этих работах главные части соответствующих отображений Пуанкаре всегда имеют в полярной системе координат (ψ, ρ) вид

$$\psi_1 = \psi_0 + 2\pi\alpha^{-1} - 2\pi\alpha^{-1}v_0, \quad v_1 = v_0$$

(см, например, формулу (33) в [6]). Очевидно, такие главные части никогда не имеют топологически устойчивых субгармоник.

Еще одним доводом в пользу осторожности при строгом или эвристическом применении геометрической теоремы Пуанкаре для исследования субгармоник являются численные эксперименты (см. Рис. 5). Исходя из теоремы Пуанкаре следует ожидать, что в ситуации общего положения внутри любого кольца на Рис. 5 должно быть бесконечно много субгармоник ненулевого индекса. Заметить их не удается. В то же время топологически устойчивые субгармоники, существование которых доказывается в основной части настоящей работы, легко видны при численном моделировании. В этом смысле предлагаемые методы доказательства существования субгармоник и их локализации могут оказаться полезными для предсказания или объяснения физических и инженерных феноменов.

Существование субгармоник доказывалось многими авторами различными методами и для более общих уравнений. Например, в [8] доказано существование последовательностей субгармоник для векторных уравнений с потенциальными нелинейностями и выпуклым потенциалом. В [9] использованы симметрии (четность-нечетность) вынуждающей силы b и нелинейности f; все конструкции существенно упрощаются простотой собственных значений дифференциального оператора $x'' + \alpha^2 x$ при периодических краевых условиях в пространствах только нечетных или только четных функций.

2. Основные результаты

2.1. Скалярный случай. В этом разделе приводятся три теоремы о существовании неограниченных последовательностей субгармоник. Условия всех теорем связывают три различных ассимптотики:

1. Скорость "выхода на насыщение" нелинейности f;

2. Асимптотическое поведение коэффициентов Фурье вынуждающей силы b;

3. Порядок аппроксимации иррационального числа α рациональными числами с большими знаменателями.

Две первые теоремы применимы для трансцендентных числе α, очень хорошо приближаемых рациональными. Множество таких α всюду плотно и имеет меру ноль. Третья теорема относится к числам α из некоторых множеств полной меры (например, она охватывает все квадратичные иррациональности). Отметим, что в этой теореме 3 используются двусторонние ограничения на приближаемость α. Однако третья теорема не применима уже для непрерывных, кусочно непрерывно дифференцируемых функций b (и более гладких). Вообще, чем более гладкая функция b, тем лучше (в условиях всех трех теорем) должно приближаться иррациональное число α рациональными числами. В частности, в условиях теорем 1 и 2 чем лучше приближается α рациональными числами, тем слабее ограничения на функцию b и константу β.

Введем необходимые обозначения

Пусть нелинейность удовлетворяет условиям насыщения

$$f_+ = \lim_{x\to+\infty} f(x) \neq f_- = \lim_{x\to-\infty} f(x).$$

Разнообразные уравнения с такого вида нелинейностями рассматривались многими авторами, начиная с пионерских работ А.С. Лазера с соавторами о резонансных в линейном приближении на бесконечности краевых задачах. Без потери общности можно предполагать, что $f_+ = -f_- \neq 0$ (константу при этом включим в слагаемое b). Предположим, что для некоторого $\beta > 0$ выполнена оценка скорости насыщения нелинейности

$$\big|f(x) - f_+ \operatorname{sign} x\big| \leqslant c|x|^{-\beta}. \tag{4}$$

Здесь и ниже буквами c, c_0, c_1 и т.д. обозначены различные константы, точная величина которых не играет роли. Например, для функции $f(x) = \operatorname{sign} x$ годится любое положительное β, а для функции $f(x) = \operatorname{arctg} x$ — любое $\beta \in (0, 1]$.

Пусть функция b кусочно непрерывна. Рассмотрим ряд Фурье

$$b(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(kt + \varphi_k), \qquad a_k \geqslant 0$$

и положим при каждом натуральном m

$$\Sigma_m = \max_{t\in\mathbb{R}} |d_m(t)|, \qquad d_m(t) = \sum_{k=1,3,5,\ldots} \frac{a_{km}}{k^2 - \alpha^2/m^2} \sin(\varphi_{km} - kt). \tag{5}$$

Если функция d_m не вырождается в тождественный нуль, то она имеет период 2π и антисимметрична: $d_m(\pi+t) = -d_m(t)$. Скорость сходимости $\Sigma_m \to 0$ при $m \to \infty$ определяется гладкостью функции b и “плотностью” расположения высших ее гармоник.

Обозначим через n и $m{=}m(n)$ знаменатели и числители подходящих дробей иррационального числа α, положим $\varepsilon_n = \alpha^2 - m^2/n^2$. Обозначим через $\mathfrak{N}$ бесконечную последовательность знаменателей n, удовлетворяющих условию $\varepsilon_n f_+ > 0$ (таким образом, мы рассматриваем подходящие дроби либо только с четными, либо только с нечетными номерами).

Т е о р е м а 1. *Пусть $f_+ \neq 0$. Пусть $\beta \geqslant 1$. Пусть существует бесконечная подпоследовательность $\mathfrak{N}^* \subset \mathfrak{N}$ нечетных знаменателей n подходящих дробей m/n числа α, удовлетворяющая соотношению*

$$\sup_{\mathfrak{N}^*} \frac{\Sigma_m}{n^2|\varepsilon_n|^{\frac{\beta}{\beta+1}}} = \infty. \tag{6}$$

Тогда у уравнения (1) *есть топологически устойчивая неограниченная последовательность субгармоник, их периоды $2n\pi$ и амплитуды A_n стремятся к бесконечности и связаны соотношением $A_n \approx |c\varepsilon_n|^{-1}$.*

Наиболее ограничительно условие связывающее скорости убывания к нулю чисел Σ_m и $|\varepsilon_n|$ и число β. Это ограничение, однако, проще и слабее анонсированного ранее авторами в [10]. Так как $\Sigma_m = \|d_m\|_C \geqslant \sqrt{2\pi}\|d_m\|_{L^2} \geqslant \sqrt{2\pi}a_m$, то в условии (6) можно числа Σ_m заменить на a_m (или на a_{2m}). Получится несколько более ограничительное достаточное условие.

В следующей теореме условие (6) ослаблено за счет дополнительных качественных предположений о поведении амплитуд a_k.

Т е о р е м а 2. *Пусть $f_+ \neq 0$. Пусть $\beta > 1$. Пусть при некотором $\gamma \geqslant 1$ верна оценка $a_k \leqslant O(k^{-\gamma})$, $k = 1, 2, \ldots$. Пусть амплитуды a_m (снова m — это числители подходящих дробей m/n, $n \in \mathfrak{N}$) удовлетворяют оценке $a_m \geqslant O(m^{-\gamma})$. Пусть существует бесконечная подпоследовательность $\mathfrak{N}^* \subset \mathfrak{N}$ нечетных знаменателей n подходящих дробей m/n числа α таких, что $|\varepsilon_n| \leqslant O(n^{-\tau})$, причем*

$$\begin{aligned} &\tau > (2+\gamma)(\beta+1)/(2\beta), && \text{если } 2+\gamma > 2\beta; \\ &\tau > (3+\gamma)(\beta+1)/(2\beta+1), && \text{если } 2+\gamma \leqslant 2\beta. \end{aligned} \tag{7}$$

Тогда у уравнения (1) *есть топологически устойчивая неограниченная последовательность субгармоник, их периоды $2n\pi$ и амплитуды A_n стремятся к бесконечности и связаны соотношением $A_n \approx |c\varepsilon_n|^{-1}$.*

Предположение $a_k \leqslant O(k^{-\gamma})$ естественно связано с гладкостью функции b. Например, если $\gamma > \ell$ и число $\ell \geqslant 1$, то $\ell - 1$ производная функции b непрерывна. Это предположение теоремы 2 отсутствует в теореме 1, условие (7) теоремы 2 менее ограничительно, чем условие (6) теоремы 1.

Условие (7) при больших β и $\gamma = 1$ чуть-чуть не дотягивает до $\tau = 2$ (т.е. $\varepsilon_n \sim n^{-2}$) и возможности рассмотрения алгебраических чисел α. Следующая теорема "работает" уже при почти всех значениях α, в том числе, алгебраических. В ней вместо условий на качество аппроксимации трансцендентных α подходящими дробями, используются и оценки снизу для диофантовых приближений. В процессе доказательства приходится предполагать, что[1] при некотором $\mu \geqslant 0$

$$\inf_{\ell=1,2,\dots} \ell^{1+\mu} \|\alpha^{-1}\ell\|_{\mathbb{Z}} > 0. \tag{8}$$

При $\mu > 0$ множество таких чисел α имеет полную меру (это следует из теоремы Рота [11]), хотя числа, очень хорошо приближаемые рациональными (например, числа Лиувилля), этим свойством не обладают. Классические плохо приближаемые числа (у которых ограничены все элементы цепной дроби) получаются при $\mu = 0$ и они удовлетворяют (8) при всех $\mu > 0$.

Иррациональное число может приближаться подходящими дробями неравномерно. В теоремах 1 и 2 предполагалось, что бесконечно множество подходящих дробей хорошо приближают α, основное условие — это оценка снизу на скорость приближения. Предположение (8) означает некоторую оценку сверху на скорость приближения.

Т е о р е м а 3. *Пусть $f_+ \neq 0$. Пусть $\mu < \gamma$. Пусть коэффициенты Фурье функции b удовлетворяют условию $a_k \leqslant c^* k^{-\gamma}$, $k > 0$. Пусть существует бесконечная подпоследовательность $\mathfrak{N}^* \subset \mathfrak{N}$ нечетных знаменателей n подходящих дробей m/n числа α, причем $a_m \geqslant c_* m^{-\gamma}$ и*

$$\frac{2\beta - 1}{\beta + 1} > \gamma. \tag{9}$$

Тогда у уравнения (1) *есть топологически устойчивая неограниченная последовательность субгармоник, их периоды $2n\pi$ и амплитуды A_n стремятся к бесконечности и связаны соотношением $A_n \approx |c\varepsilon_n|^{-1}$.*

В этой теореме нет дополнительных предположений о хорошей приближаемости числа α рациональными; используется только "общая" оценка $|\varepsilon_n| \leqslant n^{-2}$. Величина $(2\beta - 1)/(\beta + 1)$ (см. правую часть неравенства (9)) всегда лежит между $1/2$ и 2. При $\gamma \in [1, 2)$ условие (9) выполняется для достаточно больших β, при $\gamma \geqslant 2$ оно не может быть выполнено. Если $\gamma > 1$, то функция b непрерывна, если $\gamma = 1$, то она может быть кусочно непрерывна. В условиях теорем 1 и 2 только подходящие дроби давали требуемое хорошее приближение к иррациональному числу. В условиях теоремы 3 достаточно приближений с точностью до cn^{-2} (причем величина константы c роли не играет). А таких приближений у иррационального числа много — это промежуточные дроби ([12]).

Предположение о нечетности знаменателей n в теореме 3 может быть опущено.

Пусть m_k/n_k и m_{k-1}/n_{k-1} — это две последовательные подходящие дроби. Хотя бы одно из чисел n_{k-1} или n_k обязательно нечетное, но оно может лежать не с той стороны от α. Если

[1] Используется обозначение $\|\xi\|_{\mathbb{Z}} = \min(\{\xi\}, 1 - \{\xi\})$ ($\{\cdot\}$ — дробная часть числа) для расстояния от числа ξ до целочисленной решетки.

$n_k \in \mathfrak{N}$ — четное число, то вместо приближения m_k/n_k к иррациональному числу α следует брать промежуточную дробь $(m_k - m_{k-1})/(n_k - n_{k-1})$. Она всегда лежит с той же стороны от α, что и m_k/n_k, и число $n_k - n_{k-1}$ — нечетное. При этом, всегда

$$\big|\alpha - (m_k - m_{k-1})/(n_k - n_{k-1})\big| < 2/(n_k - n_{k-1})^2.$$

На это обстоятельство внимание авторов обратил Д.И. Рачинский.

Предположение о нечетности знаменателей подходящих дробей не исключено из формулировки теоремы, чтобы не писать в условиях теоремы, для каких m справедливы неравенства $a_m \geqslant c_* m^{-\gamma}$ (не рассматривать промежуточные дроби).

2.2. Замечания к теоремам 1–3.

1. В теоремах 2 и 3 условия на функцию относятся к асимптотике ее коэффициентов Фурье a_k. Вопрос о явном описании соответствующих классов функций b подробно исследован в теории рядов Фурье [13]. Простейший факт: если производная $b^{(\nu)}$ существует и липшицева всюду, кроме одной точки, в которой $b^{(\nu)}$ имеет ненулевой скачок, то $a_k \sim k^{-\nu}$.

Приведем еще пример законченного утверждения. Пусть

$$b(t) = \operatorname{sign}\sin t + \frac{1}{2}\operatorname{sign}\sin 2t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k}. \tag{10}$$

Пусть нелинейность допускает оценку (4) с $\beta > 2$. Пусть число α не слишком хорошо приближается рациональными: справедливо условие (8) с некоторым $\mu \in (0,1)$ (еще раз подчеркнем, множество таких α имеет полную меру). Тогда у уравнения (1) есть топологически устойчивая неограниченная последовательность субгармоник.

2. В условиях теорем 1–3 у $b(t)$ должно быть достаточно "много" ненулевых гармоник: существует последовательность числителей m подходящих дробей, для которой числа a_m или Σ_m отличны от нуля. Аналоги теорем с тригонометрическим многочленом в качестве вынуждающей силы авторам не известны.

3. Из приведенных ниже доказательств следует, что в условиях всех теорем при достаточно большом n уравнение с параметром

$$x'' + \lambda^2 x = b(t) + f(x) \tag{11}$$

имеет при $\lambda \in (\alpha, m/n)$ непрерывную ветвь [2] субгармоник минимального периода $2n\pi$, уходящую к бесконечности при $\lambda \to m/n$. Существование неограниченных ветвей топологически устойчивых субгармоник у уравнения (11) в окрестности произвольной рациональной точки (а не только в окрестности подходящей дроби с достаточно большим знаменателем) см. в [14].

4. Похожие конструкции применимы при анализе субгармоник у уравнений типа

$$x'' + \alpha^2 x = \sigma\big(b(t) + \operatorname{sign}(x)\big) \tag{12}$$

(σ — малый вещественный параметр). При выполнении условий, аналогичных условиям теорем, при $\sigma \to 0$ у уравнения (12) возникают непрерывные ветви субгармоник периода $2n\pi$.

Эти ветви (при каждом фиксированном n) при дальнейшем стремлении $\sigma \to 0$ схлопываются в ноль, однако изначально это “не маленькие” субгармоники. Для доказательства достаточно заметить, что уравнение (12) превращется в уравнение $y'' + \alpha^2 y = b(t) + \operatorname{sign}(y)$ после замены масштаба $x = \sigma y$.

5. Теорема 1 без дополнительных усложнений переносится на уравнения

$$L\Big(\frac{d}{dt}\Big)x = b(t) + f(x)$$

высшего порядка с четным многочленом $L(p)$ и на уравнения

$$L\Big(\frac{d}{dt}\Big)x = M\Big(\frac{d}{dt}\Big)\Big(b(t) + f(x)\Big).$$

Такие уравнения описывают динамику одноконтурной системы управления, состоящую из линейного интегрирующего звена с рациональной передаточной функцией и нелинейного функционального звена, на которую подается входной сигнал b. Здесь M тоже четный многочлен, $\deg M < \deg L$, $L(p) = (p^2 + \alpha^2)L_1(p)$, многочлен L_1 не имеет нулей на мнимой оси.

6. Предложенные в работе методы доказательств применимы к уравнениям

$$x'' + \alpha^2 x = b(t) + a(t)f(x), \tag{13}$$

с модулированной нелинейностью с насыщением. Предполагается, что обе функции a и b периодичны с общим периодом 2π. Если среднее

$$\bar{a} = \int_0^{2\pi} a(t)dt$$

отлично от нуля, и функция a имеет бесконечное количество гармоник, то справедливы аналоги теорем 1–3. Вместо функции d_m используется функция

$$\delta_m(n\theta) = \int_0^{2\pi} a(nt)\cos(mt+\theta)\operatorname{sign}\big(\sin(mt+\theta)\big)\,dt$$

переменной θ, ее легко можно переписать, используя ряд Фурье функции a: если

$$a(t) = \bar{a} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(kt + \phi_k), \quad \text{то} \quad \delta_m(\theta) = 16n\sum_{k=1}^{\infty}\frac{kc_{2mk}}{4k^2-1}\cos(2k\theta - \phi_{2mk}).$$

Функция b играет второстепенную роль в этом случае. Если функция a — это тригонометрический многочлен, то снова главную роль играет функция b.

7. В условиях всех предлагаемых теорем для субгармоник $x(t)$ периода $2n\pi$ (n — знаменатели подходящих дробей m/n числа α), существование которых утверждается во всех теоремах, справедливы следующие асимптотические представления:

$$x(t) = \frac{4}{\pi\varepsilon_n}\sin\Big(\frac{mt+\theta}{n}\Big) + O(1), \qquad \theta = \theta_m + o(1), \tag{14}$$

где θ_m — один из нулей функции $\boldsymbol{d}_m$. Соотношения (14) есть не что иное, как асимптотическая локализация найденных субгармоник.

2.3. Векторные системы. Возможны аналоги теорем 1 и 2 для систем[2]

$$\boldsymbol{z}'' + A\boldsymbol{z} = \boldsymbol{b}(t) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}'), \qquad \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^N. \tag{15}$$

Приведем один из возможных результатов для уравнения (15). Предположим, что нелинейность $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}_0, \boldsymbol{z}_1)$ имеет радиальные пределы: существует равномерный по $\boldsymbol{d}\in\mathbb{R}^N$, $\|\boldsymbol{d}\|_{\mathbb{R}^N}=1$, $\varphi \in S^1$ предел

$$\lim_{r\to\infty} \boldsymbol{f}(r\boldsymbol{d}\sin\varphi, \alpha r\boldsymbol{d}\cos\varphi) = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{d};\varphi). \tag{16}$$

Пусть матрица A имеет простое положительное собственное значение α^2, которому отвечает нормированный собственный вектор $\boldsymbol{d}_\alpha \in \mathbb{R}^N$. Пусть у транспонированной матрицы A^* вектор $\boldsymbol{d}_\alpha$ является также собственным и соответствует тому же собственному значению α^2. Это означает, что одномерное собственное подпространство $\{r\boldsymbol{d}_\alpha,\ r \in \mathbb{R}\}$ ортогонально инвариантному для матрицы A дополнению. Это условие выполнено, например, если матрица A симметрична или нормальна ($AA^* = A^*A$).

Пусть (аналогично условию $f_+ \neq f_-$ теоремы 1)

$$\int_0^{2\pi} \sin t\, \langle \boldsymbol{d}_\alpha, \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{d}_\alpha; t)\rangle\, dt \neq 0.$$

Линейное уравнение $n^{-2}\boldsymbol{z}'' + A\boldsymbol{z} = \boldsymbol{b}(nt)$ всегда имеет ровно одно 2π-периодическое решение $\boldsymbol{z}_n$. Пусть функция

$$d_n(\theta) = \int_0^{2\pi} \langle \boldsymbol{z}_n'(t), \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{d}_\alpha; mt+\theta)\rangle\, dt$$

не равна нулю тождественно. Функция d_n аналогична функции (5), формулу для d_n можно упростить, используя ряд Фурье для $\boldsymbol{z}_n$.

Теорема 4. *Пусть нелинейность имеет вид $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}') = \nabla F(\boldsymbol{z}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}')$, причем $\langle \boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{g}(\boldsymbol{z}_0, \boldsymbol{z}_1)\rangle \equiv 0$. Пусть у матрицы A нет, кроме α^2, вещественных неотрицательных собственных значений. Тогда, если числа ε_n стремятся к нулю достаточно быстро, то у уравнения* (15) *есть топологически устойчивая неограниченная последовательность субгармоник, их периоды и амплитуды стремятся к бесконечности.*

Для скалярных уравнений теорема 4 слабее теоремы 1, фактически в теореме 1 для скалярного случая дано описание, что значит “достаточно быстро” в формулировке теоремы 4.

Равномерность предела (16) и непрерывность предельной функции — очень ограничительное условие. В [15] предложен метод анализа уравнений с нелинейностями, имеющими разрывные радиальные пределы (например, $f(x,y) = \operatorname{arctg} x$ на плоскости имеет пределом разрывную при $(x=0, y=\pm 1) \in S^1$ функцию $\operatorname{sign} x$).

[2] В этом разделе жирными буквами обозначены векторы из $\mathbb{R}^N$, их скалярное произведение и норма обозначаются $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^N}$.

Интересно было бы получить обобщение теоремы 4 для случая, когда у матрицы A есть еще положительные собственные значения α_*^2. При этом надо использовать оценки снизу для аппроксимаций иррационального числа α_* рациональными со знаменателями подходящих дробей числа α.

3. Доказательство теорем $1-3$

Для доказательства теорем выписывается эквивалентное операторное уравнение в бесконечномерном функциональном пространстве. У этого уравнения есть две компоненты. Одна из них — бесконечномерная — всегда не вырождена в естественном смысле. Другая — двумерная — имеет для рассматриваемого случая одномерное вырождение главных слагаемых. Предложен метод регуляризации такого вырождения. При доказательствах существенную роль играют разнообразные оценки норм проекций приращений функциональных нелинейностей на бесконечности. Похожие конструкции использованы в [14] при исследовании непрерывных неограниченных ветвей решений фиксированного периода для уравнений с параметром. Заметим, что развитый подход применим к существенно более сложным уравнениям (см. замечания после теоремы 1 и раздел 2.3). В работе подробно изучен простейший содержательный пример.

Начальная часть доказательства одинакова для всех теорем. Лишь отсутствие решений некоторой эквивалентной системы на части границы множества, в котором ищутся решения, проводится отдельно для каждой теоремы.

3.1. Предварительные построения. При доказательстве используется представление иррационального числа α в виде цепной дроби ([11, 12]). Мы используем оценку

$$\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}, \tag{17}$$

которая выполнена для каждой подходящей дроби m/n любого иррационального числа α. Верны соотношения $|\varepsilon_n| < (2\alpha+1)|\alpha - m/n|$. Числители $m \sim \alpha n$ стремятся к бесконечности почти пропорционально n. Зафиксируем априори неизвестное натуральное $n \in \mathfrak{N}$ и будем искать $2n\pi$-периодическое решение уравнения (1). В доказательстве подразумевается, что число n достаточно велико.

Сделаем линейную замену времени в (1). Каждое $2n\pi$-периодическое решение $x(t)$ уравнения (1) взаимно однозначно соответствует 2π-периодическому решению $x(t/n)$ уравнения

$$\frac{1}{n^2}x'' + \alpha^2 x = b(nt) + f(x). \tag{18}$$

Мы будем искать 2π-периодическое решение уравнения (18) в виде

$$x(t) = R\sin(mt + \theta) + h(t). \tag{19}$$

Теперь n используется в качестве большого параметра, величины $R > 0, \theta \in S^1$ и функция h — неизвестные, они зависят от n. Ниже будет показано, что для достаточно больших нечетных $n \in \mathfrak{N}^*$ уравнение (18) имеет 2π-периодическое решение вида (19), то есть найдутся соответствующие R, θ и h.

3.2. Линейные пространства и операторы. Обозначим через C пространство непрерывных функций с равномерной нормой; через L^2 — пространство суммируемых с квадратом функций $[0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ и обычной нормой; через $W = W^{2,2}$ — пространство 2π-периодических функций с абсолютно непрерывными первыми производными и суммируемой с квадратом второй производной. Введем проектор

$$\mathcal{P}x(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos m(t-s)x(s)\,ds$$

на плоскость E, натянутую на функции $\sin mt$ и $\cos mt$, и проектор $\mathcal{Q} = I - \mathcal{P}$ на дополнительное подпространство $E^\perp$, состоящее из функций x, для которых $\mathcal{P}x = 0$. В L^2 эти проекторы ортогональны.

Рассмотрим дифференциальный оператор $\mathcal{L} = n^{-2}(d/dt)^2 + \alpha^2$. Этот оператор с 2π-периодическими граничными условиями непререрывно обратим при каждом натуральном n. Через $H = H_n = \mathcal{L}^{-1}$ обозначим линейный оператор, сопоставляющий каждой функции $y \in L^2$ единственное 2π-периодическое решение $x = Hy \in W$ линейного уравнения $\mathcal{L}x = y(t)$. Оператор $H : L^2 \to W$ вполне непрерывен по совокупности переменных, его норма в L^2 определяется формулой

$$\|H\|_{L^2\to L^2} = \sup_{k=0,1,2,\dots} \left|\frac{n^2}{n^2\alpha^2 - k^2}\right|.$$

Подпространства E и $E^\perp$ являются инвариантными для H, норма H в E и $E^\perp$ существенно различается: оператор $H\mathcal{P}$ имеет норму

$$\|H\mathcal{P}\|_{L^2\to L^2} = \left|\frac{n^2}{n^2\alpha^2 - m^2}\right| = |\varepsilon_n|^{-1},$$

а оператор $H\mathcal{Q}$ имеет норму

$$\|H\mathcal{Q}\|_{L^2\to L^2} = \sup_{k=0,1,2,\dots,m-1,m+1,m+2,\dots} \left|\frac{n^2}{n^2\alpha^2 - k^2}\right| = \sup_{k=m-1,m+1} \left|\frac{n^2}{n^2\alpha^2 - k^2}\right|.$$

Если m/n — это подходящая дробь числа α, то при достаточно больших значениях n справедливы оценки[3] $\|H\mathcal{Q}\|_{L^2\to L^2} \leqslant n\alpha^{-1}$, $\|H\mathcal{Q}\|_{L^2\to C} \leqslant cn$.

Лемма 1. При некотором $M > 0$ справедливы оценки

$$\|H\mathcal{Q}\|_{L^1\to C} \leqslant Mn\ln n, \quad \Big\|\frac{d}{dt}H\mathcal{Q}\Big\|_{L^p\to C} \leqslant Mn^2, \qquad p > 1. \tag{20}$$

Доказательство леммы 1 приведено в разделе 4.1. Постоянная M во второй оценке (20) зависит от p.

Из оценок (17) следует, что $\|H\mathcal{P}\| \gg \|H\mathcal{Q}\|$: величины $|\varepsilon_n|^{-1}$ растут как n^2 или быстрее. Именно такой существенный спектральный зазор оператора H определяет возможность сведения бесконечномерного уравнения к двумерному.

[3]Здесь и ниже в доказательстве одной и той же буквой c обозначены различные константы, точная величина которых не играет роли.

Ниже используются соотношения

$$\mathcal{P}Hy = H\mathcal{P}y = \varepsilon_n^{-1}y, \qquad \mathcal{P}b(nt) = 0, \qquad \mathcal{Q}H = H\mathcal{Q}, \qquad \mathcal{Q}b(nt) = b(nt)$$

и тождество

$$\int_0^{2\pi} y(t)\frac{d}{dt}Hy(t)\,dt \equiv 0, \qquad y \in L^2. \tag{21}$$

Оно выполнено, так как для каждой гармоники $\sin(kt+\phi)$ функции y верны равенства $H\sin(k+\phi) = c\,\sin(kt+\phi)$, поэтому $\big(H\sin(kt+\phi)\big)' = c_1\cos(kt+\phi)$.

3.3. Эквивалентные уравнения. Дифференциальное уравнение (18) с 2π-периодическими краевыми условиями эквивалентно операторному уравнению

$$x = H\big(b(nt) + f(x)\big). \tag{22}$$

Каждое решение $x \in L^2$ уравнения (22) принадлежит пространству W (а если $b \in C$, то и C^2) и является 2π-периодическим решением уравнения (18). Это уравнение эквивалентно системе из двух уравнений:

$$\mathcal{P}x = H\mathcal{P}\big(b(nt) + f(x)\big), \qquad \mathcal{Q}x = H\mathcal{Q}\big(b(nt) + f(x)\big),$$

которые после простейших упрощений приобретают вид

$$R\sin(mt+\theta) = \varepsilon_n^{-1}\,\mathcal{P}f(x), \tag{23}$$

$$h = Hb(nt) + H\mathcal{Q}f(x), \tag{24}$$

Первое уравнение — это уравнение на плоскости E. Его можно переписать в виде двух равенств проекций на функции $\sin(mt+\theta)$ и $\cos(mt+\theta)$:

$$\pi\varepsilon_n R = \int_0^{2\pi} \sin(mt+\theta)f(x)\,dt, \tag{25}$$

$$0 = \int_0^{2\pi} \cos(mt+\theta)f(x)\,dt. \tag{26}$$

Умножим равенство (26) на mR и преобразуем его к виду

$$\int_0^{2\pi} h'(t)f(x)\,dt = \int_0^{2\pi} \big(mR\cos(mt+\theta) + h'(t)\big)f(x)\,dt.$$

Это уравнение в силу очевидного тождества $\int_0^{2\pi} x'(t)f\big(x(t)\big)\,dt \equiv 0$, справедливого для любой функции f и любой 2π-периодической функции x, можно переписать в виде

$$\int_0^{2\pi} h'(t)f(x)\,dt = 0$$

или, что то же, в виде

$$\int\limits_0^{2\pi} h'(t)\mathcal{Q}f(x)\,dt = 0. \tag{27}$$

Подставим теперь в уравнение (27) значение для h' из уравнения (24):

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{d}{dt}\Big(Hb(nt) + H\mathcal{Q}f(x)\Big)\mathcal{Q}f(x)\,dt = 0,$$

Последнее равенство в силу (21) можно переписать в виде

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{d}{dt}\big(Hb(nt)\big)f(x)\,dt = 0. \tag{28}$$

Интеграл в левой части (28) содержит главную контролируемую часть, которая в условиях теоремы 1 асимптотически больше неконтролируемых добавок. Способ выделения этой главной части очевиден: при $n \to \infty$ в силу равенства (25) величина R стремится к бесконечности пропорционально $|\varepsilon_n|^{-1}$, при большинстве значений t справедливо соотношение $f(x) \to f_+ \operatorname{sign}\sin(mt+\theta)$, а величина

$$\Psi(\theta) = \Psi_n(\theta) = \int\limits_0^{2\pi} \frac{d}{dt}\big(Hb(nt)\big)\operatorname{sign}\sin(mt+\theta)\,dt$$

не равна нулю тождественно в условиях теоремы (при некоторых значениях n). Система уравнений (24)–(25)–(28) по построению эквивалентна уравнению (22).

3.4. Гомотопия. Введем обозначение

$$\Delta_f = \Delta_f(R,\theta,h)(t) \stackrel{\text{def}}{=} f\big(R\sin(mt+\theta) + h(t)\big) - f^+ \operatorname{sign}\big(\sin(mt+\theta)\big).$$

Вложим систему (24)–(25)–(28) в однопараметрическое семейство уравнений

$$\left\{\begin{array}{rcl} 0 &=& \pi\varepsilon_n R - 4f_+ + \xi\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \sin(mt+\theta)\Delta_f\,dt, \\ f_+\Psi(\theta) &=& -\,\xi\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{d}{dt}\big(Hb(nt)\big)\Delta_f\,dt, \\ h &=& \xi\Big(Hb(nt) + H\mathcal{Q}f(x)\Big). \end{array}\right. \tag{29}$$

При $\xi = 1$ система (29) совпадает с системой (24)–(25)–(28). При $\xi = 0$ система (29) имеет тривиальный вид

$$R = 4f_+(\pi\varepsilon_n)^{-1}, \qquad f_+\Psi(\theta) = 0, \qquad h = 0.$$

Возникшая в (29) постоянная $4f_+$ — это значение интеграла $f_+ \int\limits_0^{2\pi} \sin(mt+\theta)\operatorname{sign}\sin(mt+\theta)\,dt$, он не зависит ни от θ, ни от m.

Обозначим через $\theta_0 = \theta_0(n)$ и $\theta_1 = \theta_1(n)$ значения, в которых достигаются минимум $-\Sigma_m$ и максимум Σ_m функции $d_m(nt)$. Без ограничения общности можно считать, что $0 < \theta_0 < \theta_1 < 2\pi$. Выберем в пространстве неизвестных R, θ, h множество

$$G = G_n = \Big\{\theta \in [\theta_0, \theta_1],\ |R - 4f_+(\pi\varepsilon_n)^{-1}| \leqslant \delta_R,\ \|h\|_C \leqslant \rho\Big\}.$$

Величина δ_R должна быть достаточно малой, можно положить $\delta_R = f_+\varepsilon_n^{-1}$. Тогда при всех значениях R выполняется неравенство $R \geqslant f_+(4/\pi - 1)\varepsilon_n^{-1}$. Величина ρ не зависит от n и определяется чуть ниже. Покажем, что при всех $\xi \in [0, 1]$ система уравнений не имеет решений на границе ∂G множества G. Из общих принципов теории вращения векторного поля (степени отображения) будет тогда вытекать разрешимость системы (24)–(25)–(28).

Величина ρ конструируется следующим образом. Положим

$$\rho_1 = \|Hb(nt)\|_C, \quad \rho_2 = \sup_{n,\theta} \|H\Omega \operatorname{sign}\sin(mt+\theta)\|_C, \quad \rho = \rho_1 + \rho_2 + 1.$$

Величина ρ_1 не зависит от m и n, величина ρ_2 конечна:

$$\rho_2 \leqslant \sup_{t,n,\theta} \frac{4}{\pi} \sum_{k=3,5,\ldots} \frac{|\sin k(mt+\theta)|}{k(k^2m^2n^{-2} - \alpha^2)} \leq \sup_{n,\theta} \frac{4}{\alpha^2\pi} \sum_{k=3,5,\ldots} \frac{1}{k(k^2-1)}.$$

Граница ∂G состоит из трех частей:

$$G_R = \Big\{\theta \in [\theta_0, \theta_1],\ |R - 4f_+(\pi\varepsilon_n)^{-1}| = \delta_R,\ \|h\|_C \leqslant \rho\Big\},$$
$$G_\theta = \Big\{\theta = \theta_0, \theta_1,\ \ |R - 4f_+(\pi\varepsilon_n)^{-1}| \leqslant \delta_R,\ \|h\|_C \leqslant \rho\Big\},$$
$$G_h = \Big\{\theta \in [\theta_0, \theta_1],\ |R - 4f_+(\pi\varepsilon_n)^{-1}| \leqslant \delta_R,\ \|h\|_C = \rho\Big\}.$$

Остается установить, что на каждом них отлична от нуля соответствующая компонента системы (29). После этого, утверждения теорем будут немедленно следовать из принципа родственности [2].

Завершающее доказательство отсутствие решений на ∂G в условиях теорем 1 и 2 проводится отдельно.

3.5. Общие вспомогательные конструкции. Для доказательств используются следующие вспомогательные утверждения, они будут применяться неоднократно в доказательствах.

Лемма 2. Пусть $p \in [1, 2]$. При всех $(R, \theta, h) \in G$ верна оценка $\|\Delta_f\|_{L^p} \leq r_0 R^{-\beta/(1+p\beta)}$.

Доказательство леммы 2 приведено в разделе 4.2.

Лемма 3. При всех $(R, \theta, h) \in G$ верна оценка $\|H\Omega\Delta_f\|_C \leqslant r_1 R^{-\beta/(\beta+1)} n \ln n$.

Лемма 3 следует из леммы 1 и леммы 2, $p = 1$.

Лемма 4. Справедливо равенство $\Psi(\theta) = \frac{4}{m} d_m(n\theta)$.

Доказательство леммы 4 приведено в разделе 4.3.

3.6. Отсутствие решений на ∂G в условиях теоремы 1. В силу леммы 2 справедливо соотношение $\|\Delta_f\|_{L^1} \to 0$, Поэтому

$$\sup_{(R,\theta,h)\in G} \int\limits_0^{2\pi} \sin(mt+\theta)\Delta_f\, dt \to 0$$

и первое равенство системы (29) не может быть выполнено на G_R.

На G_θ не может быть выполнено второе равенство системы (29). В силу леммы 2

$$\Big|\int\limits_0^{2\pi} \frac{d}{dt}\big(Hb(nt)\big)\Delta_f\, dt\Big| \leqslant cn\|\Delta_f\|_{L^1} \leqslant cr_0\, n\, R^{-\beta/(\beta+1)},$$

поэтому в силу леммы 4 и выбора граничных значений θ_1 и θ_2

$$\Big|\Psi(\theta_j)\Big|^{-1}\Big|\int\limits_0^{2\pi} \frac{d}{dt}\big(Hb(nt)\big)\Delta_f\, dt\Big| \leqslant c\, n^2\, R^{-\beta/(\beta+1)}/\Sigma_m.$$

Правая часть последнего неравенства стремиться к нулю в силу условия (6), левая часть $f_+ \neq 0$, это противоречит второму равенству системы (29).

На G_h не может быть выполнено третье равенство системы (29). Каждая функция h, удовлетворяющая этому равенству имеет вид $h = h_0 + \tilde{h}$, где h_0 — решение линейного неоднородного уравнения

$$\frac{1}{n^2}h_0'' + \alpha^2 h_0 = \xi\Big(b(nt) + \mathfrak{Q}\operatorname{sign}\big(\sin(mt+\theta)\big)\Big), \tag{30}$$

эквивалентного операторному равенству $h_0 = \xi Hb(nt) + \xi H\mathfrak{Q}\operatorname{sign}\big(\sin(mt+\theta)\big)$, а $\tilde{h}$ определяется равенством $\tilde{h} = \xi H\mathfrak{Q}\Delta_f$. В силу (6) верна оценка $n^2|\varepsilon_n|^{\beta/(\beta+1)} \to 0$, из которой вытекает, что $R^{\beta/(\beta+1)} > cn^2$. Поэтому, в силу леммы 3, справедливо соотношение $\|H\mathfrak{Q}\Delta_f(\theta,h)\|_C \leqslant cn\ln n\, n^{-2} \to 0$. Так как $\|h_0\|_C \leqslant \rho_0 + \rho_1$, то по построению радиуса ρ для h справедлива априорная оценка $\|h\|_C < \rho$.

Теорема 1 полностью доказана.

3.7. Отсутствие решений на ∂G в условиях теоремы 2. Доказательство того, что на G_R не может быть выполнено первое равенство системы (29), в условиях теоремы 2 совпадает с доказательством того же факта в условиях теоремы 1.

На G_h не может быть выполнено третье равенство системы (29). Из условия (6) следует, что при некотором $\varepsilon > 0$ выполняется оценка $R > n^{2+\varepsilon}$. Поэтому, в силу леммы 3 справедливы соотношение $\|H\mathfrak{Q}\Delta_f\|_C \leq cn^{(-2-\varepsilon)\beta/(\beta+1)} n\ln n \to 0$ и снова $\|\tilde{h}\|_C \to 0$. Следовательно, для решений $\|h\|_C < \rho$.

Докажем отсутствие решений на последней части G_θ границы ∂G.

Далее в доказательствах удобно использовать обозначения

$$a(t) = \sum_{0,1,\ldots} \frac{a_k}{\alpha^2 - k^2}\sin(kt+\varphi_k), \qquad a'(t) = \sum_{0,1,\ldots} \frac{ka_k}{\alpha^2 - k^2}\cos(kt+\varphi_k),$$

(очевидно $Hb(nt) = a(nt)$, $\frac{d}{dt}\big(Hb(nt)\big) = na'(nt)$) и обозначения

$$D_f = D_f(R,\theta,h)(t) = f\big(R\sin(mt+\theta) + h(t)\big) - f\big(R\sin(mt+\theta)\big),$$
$$d_f = d_f(R,\theta,h)(t) = f\big(R\sin(mt+\theta)\big) - f_+\operatorname{sign}\big(R\sin(mt+\theta)\big).$$

Очевидно равенство $\Delta_f = D_f + d_f$. Величины $\int a'(t)D_f dt$ и $\int a'(t)d_f dt$ оцениваются отдельно.

Лемма 5. Справедлива оценка

$$\Big|\int_0^{2\pi} a'(nt)d_f\,dt\Big| \leqslant c\,a_m n^{-1} R^{-\beta/(\beta+1)}. \tag{31}$$

Доказательство леммы 5 приведено в разделе 4.4. Следующее утверждение используется при оценке величины $\int a'(t)D_f dt$.

Лемма 6. При некотором $r_2 > 0$ для компоненты h каждого решения (R,θ,h) системы (29) справедлива оценка $\|h'\|_C \leq r_2 n$.

Каждое решение h имеет вид $h = h_0 + \tilde h$, где h_0 — решение уравнения (30), а $\tilde h$ удовлетворяет равенству $h = \xi H\Omega\Delta_f$. Для h_0' оценка $\|h_0'\|_C \leqslant cn$ очевидна, а для получения оценки величины $\|\tilde h'\|_C$ достаточно сослаться на лемму 1 и лемму 2: $\|h'\|_C \leqslant M r_0 n^2 R^{-\beta/(1+p\beta)}$. Так как в силу (7) верна оценка $R > cn^{2+\varepsilon}$, то (при p достаточно близких к 1)

$$\|h'\|_C \leqslant n^2 n^{-(2+\varepsilon)\beta/(1+p\beta)} < cn.$$

Лемма 7. Справедлива оценка

$$\Big|\int_0^{2\pi} a'(nt)D_f\,dt\Big| \leqslant cR^{-1}(n\ln n R^{-\beta/(\beta+1)} + n^{-1-\gamma} + R^{-(\beta-1)/(\beta+1)}). \tag{32}$$

Доказательство леммы 7 приведено в разделе 4.5.

В левой части второго равенства системы (29) стоит величина, убывающая при $n \to \infty$ не быстрее $n^{-\gamma-1}$. Правая часть этого равенства убывает быстрее чем

$$nR^{-1}(n\ln n R^{-\beta/(\beta+1)} + n^{-1-\gamma} + R^{-(\beta-1)/(\beta+1)})$$

(множитель n добавился из-за равенства $na'(t) = \frac{d}{dt}Hb(nt)$). В силу (7), это невозможно.

3.8. Отсутствие решений на ∂G в условиях теоремы 3. Доказательство того, что на G_R не может быть выполнено первое равенство системы (29), в условиях теоремы 3 совпадает с доказательством того же факта в условиях теоремы 1.

На G_h не выполнено третье равенство системы (29): в силу леммы 3

$$\|H\Omega\Delta_f\|_C \leq cn^{-2\beta/(\beta+1)} n\ln n \to 0,$$

так как $1 - 2\beta/(\beta+1) < 0$ по условию (9).

Докажем отсутствие решений на последней части G_θ границы ∂G. Для этого достаточно доказать следующий аналог леммы 7.

Лемма 8. Справедлива оценка

$$\Big|\int\limits_0^{2\pi} a'(nt)D_f\,dt\Big| \leqslant cR^{-1}(\ln nR^{-\beta/(\beta+1)} + n^{-1-\gamma} + R^{-(\beta-1)/(\beta+1)}) \tag{33}$$

Это утверждение отличается от леммы 7 только отсутствием множителя n в критически важном слагаемым. Доказательство утверждения 8 совпадает с доказательством леммы 7 везде, кроме одной оценки, в которой используется следующее утверждение.

Лемма 9. Пусть $y \in L^1$, $\gamma > \mu$ и $a_\ell \leqslant c\ell^{-\gamma}$, $\gamma \geqslant 1$. Пусть $\tilde t_j = 2\pi j/m + \phi$. Тогда найдется постоянная c^*, зависящая только от функции a и числа α такая, что

$$\Big|\sum_{j=0}^{m-1} a(n\tilde t_j)H\mathcal{Q}y(\tilde t_j)\Big| \leqslant c^* m\|y\|_{L^1}. \tag{34}$$

В левой части второго равенства системы (29) стоит величина, убывающая при $n \to \infty$ не быстрее $n^{-\gamma-1}$. Правая часть этого равенства убывает быстрее чем

$$nR^{-1}(\ln nR^{-\beta/(\beta+1)} + n^{-1-\gamma} + R^{-(\beta-1)/(\beta+1)}) \leqslant n^{-1}(\ln nn^{-2\beta/(\beta+1)+n^{-1-\gamma}+n^{-2(\beta-1)/(\beta+1)}}).$$

Теперь главным (самым большим) слагаемым в последней оценке является $n^{-1-2(\beta-1)/(\beta+1)}$. В силу (9) $1 + 2(\beta-1)/(\beta+1) > 1+\gamma$, полученное противоречие доказывает отсутствие решений на G_h и теорему 3.

4. Доказательства вспомогательных утверждений

4.1. Доказательство леммы 1. Для доказательства первой оценки (20) воспользуемся интегральным представлением

$$H\mathcal{Q}y = \int_0^{2\pi} G_m(t-s)y(s)\,ds,$$

где

$$G_m(u) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=0,k\neq m}^{\infty} \frac{\cos ku}{-k^2/n^2+\alpha^2}.$$

В силу этого представления

$$\|H\mathcal{Q}y\|_C \leqslant \frac{\|y\|_{L^1}}{\pi}\sum_{k=0,k\neq m}^{\infty}\frac{1}{|-k^2/n^2+\alpha^2|} \leqslant \frac{\|y\|_{L^1}}{\pi}\sum_{k=0,k\neq m}^{\infty}\frac{n^2}{|k^2-m^2|-1}.$$

Поэтому из соотношений

$$\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{(m^2-k^2-1)} = \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{(m^2-(m-k)^2-1)} \leqslant \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{(\frac{3}{2}mk-k^2)} \leqslant \frac{c}{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}$$

и

$$\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{1}{(k^2-m^2-1)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{((k+m)^2-m^2-1)}\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k^2+km)}\leqslant\frac{c}{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}+\sum_{k=m}^{\infty}\frac{1}{k^2}.$$

вытекает первая оценка (20).

Для доказательства второй оценки (20) воспользуемся интегральным представлением

$$\frac{d}{dt}H\mathfrak{Q}y=\int_0^{2\pi}G'_m(t-s)y(s)\,ds,\qquad G'_m(u)=\frac{1}{\pi}\sum_{k=0,k\neq m}^{\infty}\frac{k\cos ku}{-k^2/n^2+\alpha^2}.$$

Пусть $p>1$ и близко к 1, число q сопряжено к p: $p^{-1}+q^{-1}=1$. Пусть c_k — это модули коэффициентов Фурье функции y. В силу теоремы Хаусдорфа–Юнга (см., например, [13], стр. 190) последовательность c_k сходится со степенями q и ее норма в пространстве последовательностей ℓ_q удовлетворяет соотношению $\|c_k\|_{\ell_q}=\left(\sum c_k^q\right)^{1/q}\leq\|y\|_{L^p}$.

Теперь

$$\|\frac{d}{dt}H\mathfrak{Q}y\|_C\leq\sum_{k=0,1,\dots,m-1,m+1,m+2,\dots}\nu'_k c_k$$

(здесь $\nu'_k=k|-k^2n^{-2}+\alpha^2|^{-1}$ — это модули собственных значений оператора $\frac{d}{dt}H\mathfrak{Q}$ в подпространствах k-х гармоник). В силу неравенства Гельдера

$$\sum_{k=0,1,\dots,m-1,m+1,m+2,\dots}\nu'_k c_k\leqslant\|c_k\|_{\ell_q}\Big(\sum_{k=0,1,\dots,m-1,m+1,m+2,\dots}(\nu'_k)^p\Big)^{1/p}.$$

Теперь

$$\|\frac{d}{dt}H\mathfrak{Q}y\|_C\leqslant\|y\|_{L^p}\Big(\sum_{k=0,1,\dots,m-1,m+1,m+2,\dots}(\nu'_k)^p\Big)^{1/p}.$$

Так как

$$\nu'_k=\frac{k}{|-n^{-2}k^2+m^2n^{-2}-\varepsilon_n|}\leqslant\frac{n^2k}{|k^2-m^2|-1},$$

то соотношения

$$\sum_{k=0}^{m-1}\frac{k^p}{(m^2-k^2-1)^p}=\sum_{k=1}^{m}\frac{(m-k)^p}{(m^2-(m-k)^2-1)^p}\leqslant\sum_{k=1}^{m}\frac{(m-k)^p}{(m-k)^pk^p}\leqslant\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^p}\leqslant c$$

и

$$\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{k^p}{(k^2-m^2-1)^p}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k+m)^p}{((k+m)^2-m^2-1)^p}\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k+m)^p}{(k^2+km)^p}\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}\leqslant c$$

завершают доказательство леммы.

4.2. Доказательство леммы 2. Зададим величину $\delta = \delta(n)$ равенствами $m\delta = R^{-p\beta/(1+p\beta)}$. Разобьем интервал $[t_0-\delta, 2\pi+t_0-\delta]$ длины 2π на две системы интервалов по $2m$ интервалов в каждой. Первая система состоит из интервалов $[t_j-\delta, t_j+\delta]$, где $t_j = (j\pi-\theta)/m$, $j = 0, 1, \dots, 2m-1$, вторая система состоит из оставшейся части $[t_0-\delta, 2\pi+t_0-\delta]$. Общая длина интервалов первой системы равна $4m\delta \to 0$, остаток имеет длину $2\pi - 4m\delta \to 2\pi$. По построению интервалы первой системы не перекрываются.

Если t принадлежит одному их интервалов второй системы, то $|\sin(mt+\theta)| \geq |\sin(m\delta)| > 2m\delta/\pi$. По построению δ величина $Rm\delta = R^{1-p\beta/(1+p\beta)} = R^{1/(1+p\beta)}$ достаточно велика. Следовательно, $|R\sin(mt+\theta)+h(t)| \geq Rm\delta/\pi$, функции $R\sin(mt+\theta)+h(t)$ и $\operatorname{sign}\bigl(\sin(mt+\theta)\bigr)$ имеют общий знак, для значений t из второй системы в силу (4) верна оценка $|\Delta_f| \leqslant K_0(Rm\delta/\pi)^{-\beta}$, и

$$\int_{t_0-\delta}^{2\pi+t_0-\delta} |\Delta_f|^p\,dt \leq 4m\delta(\sup|f| + |f_+|) + 2K_0(Rm\delta/\pi)^{-p\beta}.$$

Величина δ выбиралась так, чтобы слагаемые в последней формуле были одного порядка, то есть, чтобы $m\delta = (Rm\delta)^{-p\beta}$. Теперь

$$\|\Delta_f\|_{L^p} = \left(\int_{t_0-\delta}^{2\pi+t_0-\delta} |\Delta_f|^p\,dt\right)^{1/p} \leq r_0\bigl(R^{-p\beta/(1+p\beta)}\bigr)^{1/p},$$

где постоянная r_0 зависит только от β, p, K_0, $\sup|f|$ и $|f_+|$; лемма доказана.

4.3. Доказательство леммы 4. Лемма следует из цепочки равенств:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_0^{2\pi} \frac{d}{dt}\bigl(Hb(nt)\bigr)\ \operatorname{sign}\sin(mt+\theta)\,dt \\
&\qquad= \int\limits_0^{2\pi} \frac{d}{dt}H\Bigl(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\sin(knt+\varphi_k)\Bigr)\ \operatorname{sign}\sin(mt+\theta)\,dt \\
&\qquad= \int\limits_0^{2\pi} \Bigl(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{kn\,a_k}{\alpha^2-k^2}\cos(knt+\varphi_k)\Bigr)\ \operatorname{sign}\sin(mt+\theta)\,dt \\
&\qquad=' \int\limits_0^{2\pi} \Bigl(\sum_{1,3,5,\dots} \frac{kmn\,a_{km}}{\alpha^2-m^2k^2}\cos(kmnt+\varphi_{km})\Bigr)\ \operatorname{sign}\sin(mt+\theta)\,dt \\
&\qquad= \int\limits_0^{2\pi} \Bigl(\sum_{1,3,5,\dots} \frac{kmn\,a_{km}}{\alpha^2-m^2k^2}\cos\bigl(kn(t-\theta)+\varphi_{km}\bigr)\Bigr)\ \operatorname{sign}\sin t\,dt \\
&\qquad= \int\limits_0^{2\pi} \Bigl(\sum_{1,3,5,\dots} \frac{kmn\,a_{km}}{\alpha^2-m^2k^2}\cos\bigl(kn(t-\theta)+\varphi_{km}\bigr)\Bigr)\ \Bigl(\frac{4}{\pi}\sum_{1,3,5,\dots}\frac{\sin kt}{k}\Bigr)dt
\end{aligned}$$

$$=^* \frac{4m}{\pi}\sum_{1,3,5,\ldots}\frac{a_{km}}{\alpha^2-m^2k^2}\int\limits_0^{2\pi}\Big(\cos\big(kn(t-\theta)+\varphi_{km}\big)\sin knt\Big)dt$$
$$=\frac{4}{m}\sum_{1,3,5,\ldots}\frac{a_{km}}{k^2-\frac{\alpha^2}{m^2}}\sin(\varphi_{km}-kn\theta)=\frac{4}{m}\,d_m(n\theta)$$

Функция $\operatorname{sign}\sin(mt+\theta)$ содержит гармоники с номерами $(2k-1)m$, поэтому в равенстве, помеченном штрихом, остальные гармоники пропадут. В равенстве, помеченном звездочкой, используется нечетность числа n: если n четное число, то все интегралы занулятся. Функция d_m задана равенством (5).

4.4. Доказательство леммы 5. Рассмотрим ряд Фурье функции $a'(nt)$. Для каждой гармоники отдельно выпишем величину

$$U_k=n^{-1}\int\limits_0^{2\pi}\frac{d}{dt}H\big(\sin(knt+\varphi_k)\big)\,d_f\,dt.$$

Так как функция d_f переменной t содержит только гармоники, кратные m, то все величины U_k при k не кратных m равны нулю; кроме того, очевидно, $U_0=0$.

Итак, справедливо разложение

$$\int\limits_0^{2\pi}a'(nt)\,d_f\,dt=\sum_{k=1}^{\infty}U_{mk}a_{mk}.$$

Оценим теперь величину

$$\sum_{k=1}^{\infty}U_{mk}a_{mk}=\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_0^{2\pi}\Big(\frac{kma_{mk}}{\alpha^2-m^2k^2}\cos(kmnt+\varphi_{km})\Big)\,d_f\,dt.$$

Так как

$$\Big|\sum_{k=1}^{\infty}U_{mk}a_{mk}\Big|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\Big|\frac{kma_{mk}}{\alpha^2-m^2k^2}\Big|\cdot\Big|\int\limits_0^{2\pi}\cos(kmnt+\varphi_{km})\,d_f\,dt\Big|$$

и в силу леммы 2

$$\Big|\int\limits_0^{2\pi}\cos(kmnt+\varphi_{km})\,d_f\,dt\Big|\leqslant 2\pi\|d_f\|_{L^1}\leqslant 2\pi r_0R^{-\beta/(\beta+1)},$$

В предположениях теоремы

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_{km}^2\leqslant const\,a_m^2. \tag{35}$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big|\frac{kma_{mk}}{\alpha^2-m^2k^2}\Big| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}a_{mk}^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\Big|\frac{km}{\alpha^2-m^2k^2}\Big|^2} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{a_m\sqrt{A}}{m}\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{k}{k^2-\alpha^2m^{-2}}\Big)^2} \leqslant c a_m m^{-1},$$

то справедлива оценка

$$\Big|\sum_{k=1}^{\infty}U_{mk}a_{mk}\Big| \leqslant c\,a_m n^{-1}R^{-\beta/(\beta+1)}.$$

Лемма доказана.

4.5. Доказательство леммы 7. Зафиксируем последовательность $\delta=\delta(n)$ (выберем ее позднее) и разобьем промежуток $J=[t_0-\delta, 2\pi+t_0-\delta]$ длины 2π на две системы по $2m$ интервалов в каждой:

$$S^* = \bigcup_{j=0}^{2m-1} J_j, \quad J_j=[t_j-\delta, t_j+\delta], \qquad t_j=(j\pi-\theta)/m;$$
$$S_* = \bigcup_{j=0}^{2m-1} [t_j+\delta, t_{j+1}-\delta].$$

При выборе δ в дальнейшем мы будем полагать, что $Rm\delta\to\infty$ и $m\delta\to 0$, поэтому при $t\in S_*$ выполнены оценки

$$|R\sin(mt+\theta)+h(t)|, |R\sin(mt+\theta)| \geqslant Rm\delta/\pi,$$

функции $R\sin(mt+\theta)+h(t)$, $R\sin(mt+\theta)$ имеют общий знак. При $t\in S_*$ выполнены оценки $|D_f|\leqslant 2K_0(Rm\delta)^{-\beta}$ и

$$\Big|\int_{S_*} a'(nt)D_f\,dt\Big| \leqslant 4\pi K_0\cdot\sup|a'|(Rm\delta)^{-\beta}.$$

Оценки величин

$$\Big|\int_{S^*} a'(nt)D_f\,dt\Big|$$

несколько деликатнее. В середине каждого интервала $J_j\subset S^*$ лежит решение t_j уравнения $\sin(mt+\theta)=0$, длина каждого такого интервала равна 2δ, в окрестностях концов интервала J_j функции $|R\sin(mt+\theta)+h(t)|$ и $|R\sin(mt+\theta)|$ принимают значения порядка $Rm\delta$ и имеют разный знак. Зафиксируем один такой интервал $J_j=(a,b)$ и сделаем в интеграле

$$\mathcal{J} = \int_a^b a'(nt)f\big(R\sin(mt+\theta)+h(t)\big)\,dt$$

замену переменных

$$R\sin(mt+\theta)+h(t) = R\sin(m\tau+\theta). \tag{36}$$

На интервале (a,b) по построению $|\sin(mt+\theta)| \leqslant m\delta \to 0$, поэтому $|\cos(mt+\theta)|$ принимает значения порядка единицы. Следовательно, при больших значениях R функция $R\sin(mt+\theta)+h(t)$ монотонная на (a,b), а функция $R\sin(m\tau+\bar\theta)$ монотонная на интервале $(\tau(a),\tau(b))$ изменения τ и замена переменных корректна: однозначно определены соответствующие непрерывно-дифференцируемые монотонные функции $\tau(t) : (a,b) \to (\tau(a),\tau(b))$ и $t(\tau) : (\tau(a),\tau(b)) \to (a,b)$. Длина отрезка (a,b) равна 2δ, производные функций $\tau(t)$ и $t(\tau)$ равномерно близки к единице.

Из равенства (36) легко видеть, что справедливы оценки

$$(37)\qquad |t-\tau| \leqslant const\cdot\frac{\|h\|_C}{mR} \leqslant \frac{const}{mR} \quad \text{и} \quad |1-t'_\tau| \leqslant const\cdot\Big(m|t-\tau| + \frac{\|h'\|_C}{mR}\Big) \leqslant \frac{const}{R}.$$

Первая оценка верна по построению множества G, вторая — в силу леммы 6 и равенства

$$\frac{dt}{d\tau} - 1 = \frac{\cos(m\tau+\theta) - \cos(mt+\theta) - \dfrac{h'(t)}{mR}}{\cos(mt+\theta) + \dfrac{h'(t)}{mR}},$$

которое в свою очередь вытекает из

$$\cos(mt+\theta)dt + \frac{h'(t)}{mR}dt = \cos(m\tau+\theta)d\tau.$$

Так как

$$\mathfrak{I} = \int\limits_{\tau(a)}^{\tau(b)} a'(nt) f\big(R\sin(m\tau+\theta)\big) t'(\tau)\, d\tau =$$

$$= \int\limits_{a}^{b} a'(n\tau) f\big(R\sin(m\tau+\theta)\big)\, d\tau + \mathfrak{I}_1 + \mathfrak{I}_2 + \mathfrak{I}_3 + \mathfrak{I}_4,$$

где

$$\mathfrak{I}_1 = \int\limits_{\tau(a)}^{\tau(b)} \big(a'(n\tau) - a'(nt)\big) f\big(R\sin(m\tau+\theta)\big) t'(\tau)\, d\tau,$$

$$\mathfrak{I}_2 = \int\limits_{\tau(a)}^{\tau(b)} a'(n\tau) f\big(R\sin(m\tau+\theta)\big) \big(t'(\tau)-1\big)\, d\tau,$$

$$\mathfrak{I}_3 = \int\limits_{\tau(a)}^{a} a'(n\tau) f\big(R\sin(m\tau+\theta)\big)\, d\tau,$$

$$\mathfrak{I}_4 = \int\limits_{b}^{\tau(b)} a'(n\tau) f\big(R\sin(m\tau+\theta)\big)\, d\tau,$$

то

$$\int\limits_{a}^{b} a'(n\tau) D_f\, dt = \mathfrak{I}_1 + \mathfrak{I}_2 + \mathfrak{I}_3 + \mathfrak{I}_4.$$

Для величин $\mathcal{J}_r, r=1,2$ легко выписать вытекающие из (37) соотношения $|\mathcal{J}_1|,|\mathcal{J}_2| \leqslant c\delta R^{-1}$. Так как таких интервалов (a,b) всего $2m$ штук, то сумма всех слагаемых $\mathcal{J}_r, r=1,2$ (по всем $2m$ интервалам (a,b)) не превосходит $cn\delta R^{-1}$.

Оценки слагаемых $\mathcal{J}_r, r=3,4$ сложнее.

При некотором $\tau^* \in (\tau(a),a)$

$$\mathcal{J}_3 = (a-\tau(a))a'(n\tau^*)f\big(R\sin(m\tau^*+\theta)\big),$$

на интервале $(\tau(a),a)$ с точностью до малых членов

$$a'(n\tau^*) = a'(na), \quad f\big(R\sin(m\tau^*+\theta)\big) = (-1)^{j+1}, \quad a-\tau(a) = -h(a)/Rm.$$

Поэтому (опять с точностью до малых членов)

$$\mathcal{J}_3 = (-1)^j a'(na)h(a)/Rm.$$

Аналогично (другой знак у f и другое направление отрезка)

$$\mathcal{J}_4 = (-1)^j a'(nb)h(b)/Rm.$$

Поэтому суммы всех $2m$ величин $\mathcal{J}_r, r=3,4$ (по всем $2m$ интервалам (a,b)) с точностью до малых членов (оценки достаточно просты) можно записать в виде

$$\sum \mathcal{J}_3 = \frac{1}{mR}\sum_{k=0}^{2m-1}(-1)^j h(t_j-\delta)a'\big(n(t_j-\delta)\big),$$

и

$$\sum \mathcal{J}_4 = \frac{1}{mR}\sum_{k=0}^{2m-1}(-1)^j h(t_j+\delta)a'\big(n(t_j+\delta)\big).$$

Теперь получим оценки таких сумм. Для этого воспользуемся представлением

$$h(t) = a(nt) + H\Omega\,\mathrm{sign}\big(\sin(mt+\theta)\big) + H\Omega\tilde{h},$$

подставим это выражение в формулы для $\sum \mathcal{J}_3$ и $\sum \mathcal{J}_4$ и оценить каждое слагаемое отдельно.

Оценка величины

$$S_s = \sum_{j=0}^{2m-1}(-1)^j a'(nt)H\Omega\,\mathrm{sign}\big(\sin(mt+\theta)\big)\Big|_{t=\frac{j\pi}{m}+\phi}, \quad \phi = \pm\delta$$

следует из соотношений

$$\begin{aligned} H\Omega\,\mathrm{sign}\big(\sin(mt+\theta)\big) &= H\Omega\Big(\frac{4}{\pi}\sum_{k=1,3,\ldots}\frac{\sin k(mt+\theta)}{k}\Big) \\ &= \frac{4}{\pi}\sum_{k=3,5,\ldots}\frac{1}{k(\alpha^2-k^2m^2n^{-2})}\sin k(mt+\theta). \end{aligned}$$

Так как $\sin k(mt_j+\theta) = (-1)^{kj}\sin(k\delta)$, то

$$S_s \leqslant cm \sum_{k=3,5,\ldots} \frac{1}{k|\alpha^2-k^2m^2n^{-2}|}|\sin(k\delta)| \leqslant cm\delta \sum_{k=3,5,\ldots} \frac{1}{|\alpha^2-k^2m^2n^{-2}|} \leqslant cm\delta.$$

Оценка величины

$$\sum_{j=0}^{m-1} a(nt)a'(nt)\Big|_{t=t_j=\frac{j\pi}{m}+\phi}$$

следует из леммы 10 (ее надо применить отдельно для четных j при $\phi=\pm\delta$ и для нечетных j при $\phi=\pm\delta+\pi/m$).

Лемма 10. Справедлива оценка

$$S=\sum_{j=0}^{m-1} a(nt)a'(nt)\Big|_{t=\tilde t_j=\frac{2j\pi}{m}+\phi} \leqslant cm^{-\gamma},$$

постоянная c не зависит от m, n и ϕ.

В силу леммы 3 справедлива оценка

$$\Big|\sum_{j=1}^{2m-1}(-1)^j a'(nt_j)H\mathfrak{Q}\tilde h(t_j)\Big| \leqslant cm\ln nR^{\beta/(\beta+1)}.$$

Поэтому результирующая оценка имеет вид

$$|\sum \mathcal{J}_3|, |\sum \mathcal{J}_4| \leqslant \frac{c}{R}(n^{-1-\gamma}+\delta+n\ln nR^{-\beta/(\beta+1)}),$$

следовательно,

$$\Big|\int_0^{2\pi} a'(nt)D_f dt\Big| \leqslant \frac{c}{R}(n^{-1-\gamma}+\delta m+n\ln nR^{-\beta/(\beta+1)})+c(Rm\delta)^{-\beta}.$$

При $n\delta = R^{-(\beta-1)/(\beta+1)}$ выполняется равенство порядков величин δmR^{-1} и $(Rm\delta)^{-\beta}$ и получаются лучшие оценки для всех слагаемых, зависящих от δ. Результатом полученных оценок является неравенство (32).

Лемма доказана.

4.6. Доказательство леммы 9. Так как

$$H\mathfrak{Q}y(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{k=0,k\neq m}^{\infty} \frac{\cos k(t-s)}{\alpha^2-k^2/n^2}\, y(s)\, ds,$$

то

$$W=\pi\sum_{j=0}^{m-1} a(n\tilde t_j)H\mathfrak{Q}y(\tilde t_j) = \sum_{j=0}^{m-1} a(n\tilde t_j)\int_0^{2\pi} \sum_{k=0,k\neq m}^{\infty} \frac{\cos k(\tilde t_j-s)}{\alpha^2-k^2/n^2}\, y(s)\, ds$$

и после перестановки интеграла и сумм получается равенство

$$W = \int\limits_0^{2\pi} y(s)\,ds \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{a_\ell}{\alpha^2-\ell^2} \sum_{k=0,k\neq m}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2-k^2/n^2} \sum_{j=0}^{m-1} \cos(\ell nt+\varphi_\ell)\cos k(\tilde t_j - s).$$

Рассмотрим сумму

$$2\sum_{j=0}^{m-1} \cos(\ell nt+\varphi_\ell)\cos k(\tilde t_j - s) = \sum_{j=0}^{m-1} \cos\bigl((\ell n+k)\tilde t_j + \varphi_\ell - ks\bigr) + \sum_{j=0}^{m-1} \cos\bigl((\ell n-k)\tilde t_j + \varphi_\ell + ks\bigr).$$

При любом целом M, не кратном m, и любом ζ справедливо тождество

$$\sum_{j=0}^{m-1} \cos(M\tilde t_j + \zeta) = 0.$$

Поэтому из двух сумм, стоящих справа, ненулевыми будут лишь те, в которых $\ell n \pm k = pm$ ($p \in \mathbb{Z}$). При этом все слагаемые одинаковы, то есть, если $k = pm + \ell n$, то

$$\sum_{j=0}^{m-1} \cos\bigl((\ell n-k)\tilde t_j + \varphi_\ell + ks\bigr) = m\cos\bigl((\ell n-k)\phi + \varphi_\ell + ks\bigr);$$

если $k = pm - \ell n$, то

$$\sum_{j=0}^{m-1} \cos\bigl((\ell n+k)\tilde t_j + \varphi_\ell - ks\bigr) = m\cos\bigl((\ell n+k)\phi + \varphi_\ell - ks\bigr).$$

Таким образом, формулу для W можно переписать следующим образом:

$$W = \frac{m}{2}\int\limits_0^{2\pi} (Z_+ + Z_-)\,y(s)\,ds,$$

где

$$Z_+ = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{a_\ell}{\alpha^2-\ell^2} \sum_{\substack{p\in\mathbb{Z}, mp+\ell n\neq m,\\ mp+\ell n\geqslant 0}} \frac{\cos(\ldots)}{\alpha^2-(mp+\ell n)^2/n^2},$$

$$Z_- = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{a_\ell}{\alpha^2-\ell^2} \sum_{\substack{p\in\mathbb{Z}, mp-\ell n\neq m,\\ mp-\ell n\geqslant 0}} \frac{\cos(\ldots)}{\alpha^2-(mp-\ell)^2/n^2}.$$

Теперь докажем оценку $|Z_+| \leqslant c$, на этом доказательство леммы будет завершено (оценка $|Z_-| \leqslant c$ доказывается аналогично).

Так как $a_\ell < c\ell^{-\gamma}$, то

$$|Z_+| \leqslant \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{a_\ell}{|\alpha^2-\ell^2|} \sum_{\substack{p\in\mathbb{Z}, mp+\ell n\neq m,\\ mp+\ell n\geqslant 0}} \frac{1}{|\alpha^2-(mp+\ell n)^2/n^2|} \leqslant$$

$$\leqslant c\sum_{\ell=1}^{\infty} \ell^{-2-\gamma} \sum_{\substack{p\in\mathbb{Z}, mp+\ell n\neq m,\\ mp+\ell n\geqslant 0}} \frac{1}{|\alpha^2-(mp+\ell n)^2/n^2|}.$$

Далее в доказательстве используется обозначение $\|\xi\|_{\mathbb{Z}} = \min(\{\xi\}, 1-\{\xi\})$ ($\{\cdot\}$ — дробная часть числа) для расстояния от числа ξ до целочисленной решетки.

Рассмотрим величину $\left|\alpha^2 - (mp+\ell n)^2 n^{-2}\right| = \alpha^2 s_1 s_2$, где

$$s_1 = s_1(p,\ell) = \left|1 - p\alpha^{-1}\frac{m}{n} - \ell\alpha^{-1}\right|, \quad s_2 = s_2(p,\ell) = \left|1 + p\alpha^{-1}\frac{m}{n} + \ell\alpha^{-1}\right|.$$

При каждом ℓ, кратном m, сомножители s_q $(q = 1,2)$ при $mp + \ell n \geqslant 0$, $mp + \ell n \neq m$ больше 1 (сомножитель s_1 при $mp + \ell n = m$ очень маленький, но он исключен). Таким образом, сумма по всем ℓ, кратным m заведомо ограничена абсолютной константой (сходится ряд при каждом ℓ, все суммы равномерно ограничены, сходится ряд по ℓ, кратным m).

При каждом ℓ, не кратном m, сомножитель s_1 ровно при двух значениях p (отличающихся на 1), удовлетворяющих $mp+\ell n \neq m, mp+\ell n \geqslant 0$, становится меньше 1, второй сомножитель всегда больше 1. При этих двух значениях (обозначим их $p_1(\ell)$ и $p_2(\ell)$) сомножитель s_1 больше m^{-1}, справедливы соотношения $p_1(\ell)\alpha \sim \ell$ и $p_2(\ell)\alpha \sim \ell$. Сумма величин $s_1(p_1(\ell),\ell)$ и $s_1(p_2(\ell),\ell)$ равна 1 (с точностью до m^{-2}), поэтому одна из этих величин больше $1/2$, а вот вторая действительно маленькая. Обозначим соответствующее значение $p_q(\ell)$ через $p(\ell)$.

Теперь заметим, что при каждом ℓ, не кратном m, ряд

$$\sum_{\substack{p\in\mathbb{Z}, mp+\ell n\neq m,\\ mp+\ell n\geqslant 0, p\neq p(\ell)}} \frac{1}{|\alpha^2 - (mp+\ell n)^2/n^2|}$$

сходится и его суммы при всех ℓ ограничены общей константой. Поэтому,

$$\sum_{\substack{\ell=1,\\ \ell \text{ не кратно } m}}^{\infty} \ell^{-2-\gamma} \sum_{\substack{p\in\mathbb{Z}, mp+\ell n\neq m,\\ mp+\ell n\geqslant 0, p\neq p(\ell)}} \frac{1}{|\alpha^2 - (mp+\ell n)^2/n^2|} \leqslant const.$$

Для доказательства леммы осталось оценить величину ряда

$$\sum_{\substack{\ell=1,\\ \ell \text{ не кратно } m}}^{\infty} \ell^{-2-\gamma} \frac{1}{s_1(p(\ell),\ell)} = \sum_{\substack{\ell=1,\\ \ell \text{ не кратно } m}}^{\infty} \ell^{-2-\gamma} \frac{1}{\left|1 - p(\ell)\alpha^{-1}\frac{m}{n} - \ell\alpha^{-1}\right|}.$$

Теперь заметим, что “хвост”

$$\sum_{\substack{\ell=m+1,\\ \ell \text{ не кратно } m}}^{\infty} \ell^{-2-\gamma} \frac{1}{\left|1 - p(\ell)\alpha^{-1}\frac{m}{n} - \ell\alpha^{-1}\right|}$$

(так как $s_1(p(\ell),\ell) > m^{-1}$) не больше

$$m \sum_{\substack{\ell=m+1,\\ \ell \text{ не кратно } m}}^{\infty} \ell^{-2-\gamma} \leqslant m\, m^{-1-\gamma} \to 0.$$

Для оценки оставшейся части

$$\sum_{\ell=1}^{m-1} \ell^{-2-\gamma} \frac{1}{\left|1 - p(\ell)\alpha^{-1}\frac{m}{n} - \ell\alpha^{-1}\right|}$$

поступим следующим образом. Так как

$$\frac{1}{\left|1-p(\ell)\alpha^{-1}\frac{m}{n}-\ell\alpha^{-1}\right|}=\frac{1}{\left|1-p(\ell)-\ell\alpha^{-1}+p(1-\frac{m}{n}\alpha^{-1})\right|}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{\left|1-p(\ell)-\ell\alpha^{-1}\right|}+\frac{\left|p(\ell)(1-\frac{m}{n}\alpha^{-1})\right|}{\left|1-p(\ell)-\ell\alpha^{-1}\right|\cdot\left|1-p(\ell)-\ell\alpha^{-1}+p(\ell)(1-\frac{m}{n}\alpha^{-1})\right|}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{\|\ell\alpha^{-1}\|_{\mathbb{Z}}}+p(\ell)\frac{\alpha^{-1}n^{-2}}{m^{-2}},$$

то

$$\sum_{\ell=1}^{m-1}\ell^{-2-\gamma}\frac{1}{\left|1-p(\ell)\alpha^{-1}\frac{m}{n}-\ell\alpha^{-1}\right|}\leqslant\sum_{\ell=1}^{m-1}\ell^{-2-\gamma}\frac{1}{\|\ell\alpha^{-1}\|_{\mathbb{Z}}}+\sum_{\ell=1}^{m-1}\ell^{-1-\gamma}p(\ell)/\ell.$$

Второе слагаемое ограничено, а для оценки первого слагаемого воспользуемся условиями $\ell^{1+\mu}\|\ell\alpha^{-1}\|_{\mathbb{Z}}\geqslant c$ и $\mu<\gamma$: в силу этих условий

$$\sum_{\ell=1}^{m-1}\ell^{-2-\gamma}\frac{1}{\|\ell\alpha^{-1}\|_{\mathbb{Z}}}\leqslant c\sum_{\ell=1}^{\infty}\ell^{1+\mu-2-\gamma}<\infty.$$

Лемма доказана.

4.7. Доказательство леммы 10. Вначале заметим, что в силу взаимной простоты чисел m и n множество остатков от деления чисел $\{0,n,2n,\dots,(m-1)n\}$ на m совпадает с множеством $\{0,1,2,\dots,(m-1)\}$. Поэтому из периодичности функции b с периодом 2π вытекает равенство

$$S=\sum_{j=0}^{m-1}a(t)a'(t)\Big|_{t=\tilde t_j=\frac{2j\pi}{m}+n\phi}.$$

Потому

$$S=\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{\alpha^2-k^2}\sin(k\tilde t_j+\varphi_k)\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{\ell a_\ell}{\alpha^2-\ell^2}\cos(\ell\tilde t_j+\varphi_\ell)=$$
$$=\sum_{\ell=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{\alpha^2-k^2}\frac{\ell a_\ell}{\alpha^2-\ell^2}\sum_{j=0}^{m-1}\sin(k\tilde t_j+\varphi_k)\cos(\ell\tilde t_j+\varphi_\ell).$$

Рассмотрим величину

$$S_{k,\ell}=\sum_{j=0}^{m-1}\sin(k\tilde t_j+\varphi_k)\cos(\ell\tilde t_j+\varphi_\ell).$$

При любом целом M, не кратном m, и любом ζ справедлива тождества

$$\sum_{i=0}^{m-1}\cos(Mt_i+\zeta)=0.$$

Поэтому в суммах

$$2S_{k,\ell}=\sum_{j=0}^{m-1}\sin((k+\ell)\tilde t_j+\varphi_k+\varphi_\ell)+\sum_{j=0}^{m-1}\sin((k-\ell)\tilde t_j+\varphi_k-\varphi_\ell)$$

ненулевыми остаться могут только те, в которых $\ell \pm k = pm$ (p — любое целое число). Более того, если $p = 0$, то есть $k = \ell$, то также $S_{k,\ell} = 0$. Если $k + \ell = pm$, то

$$\sum_{j=0}^{m-1} \sin((k+\ell)\tilde{t}_j + \varphi_k + \varphi_\ell) = m \sin(p\phi + \varphi_k + \varphi_\ell).$$

Если $k - \ell = pm$, то

$$\sum_{j=0}^{m-1} \sin((k-\ell)\tilde{t}_j + \varphi_k - \varphi_\ell) = m \sin(p\phi + \varphi_k - \varphi_\ell).$$

Поэтому $S = mS_+ + mS_-$,

$$S_+ = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\ell a_\ell}{\alpha^2 - \ell^2} \sum_{p=1,2,\ldots;mp-\ell\geqslant 0} \frac{a_{pm-\ell}}{\alpha^2 - (pm-\ell)^2} \sin(p\phi + \varphi_{pm-\ell} + \varphi_\ell),$$
$$S_- = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\ell a_\ell}{\alpha^2 - \ell^2} \sum_{p=\pm 1,\pm 2,\ldots;mp+\ell\geqslant 0} \frac{a_{pm+\ell}}{\alpha^2 - (pm+\ell)^2} \sin(p\phi + \varphi_{pm+\ell} + \varphi_\ell).$$

Теперь отдельно оценим получившиеся двойные ряды (мы распишем только первый из них):

$$\begin{aligned}
|S_+| &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\ell a_\ell}{|\alpha^2 - \ell^2|} \sum_{p=1,2,\ldots;mp-\ell\geqslant 0} \frac{a_{pm-\ell}}{|\alpha^2 - (pm-\ell)^2|} \leqslant \\
&\leqslant \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(\ell+1)^{1-\gamma}}{|\alpha^2 - \ell^2|} \sum_{p=1,2,\ldots;mp-\ell\geqslant 0} \frac{(pm-\ell+1)^{-\gamma}}{|\alpha^2 - (pm-\ell)^2|} = \\
&= \sum_{s=1}^{m} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(rm+s+1)^{1-\gamma}}{|\alpha^2 - (rm+s)^2|} \sum_{p=1,2,\ldots;mp-(rm+s)\geqslant 0} \frac{(pm-(rm+s)+1)^{-\gamma}}{|\alpha^2 - (pm-rm-s)^2|} = \\
&= \sum_{s=1}^{m} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(rm+s+1)^{1-\gamma}}{|\alpha^2 - (rm+s)^2|} \sum_{p=r+1}^{\infty} \frac{(pm-(rm+s)+1)^{-\gamma}}{|\alpha^2 - (pm-rm-s)^2|} = \\
&= \sum_{s=1}^{m} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(rm+s+1)^{1-\gamma}}{|\alpha^2 - (rm+s)^2|} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(pm-s+1)^{-\gamma}}{|\alpha^2 - (pm-s)^2|}.
\end{aligned}$$

Теперь оба ряда оценим отдельно:

$$\begin{aligned}
\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(rm+s+1)^{1-\gamma}}{|\alpha^2 - (rm+s)^2|} &= \frac{(s+1)^{1-\gamma}}{|\alpha^2 - s^2|} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(rm+s+1)^{1-\gamma}}{|\alpha^2 - (rm+s)^2|} \leqslant \\
&\leqslant \frac{(s+1)^{1-\gamma}}{|\alpha^2 - s^2|} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(rm)^{1-\gamma}}{(rm)^2} = \frac{(s+1)^{1-\gamma}}{|\alpha^2 - s^2|} + m^{-1-\gamma} \sum_{r=1}^{\infty} r^{-1-\gamma},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(pm-s+1)^{-\gamma}}{|\alpha^2 - (pm-s)^2|} &= \frac{(m-s+1)^{-\gamma}}{|\alpha^2 - (m-s)^2|} + \sum_{p=2}^{\infty} \frac{(pm-s+1)^{-\gamma}}{|\alpha^2 - (pm-s)^2|} \leqslant \\
&\leqslant \frac{(m-s+1)^{-\gamma}}{|\alpha^2 - (m-s)^2|} + \sum_{p=2}^{\infty} \frac{((p-1)m)^{-\gamma}}{((p-1)m)^2} = \frac{(m-s+1)^{-\gamma}}{|\alpha^2 - (m-s)^2|} + m^{-2-\gamma} \sum_{p=1}^{\infty} p^{-2-\gamma}
\end{aligned}$$

Итак,

$$|S_+| \leqslant \sum_{s=1}^{m} \Big(\frac{(s+1)^{1-\gamma}}{|\alpha^2 - s^2|} + cm^{-1-\gamma}\Big)\Big(\frac{(m-s+1)^{-\gamma}}{|\alpha^2 - (m-s)^2|} + cm^{-2-\gamma}\Big).$$

Напишем только оценку произведения

$$\sum_{s=1}^{m} \frac{(s+1)^{1-\gamma}}{|\alpha^2 - s^2|} \frac{(m-s+1)^{-\gamma}}{|\alpha^2 - (m-s)^2|}.$$

Отдельно ($[\alpha]$ — целая часть числа α) рассмотрим суммы по $s = 1, 2, ...[\alpha]$, по $s = m - [\alpha], \ldots, m$ и по $s = [\alpha]+1, \ldots, m-[\alpha]-1$. Для каждой из сумм раскроем модули, две первые суммы (в них число слагаемых не растет при росте n) оцениваются требуемым образом совсем просто, а третью напишем отдельно:

$$\sum_{s=[\alpha]+1}^{m-[\alpha]-1} \frac{(s+1)^{1-\gamma}}{s^2-\alpha^2} \frac{(m-s+1)^{-\gamma}}{(m-s)^2-\alpha^2} \leqslant m \sum_{s=[\alpha]+1}^{m-[\alpha]-1} \frac{(s+1)^{-\gamma}}{s^2-\alpha^2} \frac{(m-s+1)^{-\gamma}}{(m-s)^2-\alpha^2} \leqslant$$

$$\leqslant 2m \sum_{s=[\alpha]+1}^{[m/2]} \frac{(s+1)^{-\gamma}}{s^2-\alpha^2} \frac{(m-s+1)^{-\gamma}}{(m-s)^2-\alpha^2} \leqslant 2m \frac{(m/2)^{-\gamma}}{(m-m/2)^2-\alpha^2} \sum_{s=[\alpha]+1}^{[m/2]} \frac{(s+1)^{-\gamma}}{s^2-\alpha^2} \leqslant cm^{-1-\gamma}.$$

Отсюда вытекает утверждение леммы.

5. Благодарности

Авторы выражают искреннюю признательность Михаилу Цфасману за многочисленные консультации по теории чисел.

Список литературы

1. *Deimling K.* Nonlinear Functional Analysis. Springer, 1985.

2. *Красносельский М.А., Забрейко П.П.* Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука, 1975.

3. *Красносельский М.А., Перов А.И., Поволоцкий А.И., Забрейко П.П.* Векторные поля на плоскости. М.: Физматгиз, 1963.

4. *Каток А.Б., Хассельблат Б.* Введение в современную теорию динамических систем. М.: Факториал, 1999.

5. *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. М.: Наука, 1984.

6. *Liu B., Wang Y.* Invariant tori in nonlinear oscillations. Science in China (Series A), **42**, №10, 1999, 1047-1058.

7. *Ortega R.* Asymmetric oscillators and twist mappings. J. London Math. Soc., **53**, 1996, 325-342.

8. *Fonda A., Ramos M., Willem M.* Subharmonic solutions for second order differential equations. Topological Methods in Nonlinear Analysis. Journal of the Julius Schauder Center. **1**, 49-66 (1993).

9. *Krasnosel'skii A.M., Pokrovskii A.V.* Large subharmonics of pendulum-like equations. In “The First 60 Years of Nonlinear Analysis of Jean Mawhin”, Eds. M. Delgado, J.López-Gómez, R.Ortega, A.Suáréz. World Scientific Publishing, 2004, 103-116.

10. *Красносельский А.М., Покровский А.В.* О субгармониках больших амплитуд в полулинейном осцилляторе Дуффинга. Доклады Академии наук, **391**, 4 (2003) 449-452.

11. *Касселс Дж.В. С.* Введение в теорию диофантовых приближений. М.: Изд. иностр. лит., 1961.

12. *Хинчин А.Я.* Цепные дроби. М.-Л.: Гостехиздат, 1949.

13. *Zygmund A.* Trigonometric series. Cambridge Univ. Press, New York, 1959.

14. *Красносельский А.М., Рачинский Д.И.* Ветвление на бесконечности решений уравнений с двукратным вырождением. Доклады Академии наук, **394**, 4 (2004), 439-443.

15. *Diamond P., Kloeden P.E., Krasnosel'skii A.M., Pokrovskii A.V.* Bifurcations at infinity for equations in spaces of vector-valued functions. Journal of Australian Mathematical Society, Series A, **63**, 263-280 (1997).

А.М. Красносельский, А.В. Покровский

Топологически устойчивые субгармоники больших периодов и амплитуд

Аннотация

Для нерезонансных неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений, типа квазилинейного уравнения Дуффинга, предлагаются условия существования последовательностей топологически устойчивых субгармоник с возрастающими к бесконечности амплитудами и периодами. Существование таких последовательностей определяется близостью рассматриваемых уравнений к некоторым нелинейным уравнениям с резонансной главной линейной частью. Основные условия представляют собой соотношения между скоростью насыщения нелинейности на бесконечности, гладкостью вынуждающей силы (насколько быстро убывают гармоники ее ряда Фурье) и тем, как иррациональная собственная частота линейного осциллятора приближается рациональными числами.

Контактные телефоны:

Красносельский Александр Маркович

служебный: **299-83-54**

мобильный: **916-494-1576**

Домашний: **420-59-39**

E-mail: `Sashaamk@iitp.ru`

Правильные ссылки на издания на английском

2. *Krasnosel'skii M.A., Zabreiko P.P.* Geometric methods of nonlinear analysis. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1984.

3. *Krasnosel'skii M.A., Perov A.I., Povolockii A.I., Zabreiko P.P.* Plane Vector Fields. Academic Press, New York, 1966.

4. *Katok A.B., Hasselblatt B.* Introduction to the modern theory of dynamical systems. Cambrigde University Press, Cambridge, 1995.

5. *A.J. Lichtenberg, M.A. Lieberman* Regular and stochastic motion. New York : Springer-Verlag, 1983

10. *Krasnosel'skii A.M., Pokrovskii A.V.* Subharmonics of large amplitudes in a semilinear Duffing oscillator, Doklady Mathematics, **68**, 1 (2003) 84-88.

11. *Cassels J.W.S.* An introduction to diophantine approximation. Cambridge Univ. Press, 1957.

12. *Khinchin A. Ya.* Continued Fractions. University of Chicago Press, 1961.

14. *Krasnosel'skii A.M., Rachinskii D.I.* Branching at infinity of solutions to equations with degeneration of multiplicity 2, Doklady Mathematics, **69**, 1 (2004) 79-83.