УДК 517.988.67

О числе неограниченных ветвей решений в окрестности асимптотической точки бифуркации [1]

А.М. Красносельский,[2] Д.И. Рачинский [2]

1. Введение

Предложен метод исследования асимптотически линейных векторных полей с параметром, позволяющий доказывать теоремы об асимптотических точках бифуркации (точках бифуркации на бесконечности) в случае двукратного вырождения главной линейной части. Выделен класс полей, имеющих более двух неограниченных ветвей особых точек в окрестности точки бифуркации.

Бифуркации на бесконечности были введены М.А. Красносельским. В [1] предложен принцип смены индекса и ставшие классическими теоремы о точках бифуркации на бесконечности и в нуле, порожденных собственными значениями нечетной кратности линеаризованных задач.

Изучение собственных значений четной кратности существенно сложнее. Информация о главной линейной части задачи не дает ответа на вопрос, является ли четнократное собственное значение точкой бифуркации; необходимо использовать свойства нелинейностей. Например, для градиентных полей кратность собственного значения роли не играет. Этот факт установлен в [1] для бифуркаций в нуле; в [2] предложены аналоги на бесконечности.

Здесь используется асимптотическая однородность нелинейностей (см. [3]) и специальное свойство согласованности нелинейностей и главной линейной части. Для асимптотически линейных полей с асимптотически однородными нелинейностями сформулированы условия, при которых двукратное собственное значение линейной части является точкой бифуркации на бесконечности, и предложены оценки числа неограниченных ветвей особых точек.

---

[1]Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (гранты 01-01-00146, 03-01-00258), Фондом содействия отечественной науке и грантами Президента РФ НШ-1532.2003.1 и МД-87.2003.01. Работа частично выполнена в период пребывания первого автора в BCRI, University College Cork, Ireland в 2002-2003 гг.

[2]Институт проблем передачи информации РАН

В следующем разделе формулируются основные определения и абстрактные результаты. Далее рассматриваются приложения к различным краевым задачам. Наиболее просты приложения к 2π-периодической задаче для уравнения $x'' + \lambda^2 x = b(t) + f(x)$ (раздел 3.1). Здесь линеаризованная на бесконечности задача имеет двукратное вырождение при целых $\lambda = m \neq 0$; указаны оценки снизу числа неограниченных ветвей решений при $\lambda \to m$. В разделе 3.2 рассмотрены субгармоники (периодические решения кратного периода); предложены оценки числа неограниченных ветвей $2n\pi$-периодических решений при $\lambda \to m/n$. В разделе 3.3 приведены обобщения для уравнений, возникающих в теории управления. Бифуркации периодических решений векторных систем изучаются в разделе 4. В разделе 5 сформулированы приложения к двумерной двухточечной краевой задаче.

Часть приведенных приложений имеют градиентный вид. Для них новизна полученных результатов заключается в оценке числа возникающих ветвей решений. Однако основные результаты сохраняются при малых неградиентных возмущениях задач. В изучаемых ситуациях смены индекса не происходит.

Предлагаемые теоремы основаны на новом методе выделения главных членов уравнений разветвления в задаче о бифуркациях на бесконечности.

2. Основные результаты

2.1. Постановка задачи. Рассмотрим в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$ зависящее от скалярного параметра λ векторное поле $x - T(x,\lambda)$. Пусть нелинейный оператор $T(x,\lambda)$ вполне непрерывен по совокупности переменных $x \in \mathbb{H}$, $\lambda \in \Lambda = [\lambda_-, \lambda_+] \subset \mathbb{R}$ и асимптотически линеен (дифференцируем на бесконечности) по переменной x, то есть верно равенство

$$\lim_{\|x\|_{\mathbb{H}} \to \infty} \|x\|_{\mathbb{H}}^{-1} \|T(x,\lambda) - T'_\infty(\lambda)x\|_{\mathbb{H}} = 0,$$

где линейный оператор $T'_\infty(\lambda)$ также вполне непрерывен (см., например, [4]).

В дальнейшем мы ограничимся классической ситуацией, когда $T'_\infty(\lambda) = \lambda A$ при некотором A и $T(x,\lambda) = \lambda Ax + F(Ax,\lambda)$. Такие поля (или эквивалентные им поля $\lambda Ax + AF(x,\lambda)$) возникают при исследовании квазилинейных краевых задач. Рассмотрим уравнение

$$x = \lambda Ax + F(Ax, \lambda); \tag{1}$$

пусть $\mathfrak{M}$ — множество всех его решений[3] $(x, \lambda) \in \mathbb{H}\times\Lambda$. Значение λ_0 параметра назовем *асимптотической точкой бифуркации*, если для любой окрестности $U(\lambda_0)$ точки λ_0 множество $\mathfrak{F} = \{(x, \lambda) \in \mathfrak{M} \colon \lambda \in U(\lambda_0)\} \subset \mathbb{H}\times\Lambda$ неограничено. Как известно, каждая асимптотическая точка бифуркации — это характеристическое значение линейного вполне непрерывного оператора A.

Положим $Z_\rho = \{(x, \lambda) : \|x\|_{\mathbb{H}} < \rho, \lambda \in \Lambda\}$. Следуя [1, 4], назовем множество $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$ *неограниченной непрерывной ветвью решений* уравнения (1), если при любом достаточно большом $\rho > 0$ на границе каждого содержащего цилиндр Z_ρ ограниченного множества $\Gamma \subset \mathbb{H}\times\mathbb{R}$ есть хотя бы одна точка $(x, \lambda) \in \mathfrak{N} \setminus Z_\rho$. Если $\lambda_0 \in (\lambda_-, \lambda_+)$ — единственное характеристическое значение оператора A на промежутке Λ, то

$$\lim_{\rho\to\infty} \sup_{(x,\lambda)\in\mathfrak{N}\setminus Z_\rho} |\lambda - \lambda_0| = 0 \tag{2}$$

и поэтому λ_0 является асимптотической точкой бифуркации. Ветвь $\mathfrak{N}$ назовем *направленной при* $\lambda \to \lambda_0$, если верно соотношение (2) и существует предел

$$\lim_{\rho\to\infty} \sup_{(x,\lambda)\in\mathfrak{N}\setminus Z_\rho} \big\| x/\|x\|_{\mathbb{H}} - e \big\|_{\mathbb{H}} = 0;$$

вектор e назовем *предельным* для $\mathfrak{N}$. Направленная неограниченная непрерывная ветвь может не быть непрерывной кривой в пространстве $\mathbb{H}\times\mathbb{R}$.

Ниже предполагается, что $\lambda_0 \in (\lambda_-, \lambda_+)$ — это ненулевое характеристическое значение кратности 2 вполне непрерывного оператора A. Оператор A предполагается самосопряженным. Предлагаются достаточные условия, при которых λ_0 является асимптотической точкой бифуркации, и оценки числа направленных неограниченных ветвей решений уравнения (1) при $\lambda \to \lambda_0$.

[3]Будем называть решениями уравнения (1) и векторы $x \in \mathbb{H}$, и пары $(x, \lambda) \in \mathbb{H}\times\Lambda$; из контекста всегда ясно, о чем идет речь.

2.2. Асимптотически однородные нелинейности. Основные предположения о нелинейности $F(x,\lambda)$ состоят в ее асимптотической однородности и специальной согласованности с линейным оператором A. В 1969 году Лазер и Лич первыми рассмотрели вырожденные в линейном приближении уравнения с асимптотически однородными нелинейностями [5]; эти нелинейности имеют на бесконечности следующий за линейным порядок.

Пусть банахово пространство $\mathbb{B}$ непрерывно вложено в $\mathbb{H}$. Пусть оператор $F : \mathbb{B} \to \mathbb{H}$ непрерывен и равномерно ограничен, то есть $\sup_{x\in\mathbb{B}} \|F(x)\|_{\mathbb{H}} < \infty$. Пусть $\mathbb{E}$ — конечномерное подпространство пространства $\mathbb{H}$, $S = \{x \in \mathbb{E} : \|x\|_{\mathbb{H}} = 1\}$ — единичная сфера в $\mathbb{E}$ и пусть $\mathbb{E} \subset \mathbb{B}$. Оператор F назовем *асимптотически однородным*, если определен такой непрерывный оператор $\Psi : S \to \mathbb{H}$, что при любом $c > 0$ и любом $y \in \mathbb{B}$ справедливо равенство

$$\lim_{r\to+\infty} \sup_{u\in S;\, h\in\mathbb{B},\, \|h\|_{\mathbb{B}}\leqslant c} \big|\, \langle y, F(ru+h) - \Psi(u)\rangle \,\big| = 0, \tag{3}$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{H}$, порождающее норму $\|\cdot\|_{\mathbb{H}}$. Оператор Ψ будем называть *асимптотическим пределом* оператора F. Тривиальный пример асимптотически однородного оператора — это $F(x) \equiv F_0$; сумма асимптотически однородных операторов асимптотически однородна.

Везде далее $\mathbb{E}$ — двумерное собственное подпространство оператора A, определяемое равенством $x = \lambda_0 Ax$. В приложениях используются следующие асимптотически однородные операторы.

Пример 2.2.1 [6]. Пусть скалярная функция $f(x)$ непрерывна и

$$f(x) \to f_+ \quad \text{при} \quad x \to +\infty; \quad f(x) \to f_- \quad \text{при} \quad x \to -\infty; \quad f_+ \neq f_-. \tag{4}$$

Пусть скалярная функция $f_1(x)$ непрерывна, ограничена и

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f_1(s)ds = 0. \tag{5}$$

Пусть $\mathbb{E}$ состоит из функций $u \in C^1\big([a,b],\mathbb{R}\big)$, удовлетворяющих условию $\operatorname{mes}\{t : u'(t) = 0\} = 0$. Тогда оператор F суперпозиции $x(t) \mapsto \phi\big(x(t)\big)$, порожденный функцией $\phi(x) = f(x) + f_1(x)$, асимптотически однороден: равенство (3) выполнено при $\mathbb{H} = L^2\big([a,b],\mathbb{R}\big)$, $\mathbb{B} = C^1\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ и операторе Ψ суперпозиции, порожденном разрывной функцией $(f_+ + f_- + (f_+ - f_-)\operatorname{sgn} x)/2$. Непрерывность оператора Ψ вытекает из условия $\operatorname{mes}\{t : u'(t) = 0\} = 0$. В доказательствах существенно используется скалярность рассматриваемых функций; заменить C^1 на C нельзя.

Пример 2.2.2. Пусть $\mathcal{S}$ — единичная сфера в $\mathbb{R}^n$ при $n > 1$. Пусть непрерывные ограниченные функции $f : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и $\psi : [a,b] \times \mathcal{S} \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяют соотношению

$$\lim_{r\to+\infty} \max_{x\in\mathcal{S},\, t\in[a,b]} \|f(t,rx) - \psi(t,x)\|_{\mathbb{R}^n} = 0,$$

то есть ψ — это радиальный предел функции f на бесконечности. Пусть $\mathbb{E} \subset L^2 = L^2([a,b],\mathbb{R}^n)$ и для всех функций $u(t) \in \mathbb{E}$ верно соотношение $\operatorname{mes}\{t : u(t){=}0\} = 0$. Тогда оператор $F(x(t)) = f\big(t, x(t)\big)$ асимптотически однороден при $\mathbb{H} = \mathbb{B} = L^2$ с асимптотическим пределом $\Psi(u(t)) = \psi\big(t, u(t)\big)$.

Функции с радиальными пределами — это векторный аналог функций f, удовлетворяющих условиям (4) (при $n = 1$ сфера $\mathcal{S}$ вырождается в две точки). Метод, используемый в [6] при анализе операторов суперпозиции, порожденных скалярными функциями $f(x)$, напрямую не применим к векторным ситуациям с осциллирующими на бесконечности слагаемыми, удовлетворяющими аналогам соотношения (5). Было бы интересно установить классы функций $f(x,y)$, порождающих асимптотически однородные операторы суперпозиции в пространствах вектор-функций, но не имеющих радиальных пределов.

2.3. Предположения о согласованности. Пусть оператор $F(x,\lambda)$ со значениями в $\mathbb{H}$ непрерывен по совокупности переменных $x \in \mathbb{B}$, $\lambda \in \Lambda$ и равномерно ограничен: $\sup_{x\in\mathbb{B},\lambda\in\Lambda} \|F(x,\lambda)\|_{\mathbb{H}} < \infty$. Пусть самосопряженный в $\mathbb{H}$ оператор A действует из $\mathbb{H}$ в $\mathbb{B}$ и вполне непрерывен. Операторы A и $F(x,\lambda)$ назовем *согласованными*, если определен действующий из $\mathbb{B}$ в $\mathbb{H}$ линейный непрерывный оператор D, удовлетворяющий следующим предположениям.

(i) Оператор D кососимметричен и коммутирует с A на пространстве $\mathbb{B}$, то есть $\langle Dx, x\rangle = 0$ и $DAx = ADx$ при всех $x \in \mathbb{B}$.

(ii) При всех $x \in \mathbb{B}$ и всех $\lambda \in \Lambda$ справедливо равенство $\langle Dx, F(x,\lambda)\rangle = 0$.

Из предположения (i) следует, что все собственные подпространства оператора A, отвечающие его ненулевым собственным значениям, инвариантны для оператора D. Всякое такое подпространство представимо в виде прямой суммы конечного числа ортогональных собственных для оператора D плоскостей, в каждой из которых D является композицией поворота на угол $\pi/2$ и растяжения с положительным коэффициентом (для каждой плоскости — своим), и ортогонального этим плоскостям подпространства (возможно, нульмерного), где D обращается в нуль. Отсюда вытекает справедливость при всех $x \in \mathbb{H}$ равенства $\langle DAx, x\rangle = 0$, то есть кососимметричность оператора DA на $\mathbb{H}$. Более того, аналогичное соотношение $\langle DM(A)x, x\rangle = 0$ верно для функций $M(\cdot)$ от оператора A.

Рассмотрим примеры. Всюду периодические функции отождествляются со своими сужениями на период.

Пример 2.3.1. Пусть $\mathbb{H} = L^2\big([0,2\pi],\mathbb{R}\big)$, $\mathbb{B}$ — подпространство всех удовлетворяющих условию $x(0) = x(2\pi)$ функций пространства $C^1\big([0,2\pi],\mathbb{R}\big)$. Пусть A — оператор, обратный к дифференциальному оператору $d^2/dt^2 + \alpha^2$ с нецелым вещественным α при 2π-периодических краевых условиях. Пусть F — оператор суперпозиции, порожденный непрерывной ограниченной функцией $f(x,\lambda)$. Тогда операторы A и F согласованы при $D = d/dt$.

Пример 2.3.2. Пусть $\mathbb{H} = L^2\big([0,2\pi],\mathbb{R}^n\big)$, $\mathbb{B}$ — это подпространство всех удовлетворяющих условию $x(0) = x(2\pi)$ вектор-функций $x(t)$ пространства $C^1\big([0,2\pi],\mathbb{R}^n\big)$. Пусть собственные значения симметрической квадратной матрицы $\mathcal{A}$ порядка n не являются квадратами целых чисел. Обозначим через A линейный оператор, обратный к дифференциальному оператору $x'' + \mathcal{A}x$ с 2π-периодическими краевыми условиями. Положим $D = d/dt$. Если $F(x(t)) = f\big(x(t), x'(t)\big)$, непрерывная ограниченная вектор-функция f имеет вид

$$f(x,y) = \nabla g(x) + f_1(x,y), \qquad x, y \in \mathbb{R}^n, \tag{6}$$

и для непрерывной вектор-функции f_1 верно тождество $\big(y, f_1(x,y)\big)_{\mathbb{R}^n} \equiv 0$, то выполнены все условия согласованности операторов A и F.

Пример 2.3.3. Положим $\mathbb{H} = \mathbb{B} = L^2([0, \pi], \mathbb{R}^2)$. Пусть A — оператор, обратный к дифференциальному оператору d^2/dt^2 при краевых условиях Дирихле $x(0) = x(\pi) = 0 \in \mathbb{R}^2$. Пусть оператор суперпозиции F_1 порожден непрерывной ограниченной вектор-функцией $f(x) = \big(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)\big)$, для компонент которой при всех $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ верно тождество

$$x_2 f_1(x_1, x_2) \equiv x_1 f_2(x_1, x_2). \tag{7}$$

Тогда операторы A и F_1 согласованы; здесь D — оператор, переводящий функцию $x(t) = \big(x_1(t), x_2(t)\big)$ в функцию $\big(-x_2(t), x_1(t)\big)$. Отметим неградиентность нелинейностей в этом и предыдущем примерах.

2.4. Основная теорема. Предположим, что на инвариантной для D и A плоскости $\mathbb{E} = \{x : x = \lambda_0 Ax\} \subset \mathbb{H}$ оператор D ненулевой. Зададимся вектором $v_0 \in \mathbb{E}$, $\|v_0\|_{\mathbb{H}} = 1$, и положим $\xi = \|Dv_0\|_{\mathbb{H}}$. В силу кососимметричности оператора D векторы v_0 и Dv_0 образуют ортогональный базис в $\mathbb{E}$; равенство $v_\varphi = v_0 \cos\varphi + \xi^{-1} Dv_0 \sin\varphi$ параметризует единичную окружность $S \subset \mathbb{E}$.

Будем отождествлять заданные на S непрерывные скалярные функции $\chi(v_\varphi)$ с 2π-периодическими непрерывными функциями $\tilde{\chi}(\varphi) = \chi(v_\varphi)$ вещественной переменной φ. Изолированный нуль φ_0 функции $\tilde{\chi}(\varphi)$ (и изолированный нуль v_{φ_0} функции $\chi(v_\varphi)$) назовем *правильным*, если в достаточно малой окрестности точки φ_0 функция $\tilde{\chi}(\varphi)$ имеет разные знаки при $\varphi < \varphi_0$ и при $\varphi > \varphi_0$; простейшее условие правильности нуля — это существование и отличие от нуля производной $\tilde{\chi}'(\varphi_0)$.

Обозначим через $\mathbb{E}^\perp$ ортогональное дополнение к плоскости $\mathbb{E}$ в пространстве $\mathbb{H}$, через P и Q — ортогональные проекторы на $\mathbb{E}$ и $\mathbb{E}^\perp$. Так как $\mathbb{E}$ — это собственная плоскость кососимметрического на $\mathbb{H}$ оператора DA, то $\mathbb{E}^\perp$ инвариантно для DA. Поэтому при каждом $b \in \mathbb{E}^\perp$ верно включение $DAb \in \mathbb{E}^\perp$ и по альтернативе Фредгольма линейное неоднородное уравнение $x = \lambda_0 Ax + DAb$ имеет двумерное множество решений; ровно одно из них принадлежит $\mathbb{E}^\perp$ — это $x = DA(I - \lambda_0 AQ)^{-1} b$.

Теорема 1. *Пусть* $F(x,\lambda) = F_0(\lambda) + F_1(x,\lambda)$, *операторы* A *и* $F_1(x,\lambda)$ *согласованы, оператор* $F_1(x,\lambda_0)$ *асимптотически однороден с асимптотическим пределом* $\Psi_1(u)$ *и справедливы представления*

$$F_0(\lambda) = F_0(\lambda_0)+(\lambda-\lambda_0)G_0(\lambda), \qquad F_1(x,\lambda) = F_1(x,\lambda_0)+(\lambda-\lambda_0)G_1(x,\lambda), \quad (8)$$

где операторы $G_0 : \Lambda \to \mathbb{H}$, $G_1 : \mathbb{B} \times \Lambda \to \mathbb{H}$ *непрерывны и равномерно ограничены. Пусть* $F_0(\lambda_0) \in \mathbb{E}^{\perp}$. *Пусть функция*

$$\chi(v_\varphi) = \big\langle DA(I-\lambda_0 AQ)^{-1}F_0(\lambda_0) + \langle Dv_\varphi, G_0(\lambda_0)\rangle v_\varphi, \Psi_1(v_\varphi)\big\rangle \qquad (9)$$

имеет $K > 0$ *правильных нулей* $v_{\varphi_1}, \ldots, v_{\varphi_K}$ *на окружности* S. *Тогда у уравнения* (1) *есть по крайней мере* K *направленных неограниченных непрерывных ветвей решений при* $\lambda \to \lambda_0$ *с предельными векторами* v_{φ_j}, $j = 1, ..., K$.

В условиях теоремы 1 число неограниченных непрерывных ветвей решений может быть произвольно большим (см. пример в разделе 3.1).

2.5. Близкие теоремы и замечания. Теоремы этого раздела приводятся без доказательства. Доказательства могут быть получены простыми модификациями приводимого в разделе 2.6 доказательства теоремы 1.

2.5.1. Будем говорить, что непрерывный равномерно ограниченный оператор $F(x,\lambda)$ *асимптотически однороден по* x, если он асимптотически однороден при каждом λ, асимптотический предел $\Psi(u,\lambda)$ непрерывен по совокупности переменных $u \in S$, $\lambda \in \Lambda$ и аналогичное (3) предельное равенство равномерно по λ при любых $c > 0$ и $y \in \mathbb{B}$:

$$\lim_{r\to+\infty} \sup_{\lambda\in\Lambda;\, u\in S;\, h\in\mathbb{B},\, \|h\|_{\mathbb{B}}\leqslant c} \big|\langle y, F(ru+h,\lambda) - \Psi(u,\lambda)\rangle\big| = 0.$$

Теорема 2. *Пусть* $F(x,\lambda) = F_0(x,\lambda) + F_1(x,\lambda)$. *Пусть операторы* A *и* $F_1(x,\lambda)$ *согласованы, оператор* $F_0(x,\lambda)$ *асимптотически однороден по* x *с асимптотическим пределом* $\Psi(u,\lambda)$. *Пусть функция* $\eta(v_\varphi) = \langle Dv_\varphi, \Psi(v_\varphi,\lambda_0)\rangle$ *имеет* $K > 0$ *правильных нулей* $v_{\varphi_1}, \ldots, v_{\varphi_K}$ *на окружности* S. *Тогда у уравнения* (1) *есть по крайней мере* K *направленных неограниченных непрерывных ветвей решений при* $\lambda \to \lambda_0$ *с предельными векторами* v_{φ_j}, $j = 1, ..., K$.

В частности, пусть $F(x,\lambda) = F_0(\lambda) + F_1(x,\lambda)$, где оператор $F_1(x,\lambda)$ согласован с A. Тогда $\eta(v_\varphi) = \langle Dv_\varphi, F_0(\lambda_0)\rangle$. При $F_0(\lambda_0) \notin \mathbb{E}^\perp$ эта функция имеет два правильных нуля $\pm PF_0(\lambda_0)/\|PF_0(\lambda_0)\|_{\mathbb{H}}$ на окружности S и по теореме 2 у уравнения (1) есть две направленные неограниченные непрерывные ветви решений при $\lambda \to \lambda_0$. Такая ситуация хорошо известна, например, в задачах о вынужденных колебаниях. Если $F_0(\lambda_0) \in \mathbb{E}^\perp$ (как в теореме 1), то $\eta \equiv 0$ и теорема 2 оказывается неприменимой, то есть теоремы 1 и 2 дополняют друг друга. Отметим, что в теореме 1 дополнительно предполагается асимптотическая однородность оператора $F_1(x,\lambda_0)$ и справедливость представлений (8).

Если оператор $F(x,\lambda)$ асимптотически однороден и слагаемое F_1 отсутствует, то аналоги теоремы 2 справедливы без предположений о самосопряженности оператора A и существовании оператора D, удовлетворяющего условию (i). Пусть e, g — ортонормированный базис в плоскости $\mathbb{E}$. Обозначим через e^* и g^* собственные векторы сопряженного для A оператора A^*, отвечающие его характеристическому значению λ_0 и определяемые равенствами $\langle e^*, e\rangle = \langle g^*, g\rangle = 1$, $\langle e^*, g\rangle = \langle g^*, e\rangle = 0$. Тогда каждый правильный нуль $v_{\varphi_j} \in S$ функции $\eta(v_\varphi) = \langle g^*\cos\varphi - e^*\sin\varphi, \Psi\big(v_\varphi, \lambda_0)\rangle$ определяет направленную неограниченную непрерывную ветвь решений уравнения (1) при $\lambda \to \lambda_0$ с предельным вектором v_{φ_j}; здесь $\Psi\big(u,\lambda)$ — асимптотический предел оператора $F(x,\lambda)$. Близкие факты верны для уравнений (1) в банаховых пространствах.

2.5.2. Приведем аналог теоремы 1, не использующий представлений (8).

Теорема 3. Пусть $F(x,\lambda) = F_0(\lambda) + F_1(x,\lambda)$, *операторы* A *и* $F_1(x,\lambda)$ *согласованы и оператор* $F_1(x,\lambda)$ *асимптотически однороден по* x *с асимптотическим пределом* $\Psi_1(u,\lambda)$. *Пусть* $F_0(\lambda) \in \mathbb{E}^\perp$ *при всех* λ. *Пусть функция*

$$\chi(v_\varphi) = \Big\langle DA(I - \lambda_0 AQ)^{-1}F_0(\lambda_0), \Psi_1(v_\varphi, \lambda_0)\Big\rangle \tag{10}$$

имеет $K > 0$ *правильных нулей* $v_{\varphi_1}, \dots, v_{\varphi_K}$ *на окружности* S. *Тогда у уравнения* (1) *есть по крайней мере* K *направленных неограниченных непрерывных ветвей решений при* $\lambda \to \lambda_0$ *с предельными векторами* v_{φ_j}, $j = 1, \dots, K$.

При $F(x,\lambda) \equiv F(x,\lambda_0)$ теоремы 1 и 3 совпадают.

2.5.3. Будем говорить, что неограниченная непрерывная ветвь $\mathfrak{N}$ определена при $\lambda > \lambda_0$, если $\mathfrak{N} \setminus Z_\rho \subset \mathbb{H} \times (\lambda_0, \lambda_+)$ при достаточно больших ρ. Аналогично, ветвь $\mathfrak{N}$ определена при $\lambda < \lambda_0$, если $\mathfrak{N} \setminus Z_\rho \subset \mathbb{H} \times (\lambda_-, \lambda_0)$.

Пусть либо $\|F(x,\lambda) - F(x,\lambda_0)\|_{\mathbb{H}} \leqslant c|\lambda - \lambda_0|$ и оператор $F(x,\lambda_0)$ асимптотически однороден, либо оператор $F(x,\lambda)$ асимптотически однороден по x при всех $\lambda \in \Lambda$. Например, это верно в условиях теорем 1 и 3. Положим $\omega(v_\varphi) = \lambda_0 \langle v_\varphi, \Psi(v_\varphi)\rangle$, где $\Psi(u)$ — асимптотический предел оператора $F(x,\lambda_0)$. Пусть $\mathfrak{N}$ — направленная неограниченная непрерывная ветвь решений уравнения (1) при $\lambda \to \lambda_0$ с предельным вектором e, для которого $\omega(e) \neq 0$. Тогда ветвь $\mathfrak{N}$ определена при $\lambda < \lambda_0$, если $\omega(e) > 0$, и при $\lambda > \lambda_0$, если $\omega(e) < 0$.

Функция ω определяется равенством $\omega(v_\varphi) = \lambda_0 \langle v_\varphi, \Psi_1(v_\varphi)\rangle$ в теореме 1 и равенством $\omega(v_\varphi) = \lambda_0 \langle v_\varphi, \Psi_1(v_\varphi, \lambda_0)\rangle$ в теореме 3. В приложениях этих теорем к задачам о периодических решениях дифференциальных уравнений $\omega \equiv const$ и либо все направленные неограниченные непрерывные ветви определены при $\lambda > \lambda_0$, либо все они определены при $\lambda < \lambda_0$.

2.5.4. Вместо (1) рассмотрим в условиях теоремы 1 возмущенное уравнение

$$x = \lambda Ax + F(Ax, \lambda) + (\lambda - \lambda_0)\Phi(x, \lambda) \tag{11}$$

с произвольным вполне непрерывным оператором $\Phi : \mathbb{H} \times \Lambda \to \mathbb{H}$, для которого верна равномерная оценка $\|\Phi(x,\lambda)\|_{\mathbb{H}} \leqslant \delta$. Будем говорить, что $(v_{\varphi_1}, v_{\varphi_2}) \subset S$ — это ε-правильный интервал для функции (9), если $\chi(v_{\varphi_1})\chi(v_{\varphi_2}) < 0$ и $|\chi(v_{\varphi_1})|, |\chi(v_{\varphi_2})| > \varepsilon$. По определению сумма функции $\chi(v_\varphi)$ и любой заданной на S непрерывной функции, по модулю меньшей ε, имеет хотя бы один нуль на каждом ε-правильном для $\chi(v_\varphi)$ интервале. Положим $\kappa = \sup_{x \in \mathbb{B}, \lambda \in \Lambda} \|F(x,\lambda)\|_{\mathbb{H}} \|Dv_0\|_{\mathbb{H}}$. Простая модификация приводимого ниже доказательства теоремы 1 позволяет показать, что число непересекающихся ε-правильных для функции (9) интервалов на окружности S служит оценкой снизу числа непересекающихся неограниченных непрерывных ветвей решений возмущенного уравнения (11) при $0 \leqslant \delta\kappa < \varepsilon$; направленность ветвей при этом не гарантируется.

Если $\Phi(x,\lambda) = G(Ax,\lambda)$ и оператор $G(x,\lambda)$ асимптотически однороден по x с асимптотическим пределом $\Psi(u,\lambda)$, то оценки норм значений операторов G и F роли не играют и верно следующее близкое к теореме 1 утверждение: каждый правильный нуль v_{φ_j} функции $\chi(v_\varphi) + \langle Dv_\varphi, \Psi(v_\varphi,\lambda_0)\rangle\langle v_\varphi, \Psi_1(v_\varphi)\rangle$ определяет направленную неограниченную непрерывную ветвь решений уравнения (11) с предельным вектором v_{φ_j}; здесь $\chi(v_\varphi)$ — функция (9). Это утверждение интересно возможностями применения к уравнениям с несогласованными с оператором A асимптотически однородными возмущениями. Например, для периодической задачи нелинейность G может быть гистерезисной (в [7] указаны классы классических гистерезисных нелинейностей, обладающих свойством асимптотической однородности).

2.5.5. Рассмотрим уравнение

$$x = A(\lambda)x + F\big(A(\lambda)x,\lambda\big). \tag{12}$$

Пусть все линейные операторы $A(\lambda)$ самосопряжены в $\mathbb{H}$ и коммутируют между собой. Пусть каждый из них согласован с асимптотически однородным по x оператором F_1 (при некоторым общем для всех λ операторе D), пусть Ψ_1 — асимптотический предел оператора F_1 и пусть $F(x,\lambda) = F_0(\lambda) + F_1(x,\lambda)$. Предположим, что оператор-функция $A(\lambda)$ со значениями в пространстве $\mathcal{L}(\mathbb{H},\mathbb{B})$ действующих из $\mathbb{H}$ в $\mathbb{B}$ линейных ограниченных операторов непрерывна по λ. Приведем аналог теоремы 3 в этой ситуации.

Пусть плоскость $\mathbb{E} \subset \mathbb{H}$ — это общее собственное подпространство всех операторов $A(\lambda)$, отвечающее при каждом λ собственному значению $\sigma(\lambda)$ кратности 2, то есть $A(\lambda)e = \sigma(\lambda)e$ при $e \in \mathbb{E}$. Пусть $\sigma(\lambda_0) = 1$ и пусть непрерывная функция $\sigma(\lambda)$ строго монотонна.

Т е о р е м а 4. *Пусть $F_0(\lambda) \in \mathbb{E}^\perp$ при всех λ. Пусть функция*

$$\chi(v_\varphi) = \big\langle DA(\lambda_0)(I - A(\lambda_0)Q)^{-1}F_0(\lambda_0), \Psi_1(v_\varphi,\lambda_0)\big\rangle$$

имеет $K > 0$ правильных нулей $v_{\varphi_1},\dots,v_{\varphi_K}$ на окружности S. Тогда у уравнения (12) есть по крайней мере K направленных неограниченных непрерывных ветвей решений при $\lambda \to \lambda_0$ с предельными векторами v_{φ_j}, $j = 1,\dots,K$.

Пример приложения теоремы 4 приведен в разделе 3.3.

2.5.6. Пусть $\lambda_0 \in (\lambda_-, \lambda_+)$ — единственное характеристическое значение оператора A на промежутке Λ. Если все нули функции (9) на окружности S правильные и их $K > 0$, то в предположениях теоремы 1 множество решений уравнения (1) вне некоторого цилиндра $Z_\rho \subset \mathbb{H} \times \Lambda$ — это объединение K непересекающихся направленных неограниченных непрерывных ветвей. Интересны условия, при которых каждая направленная ветвь является непрерывной кривой. Если функция (9) не обращается в нуль на S, то множество всех решений уравнения (1) ограничено.

2.5.7. Одно из возможных направлений развития сформулированных результатов — переход к уравнениям с неограниченными сублинейными операторами F. При таком переходе основная проблема в приложениях состоит в доказательстве асимптотической однородности; если F — оператор суперпозиции, то можно использовать методы из [8]. Можно рассматривать асимптотически однородные в более слабом смысле нелинейности с разрывным асимптотическим пределом, например, используя технику из [9].

2.6. Доказательство теоремы 1.

2.6.1. Эквивалентная система. Будем искать решение уравнения (1) в виде $x = rv_\varphi + h$, где $r \geqslant 0$, $h \in \mathbb{E}^\perp$. Спроектируем (1) на ортогональные собственные векторы $v_\varphi, Dv_\varphi \in \mathbb{E}$ оператора A и на ортогональное им подпространство $\mathbb{E}^\perp$ пространства $\mathbb{H}$. Так как по предположению $F_0(\lambda_0) \in \mathbb{E}^\perp$ и $F(x,\lambda) = F_0(\lambda_0) + (\lambda - \lambda_0)G_0(\lambda) + F_1(x,\lambda)$, то равенства проекций имеют вид

$$(1 - \lambda/\lambda_0)r = \langle v_\varphi, F(Ax,\lambda)\rangle, \tag{13}$$

$$0 = \left\langle Dv_\varphi, (\lambda - \lambda_0)G_0(\lambda) + F_1(Ax,\lambda)\right\rangle, \tag{14}$$

$$h = \lambda Ah + QF(Ax,\lambda). \tag{15}$$

При больших значениях r и $\lambda \to \lambda_0$ уравнения (13) и (15) в естественном смысле невырожденные (грубые), а уравнение (14) в силу условия (ii) согласованности операторов A и F_1 вырождается в тождество $0 = 0$. Преобразуем уравнение (14) также к грубому виду. Для этого умножим его на r/λ_0 и вычтем из тождества $0 \equiv \langle DAx, F_1(Ax,\lambda)\rangle$, вытекающего из согласованности операторов A и F_1. Так как $Ax = rv_\varphi/\lambda_0 + Ah$, то получим

$$0 = \langle DAh, F_1(Ax,\lambda)\rangle + (1-\lambda/\lambda_0)r\,\langle Dv_\varphi, G_0(\lambda)\rangle \tag{16}$$

и, воспользовавшись уравнением (13), перепишем (16) в эквивалентном виде

$$0 = \langle DAh, F_1(Ax,\lambda)\rangle + \langle v_\varphi, F(Ax,\lambda)\rangle\,\langle Dv_\varphi, G_0(\lambda)\rangle. \tag{17}$$

Будем считать, что λ_0 — это единственное[4] характеристическое значение оператора A на промежутке Λ. Поэтому оператор $I-\lambda A$ непрерывно обратим на инвариантном подпространстве $\mathbb{E}^\perp$ при каждом $\lambda\in\Lambda$ и уравнение (15) равносильно уравнению

$$h = (I-\lambda AQ)^{-1}QF(Ax,\lambda). \tag{18}$$

Заменив h в равенстве (17) этим выражением, получим

$$0 = \langle DA(I-\lambda AQ)^{-1}QF(Ax,\lambda), F_1(Ax,\lambda)\rangle + \langle v_\varphi, F(Ax,\lambda)\rangle\langle Dv_\varphi, G_0(\lambda)\rangle$$

и так как из кососимметричности оператора D на пространстве $\mathbb{B}$ вытекает тождество $\langle DA(I-\lambda AQ)^{-1}Qy, y\rangle \equiv 0$ при всех $y\in\mathbb{H}$, то

$$0 = \langle DA(I-\lambda AQ)^{-1}QF_0(\lambda), F_1(Ax,\lambda)\rangle + \langle v_\varphi, F(Ax,\lambda)\rangle\langle Dv_\varphi, G_0(\lambda)\rangle.$$

Используя это уравнение вместо уравнения (14) и уравнение (18) вместо уравнения (15), окончательно приходим к эквивалентной (1) системе

$$\begin{aligned}
0 &= (1-\lambda/\lambda_0)r - \langle v_\varphi, F(rv_\varphi/\lambda_0 + Ah,\lambda)\rangle && \stackrel{\text{def}}{=} \Theta_\lambda(r,\lambda,\varphi,h),\\
0 &= \langle DA(I-\lambda AQ)^{-1}QF_0(\lambda), F_1(rv_\varphi/\lambda_0 + Ah,\lambda)\rangle + \\
&\quad + \langle v_\varphi, F_0(\lambda) + F_1(rv_\varphi/\lambda_0 + Ah,\lambda)\rangle\langle Dv_\varphi, G_0(\lambda)\rangle && \stackrel{\text{def}}{=} \Theta_\varphi(r,\lambda,\varphi,h),\\
0 &= h - (I-\lambda AQ)^{-1}QF(rv_\varphi/\lambda_0 + Ah,\lambda) && \stackrel{\text{def}}{=} \Theta_h(r,\lambda,\varphi,h).
\end{aligned} \tag{19}$$

со скалярными неизвестными r, φ, λ, и неизвестным вектором $h\in\mathbb{E}^\perp\subset\mathbb{H}$.

[4]Это предположение не ограничивает общности, так как вместо Λ можно использовать любой меньший промежуток, содержащий в своей внутренности точку λ_0.

2.6.2. Локализация решений. Пусть множество $\Gamma \subset \mathbb{H}\times\mathbb{R}$ ограничено, пусть $\partial\Gamma$ и $\bar{\Gamma}$ — его граница и замыкание. Определим на произведении $\mathbb{H}\times\mathbb{R}$ непрерывный ограниченный на ограниченных множествах функционал

$$\Phi_\Gamma(x,\lambda)=\begin{cases} -\inf\bigl\{\|x-y\|_{\mathbb{H}}+|\lambda-\mu| : (y,\mu)\in\partial\Gamma\bigr\} & \text{при} \quad (x,\lambda)\in\Gamma, \\ \ \ \inf\bigl\{\|x-y\|_{\mathbb{H}}+|\lambda-\mu| : (y,\mu)\in\partial\Gamma\bigr\} & \text{при} \quad (x,\lambda)\notin\Gamma, \end{cases}$$

обращающийся в нуль на $\partial\Gamma$, и дополним систему (19) уравнением

$$0=\Phi_\Gamma(rv_\varphi+h,\lambda)\stackrel{\text{def}}{=}\Theta_r(r,\lambda,\varphi,h).$$

Введем в рассмотрение векторное поле $\Theta=(\Theta_r,\Theta_\lambda,\Theta_\varphi,\Theta_h)$ в пространстве $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{E}^\perp$ переменных (r,λ,φ,h) с нормой $|r|+|\lambda|+|\varphi|+\|h\|_{\mathbb{H}}$, определенное при всех $r\geqslant 0$, $\lambda\in\Lambda$ и всех φ и h. По построению каждый нуль этого поля определяет решение (x,λ) уравнения (1) с первой компонентой $x=rv_\varphi+h$, лежащее на границе $\partial\Gamma$ множества Γ; из полной непрерывности оператора $A:\mathbb{H}\to\mathbb{B}$ и предположений о непрерывности операторов D, F_0, F_1 и G_0 вытекает полная непрерывность поля $\Theta=\Theta(r,\lambda,\varphi,h)$.

Существование нулей поля Θ сравнительно просто доказывается топологическими методами. Достаточно указать открытое ограниченное множество $\Omega\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{E}^\perp$, на границе которого вращение $\gamma=\gamma(\Theta,\Omega)$ поля Θ отлично от нуля [4]. Пусть v_{φ_0} — это правильный нуль функции (9) или, что то же, φ_0 — правильный нуль функции $\tilde{\chi}(\varphi)=\chi(v_\varphi)$. Фиксируем $\varepsilon_\varphi>0$, при котором φ_0 — единственный нуль функции $\tilde{\chi}(\varphi)$ на промежутке $|\varphi-\varphi_0|\leqslant\varepsilon_\varphi$ и поэтому $\tilde{\chi}(\varphi_0-\varepsilon_\varphi)\tilde{\chi}(\varphi_0+\varepsilon_\varphi)<0$. Положим $\delta=\min\{|\tilde{\chi}(\varphi_0-\varepsilon_\varphi)|,|\tilde{\chi}(\varphi_0+\varepsilon_\varphi)|\}>0$. Из равенства $F_1(x,\lambda)=F_1(x,\lambda_0)+(\lambda-\lambda_0)G_1(x,\lambda)$ в силу ограниченности множества значений оператора G_1 в пространстве $\mathbb{H}$ следует соотношение

$$\sup_{r\geqslant 0,\,\varphi\in\mathbb{R},\,h\in\mathbb{E}^\perp}\bigl|\Theta_\varphi(r,\lambda,\varphi,h)-\Theta_\varphi(r,\lambda_0,\varphi,h)\bigr|\to 0 \quad \text{при} \quad \lambda\to\lambda_0. \tag{20}$$

Зададимся достаточно малым $\varepsilon_\lambda>0$ и достаточно большим $C_h>0$, при которых промежуток $|\lambda-\lambda_0|\leqslant\varepsilon_\lambda$ содержится во внутренности промежутка Λ и справедливы оценки

$$\sup_{r\geqslant 0,\,|\lambda-\lambda_0|\leqslant\varepsilon_\lambda,\,\varphi\in\mathbb{R},\,h\in\mathbb{E}^\perp}\bigl|\Theta_\varphi(r,\lambda,\varphi,h)-\Theta_\varphi(r,\lambda_0,\varphi,h)\bigr|<\delta/2, \tag{21}$$

$$\sup_{x\in\mathbb{B},\, \lambda\in\Lambda} \|(I-\lambda AQ)^{-1}QF(x,\lambda)\|_{\mathbb{H}} < C_h; \tag{22}$$

существование C_h вытекает из оценки $\sup_{x\in\mathbb{B},\lambda\in\Lambda} \|F(x,\lambda)\|_{\mathbb{H}} < \infty$. Положим

$$y_\varphi \stackrel{\text{def}}{=} DA(I-\lambda_0 AQ)^{-1}F_0(\lambda_0) + \langle Dv_\varphi, G_0(\lambda_0)\rangle v_\varphi;$$

теперь формулу (9) можно переписать в виде $\chi(v_\varphi) = \langle y_\varphi, \Psi_1(v_\varphi)\rangle$; в силу соотношений $F_0(\lambda_0) = QF_0(\lambda_0)$, $\langle v_\varphi, F_0(\lambda_0)\rangle = 0$ верно равенство $\Theta_\varphi(r,\lambda_0,\varphi,h) = \langle y_\varphi, F_1(rv_\varphi/\lambda_0 + Ah, \lambda_0)\rangle$. Так как оператор A преобразует шар $\|h\|_{\mathbb{H}} \leqslant C_h$ пространства $\mathbb{H}$ в ограниченное множество пространства $\mathbb{B}$, то из асимптотической однородности оператора $F_1(x,\lambda_0)$ вытекает существование такого $r_0 \geqslant 0$, при котором для всех $r \geqslant r_0$ верна оценка

$$\sup_{\varphi\in\mathbb{R},\, \|h\|_{\mathbb{H}}\leqslant C_h} \big|\langle y_\varphi, F_1(rv_\varphi/\lambda_0 + Ah, \lambda_0) - \Psi_1(v_\varphi)\rangle\big| < \delta/2$$

или, что то же,

$$\sup_{\varphi\in\mathbb{R},\, \|h\|_{\mathbb{H}}\leqslant C_h} \big|\Theta_\varphi(r,\lambda_0,\varphi,h) - \chi(v_\varphi)\big| < \delta/2 \qquad \text{при} \qquad r \geqslant r_0. \tag{23}$$

Фиксируем $r_1 \geqslant r_0$, при котором

$$r_1\varepsilon_\lambda > \lambda_0 \sup_{x\in\mathbb{B},\lambda\in\Lambda} \|F(x,\lambda)\|_{\mathbb{H}}. \tag{24}$$

Заметим, что числа $\varepsilon_\varphi, \varepsilon_\lambda, C_h, r_1$ определяются по уравнению (1) без использования множества Γ. Пусть ограниченное множество Γ телесно и его внутренность $\operatorname{int}\Gamma$ содержит цилиндр $\{(x,\lambda) : \|x\|_{\mathbb{H}} \leqslant \rho, |\lambda-\lambda_0| \leqslant \varepsilon_\lambda\}$ при $\rho \geqslant r_1 + C_h$. Построим содержащий замыкание $\bar\Gamma$ множества Γ цилиндр $\{(x,\lambda) : \|x\|_{\mathbb{H}} < r_2, \lambda \in (\tilde\lambda_-, \tilde\lambda_+)\}$ и положим

$$\Omega = \big\{(r,\lambda,\varphi,h) :\ r_1 < r < r_2,\ |\lambda-\lambda_0| < \varepsilon_\lambda,\ |\varphi-\varphi_0| < \varepsilon_\varphi,\ \|h\|_{\mathbb{H}} < C_h\big\}.$$

Обозначим через $\bar\Omega$ замыкание области Ω в пространстве $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{E}^\perp$.

2.6.3. Завершение доказательства. Воспользуемся теоремами о произведении вращений [4] для вычисления вращения $\gamma(\Theta,\Omega)$. Докажем для точек границы области Ω оценки

$$\begin{gathered}\Theta_\lambda(r,\lambda_0-\varepsilon_\lambda,\varphi,h)\Theta_\lambda(r,\lambda_0+\varepsilon_\lambda,\varphi,h)<0,\\ \Theta_\varphi(r,\lambda,\varphi_0-\varepsilon_\varphi,h)\Theta_\varphi(r,\lambda,\varphi_0+\varepsilon_\varphi,h)<0,\\ \Theta_r(r_1,\lambda,\varphi,h)\Theta_r(r_2,\lambda,\varphi,h)<0,\\ \|h-\Theta_h(r,\lambda,\varphi,h)\|_{\mathbb{H}}<C_h \ \text{ при } \ \|h\|_{\mathbb{H}}=C_h.\end{gathered} \tag{25}$$

Первая из них вытекает из соотношений (24) и $\|v_\varphi\|_{\mathbb{H}}=1$. Вторая следует из оценки $\tilde\chi(\varphi_0-\varepsilon_\varphi)\tilde\chi(\varphi_0+\varepsilon_\varphi)<0$, определения числа δ и вытекающей из соотношений (21) и (23) оценки $|\Theta_\varphi(r,\lambda,\varphi,h)-\tilde\chi(\varphi)|<\delta$ на множестве $\bar\Omega$. Третья из оценок (25) верна в силу включений

$$\{(x,\lambda):\|x\|_{\mathbb{H}}\leqslant\rho,|\lambda-\lambda_0|\leqslant\varepsilon_\lambda\}\subset\operatorname{int}\Gamma\subset\bar\Gamma\subset\{(x,\lambda):\|x\|_{\mathbb{H}}<r_2,\lambda\in(\tilde\lambda_-,\tilde\lambda_+)\},$$

соотношений $\|r_1v_\varphi+h\|_{\mathbb{H}}\leqslant\rho$, $\|r_2v_\varphi+h\|_{\mathbb{H}}\geqslant r_2$ при $\|h\|_{\mathbb{H}}\leqslant C_h$ и оценок $\Phi_\Gamma(x,\lambda)<0$ при $(x,\lambda)\in\operatorname{int}\Gamma$ и $\Phi_\Gamma(x,\lambda)>0$ при $(x,\lambda)\notin\bar\Gamma$. Наконец, последняя из оценок (25) следует из соотношения (22).

По теореме о произведении вращений из оценок (25) вытекает равенство $|\gamma(\Theta,\Omega)|=1$. Отличие от нуля вращения $\gamma(\Theta,\Omega)$ означает, что у поля Θ есть хотя бы один нуль в области Ω и поэтому уравнение (1) имеет решение $(x,\lambda)\in\partial\Gamma\cap\Pi$, где

$$\Pi=\{(x,\lambda):\ x=rv_\varphi+h,r>r_1,|\varphi-\varphi_0|<\varepsilon_\varphi,h\in\mathbb{E}^\perp,\|h\|_{\mathbb{H}}<C_h,|\lambda-\lambda_0|<\varepsilon_\lambda\}.$$

Так как здесь Γ — любое ограниченное множество, содержащее в своей внутренности цилиндр $\{(x,\lambda):\|x\|_{\mathbb{H}}\leqslant\rho,|\lambda-\lambda_0|\leqslant\varepsilon_\lambda\}$ при $\rho\geqslant r_1+C_h$, то этим доказано, что множество всех лежащих в Π решений уравнения (1) является неограниченной непрерывной ветвью. Обозначим эту ветвь через $\mathfrak{N}$.

Пусть $(x,\lambda)\in\mathfrak{N}$, $x=rv_\varphi+h$ и, следовательно, верны равенства (19). Так как $\|h\|_{\mathbb{H}}<C_h$ для всех точек множества Π, то при $(x,\lambda)\in\mathfrak{N}$ соотношения $r\to\infty$ и $\|x\|_{\mathbb{H}}\to\infty$ эквивалентны и в силу оценки $\sup_{x\in\mathbb{B},\,\lambda\in\Lambda}\|F(x,\lambda)\|_{\mathbb{H}}<\infty$ из первого равенства системы (19) вытекает соотношение (2). Из соотношений (2), (20) и $\Theta_\varphi(r,\lambda,\varphi,h)=0$ следует соотношение

$$\lim_{\|x\|_{\mathbb{H}}\to\infty,\ (x,\lambda)\in\mathfrak{N},\ x=rv_\varphi+h}|\Theta_\varphi(r,\lambda_0,\varphi,h)|=0$$

или, что то же,

$$\lim_{\|x\|_{\mathbb{H}}\to\infty,\ (x,\lambda)\in\mathfrak{N},\ x=rv_\varphi+h} \left|\langle y_\varphi, F_1(rv_\varphi/\lambda_0 + Ah, \lambda_0)\rangle\right| = 0.$$

Далее, в силу асимптотической однородности оператора $F_1(x, \lambda_0)$

$$\lim_{\|x\|_{\mathbb{H}}\to\infty,\ (x,\lambda)\in\mathfrak{N},\ x=rv_\varphi+h} \left|\langle y_\varphi, F_1(rv_\varphi/\lambda_0 + Ah, \lambda_0) - \Psi_1(v_\varphi)\rangle\right| = 0$$

(здесь используется оценка $\|Ah\|_{\mathbb{B}} \leqslant C_h\|A\|_{\mathbb{H}\to\mathbb{B}}$ при $(x,\lambda) \in \mathfrak{N}$), следовательно $\langle y_\varphi, \Psi_1(v_\varphi)\rangle \to 0$ при $\|x\|_{\mathbb{H}} \to \infty$, $(x,\lambda) \in \mathfrak{N}$. Но φ содержится в интервале $(\varphi_0 - \varepsilon_\varphi, \varphi_0 + \varepsilon_\varphi)$ при $(x,\lambda) \in \mathfrak{N}$ и φ_0 — это единственный нуль функции $\tilde{\chi}(\varphi) = \langle y_\varphi, \Psi_1(v_\varphi)\rangle$ в этом интервале. Поэтому $\varphi \to \varphi_0$ и $v_\varphi \to v_{\varphi_0}$ или, что то же, $(x-h)/\|x-h\|_{\mathbb{H}} \to v_{\varphi_0}$ при $\|x\|_{\mathbb{H}} \to \infty$, $(x,\lambda) \in \mathfrak{N}$ и так как $\|h\|_{\mathbb{H}} < C_h$, то $x/\|x\|_{\mathbb{H}} \to v_{\varphi_0}$ при $\|x\|_{\mathbb{H}} \to \infty$, $(x,\lambda) \in \mathfrak{N}$. Значит, $\mathfrak{N}$ — это направленная ветвь с предельным вектором v_{φ_0}. Так как каждый правильный нуль v_{φ_0} функции (9) определяет подобную ветвь, то теорема 1 полностью доказана.

3. Периодические решения уравнения Дуффинга

3.1. Вынужденные колебания. Рассмотрим уравнение

$$x'' + \lambda^2 x = b(t) + \phi(x) \tag{26}$$

с 2π-периодической непрерывной функцией $b(t)$ и непрерывной функцией $\phi(x)$. Нас интересует число неограниченных ветвей 2π-периодических решений при $\lambda \to m$, где m — натуральное число.

Уравнение (26) и периодическая задача для такого уравнения изучались многими авторами. Традиционно наибольший интерес вызывает резонансный случай, то есть уравнение (26) с фиксированным $\lambda = m$:

$$x'' + m^2 x = b(t) + \phi(x). \tag{27}$$

После работы [5], в которой рассматривались уравнения (27) с нелинейностями $\phi(x) = f(x)$, удовлетворяющими условиям (4), на эту тему появились сотни работ. Для таких уравнений существование 2π-периодических решений определяют числа $\overline{f} = 2|f_+ - f_-|$ и

$$\overline{b} = \Big|\int\limits_0^{2\pi} e^{imt} b(t)\,dt\Big|. \tag{28}$$

При $\overline{b} \neq \overline{f}$ все 2π-периодические решения уравнения (27) допускают общую априорную оценку нормы $\|x\|_C$. Если $\overline{b} > \overline{f}$ и $f_+ < f(x) < f_-$ при всех x, то решений периода 2π нет. При $\overline{b} < \overline{f}$ существует по крайней мере одно 2π-периодическое решение. Случай $\overline{b} = \overline{f}$ (двойной резонанс) изучен в [10].

Предположим, что верны соотношения (4), (5) и $\phi(x) = f(x) + f_1(x)$. Тогда число неограниченных непрерывных ветвей 2π-периодических решений уравнения (26) при $\lambda \to m$ определяется величиной (28). Если $\overline{b} > 0$, то $\lambda_0 = m$ — асимптотическая точка бифуркации и у уравнения (26) есть две направленные неограниченные непрерывные ветви решений при $\lambda \to \lambda_0$ (например, в силу теоремы 2). Если $\overline{f} > \overline{b}$, то либо обе ветви определены при $\lambda > \lambda_0$, либо обе они определены при $\lambda < \lambda_0$; если $\overline{f} < \overline{b}$, то одна ветвь определена при $\lambda > \lambda_0$, а другая — при $\lambda < \lambda_0$.

Случай $\overline{b} = 0$ более богатый. Здесь оценки числа направленных неограниченных непрерывных ветвей решений при $\lambda \to m$ следуют из теоремы 1. Всюду далее непрерывные ветви решений рассматриваются для определенности в пространствах $\mathbb{H} = L^2$ суммируемых с квадратом функций (эти функции заданы на естественно определяемых конечных промежутках: например, $\mathbb{H} = L^2([0, 2\pi], \mathbb{R})$ в этом разделе и в разделе 3.3, в следующем разделе $\mathbb{H} = L^2([0, 2\pi n], \mathbb{R})$); можно использовать и другие пространства. Во всех приложениях речь идет о классических решениях.

Условие $\overline{b} = 0$ эквивалентно равенству $B_m = 0$ коэффициента при гармонике порядка m ряда Фурье функции $b(t)$:

$$b(t) = \frac{B_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin(kt + \beta_k), \qquad B_k \geqslant 0. \tag{29}$$

Определим 2π-периодическую непрерывную функцию

$$\chi_m(\varphi) = \sum_{k=3,5,7,\dots} \frac{B_{km}}{1-k^2} \sin(k\varphi - \beta_{km}). \tag{30}$$

Т е о р е м а 5. *Пусть* $\overline{b} = 0$. *Пусть* $\phi(x) = f(x) + f_1(x)$, *функции* $f(x)$ *и* $f_1(x)$ *непрерывны и ограничены и верны соотношения* (4), (5). *Тогда каждому правильному нулю* φ^* *функции* (30) *отвечает направленная неограниченная непрерывная ветвь* 2π-*периодических решений уравнения* (26) *при* $\lambda \to m$ *с предельным вектором* $v_{\varphi^*}(t) = \pi^{-1/2}\sin(mt + \varphi^*)$.

В силу теоремы Штурма – Гурвица (см., например, задачу 1996-5 в [11]) непрерывная вещественная периодическая функция имеет на периоде не меньше нулей (перемен знака), чем ненулевая гармоника наименьшего порядка ее ряда Фурье. Поэтому у функции (30) есть хотя бы 6 перемен знака на промежутке $[0, 2\pi)$. В ситуации общего положения (например, если все нули функции (30) изолированные) у нее есть хотя бы 6 правильных нулей на $[0, 2\pi)$ и в силу теоремы 3 уравнение (26) имеет по крайней мере 6 различных ветвей 2π-периодических решений при $\lambda \to m$. Так как $\chi_m(\varphi + \pi) \equiv -\chi_m(\varphi)$, то число правильных нулей функции $\chi_m(\varphi)$ на промежутке $[0, 2\pi)$ всегда четно.

Пусть $m = 1$, $\overline{b} = 0$. Если 2π — наименьший период функции $b(t)$, то у нее есть ненулевые нечетные гармоники и поэтому $\chi_1(\varphi) \not\equiv 0$. Простое достаточное условие существования по крайней мере $2k$ правильных нулей у функции $\chi_1(\varphi)$ на промежутке $[0, 2\pi)$ при любом нечетном $k > 1$ состоит в том, чтобы амплитуда B_k гармоники порядка k функции $b(t)$ была достаточно велика по сравнению с амплитудами B_j всех ее остальных нечетных гармоник. Например, при нечетном $k > 1$ и $b(t) = \cos(2t) + \sin(kt)$ у функции $\chi_1(\varphi) = (1 - k^2)^{-1}\sin(k\varphi)$ есть ровно $2k$ правильных нулей на $[0, 2\pi)$.

Теорема 5 вытекает из теоремы 1. Определим пространство $\mathbb{B}$ и операторы A, D как в примере 2.3.1 с произвольным нецелым $\alpha \in \mathbb{R}$ и положим $F = F_0 + F_1$, где $F_0 = b(t)$, $F_1\big(x(t)\big) = \phi\big(x(t)\big)$. Замена параметра $\alpha^2 - \lambda^2 \mapsto \lambda$ приводит 2π-периодическую задачу для уравнения (26) к эквивалентному уравнению (1), удовлетворяющему всем предположениям теоремы 1 при $\Psi_1(u(t)) = (f_+ - f_-)\operatorname{sgn} u(t)/2$, $\mathbb{E} = \{x(t) = r\sin(mt + \varphi) : r \geqslant 0,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi\}$ и при $G_0 = G_1 = 0$. Функции (9) и (30) связаны равенством $\chi(v_\varphi) = 2(f_+ - f_-)m^{-1}\chi_m(\varphi)$.

Теоремы 1 и 3 применимы к уравнениям с правыми частями более общего вида: зависящими от параметра λ, содержащими запаздывания и производные.

3.2. Субгармоники. Субгармониками уравнения (26) с непрерывной 2π-периодической функцией $b(t)$ называют его периодические решения периодов $2\pi n$ при натуральных $n > 1$. Отметим, что вместе с каждой субгармоникой $x(t)$ периода $2\pi n$ субгармониками того же периода являются ее сдвиги $x(t+2\pi\ell)$ при $\ell = 1, \ldots, n-1$ (вообще говоря, отличные от $x(t)$).

Пусть натуральные числа m и n взаимно просты. Будем изучать существование неограниченных ветвей субгармоник уравнения (26) с фиксированным периодом $2\pi n$ при $\lambda \to m/n$. Эта задача сводится заменой времени $t \mapsto nt$ к задаче о 2π-периодических решениях близкого уравнения

$$x'' + n^2\lambda^2 x = n^2 b(nt) + n^2\phi(x). \tag{31}$$

Так как каждой направленной неограниченной непрерывной ветви 2π-периодических решений $x(t)$ уравнения (31) при $\lambda \to m/n$ отвечает направленная неограниченная непрерывная ветвь субгармоник $x(t/n)$ уравнения (26), то оценка числа ветвей вытекает из теоремы 5, примененной к уравнению (31). При этом в силу взаимной простоты чисел m и n автоматически выполняется аналогичное условию $\overline{b} = 0$ требование

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{imt} b(nt)\,dt = 0.$$

По разложению (29) функции $b(t)$ в ряд Фурье определим функцию

$$\chi_{m,n}(\varphi) = \sum_{k=1,3,5,\ldots} \frac{B_{km}}{1-n^2k^2}\, \sin(k\varphi - \beta_{km}). \tag{32}$$

Т е о р е м а 6. *Пусть $\phi(x) = f(x) + f_1(x)$, непрерывные функции $f(x)$ и $f_1(x)$ ограничены и справедливы соотношения* (4), (5). *Пусть $n > 1$ нечетно. Пусть у функции* (32) *есть $K > 0$ правильных нулей на промежутке* $[0, 2\pi)$. *Тогда число направленных неограниченных непрерывных ветвей субгармоник уравнения* (26) *с периодом $2n\pi$ при $\lambda \to m/n$ не меньше, чем nK.*

3.3. Уравнение теории управления. Аналогично уравнению (26) можно рассмотреть уравнения высших порядков и уравнения

$$L\Big(\frac{d}{dt},\lambda\Big)x = M\Big(\frac{d}{dt},\lambda\Big)\big(b(t)+\phi(x)\big) \tag{33}$$

динамики одноконтурных систем управления, состоящих из линейного звена с дробно-рациональной передаточной функцией и функциональной нелинейности. Здесь $L(p,\lambda)$ и $M(p,\lambda)$ — взаимно простые при каждом λ многочлены от переменной p с непрерывно зависящими от λ вещественными коэффициентами; степени ℓ и m этих многочленов не зависят от λ и $\ell > m$. Определение решения уравнения (33) есть в любом учебнике по теории управления; при $M \equiv 1$ — это обыкновенное дифференциальное уравнение порядка ℓ.

Пусть многочлены L и M четные, то есть $L(p,\lambda) \equiv L(-p,\lambda)$, $M(p,\lambda) \equiv M(-p,\lambda)$. Пусть многочлен $L(p,\lambda)$ при всех $\lambda \in \Lambda$ имеет пару простых корней $\pm\mu(\lambda)i$, непрерывная вещественная функция $\mu(\lambda)$ строго монотонна и $\mu(\lambda_0) = m$ при некоторых $\lambda = \lambda_0 \in (\lambda_-, \lambda_+)$ и натуральном m. Пусть $L(ki,\lambda) \neq 0$ при целых $k \neq \pm m$ и всех $\lambda \in \Lambda$ и $L(mi,\lambda) \neq 0$ при $\lambda \neq \lambda_0$, $\lambda \in \Lambda$. По ряду Фурье (29) непрерывной функции $b(t) \equiv b(t+2\pi)$ построим функцию

$$\chi_m(\varphi) = m^2 \sum_{k=3,5,7,\ldots} B_{km}\frac{M(kmi,\lambda_0)}{L(kmi,\lambda_0)}\sin(k\varphi - \beta_{km}). \tag{34}$$

При $L(p,\lambda) = p^2+\lambda^2$, $M \equiv 1$ функция (34) совпадает с функцией (30).

Т е о р е м а 7. *Пусть выполнены условия теоремы 5. Тогда каждому правильному нулю функции* (34) *отвечает направленная неограниченная непрерывная ветвь 2π-периодических решений уравнения* (33) *при $\lambda \to \lambda_0$.*

Теорема 7 вытекает из теоремы 4.

4. Вынужденные колебания в векторных системах

Рассмотрим систему

$$x'' + \lambda x + \mathcal{A}x = b(t) + f(x,x'), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{35}$$

при $n > 1$. Здесь $\mathcal{A}$ — симметрическая квадратная матрица порядка n; периодическая с периодом 2π функция $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ непрерывна; функция $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ непрерывна и ограничена.

Пусть 1 — простое собственное значение матрицы $\mathcal{A}$; $\mathcal{A}g = g$, $\|g\|_{\mathbb{R}^n} = 1$. Пусть все отличные от 1 собственные значения матрицы $\mathcal{A}$ не являются квадратами целых чисел. Положим $\mathbb{H} = L^2([0,2\pi],\mathbb{R}^n)$, $\mathbb{E} = \{rg\,\sin(t+\varphi) :\, r \geqslant 0,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi\}$ и обозначим через $\mathbb{E}^\perp$ ортогональное дополнение к плоскости $\mathbb{E}$ в пространстве $\mathbb{H}$. Пусть $b(t) \in \mathbb{E}^\perp$ или, что то же,

$$\int\limits_0^{2\pi} \bigl(g, b(t)\bigr)_{\mathbb{R}^n} \sin t\, dt = \int\limits_0^{2\pi} \bigl(g, b(t)\bigr)_{\mathbb{R}^n} \cos t\, dt = 0. \tag{36}$$

Тогда у уравнения $u'' + \mathcal{A}u = b(t)$ есть единственное 2π-периодическое решение $u_*(t)$ в подпространстве $\mathbb{E}^\perp$.

Т е о р е м а 8. *Пусть $f(x,y)$ имеет вид* (6) *и для непрерывной ограниченной функции $f_1(x,y)$ верно тождество $\bigl(f_1(x,y), y\bigr)_{\mathbb{R}^n} \equiv 0$. Пусть при некоторой непрерывной функции $\psi(u,v)$ верно асимптотическое равенство*

$$\lim_{r\to\infty} \max_{\|u\|^2_{\mathbb{R}^n} + \|v\|^2_{\mathbb{R}^n} = 1} \bigl\|f(ru,rv) - \psi(u,v)\bigr\|_{\mathbb{R}^n} = 0.$$

Пусть справедливо соотношение (36). *Тогда число направленных неограниченных непрерывных ветвей 2π-периодических решений системы* (35) *при $\lambda \to 0$ не меньше числа правильных нулей $\varphi_j \in [0,2\pi)$ функции*

$$\chi(\varphi) = \int\limits_0^{2\pi} \bigl(u'_*(t-\varphi)\,,\ \psi(g\sin t, g\cos t)\bigr)_{\mathbb{R}^n}\, dt.$$

Эта теорема вытекает из теоремы 1. Зададимся числом $\alpha > \mu$, где μ — наибольшее собственное значение матрицы $\mathcal{A}$, и обозначим через A обратный оператор для дифференциального оператора $d^2/dt^2 + \mathcal{A} - \alpha$ при 2π-периодических краевых условиях. Определим пространство $\mathbb{B}$ как в примере 2.3.2 и положим $F_1\bigl(x(t)\bigr) = f\bigl(x(t), x'(t)\bigr)$, $F\bigl(x(t)\bigr) = b(t) + F_1\bigl(x(t)\bigr)$ при $x(t) \in \mathbb{B}$. Тогда после замены $\lambda + \alpha \mapsto -\lambda$ параметра 2π-периодическая задача для системы (35) сводится к эквивалентному уравнению (1). Из соотношений (6) и $\bigl(f_1(x,y), y\bigr)_{\mathbb{R}^n} \equiv 0$ вытекает согласованность операторов A и F_1 при $D = d/dt$. Существование равномерного непрерывного радиального предела $\psi(u,v)$ у функции $f(x,y)$ на бесконечности гарантирует асимптотическую однородность оператора F_1.

5. Двухточечная краевая задача

Рассмотрим двумерную двухточечную краевую задачу

$$\begin{gathered} x_1'' + \lambda^2 x_1 = b_1(t) + f_1(x_1, x_2), \qquad x_2'' + \lambda^2 x_2 = b_2(t) + f_2(x_1, x_2), \\ x_1(0) = x_1(\pi) = x_2(0) = x_2(\pi) = 0 \end{gathered} \tag{37}$$

при λ близких к 1, где все функции скалярны и непрерывны.

Определим пространства $\mathbb{H}$, $\mathbb{B}$ и операторы A, D, F_1 как в примере 2.3.3 и положим $F\big(x(t)\big) = F_1\big(x(t)\big) + F_0$, где $x(t) = \big(x_1(t), x_2(t)\big)$, $F_0 = \big(b_1(t), b_2(t)\big) \in \mathbb{H}$. Здесь плоскость $\mathbb{E}$ состоит из функций $x_0 \sin t$, $x_0 \in \mathbb{R}^2$.

Пусть справедливы тождество (7) и соотношение

$$\lim_{r\to\infty} \max_{\varphi\in[0,2\pi]} \big| f_j(r\cos\varphi, r\sin\varphi) - \psi_j(\cos\varphi, \sin\varphi)\big| = 0, \qquad j = 1, 2, \tag{38}$$

где функции $\psi_j(u, v)$ непрерывны при $u^2 + v^2 = 1$. Положим

$$\psi(\varphi) = \psi_1(\cos\varphi, \sin\varphi)\cos\varphi + \psi_2(\cos\varphi, \sin\varphi)\sin\varphi.$$

Из (7) вытекает согласованность операторов A и F_1 и тождество $v\,\psi_1(u, v) \equiv u\,\psi_2(u, v)$, в силу которого $\psi_1(\cos\varphi, \sin\varphi) = \psi(\varphi)\cos\varphi$, $\psi_2(\cos\varphi, \sin\varphi) = \psi(\varphi)\sin\varphi$. Из (38) следует асимптотическая однородность оператора F_1 с асимптотическим пределом $\Psi(v_\varphi) = \psi(\varphi)(\cos\varphi, \sin\varphi)$. Введем обозначения

$$B_k^{(j)} = \int_0^\pi b_j(t)\sin(kt)\,dt, \qquad \beta_j = \sum_{k=3,5,\ldots} \frac{B_k^{(j)}}{k(1-k^2)}, \qquad j = 1, 2.$$

Т е о р е м а 9. *Пусть* $B_1^{(1)} = B_1^{(2)} = 0$. *Пусть верны соотношения* (7) *и* (38). *Тогда число направленных неограниченных непрерывных ветвей решений задачи* (37) *при* $\lambda \to 1$ *не меньше числа правильных нулей функции* $\chi(\varphi) = \psi(\varphi)(\beta_1\sin\varphi - \beta_2\cos\varphi)$ *на промежутке* $[0, 2\pi)$.

Например, пусть $f_1(x_1, x_2) = x_1\,p(x_1, x_2)$ и $f_2(x_1, x_2) = x_2\,p(x_1, x_2)$ при $p(x_1, x_2) = (x_2 + 1)/(x_1^2 + x_2^2 + 1)$. Здесь $\psi(\varphi) = \sin\varphi$. Если $\beta_2 \neq 0$, то у функции $\chi(\varphi)$ есть 4 правильных нуля $\varphi_j \in [0, 2\pi)$ и задача (37) имеет 4 направленные неограниченные непрерывные ветви решений при $\lambda \to 1$.

Список литературы

1. *Красносельский М.А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, М.: Гос. изд-во технико-теоретической лит., 1956.

2. *Schmitt K., Wang Z.Q.* On bifurcation from infinity for potential operators // Differential Integral Equations, **4**, № 5, 1991, 933-944.

3. *Krasnosel'skii A.M.* Asymptotic homogeneity of hysteresis operators // ZAMM Z. Angew. Math. Mech., **76**, № 2, 1996, 313-316.

4. *Красносельский М.А., Забрейко П.П.* Геометрические методы нелинейного анализа, М.: Наука, 1975.

5. *Lazer A.C., Leach D.E.* Bounded perturbations of forced harmonic oscillators at resonance // Ann. Mat. Pura Appl., **82**, 1969, 46-68.

6. *Krasnosel'skii A.M., Mawhin J.* Periodic solutions of equations with oscillating nonlinearities // Math. Comp. Modelling, **32**, 2000, 1445-1455.

7. *Блиман П.-А., Владимиров А.А., Красносельский А.М., Сорин М.* Вынужденные колебания в системах управления с гистерезисом // Доклады РАН, **347**, № 4, 1996, 458-461.

8. *Krasnosel'skii A.M., Kuznetsov N.A., Rachinskii D.I.* On resonant differential equations with unbounded nonlinearities // Z. Anal. Anwendungen, **21**, № 3, 2002, 639-668.

9. *Diamond P., Kloeden P.E., Krasnosel'skii A.M., Pokrovskii A.V.* Bifurcations at infinity for equations in spaces of vector-valued functions // J. Austral. Math. Soc. Ser. A, **63**, 1997, 263-280.

10. *Krasnosel'skii A.M., Mawhin J.* The index at infinity of some twice degenerate compact vector fields // Discrete Contin. Dynam. Systems, **1**, № 2, 1995, 207-216.

11. *Арнольд В.И.* Задачи Арнольда, М.: “Фазис”, 2000.