517.988.67 МАТЕМАТИКА

Ветвление на бесконечности решений уравнений с двукратным вырождением

© 2003 г. А.М. Красносельский, Д.И. Рачинский

Представлено академиком Н.А. Кузнецовым .08.2003 г.

Поступило .08.2003 г.

Предлагаются теоремы о существовании и количестве непрерывных неограниченных ветвей решений асимптотически линейных операторных уравнений с параметром для случая, когда главная линейная часть имеет двукратное вырождение. В случае вырождения нечетной кратности ([1, 2]) основные выводы можно сделать по линейной части с помощью принципа смены индекса.

Если кратность вырождения четная (например, равна 2), то только по линейной части невозможно сказать существует ли неограниченная ветвь решений и необходимо использовать свойства нелинейностей. Хорошо изучен случай уравнений с потенциальными нелинейностями (см. [1, 3]). В сообщении используется асимптотическая однородность ([4]) нелинейностей и специальная согласованность линейной части и нелинейности. Для асимптотически линейных полей в гильбертовых пространствах с асимптотически однородными согласованными нелинейностями сформулированы условия, при которых двукратное собственное значение линейной части является точкой бифуркации на бесконечности, приведены оценки числа неограниченных направленных непрерывных ветвей решений. Предлагаются две теоремы, дополняющие друг друга. В простейшем случае (теорема 1) существуют 2 неограниченные ветви, в условиях основной теоремы 2 таких ветвей может быть много. Доказательство этой теоремы основано на новом методе выделения главных членов уравнений разветвления в задаче о бифуркациях на бесконечности.

Наиболее просты приложения теоремы 2 к 2π-периодической задаче и задаче о субгармониках (периодических решениях кратного периода $2n\pi$) для уравнения $x''+\lambda^2 x = b(t)+f(x)$, линеаризованное на бесконечности уравнение $x''+\lambda^2 x = 0$ имеет двукратное вырождение. Приведены иллюстративные примеры утверждений о бифуркациях из бесконечности периодических решений векторных систем и решений двумерной двухточечной краевой задачи.

Часть приведенных приложений имеет градиентный вид. Для них новизна полученных результатов заключается именно в подсчете возникающих ветвей решений. Оновные результаты сохраняются при малых неградиентных возмущениях всех изучаемых задач.

1. Операторные уравнения

1.1. Постановка задачи. Пусть в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$ заданы вполне непрерывный линейных оператор A и непрерывный нелинейный оператор F, множество значений которого ограничено. Рассмотрим уравнение

$$x = \lambda A x + F(Ax, \lambda), \tag{1}$$

пусть $\mathfrak{M}$ — множество всех его решений $(x, \lambda) \in \mathbb{H} \times \Lambda = [\lambda_-, \lambda_+]$. Значение λ_0 параметра назовем *асимптотической точкой бифуркации*, если для любой окрестности U точки λ_0 множество $\mathfrak{F} = \{(x, \lambda) \in \mathfrak{M} \colon \lambda \in U\}$ не ограничено. Каждая асимптотическая точка бифуркации — это характеристическое значение линейного оператора A. Назовем множество $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$ *неограниченной непрерывной ветвью решений* ([2]) уравнения (1), если найдется такое $\rho > 0$, что на границе каждого ограниченного множества $G \subset \mathbb{H} \times \Lambda$, содержащего цилиндр $C_\rho = \{(x, \lambda) : \|x\|_{\mathbb{H}} < \rho, \lambda \in \Lambda\}$, есть хотя бы одна точка $(x, \lambda) \in \mathfrak{N} \setminus C_\rho$. Если $\lambda_0 \in (\lambda_-, \lambda_+)$ — единственное характеристическое значение оператора A на Λ, то

$$\lim_{\rho \to \infty} \sup_{(x,\lambda) \in \mathfrak{N} \setminus C_\rho} |\lambda - \lambda_0| = 0 \tag{2}$$

и поэтому λ_0 является асимптотической точкой бифуркации. Ветвь $\mathfrak{N}$ назовем *направленной при* $\lambda \to \lambda_0$, если верно соотношение (2) и существует предел

$$\lim_{\rho \to \infty} \sup_{(x,\lambda) \in \mathfrak{N} \setminus C_\rho} \big\| x / \|x\|_{\mathbb{H}} - e \big\|_{\mathbb{H}} = 0;$$

вектор e назовем *предельным* для $\mathfrak{N}$.

Далее предполагается, что $\lambda_0 \in (\lambda_-, \lambda_+)$ — ненулевое характеристическое значение кратности 2 вполне непрерывного самосопряженного оператора A.

Предлагаются достаточные условия существования направленных неограниченных ветвей решений уравнения (1) при $\lambda \to \lambda_0$ и оценки их количества.

1.2. Предположения о нелинейности. Пусть банахово пространство $\mathbb{B}$ непрерывно вложено в $\mathbb{H}$. Пусть оператор $F : \mathbb{B} \times \Lambda \to \mathbb{H}$ непрерывен и равномерно ограничен: $\sup_{x\in\mathbb{B},\lambda\in\Lambda} \|F(x,\lambda)\|_{\mathbb{H}} < \infty$; пусть самосопряженный в $\mathbb{H}$ оператор A действует из $\mathbb{H}$ в $\mathbb{B}$ и вполне непрерывен.

Пусть $\mathbb{E} \subset \mathbb{B}$ конечномерно, $S = \{x \in \mathbb{E} : \|x\|_{\mathbb{H}} = 1\}$ — единичная сфера в $\mathbb{E}$. Оператор $F(x,\lambda)$ назовем *асимптотически однородным*, если определен его *асимптотический предел*: непрерывный оператор $\Psi : S \times \Lambda \to \mathbb{H}$, при любом $c > 0$ и любом $y \in \mathbb{B}$ удовлетворяющий равенству

$$\lim_{r\to+\infty} \sup_{u\in S;\, h\in\mathbb{B},\, \|h\|_{\mathbb{B}}\leqslant c,\lambda\in\Lambda} \big|\, \langle y, F(ru+h,\lambda) - \Psi(u,\lambda)\rangle \,\big| = 0$$

($\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{H}$, порождающее норму $\|\cdot\|_{\mathbb{H}}$).

Везде далее $\mathbb{E}$ — двумерное собственное подпространство оператора A, определяемое равенством $x = \lambda_0 A x$.

Операторы A и $F(x,\lambda)$ назовем *согласованными*, если определен линейный непрерывный оператор $D\colon \mathbb{B} \to \mathbb{H}$, удовлетворяющий следующим условиям.

(i) Оператор D кососимметричен и коммутирует с A на пространстве $\mathbb{B}$, то есть $\langle Dx, x\rangle = 0$ и $DAx = ADx$ при всех $x \in \mathbb{B}$.

(ii) При всех $x \in \mathbb{B}$ и всех $\lambda \in \Lambda$ справедливо равенство $\langle Dx, F(x,\lambda)\rangle = 0$.

Из предположения (i) следует, что все собственные подпространства оператора A, отвечающие его ненулевым собственным значениям, инвариантны для оператора D. Всякое такое подпространство представимо в виде прямой суммы конечного числа ортогональных собственных для оператора D плоскостей, в каждой из которых D является композицией поворота на угол $\pi/2$ и растяжения с положительным коэффициентом (для каждой плоскости — своим), и подпространства (возможно, нульмерного), где D обращается в нуль.

1.3. Основные теоремы. Предположим, что на инвариантной для D и A плоскости $\mathbb{E} = \{x : x = \lambda_0 Ax\} \subset \mathbb{H}$ оператор D ненулевой. Зададимся единичным вектором $v_0 \in \mathbb{E}$ и положим $\xi = \|Dv_0\|_{\mathbb{H}}$. В силу кососимметричности оператора D векторы v_0 и Dv_0 образуют ортогональный базис в $\mathbb{E}$; равенство $v_\varphi = v_0\cos\varphi + \xi^{-1}Dv_0\sin\varphi$ параметризует единичную окружность $S\subset\mathbb{E}$.

Изолированный нуль φ_0 непрерывной функции $\chi(v_\varphi)\ : S\to\mathbb{R}$ назовем *правильным*, если в достаточно малой его окрестности функция χ имеет разные знаки при $\varphi<\varphi_0$ и при $\varphi>\varphi_0$; простейшее условие правильности нуля φ_0 — существование и отличие от нуля производной в точке φ_0.

Теорема 1. *Пусть $F(x,\lambda)=F_0(x,\lambda)+F_1(x,\lambda)$, причем оператор $F_0(x,\lambda)$ асимптотически однороден по x с асимптотическим пределом $\Psi_F(u,\lambda)$, а операторы A и $F_1(x,\lambda)$ согласованы. Пусть функция $\eta(v_\varphi)=\langle Dv_\varphi,\Psi_F(v_\varphi,\lambda_0)\rangle$ имеет $K>0$ правильных нулей $\varphi_1,\dots,\varphi_K$ на окружности S. Тогда у уравнения* (1) *есть по крайней мере K направленных неограниченных непрерывных ветвей решений при $\lambda\to\lambda_0$ с предельными векторами v_{φ_j}, $j=1,...,K$.*

Обозначим через $\mathbb{E}^\perp$ ортогональное дополнение к плоскости $\mathbb{E}$ в пространстве $\mathbb{H}$, через Q — ортогональный проектор на $\mathbb{E}^\perp$. Так как $DA\mathbb{E}^\perp\subset\mathbb{E}^\perp$, то при каждом $u\in\mathbb{E}^\perp$ по альтернативе Фредгольма линейное неоднородное уравнение $x=\lambda_0Ax+DAu$ имеет двумерное множество решений; ровно одно из них $DA(I-\lambda_0AQ)^{-1}u$ принадлежит $\mathbb{E}^\perp$.

Теорема 2. *Пусть $F(x,\lambda)=F_0(x,\lambda)+F_1(x,\lambda)$, причем операторы A и $F_1(x,\lambda)$ согласованы. Пусть верны представления*

$$F_0(x,\lambda)=F_0(\lambda_0)+(\lambda-\lambda_0)G_0(x,\lambda),$$
$$F_1(x,\lambda)=F_1(x,\lambda_0)+(\lambda-\lambda_0)G_1(x,\lambda),$$

в которых операторы $G_i\colon\mathbb{B}\times\Lambda\to\mathbb{H}$ непрерывны и равномерно ограничены. Пусть оператор $G_0(x,\lambda_0)$ асимптотически однороден с асимптотическим пределом $\Psi_G(u)$, а оператор $F_1(x,\lambda_0)$ — с асимптотическим пределом $\Psi_F(u)$. Пусть $F_0(\lambda_0)\in\mathbb{E}^\perp$, а функция

$$\chi(v_\varphi)=\Big\langle DA(I-\lambda_0AQ)^{-1}F_0(\lambda_0)+\langle\Psi_G(v_\varphi),Dv_\varphi\rangle v_\varphi,\Psi_F(v_\varphi)\Big\rangle$$

имеет $K>0$ правильных нулей $\varphi_1,\dots,\varphi_K$ на окружности S. Тогда у уравнения (1) *есть по крайней мере K направленных неограниченных непрерывных ветвей решений при $\lambda\to\lambda_0$ с предельными векторами v_{φ_j}, $j=1,...,K$.*

Условия теоремы означают, что нелинейность F при $\lambda = \lambda_0$ имеет вид "постоянный вектор, ортогональный $\mathbb{E}$" плюс "согласованный с A и асимптотически однородный оператор", дифференцируема по λ и ее производная состоит из слагаемых, либо согласованных с A, либо асимптотически однородных.

Пусть в теореме 1 нелинейность имеет вид $F(x, \lambda) = F_0(\lambda) + F_1(x, \lambda)$, где оператор $F_1(x, \lambda)$ согласован с A. Тогда $\eta(v_\varphi) = \langle Dv_\varphi, F_0(\lambda_0)\rangle$. При $F_0(\lambda_0) \notin E^\perp$ эта функция имеет на S два правильных нуля $\pm PF_0(\lambda_0)/\|PF_0(\lambda_0)\|_{\mathbb{H}}$ и по теореме 1 у уравнения (1) есть две направленные непрерывные неограниченные ветви решений при $\lambda \to \lambda_0$. Если $F_0(\lambda_0) \in E^\perp$ (как в теореме 2), то $\eta \equiv 0$ и теорема 1 не применима, то есть теоремы 1 и 2 дополняют друг друга.

Если слагаемое F_1 отсутствует (оператор $F(x, \lambda)$ асимптотически однороден), то аналоги теоремы 1 справедливы в существенно более общих условиях.

Будем говорить, что непрерывная неограниченная ветвь $\mathfrak{N}$ определена при $\lambda > \lambda_0$, если $\mathfrak{N} \setminus C_\rho \subset \mathbb{H} \times (\lambda_0, \lambda_+)$ при достаточно больших ρ. Аналогично, ветвь $\mathfrak{N}$ определена при $\lambda < \lambda_0$, если $\mathfrak{N} \setminus C_\rho \subset \mathbb{H} \times (\lambda_-, \lambda_0)$.

В условиях теоремы 2 положим $\omega(v_\varphi) = \lambda_0 \langle v_\varphi, \Psi_F(v_\varphi)\rangle$. Пусть $\mathfrak{N}$ — направленная неограниченная ветвь решений уравнения (1) при $\lambda \to \lambda_0$ с предельным вектором e, для которого $\omega(e) \neq 0$. Тогда ветвь $\mathfrak{N}$ определена при $\lambda < \lambda_0$, если $\omega(e) > 0$, и при $\lambda > \lambda_0$, если $\omega(e) < 0$. В приложениях к периодической задаче $\omega \equiv const$ и либо все направленные неограниченные непрерывные ветви определены при $\lambda > \lambda_0$, либо — при $\lambda < \lambda_0$.

2. Приложения

2.1. Вынужденные колебания. Рассмотрим уравнение

$$x'' + \lambda^2 x = b(t) + \phi(x), \qquad b(t) \equiv b(2\pi + t), \tag{3}$$

с непрерывными функциями $b(t)$ и $\phi(x)$ и оценим число неограниченных ветвей 2π-периодических решений при $\lambda \to m$, где m — натуральное число.

Уравнение (3) и периодическая задача для такого уравнения изучались многими авторами. Наибольший интерес вызывает резонансный случай, то есть уравнение (3) с фиксированным $\lambda = m$:

$$x'' + m^2 x = b(t) + \phi(x). \tag{4}$$

После работы [5], в которой рассматривались уравнения (4) с нелинейностями $\phi(x) = f(x)$, удовлетворяющими условиям (5), на эту тему появились множество работ. Для таких уравнений существование 2π-периодических решений определяют числа $\overline{f} = 2|f_+ - f_-|$ и

$$\overline{b} = \Big| \int\limits_0^{2\pi} e^{imt} b(t)\, dt \Big|.$$

При $\overline{b} \neq \overline{f}$ все 2π-периодические решения уравнения (4) допускают общую априорную оценку. Если $f(x) \in (f_+, f_-)$ и $\overline{b} > \overline{f}$, то решений периода 2π нет. При $\overline{b} < \overline{f}$ существует по крайней мере одно 2π-периодическое решение.

Пусть скалярная функция $f(x)$ непрерывна и

$$f(x) \to f_+ \quad \text{при} \quad x \to +\infty; \quad f(x) \to f_- \quad \text{при} \quad x \to -\infty; \quad f_+ \neq f_-. \tag{5}$$

Пусть скалярная функция $f_1(x)$ непрерывна, ограничена и

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \int\limits_0^x f_1(s) ds = 0. \tag{6}$$

Положим $\phi(x) = f(x) + f_1(x)$. Тогда число неограниченных ветвей 2π-периодических решений уравнения (3) при $\lambda \to m$ определяется величиной $\overline{b}$. Если $\overline{b} > 0$, то $\lambda_0 = m$ — асимптотическая точка бифуркации и у уравнения (3) есть две направленные неограниченные непрерывные ветви решений при $\lambda \to \lambda_0$ (например, в силу теоремы 1). Если $\overline{f} > \overline{b}$, то обе ветви определены либо при $\lambda > \lambda_0$, либо при $\lambda < \lambda_0$; если $\overline{f} < \overline{b}$, то одна ветвь определена при $\lambda > \lambda_0$, а другая — при $\lambda < \lambda_0$.

Случай $\overline{b} = 0$ более богатый. Здесь оценки числа неограниченных ветвей решений при $\lambda \to m$ следуют из теоремы 2. Условие $\overline{b} = 0$ эквивалентно отсутствию гармоник порядка m в ряде Фурье

$$b(t) = \frac{B_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin(kt + \beta_k), \qquad B_k \geqslant 0,\ k = 1, 2, \dots, \tag{7}$$

или равенству $B_m = 0$. Определим 2π-периодическую непрерывную функцию

$$\chi_m(\varphi) = \sum_{k=3,5,7,\dots} \frac{B_{km}}{1-k^2} \sin(k\varphi - \beta_{km}). \tag{8}$$

Теорема 3. *Пусть $\bar{b} = 0$. Пусть $\phi(x) = f(x) + f_1(x)$, функции $f(x)$ и $f_1(x)$ непрерывны и ограничены и верны соотношения* (5), (6). *Тогда каждому правильному нулю φ^* функции* (8) *отвечает направленная неограниченная непрерывная ветвь 2π-периодических решений уравнения* (3) *при $\lambda \to m$.*

В силу теоремы Штурма–Гурвица ([6]) непрерывная вещественная периодическая функция имеет на периоде не меньше нулей, чем ненулевая гармоника наименьшего порядка ее ряда Фурье. Если функция (8) не обращается в нуль ни на каком промежутке (например, она аналитическая), то у нее есть хотя бы 6 различных правильных нулей на периоде.

Так как $\chi_m(\varphi + \pi) \equiv \chi_m(\varphi)$, то число правильных нулей функции χ_m на периоде четно. Пусть $m = 1$. Так как $\bar{b} = 0$ и 2π — наименьший период функции $b(t)$, то $\chi_1(t) \not\equiv 0$. Если амплитуда B_n гармоники нечетного порядка n достаточно велика по сравнению с амплитудами ее остальных нечетных гармоник, то существует по крайней мере $2n$ правильных нулей функции $\chi_1(\varphi)$ на периоде. Если $b(t) = \cos(2t) + \sin(nt)$ при нечетном $n > 1$, то у функции $\chi_1(\varphi) = (1-n^2)^{-1}\sin(n\varphi)$ есть ровно $2n$ правильных нулей.

Теорема 2 применима к уравнениям существенно более общего чем (3) вида: правая часть может зависеть от параметра, содержать при $\lambda \neq m$ производные, запаздывание и даже гистерезис ([4]).

2.2. Субгармоники. Зададимся рациональным числом m/n (натуральные m и n взаимно-просты), и будем изучать существование неограниченных ветвей субгармоник фиксированного периода $2\pi n$ при $\lambda \to m/n$. Отметим, что вместе с субгармоникой $x(t)$ субгармониками являются формально отличные от нее сдвиги $x(t + 2\pi\ell)$ при $\ell = 1, \dots, n-1$.

По разложению (7) функции $b(t)$ в ряд Фурье определим функцию

$$\chi_{m,n}(\varphi) = \sum_{k=1,3,5,\dots} \frac{B_{km}}{1-n^2k^2} \, \sin(k\varphi - \beta_{km}). \tag{9}$$

Т е о р е м а 4. *Пусть* $\phi(x) = f(x) + f_1(x)$, *непрерывные функции* $f(x)$ *и* $f_1(x)$ *ограничены, справедливы соотношения* (5), (6). *Пусть* $n > 1$ *нечетно. Пусть у функции* (9) *есть* $K > 0$ *правильных нулей на периоде. Тогда число направленных неограниченных непрерывных ветвей субгармоник уравнения* (3) *с периодом* $2n\pi$ *при* $\lambda \to m/n$ *не меньше, чем* nK *(считая сдвиги).*

2.3. Колебания в векторных системах. Рассмотрим систему

$$x'' + \lambda x + \mathcal{A}x = b(t) + f(x, x'), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{10}$$

при $n > 1$. Здесь $\mathcal{A}$ — симметрическая квадратная матрица порядка n, периодическая с периодом 2π функция $b(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ непрерывна, функция $f(x, y) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ непрерывна и ограничена.

Пусть 1 — простое собственное значение матрицы $\mathcal{A}$; $\mathcal{A}e = e$, $\|e\|_{\mathbb{R}^n} = 1$. Пусть все отличные от 1 собственные значения матрицы $\mathcal{A}$ не являются квадратами целых чисел. Введем обозначение

$$V(u, \varphi) = \int_0^{2\pi} \bigl(e, u(t)\bigr)_{\mathbb{R}^n} \sin(t + \varphi)\, dt.$$

Если $V(b, \varphi) \equiv 0$ при $\varphi \in \mathbb{R}$, то у уравнения $u'' + \mathcal{A}u = b(t)$ есть единственное 2π-периодическое решение $u_*(t)$, удовлетворяющее $V(u_*, \varphi) \equiv 0$ при $\varphi \in \mathbb{R}$.

Т е о р е м а 5. *Пусть* $f(x, y)$ *имеет вид*

$$f(x, y) = \nabla g(x) + f_1(x, y), \qquad x, y \in \mathbb{R}^n$$

и $\bigl(f_1(x, y), y\bigr)_{\mathbb{R}^n} \equiv 0$. *Пусть при некоторой непрерывной* $\psi(u, v)$ *справедливо асимптотическое равенство*

$$\lim_{r\to\infty} \max_{\|u\|^2_{\mathbb{R}^n} + \|v\|^2_{\mathbb{R}^n} = 1} \bigl\|f(ru, rv) - \psi(u, v)\bigr\|_{\mathbb{R}^n} = 0.$$

Пусть $V(b, \varphi) \equiv 0$ *при* $\varphi \in \mathbb{R}$. *Тогда число направленных неограниченных непрерывных ветвей* 2π*-периодических решений системы* (10) *при* $\lambda \to 0$ *не меньше числа правильных нулей на периоде функции*

$$\chi(\varphi) = \int_0^{2\pi} \bigl(u_*'(t - \varphi)\,,\, \psi(e \sin t, e \cos t)\bigr)_{\mathbb{R}^n}\, dt.$$

2.4. Двухточечная краевая задача. Рассмотрим задачу

$$x_1'' + \lambda^2 x_1 = b_1(t) + f_1(x_1, x_2), \qquad x_2'' + \lambda^2 x_2 = b_2(t) + f_2(x_1, x_2),$$
$$x_1(0) = x_1(\pi) = x_2(0) = x_2(\pi) = 0 \tag{11}$$

при λ близких к 1. Здесь все функции скалярны и непрерывны. Пусть

$$x_2 f_1(x_1, x_2) \equiv x_1 f_2(x_1, x_2),$$
$$\lim_{r\to\infty} \max_{\varphi\in[0,2\pi]} \left| f_j(r\cos\varphi, r\sin\varphi) - \psi_j(\cos\varphi, \sin\varphi) \right| = 0, \qquad j = 1, 2, \tag{12}$$

где $\psi_j(u, v)$ непрерывны при $u^2 + v^2 = 1$. Положим

$$\psi(\varphi) = \psi_1(\cos\varphi, \sin\varphi)\cos\varphi + \psi_2(\cos\varphi, \sin\varphi)\sin\varphi$$

и введем обозначения

$$\beta_j = \sum_{k=3,5,\ldots} \frac{B_k^{(j)}}{k(1-k^2)}, \qquad b_j(t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k^{(j)} \sin(kt), \qquad j = 1, 2.$$

Теорема 6. *Пусть выполнены условия* (12), *пусть* $B_1^{(1)} = B_1^{(2)} = 0$. *Тогда число направленных неограниченных непрерывных ветвей решений задачи* (11) *при* $\lambda \to 1$ *не меньше числа правильных нулей функции* $\chi(\varphi) = \psi(\varphi)(\beta_1\sin\varphi - \beta_2\cos\varphi)$ *на периоде.*

Например, пусть $f_1(x_1, x_2) = x_1\, p(x_1, x_2)$ и $f_2(x_1, x_2) = x_2\, p(x_1, x_2)$ при $p(x_1, x_2) = (x_2 + 1)/(x_1^2 + x_2^2 + 1)$. Здесь $\psi(\varphi) = \sin\varphi$. Если $\beta_2 \neq 0$, то у функции $\chi(\varphi)$ есть 4 правильных нуля на периоде и задача (11) имеет 4 направленные неограниченные ветви решений при $\lambda \to 1$.

Благодарности. Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (гранты 01-01-00146, 03-01-00258), Фондом содействия отечественной науке и грантами Президента РФ НШ-1532.2003.1 и МД-87.2003.01.

Список литературы

1. *Красносельский М.А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, М.: Гос. изд-во технико-теоретической лит., 1956.

2. *Красносельский М.А., Забрейко П.П.* Геометрические методы нелинейного анализа, М.: Наука, 1975.

3. *Schmitt K., Wang Z.Q.* On bifurcation from infinity for potential operators // Differential Integral Equations. 1991. V. 4, № 5. P. 933-944.

4. *Krasnosel'skii A.M.* Asymptotic homogeneity of hysteresis operators // ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 1996. V. 76. № 2. P. 313-316.

5. *Lazer A.C., Leach D.E.* Bounded perturbations of forced harmonic oscillators at resonance // Ann. Mat. Pura Appl. 1969. V. 82. P. 46-68.

6. *Арнольд В.И.* Задачи Арнольда. Задача 1996-5. М.: "Фазис", 2000. Задача 1996-5. (П.Г.Гриневич)- стр. 123 Комментарий (С.Б.Куксин) стр. 419-421