А.М. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ, д-р физ.-мат. наук
(Институт проблем передачи информации РАН, Москва),

А.В. ПОКРОВСКИЙ, д-р физ.-мат. наук
(University College, Cork),

Д.И. РАЧИНСКИЙ, д-р физ.-мат. наук
(Институт проблем передачи информации РАН, Москва)

# О сравнении гарантированных оценок скорости сходимости одного класса итерационных процедур [1]

Для ускорения сходимости итерационных процедур используются разнообразные методы распараллеливания и рассинхронизации вычислений. При этом возникает естественный вопрос об оптимальных гарантированных оценках скорости сходимости. Предлагается теорема о сравнении гарантированных оценок скоростей сходимости некоторых процедур в условиях, когда основные вычислительные затраты сконцентрированы на вычислении компонент нелинейностей. При доказательстве теоремы используются новые оценки спектральных радиусов произведений последовательностей матриц асинхронного пересчета компонент.

## 1. Введение

Для решения многокомпонентных систем конечномерных или бесконечномерных уравнений в некоторых ситуациях применимы итерационные процедуры типа метода последовательных приближений и метода Зейделя [1], метода неполных коррекций [2], асинхронные процедуры [3] и др. При использовании таких методов задания могут быть распределены между компьютерами, проводящими вычисления компонент итераций парал-

[1]Работа частично написана во время визита А.М. Красносельского в BCRI, University College, Корк, Ирландия в 2002 – 2003гг. Работа поддержана грантами 03-01-00258 и 04-01-00339 Российского фонда фундаментальных исследований, Фондом содействия отечественной науке и грантами Президента РФ НШ-1532.2003.1 и МД-87.2003.01.

лельно (синхронно или асинхронно). В настоящей работе рассматривается ситуация, когда вычисления являются основной трудозатратной частью итерационной процедуры. Поэтому естественно спланировать оптимальную с точки зрения минимизации числа пересчетов, необходимых для достижение априори заданной точности, очередность пересчета компонент. Методам выбора стратегии пересчета компонент посвящена настоящая работа.

*1.1. Постановка задачи.* Пусть задана система $N$ уравнений

$$(1)\qquad \begin{cases} x_1 = F_1(x_1, \dots, x_N), \\ \qquad \dots \\ x_N = F_N(x_1, \dots, x_N) \end{cases}$$

с $N$ неизвестными $x_1, \dots, x_N$, принадлежащими банаховым пространствам $B_1, \dots, B_N$ с нормами $\|\cdot\|_1, \dots, \|\cdot\|_N$; предлагаемые результаты являются новыми в простейшем случае $B_j = \mathbb{R}$. Пусть каждая нелинейность $F_j$ ($j \in \mathfrak{N} = \{1, ..., N\}$) удовлетворяет условию Липшица

$$(2)\qquad \|F_j(x_1, \dots, x_N) - F_j(y_1, \dots, y_N)\|_j \leqslant \sum_{k=1}^{N} a_{jk}\|x_k - y_k\|_k$$

во всем пространстве $\mathfrak{B} = B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_N$. Рассмотрим квадратную матрицу $A = \{a_{jk}\}_{j,k \in \mathfrak{N}}$ размера $N \times N$ с неотрицательными элементами $a_{jk}$; она играет в последующих построениях основную роль. Пусть $\rho(A)$ — это спектральный радиус матрицы $A$. Каждому $\varepsilon > 0$ отвечает множество норм $\|\cdot\|_\varepsilon$ в пространстве $\mathbb{R}^N$, при которых $\|Av\|_\varepsilon \leqslant \big(\rho(A) + \varepsilon\big)\|v\|_\varepsilon$ ($v \in \mathbb{R}^N$). Выберем норму $\|\cdot\|_\varepsilon$, обладающую свойством монотонности относительно конуса $\mathbb{R}^N_+ = \{v = (v_1, \dots, v_N) \in \mathbb{R}^N :\ v_j \geqslant 0,\ j \in \mathfrak{N}\}$ векторов с неотрицательными компонентами; монотонность означает, что из оценок $0 \leqslant v_j \leqslant u_j$ ($j \in \mathfrak{N}$) вытекет соотношение $\|(v_1, \dots, v_N)\|_\varepsilon \leqslant \|(u_1, \dots, u_N)\|_\varepsilon$.

Монотонная норма $\|\cdot\|_\varepsilon$ в пространстве $\mathbb{R}^N$ определяет в пространстве $\mathfrak{B}$ норму $\|\mathfrak{x}\|_{\mathfrak{B}} = \|(\|x_1\|_1, \dots, \|x_N\|_N)\|_\varepsilon$, где $\mathfrak{x} = (x_1, \dots, x_N)$. Если $\rho(A) < 1$ и $\varepsilon$ достаточно мало, то в силу оценки (2) действующий в $\mathfrak{B}$ нелинейный оператор $\mathfrak{F}(\mathfrak{x}) = \big(F_1(x_1, \dots, x_N), \dots, F_N(x_1, \dots, x_N)\big)$ является сжатием с коэффициентом $\rho(A)+\varepsilon<1$ относительно нормы $\|\cdot\|_{\mathfrak{B}}$. Поэтому у системы (1) есть единственное решение $\mathfrak{x}^*=\bigl(x_1^*,\dots,x_N^*\bigr)$, и оно может быть найдено при каждом начальном приближении $\mathfrak{x}_0=\bigl(x_1^0,\dots,x_N^0\bigr)$ методом последовательных приближений $\mathfrak{x}_k=\mathfrak{F}(\mathfrak{x}_{k-1})$. Гарантированная оценка скорости сходимости такого метода имеет вид

$$\|\mathfrak{x}_k-\mathfrak{x}^*\|_{\mathfrak{B}}\leqslant\bigl(\rho(A)+\varepsilon\bigr)^k\|\mathfrak{x}_0-\mathfrak{x}^*\|_{\mathfrak{B}}. \tag{3}$$

Иными словами, при некотором выборе нормы последовательные приближения гарантировано сходятся к решению системы (1) как геометрическая прогрессия со знаменателем сколь угодно близким к $\rho(A)$; заметим, что при простых дополнительных предположениях оценка (3) верна при $\varepsilon=0$ (например, если все элементы матрицы $A$ или некоторой ее степени положительны). Ниже обсуждаются итерационные процедуры, сходящиеся как геометрическая прогрессия, но с меньшими знаменателями.

*1.2. Асинхронный пересчет компонент.* Пусть $\tau\subset\mathfrak{N}=\{1,\dots,N\}$, $\bar\tau=\mathfrak{N}\setminus\tau$. Обозначим через $E_\tau$ действующий в пространстве $\mathfrak{B}$ линейный оператор, переводящий вектор $\mathfrak{x}=\bigl(x_1,\dots,x_N\bigr)$ в вектор $\mathfrak{z}=(z_1,\dots,z_N)=E_\tau\mathfrak{x}$ с компонентами $z_j=x_j$ при $j\in\tau$ и $z_j=0$ при $j\in\bar\tau$, и положим

$$\mathfrak{F}_\tau(\mathfrak{x})=E_\tau\mathfrak{F}(\mathfrak{x})+E_{\bar\tau}\,\mathfrak{x}. \tag{4}$$

У вектора $\mathfrak{F}_\tau(\mathfrak{x})$ компоненты с номерами $j\in\tau$ такие же, как у вектора $\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$, а компоненты с номерами $j\in\bar\tau$ такие же, как у вектора $\mathfrak{x}$.

Зададимся последовательностью $T$ множеств $\tau_k\subset\mathfrak{N}$ и построим по ней итерационную процедуру $\mathfrak{x}_k=\mathfrak{F}_{\tau_k}(\mathfrak{x}_{k-1})$. Такая процедура называется асинхронной, так как не все компоненты вектора $\mathfrak{x}_{k-1}$ меняются одновременно (за одну итерацию): при переходе от $\mathfrak{x}_{k-1}$ к $\mathfrak{x}_k$ компоненты с номерами $j\in\tau_k$ пересчитываются, а компоненты с номерами $j\in\bar\tau_k$ остаются без изменения. Как показано в [3], если каждый номер $j\in\mathfrak{N}$ включен в бесконечное число множеств $\tau_k$, то при $\rho(A)<1$ асинхронная итерационная процедура, как и классический метод последовательных приближений, сходится к единственной неподвижной точке оператора $\mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}_\tau = \mathfrak{F}$ при $\tau = \mathfrak{N}$, то асинхронные итерации переходят в классические последовательные приближения, если все множества $\tau_k$ в последовательности $T$ совпадают с $\mathfrak{N}$.

При оценке быстроты сходимости асинхронных процедур важную роль играют матрицы $A_\tau$ размера $N \times N$, у которых строки с номерами $j \in \tau$ совпадают со строками матрицы $A$, а строки с номерами $j \in \bar{\tau}$ — со строками единичной матрицы: компоненты вектора $u = (u_1, \ldots, u_N) = A_\tau v$ связаны с компонентами векторов $v = (v_1, \ldots, v_N)$, $w = (w_1, \ldots, w_N) = Av \in \mathbb{R}^N$ равенствами $u_j = w_j$ при $j \in \tau$ и $u_j = v_j$ при $j \in \bar{\tau}$. Матрицу $A_\tau$ будем называть матрицей пересчета компонент с номерами $j \in \tau$; ее построение по матрице $A$ аналогично построению оператора $\mathfrak{F}_\tau$ по оператору $\mathfrak{F}$.

В дальнейшем ограничимся периодическими последовательностями $T$ множеств $\tau_k$. Пусть $K = K(T)$ — это период последовательности $T$. Тогда гарантированная оценка быстроты сходимости асинхронной процедуры $\mathfrak{x}_k = \mathfrak{F}_{\tau_k}(\mathfrak{x}_{k-1})$ определяется матрицей $\mathcal{A}(T) = A_{\tau_K} A_{\tau_{K-1}} \ldots A_{\tau_1}$: при любом начальном приближении $\mathfrak{x}_0$ и всех натуральных $n$ для итераций с номерами $k = nK$ справедлива оценка

$$\|\mathfrak{x}_k - \mathfrak{x}^*\|_{\mathfrak{B}} \leqslant \big(\rho(\mathcal{A}(T)) + \varepsilon\big)^{k/K} \|\mathfrak{x}_0 - \mathfrak{x}^*\|_{\mathfrak{B}}, \tag{5}$$

где норма $\|\cdot\|_{\mathfrak{B}}$ определяется по матрице $\mathcal{A}(T)$ и произвольно выбранному $\varepsilon > 0$; через $\rho(\mathcal{A}(T))$ обозначен спектральный радиус матрицы $\mathcal{A}(T)$. Если $\mathfrak{N} \subset \tau_1 \cup \ldots \cup \tau_K$ и $\rho(A) < 1$, то (см. [4]) верна оценка $\rho(\mathcal{A}(T)) \leqslant \rho(A)$.

*1.3. Стоимость расчетов.* Рассмотрим асинхронные итерационные процедуры решения системы (1) при различных периодических последовательностях $T$. Через $|\tau|$ будем обозначать число элементов конечного множества $\tau$. Введем стоимость $P_k$ вычисления первых $k$ итераций $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_k$ асинхронной процедуры равенством $P_k = |\tau_1| + \ldots + |\tau_k|$. Здесь предполагается, что все затраты сконцентрированы на вычислениях и стоимость перехода от вектора $\mathfrak{x}_{k-1}$ к вектору $\mathfrak{x}_k$ равна числу $|\tau_k|$ пересчитываемых компонент ($N - \tau_k$ компонент с номерами $j \in \bar{\tau}_k$ при таком переходе не меняются);

стоимость пересчета одной компоненты не зависит от номера $k$ итерации и номера $j$ компоненты; эта стоимость принята равной 1.

Рассмотрим класс $\mathfrak{T}$ всех периодических последовательностей $T$. Для каждой из них положим

$$\beta(T) = \left[\rho(\mathcal{A}(T))\right]^{1/\alpha(T)} \tag{6}$$

и $\beta_\varepsilon(T) = \left(\rho(\mathcal{A}(T))+\varepsilon\right)^{1/\alpha(T)}$, где $\alpha(T) = |\tau_1|+\ldots+|\tau_K|$ — это стоимость расчетов за период $K = K(T)$ последовательности $T$. Так как $P_k = k\alpha(T)/K$ при $k = nK$, то оценку (5) можно переписать в эквивалентном виде

$$\|\mathfrak{x}_k - \mathfrak{x}^*\|_{\mathfrak{B}} \leqslant [\beta_\varepsilon(T)]^{P_k}\, \|\mathfrak{x}_0 - \mathfrak{x}^*\|_{\mathfrak{B}}.$$

Здесь $\beta_\varepsilon(T) \to \beta(T)$ при $\varepsilon \to 0$. Поэтому в рамках рассматриваемой модели естественно мерить качество выбора последовательности $T$ величиной $\beta(T)$ (или возрастающей функцией от нее: например, можно использовать показатель Ляпунова $\ln \beta(T)$). Задача заключается в определении последовательностей, минимизирующих или "почти" минимизирующих величину (6). Заметим, что последовательности $T$, на которой достигается точная нижняя грань $\inf_{\mathfrak{T}} \beta(T)$ величины (6) в классе $\mathfrak{T}$, может не существовать; такой последовательности нет в простейшем случае, когда $N = 2$, матрица $A$ диагональная и логарифмы ее диагональных элементов несоизмеримы. Если $A = \operatorname{diag}\{e^{-\gamma_1}, \ldots, e^{-\gamma_N}\}$ и $\gamma_j > 0$ при всех $j$, то $\inf_{\mathfrak{T}} \beta(T) = e^{-\gamma}$ при $1/\gamma = 1/\gamma_1 + \ldots + 1/\gamma_N$.

Более простая задача состоит в сравнении величин $\beta(T)$ для частных классов периодических последовательностей $T$. Теоремы о сравнении позволяют указать подмножества общего класса $\mathfrak{T}$, на которых $\beta(T)$ достигает точной нижней грани $\inf_{\mathfrak{T}} \beta(T)$ или принимает близкие к ней значения.

Близкие задачи и вопросы о минимизации стоимости вычислений можно сформулировать для класса всех последовательностей $T$, не ограничиваясь периодическими последовательностями (см., например, [5]). Многие из этих вопросов открыты.

## 2. Основная теорема

Рассмотрим периодическую с периодом $K$ последовательность $T$ множеств $\tau_k \subset \mathfrak{N}$ и построим по ней произведение $\mathcal{A}(T) = A_{\tau_K} A_{\tau_{K-1}} \dots A_{\tau_1}$ матриц пересчета. Периодическую с периодом $K_*$ последовательность $T_*$ множеств $\tau_j^* \subset \mathfrak{N}$ назовем дроблением последовательности $T$, если определены такие номера $0 = \ell_0 < \ell_1 < \ldots < \ell_{K-1} < \ell_K = K_*$, что при каждом $k \in \{1, \ldots, K\}$ множества $\tau^*_{\ell_{k-1}+1}, \ldots, \tau^*_{\ell_k}$ попарно не пересекаются и $\tau_k = \tau^*_{\ell_{k-1}+1} \cup \ldots \cup \tau^*_{\ell_k}$. Иначе говоря, переход от последовательности $T$ к дроблению $T_*$ заключается в замене каждого элемента $\tau_k$ последовательности $T$ упорядоченным набором множеств $\tau^*_{\ell_{k-1}+1}, \ldots, \tau^*_{\ell_k}$, образующих разбиение множества $\tau_k$ (разбиение может состоять из одного элемента $\tau^*_{\ell_k} = \tau_k$).

*Теорема 1. Пусть $\rho(A) < 1$. Пусть последовательность $T_*$ — это дробление последовательности $T$. Тогда $\rho(\mathcal{A}(T_*)) \leqslant \rho(\mathcal{A}(T))$.*

Из равенства $|\tau_k| = |\tau^*_{\ell_{k-1}+1}| + \ldots + |\tau^*_{\ell_k}|$ вытекает соотношение $\alpha(T) = \alpha(T_*)$. Поэтому оценки $\rho(\mathcal{A}(T_*)) \leqslant \rho(\mathcal{A}(T))$ и $\beta(T_*) \leqslant \beta(T)$ эквивалентны и из теоремы 1 вытекает, что при переходе от последовательности $T$ к любому ее дроблению $T_*$ величина (6) не увеличивается. Обозначим через $\mathfrak{T}_1$ класс всех таких периодических последовательностей $T$, у которых $|\tau_k| = 1$ при всех $k$. Так как по каждой периодической последовательности $T$ можно указать ее дробление $T_*$ в классе $\mathfrak{T}_1$ (существует несколько таких дроблений), то в силу теоремы 1 задачи о минимизации величины $\beta(T)$ в классе $\mathfrak{T}$ всех периодических последовательностей сводятся к задачам о ее минимизации в классе $\mathfrak{T}_1$. Авторам не известны алгоритмы, позволяющие сравнивать величины $\beta(T)$ при различных $T$ из класса $\mathfrak{T}_1$.

При простых дополнительных предположениях о матрице $A$ и дроблении $T_*$ последовательности $T$ верна строгая оценка $\rho(\mathcal{A}(T_*)) < \rho(\mathcal{A}(T))$; точные формулировки и доказательства выходят за рамки настоящей работы.

Теорема 1 не дает ответа на вопрос о том, насколько уменьшается величина (6) при переходе от последовательности $T$ к дроблению $T_*$. Авторы экспериментировали со случайными положительными матрицами со спектральным радиусом $\rho(A) = 1 - \varepsilon$ при малых $\varepsilon > 0$ (расчеты проводились при помощи пакета `Maple`). Приведем один пример. При $N = 3$ рассмотрим последовательность $T$ периода 3 с элементами $\tau_1 = \{2,3\}$, $\tau_2 = \{1,3\}$, $\tau_3 = \{1,2\}, \ldots$ и ее дробление $T_*$ периода 6 с элементами $\tau_1^* = \{3\}$, $\tau_2^* = \{2\}$, $\tau_3^* = \{3\}$, $\tau_4^* = \{1\}$, $\tau_5^* = \{2\}$, $\tau_6^* = \{1\}, \ldots$ При

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}4144 & 0{,}2876 & 0{,}4123 \\ 0{,}3785 & 0{,}2981 & 0{,}3785 \\ 0{,}3235 & 0{,}1692 & 0{,}2981 \end{pmatrix}$$

здесь верны равенства $\rho(A) = 0{,}98$ и

$$\rho(\mathcal{A}(T)) = 0{,}9559, \quad \rho(\mathcal{A}(T_*)) = 0{,}9452,$$

демонстрирующие типичный для проведенных экспериментов ответ.

Вместо (4) можно рассматривать операторы $\mathfrak{F}_\Lambda(\mathfrak{x}) = \Lambda\mathfrak{F}(\mathfrak{x}) + (E - \Lambda)\mathfrak{x}$ с отличными от $E_\tau$ линейными операторами $\Lambda$ (здесь $E$ — единичный оператор); важным примером служат диагональные операторы $\Lambda\mathfrak{x} = (\lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_N x_N)$ при $\lambda_j \in [0,1]$, $\mathfrak{x} = (x_1, \ldots, x_N)$. Соответствующие итерационные процедуры $\mathfrak{x}_k = \mathfrak{F}_{\Lambda_k}(\mathfrak{x}_{k-1})$ называют итерациями с неполными коррекциями. Их сходимость изучена в [2].

## 3. Заключение

При решении многокомпонентных систем нелинейных уравнений методами типа Зейделя или их аналогами с помощью многопроцессорных комплексов вычисления очередных итераций компонент или групп компонент естественно проводить параллельно. При этом возникает вопрос о выборе оптимальных (в различных смыслах) стратегиях распараллеливания счета, дающих лучшие гарантированные оценки количества необходимых вычислений. Предложена теорема, утверждающая, что в некотором смысле оптимальным является максимально возможное дробление системы на компоненты и пересчет итераций каждый раз по одной компоненте. Это утверждение применимо в случае, когда именно вычисления (а не передача данных) являются основной трудозатратной составляющей процесса решения.

*П Р И Л О Ж Е Н И Е*

*Доказательство теоремы 1.* Выберем в пространстве $\mathbb{R}^N$ произвольную монотонную норму $\|\cdot\|$. Из формулы Гельфанда $\rho(D) = \lim\limits_{n\to\infty} \|D^n\|^{\frac{1}{n}}$ вытекает, что спектральный радиус произведения матриц не меняется при их циклической перестановке. Поэтому теорему 1 достаточно доказать для дроблений $T_*$ последовательности $T$, определяемых соотношениями $\tau_1^* = \tau_1, \ldots, \tau_{K-1}^* = \tau_{K-1}$, $\tau_K^* \cup \tau_{K+1}^* = \tau_K$, $\tau_K^* \cap \tau_{K+1}^* = \varnothing$, с периодами $K_* = K+1$.

Знаком $\preceq$ будем обозначать отношение полуупорядоченности в $\mathbb{R}^N$, порожденное конусом $\mathbb{R}_+^N$ векторов с неотрицательными компонентами: $u \preceq v$, если $v - u \in \mathbb{R}_+^N$. Предположим, что все элементы матрицы $A$ положительны. Тогда во внутренности конуса $\mathbb{R}_+^N$ найдется единичный вектор $v_0$, для которого $Av_0 \preceq v_0$; например, это верно для содержащегося в $\mathbb{R}_+^N$ собственного вектора матрицы $A$, отвечающего ее ведущему собственному значению $\rho(A)$ (такой собственный вектор существует по теореме Перрона–Фробениуса, см., например, [6–8]). Построим последовательность векторов $v_k = A_{\tau_k^*} v_{k-1}$ конуса $\mathbb{R}_+^N$ с начальным вектором $v_0$ и рассмотрим любой ее элемент, для которого $Av_{k-1} \preceq v_{k-1}$. По определению матрицы $A_{\tau_k^*}$ каждая компонента вектора $A_{\tau_k^*} v_{k-1} = v_k$ совпадает либо с компонентой вектора $v_{k-1}$, либо с компонентой вектора $Av_{k-1}$ (речь идет о компонентах с тем же номером), поэтому $Av_{k-1} \preceq v_k \preceq v_{k-1}$. Далее из $v_k \preceq v_{k-1}$ следует соотношение $Av_k \preceq Av_{k-1}$. Значит, $Av_k \preceq v_k \preceq v_{k-1}$ при $Av_{k-1} \preceq v_{k-1}$ и мы заключаем по индукции, что $Av_k \preceq v_k$ при всех $k$ и последовательность $v_k$ монотонна: $0 \preceq \ldots \preceq v_k \preceq \ldots \preceq v_1 \preceq v_0$.

Обозначим $\mathcal{A} = \mathcal{A}(T)$, $\mathcal{A}_* = \mathcal{A}(T_*)$. Пусть $k = nK_*$ при натуральном $n$, поэтому $\tau_k^* = \tau_{K_*}^*$, $\tau_{k-1}^* = \tau_{K_*-1}^*$ и соотношения $v_k \preceq v_{k-1} = A_{\tau_{k-1}^*} v_{k-2}$ можно переписать в эквивалентном виде $v_k \preceq A_{\tau_{K_*-1}^*} v_{k-2}$. Так как матрица $A_{\tau_k^*}$ неотрицательна (т.е. все ее элементы неотрицательны), то из $v_{k-1} \preceq v_{k-2}$

вытекает соотношение $A_{\tau_k^*}v_{k-1} \preceq A_{\tau_k^*}v_{k-2}$ или, что то же, $v_k \preceq A_{\tau_{K_*}^*}v_{k-2}$. Но в силу равенства $\tau_K = \tau_{K_*-1}^* \cup \tau_{K_*}^*$ каждая компонента вектора $A_{\tau_K}u$ при любом $u \in \mathbb{R}^N$ совпадает с имеющей тот же номер компонентой хотя бы одного из векторов $A_{\tau_{K_*-1}^*}u$ и $A_{\tau_{K_*}^*}u$, поэтому из полученных соотношений $v_k \preceq A_{\tau_{K_*-1}^*}v_{k-2}$ и $v_k \preceq A_{\tau_{K_*}^*}v_{k-2}$ следует, что $v_k \preceq A_{\tau_K}v_{k-2}$. Здесь

$$v_k = (A_{\tau_{K_*}^*}A_{\tau_{K_*-1}^*}\dots A_{\tau_1^*})^n\, v_0 = \mathcal{A}_*^n v_0,$$

$$A_{\tau_K}v_{k-2} = A_{\tau_K}A_{\tau_{K_*-2}^*}\dots A_{\tau_1^*}\,\mathcal{A}_*^{n-1}v_0 = A_{\tau_K}A_{\tau_{K-1}}\dots A_{\tau_1}\,\mathcal{A}_*^{n-1}v_0 = \mathcal{A}\mathcal{A}_*^{n-1}v_0,$$

т.е. $\mathcal{A}_*^n v_0 \preceq \mathcal{A}\mathcal{A}_*^{n-1}v_0$. Применяя к этому соотношению неотрицательную матрицу $\mathcal{A}^{m-1}$, получим $\mathcal{A}^{m-1}\mathcal{A}_*^n v_0 \preceq \mathcal{A}^m\mathcal{A}_*^{n-1}v_0$ при всех натуральных $n, m$ и далее $\mathcal{A}_*^n v_0 \preceq \mathcal{A}\mathcal{A}_*^{n-1}v_0 \preceq \mathcal{A}^2\mathcal{A}_*^{n-2}v_0 \preceq \ldots \preceq \mathcal{A}^n v_0$.

Зададимся достаточно большим $\xi > 0$, при котором конусной отрезок $Q = \{u \in \mathbb{R}^N : -\xi v_0 \preceq u \preceq \xi v_0\}$ содержит единичный шар пространства $\mathbb{R}^N$. Если $u \in Q$, то $-\xi\mathcal{A}_*^n v_0 \preceq \mathcal{A}_*^n u \preceq \xi\mathcal{A}_*^n v_0$ при каждом $n$. Из эквивалентных соотношений $0 \preceq \mathcal{A}_*^n u + \xi\mathcal{A}_*^n v_0 \preceq 2\xi\mathcal{A}_*^n v_0$ и соотношений $0 \preceq \mathcal{A}_*^n v_0 \preceq \mathcal{A}^n v_0$ в силу монотонности нормы $\|\cdot\|$ вытекают оценки $\|\mathcal{A}_*^n u + \xi\mathcal{A}_*^n v_0\| \leqslant 2\xi\|\mathcal{A}_*^n v_0\|$ и $\|\mathcal{A}_*^n v_0\| \leqslant \|\mathcal{A}^n v_0\|$. Поэтому при всех $u \in Q$

$$\|\mathcal{A}_*^n u\| \leqslant \|\mathcal{A}_*^n u + \xi\mathcal{A}_*^n v_0\| + \xi\|\mathcal{A}_*^n v_0\| \leqslant 3\xi\|\mathcal{A}_*^n v_0\| \leqslant 3\xi\|\mathcal{A}^n v_0\| \leqslant 3\xi\|\mathcal{A}^n\|$$

и, следовательно, $\|\mathcal{A}_*^n\| \leqslant 3\xi\|\mathcal{A}^n\|$. По формуле Гельфанда отсюда вытекает оценка $\rho(\mathcal{A}_*) \leqslant \rho(\mathcal{A})$. Этим завершается доказательство при дополнительном предположении о положительности всех элементов матрицы $A$.

Если неотрицательная матрица $A$ содержит нулевые элементы, то рассмотрим при каждом $\varepsilon > 0$ матрицу $A^\varepsilon$, у которой все элементы положительны и $\|A - A^\varepsilon\| < \varepsilon$. Определим по $A^\varepsilon$ последовательности матриц $A_{\tau_k}^\varepsilon$, $A_{\tau_k^*}^\varepsilon$ и матрицы $\mathcal{A}^\varepsilon = A_{\tau_K}^\varepsilon \dots A_{\tau_1}^\varepsilon$ и $\mathcal{A}_*^\varepsilon = A_{\tau_{K_*}^*}^\varepsilon \dots A_{\tau_1^*}^\varepsilon$. Переходом к пределу при $\varepsilon \to 0$ в оценке $\rho(\mathcal{A}_*^\varepsilon) \leqslant \rho(\mathcal{A}^\varepsilon)$ получим $\rho(\mathcal{A}_*) \leqslant \rho(\mathcal{A})$.

Теорема 1 полностью доказана.

## Список литературы


1. *Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я.* Приближенное решение операторных уравнений. М.: Физматгиз, 1969.

2. *Красносельский А.М., Красносельский М.А., Кузнецов Н.А.* Нелинейные системы с неполными коррекциями и их устойчивость // Докл. АН СССР. 1991. Т. 318. № 2. С. 291-294.

3. *Асарин Е.А., Козякин В.С., Красносельский М.А., Кузнецов Н.А.* Анализ устойчивости рассинхронизованных дискретных систем. М.: Наука, 1992.

4. *Красносельский М.А., Кузнецов Н.А., Мэрц Р., Рачинский Д.И.* Итерационные процедуры с неполными коррекциями и решение нелинейных уравнений // АиТ. 1997. № 8. С. 46-56.

5. *Bousch T., Mairesse J.* Asymptotic height optimization for topical IFS, Tetris heaps, and the finiteness conjecture // J. Amer. Math. Soc. 2002. V. 15. P. 77-111.

6. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1966.

7. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1976.

8. *Красносельский М.А., Лифшиц Е.А., Соболев А.В.* Позитивные линейные системы. М.: Наука, 1985.

**Отдать переводчику!**

**Ссылки на переводы русских источников на английский язык:**


1. Krasnosel'skii M.A., Vainikko G.M., Zabreiko P.P., Rutitcki Ja.B., Stecenko V.Ja. Approximated Solutions of Operator Equations. Walters – Noordhoff, Groningen, 1972, 1-484.

2. Krasnosel'skii A.M., Krasnosel'skii M.A., Kuznetsov N.A. Nonlinear systems with incomplete corrections and their stability. Sov. Phys. Dokl., 1992, **36**, 5, 356-357.

4. Krasnosel'skii M.A., Kuznetsov N.A., Rachinskii D.I., März R. Iteration methods with incomplete corrections and solution of nonlinear equations. Automation and Remote Control, 1997, **58**, 8, part 1, 46-56.

6. Gantmacher F.R. The Theory of Matrices. Vol. 1,2, Chelsea Publishing Co., New York, 1959.

7. Bellman R. Introduction to Matrix Analysis. McGraw – Hill, 1960.

8. Krasnosel'skij M.A., Lifshits E.A., Sobolev A.V. Positive Linear Systems: The Method of Positive Operators. Sigma Series in Applied Mathematics, **5**, Hilderman Verlag, Berlin, 1990, 1-354.

А.М. Красносельский, А.В. Покровский, Д.И. Рачинский

# О гарантированных оценках скорости сходимости итерационных процедур

## Р Е Ф Е Р А Т

Для ускорения сходимости итерационных процедур используются разнообразные методы распараллеливания и рассинхронизации вычислений. При этом возникает естественный вопрос об оптимальных гарантированных оценках скорости сходимости. Предлагается теорема о сравнении гарантированных скоростей сходимости некоторых процедур в условиях, когда основные вычислительные затраты сконцентрированы на вычислении компонент нелинейностей. При доказательстве теоремы используются новые оценки спектральных радиусов произведений последовательностей матриц асинхронного пересчета компонент.

*Контактные телефоны:*

Красносельский Александр Маркович
Домашний: **936-32-30**, служебный: **299-83-54**
E-mail: `Sashaamk@iitp.ru`

Рачинский Дмитрий Игоревич
Домашний: **122-62-50**, служебный: **299-83-54**
E-mail: `rach@iitp.ru`

Уважаемая редакция!

Направляем Вам переработанный вариант статьи

А.М. Красносельского, А.В. Покровского, Д.И. Рачинского

**О сравнении гарантированных оценок скорости сходимости одного класса итерационных процедур.**

В этот вариант внесены все рекомендованные рецензентом изменения. Мы благодарим рецензента за сделанные замечания, позволившие улучшить изложение материала.

Авторы