УДК 517.2 *МАТЕМАТИКА*

О непрерывных ветвях циклов в системах с нелинеаризуемыми нелинейностями

А.М. Красносельский, Д.И. Рачинский

1. Введение

Предлагаются условия существования непрерывных ветвей циклов для дифференциальных уравнений с одним скалярным параметром, принимающим значения из некоторого ограниченного промежутка. Все уравнения состоят из непрерывной нелинейности и главной линейной части, именно ею и определяются условия существования.

Предлагаются три типа теорем о непрерывных ветвях.

Основная теорема содержит условия, при выполнении которых обыкновенное автономное дифференциальное уравнение с параметром имеет непрерывную ветвь циклов, начинающуюся в нуле и уходящую на бесконечность. В основной теореме участвует условие о том, что некоторое число q достаточно мало. Для систем управления[1] предлагается метод оценки q. Приведены примеры (для уравнений третьего порядка), в которых все досчитано "до числа", при вычислениях использовался пакет `Maple 7`.

Теоремы второй группы близки к утверждениям о бифуркациях Андронова–Хопфа (см., например, [1] и имеющуюся там библиографию). Однако в известных теоремах о рождении цикла из положения равновесия предполагается по крайней мере линеаризуемость нелинейности в самом положении равновесия. Если такая линеаризуемость имеется, то по поведению линейной части (при изменении параметра) можно сделать выводы о рождении циклов в окрестности положения равновесия, а по дополнительной информации о малых нелинейных членах — выводы о устойчивости рождающихся циклов и о типе бифуркации. В работе [2] впервые сформулированы теоремы о рождении циклов в окрестности положения равновесия в минимальных предположениях: непрерывность и дифференцируемость в одной точке положения равновесия. Для их доказательства предложен специальный метод *функционализации параметра.* Аналогичные теоремы справедливы для бифуркаций на бесконечности ([3]). В предлагаемых здесь теоремах такая

[1]Рассмотренные системы управления включают как частный случай обыкновенные дифференциальные уравнения высших порядков.

дифференцируемость не предполагается. Основные результаты работ [2, 3] являются очевидными следствиями из предлагаемых теорем. Естественно, без дополнительных предположений никаких выводов о устойчивости рождающихся циклов или о типе бифуркации сделать нельзя.

Третья группа результатов может быть интерпретирована, как условия существования ветвей циклов в ситуациях, когда нелинейность вообще неизвестна в окрестности положения равновесия (также неизвестного) и лишь может быть вычислена с какой-то точностью. Здесь при выполнении некоторых естественных условий ветвь циклов существует в некотором "небольшом" кольце вокруг точно неизвестного положения равновесия. Проследить существование сколь угодно близких к положению равновесия циклов невозможно — предполагается, что мы ничего точно не знаем о нелинейности в совсем малой окрестности положения равновесия.

Существование непрерывных ветвей решений операторных уравнений (в основном для случая нечетнократного вырождения главной линейной части) было впервые исследовано топологическими методами в 50х – 60х годах М.А. Красносельским (см. [4], глава 4, для ветвей положительных решений см. [5], глава 5). Далее, результаты о непрерывных ветвях (обычно локальных) доказывались многими авторами аналитическими и геометрическими методами. Задача о непрерывных ветвях циклов непосредственно к операторным уравнениям, исследуемым классическими методами, видимо, не сводится.

Основные теоремы формулируются для обыкновенных дифференциальных уравнений, в конце работы один результат предложен для уравнения в частных производных. Подчеркнем еще раз минимальность предположений о нелинейности (непрерывность и секторная оценка) и независимость величины q_0 от выбора и свойств конкретной нелинейности.

В работе используются различные определения непрерывных ветвей циклов. Основное и простейшее из них — в фазовом пространстве — приведено в следующем разделе перед формулировкой теоремы 1. Оно имеет естественный геометрический смысл, однако применимо лишь для обыкновенных дифференциальных уравнений без запаздывания. Для уравнений в частных производных и для уравнений с запаздыванием надо либо рассматривать бесконечномерные фазовые пространства, либо рассматривать непрерывные ветви циклов в функциональных пространствах.

При рассуждениях в фазовом пространстве для уравнений с запаздыванием, зависящим от параметра, сразу возникает существенная сложность — при разных значениях параметра у такого уравнения различные фазовые пространства. При построении непрерывных ветвей в функциональных пространствах возникают другие (обычные для задач о циклах) трудности: решения для разных значений параметра имеют разные периоды, и надо позаботиться об выборе общего пространства, кроме того, неединственность периодических решений (они определяются с точностью до сдвига) в функциональных пространствах вызывает усложнение определений. Приходится выбирать из всего многообразия периодических решений подпространство коразмерности 1 и в нем искать непрерывные ветви решений.

Конечно, все приведенные определения имеют общий смысл; для одних и тех же задач могут быть использованы различные определения.

Подчеркнем в завершение, что приведенные критерии существования непрерывных ветвей циклов не используют частной информации о нелинейности: нужна только непрерывность и секторная оценка, причем ширина оценки от самой нелинейности никак не зависит.

2. Основные результаты о глобальных ветвях циклов

2.1. Система уравнений. Рассмотрим уравнение

$$z' + A(\lambda)z = f(z,\lambda), \qquad x \in \mathbb{R}^\ell, \tag{1}$$

параметр λ изменяется на промежутке $\Lambda = [a,b]$. И нелинейность, и матрица $A(\lambda)$ предполагается непрерывными по всем переменным, вообще, непрерывность всех функций подразумевается; гладкость не предполагается.

Будем говорить, что множество циклов некоторого уравнения при $\lambda \in \Lambda$ образуют *полную непрерывную ветвь*, если на границе любого ограниченного открытого множества в фазовом пространстве $\mathbb{R}^\ell$, содержащего начало координат, находится по крайней мере одна точка, лежащая на цикле уравнения при каком-то $\lambda \in \Lambda$.

Предположим, что на промежутке $\lambda \in \Lambda = [a,b]$ матрица $A(\lambda)$ имеет пару простых собственных значений $\sigma(\lambda) \pm w(\lambda)i$, причем $\sigma(a)\sigma(b) < 0$. При некотором $\lambda_0 \in (a,b)$ (возможно не единственном) верно равенство $\sigma(\lambda_0) = 0$. Пусть $0 < w_1 = \inf w(\lambda) < w_0 = w(\lambda_0) < w_2 = \sup w(\lambda)$.

В теореме 1 нелинейность $f(z,\lambda)$ удовлетворяет секторной оценке [2]

$$|f(z,\lambda)| \leqslant q|z|, \qquad z \in \mathbb{R}^\ell,\ \lambda \in \Lambda. \tag{2}$$

Теорема 1. *Пусть при $\lambda \in \Lambda$ матрица $A(\lambda)$ не имеет собственных значений вида nwi на мнимой оси при $w \in [w_1, w_2]$ и $n = 0, 2, 3\ldots$ Тогда*

[2] Через $|\cdot|$ обозначаются и модули вещественных и комплексных чисел, и нормы в $\mathbb{R}^\ell$; через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначается скалярное произведение в $\mathbb{R}^\ell$, через $(\cdot,\cdot)$ — индуцированное произведение в L^2.

существует такое $q_0 > 0$, что при $q < q_0$ для любой нелинейности, удовлетворяющей оценке (2)*, при $\lambda \in \Lambda$ существовует полная непрерывная ветвь из циклов уравнения* (1)*, имеющих периоды $T \in [2\pi/w_2, 2\pi/w_1]$.*

В условиях теоремы 1 на границе любого ограниченного открытого множества $\boldsymbol{G}$ в $\mathbb{R}^\ell$, содержащего начало координат, находится по крайней мере одна точка, лежащая на цикле уравнения (1), который целиком лежит в замыкании множества $\overline{\boldsymbol{G}}$. Поэтому для каждого $\rho > 0$ у уравнения найдется цикл нормы ρ в пространстве C.

В условиях теоремы 1 циклы уравнения (1) образуют непрерывные ветви в пространствах функций.

Пусть $A^*(\lambda)$ — сопряженная $A(\lambda)$ матрица, спектр $A^*(\lambda)$ совпадает со спектром матрицы $A(\lambda)$. Рассмотрим векторы $e_*(\lambda)$, $g_*(\lambda)$, для которых

$$A^*(\lambda)e_*(\lambda) = \sigma(\lambda)e_*(\lambda) + w(\lambda)g_*(\lambda),\ A^*(\lambda)g_*(\lambda) = -w(\lambda)e_*(\lambda) + \sigma(\lambda)g_*(\lambda).$$

Определим функции $v_\lambda(t) = e_*(\lambda)\cos t - g_*(\lambda)\sin t$ и рассмотрим в пространстве $C_0 = C_0([0, 2\pi], \mathbb{R}^\ell)$ непрерывных 2π-периодических функций с равномерной нормой подпространство V_λ коразмерности 1 функций x, удовлетворяющих условию $(v_\lambda, x) = 0$.

В условиях теоремы 1 на границе любого ограниченного открытого множества в C_0, содержащего начало координат, находится по крайней мере одна точка $x(t) \in V_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$ такая, что при некотором $w \in [w_1, w_2]$ функция $x(wt)$ является периодическим решением уравнения (1).

Вместо гиперплоскостей V_λ можно выбирать другие: условие $(v_\lambda, x) = 0$ можно заменить условием $\big(v_\lambda(t+\varphi), x(t)\big) = 0$ при произвольном фиксированном φ. Такое "обилие" циклов на границе каждого ограниченного открытого множества в C_0, содержащего начало координат, связано с тем, что каждое периодическое решение $x(wt)$ включено в континуум $x(wt + \varphi)$.

Аналогичный факт справедлив для уравнений с запаздыванием

$$z' + A(\lambda)z = f\big(z(t), z(t - \theta(\lambda)), \lambda\big), \qquad x \in \mathbb{R}^\ell. \tag{3}$$

В условиях теоремы 1 существует такое $q_0 > 0$, что при $q < q_0$ из оценки $|f(z_1, z_2, \lambda)| \leqslant q(|z_1| + |z_2|)$ вытекает существование по крайней мере одной точки, лежащей на цикле уравнения (3) при каком-то $\lambda \in \Lambda$ на границе любого ограниченного открытого множества в пространстве $\mathbb{R}^\ell$, содержащего начало координат.

Подчеркнем, что пространство $\mathbb{R}^\ell$ не является фазовым пространством для уравнения (3). При каждом λ естественным фазовым пространством является пространство непрерывных функций со значениями в $\mathbb{R}^\ell$, определенных на промежутке $[0,\theta(\lambda)]$.

Если запаздывание θ не зависит от параметра, то можно доказать существование непрерывных ветвей в фазовом пространстве $C([0,\theta],\mathbb{R}^\ell)$.

2.2. Система управления. Даже оценить (не только найти оптимальную!) величину q_0 в общем случае трудно. Однако бывают уравнения, для которых удается получить вполне убедительную оценку величины q_0. Приведем одно утверждение для класса систем, встречающихся в теории управления.

Рассмотрим уравнение

$$L\Big(\frac{d}{dt},\lambda\Big)x = M\Big(\frac{d}{dt},\lambda\Big)f(x,x',\dots,x^{(k)};\lambda) \tag{4}$$

динамики системы, состоящей из линейного интегрирующего звена с рациональной передаточной функцией $W(p,\lambda) = M(p,\lambda)/L(p,\lambda)$ и нелинейной обратной связи $f(x,x',\dots,x^{(k)},\lambda)$, включающей в себя производные. Степени взаимно простых вещественных многочленов

$$L(p,\lambda) = p^\ell + a_1(\lambda)p^{\ell-1} + \dots + a_\ell(\lambda), \qquad M(p,\lambda) = b_0(\lambda)p^m + \dots + b_m(\lambda)$$

удовлетворяют условию $\ell > m+k$. Решения уравнения (4) понимаются в обычном в теории управлении смысле: как решения эквивалентной системы первого порядка ([6]) в соответствующем пространстве состояний. Можно предполагать, что $M \equiv 1$ и рассматривать обыкновенные дифференциальные уравнения порядка ℓ.

Пусть при $\lambda=\lambda_0$ многочлен $L(w,\lambda_0)$ имеет пару простых корней $w = \pm w_0 i$.

Зададимся некоторыми числами $\mu_j \geqslant 0$, $j=\overline{1,k}$. Рассмотрим на плоскости $\Pi = (w,\lambda)$ линии уровня q функции

$$\Psi(w,\lambda) = \big|N(wi,\lambda)\big|\Big(1+\sum\mu_j\,w^{2j}\Big)^{-1/2}, \qquad N(p,\lambda) = L(p,\lambda)/M(p,\lambda).$$

Так как $\Psi(w_0,\lambda_0)=0$, то при малых $q>0$ эти линии уровня являются (вообще говоря!) замкнутыми контурами $\Gamma(q)$ вокруг точки (w_0,λ_0), возможно, существуют еще другие ветви линий уровня. При увеличении q эти ветви могут сливаться с $\Gamma(q)$, при этом контуры $\Gamma(q)$ могут стать незамкнутыми.

Пусть замкнутый контур $\Gamma(q_0)$ ограничивает конечную область $\mathcal{D}(q_0) \subset \Pi$. Пусть при $n = 0,2,3,\dots$ верны условия

$$L(nwi,\lambda) \neq 0,\ (w,\lambda)\in\mathcal{D}(q_0), \qquad \Psi(nw,\lambda) \geqslant q_0,\ (w,\lambda)\in\Gamma(q_0). \tag{5}$$

Теорема 2. Пусть вращение $\gamma(\Phi, \Gamma(q_0))$ плоского векторного поля ([7]) $\Phi = \big(\Re e\, N(wi,\lambda), \Im m\, N(wi,\lambda)\big)$ на границе $\Gamma(q_0)$ отлично от нуля. Пусть

$$(6)\qquad \big[f(x, y_1, \dots, y_k; \lambda)\big]^2 \leqslant q^2\big(x^2 + \sum \mu_j\, y_j^2\big), \qquad \mu_j \geqslant 0,$$

причем $q < q_0$. Тогда множество циклов уравнения (4) образует полную непрерывную ветвь в пространстве $\mathbb{R}^\ell$.

Теорема 2 дает вполне конструктивный подход к вычислению величины q_0. Примеры из следующего раздела для уравнений третьего порядка считались именно с помощью этой теоремы.

Основное условие теоремы $\gamma(\Phi, \Gamma(q_0)) \neq 0$ выполнено, например если ноль (w_0, λ_0) комплекснозначной функции $L(wi, \lambda)$ единственный и его индекс Пуанкаре ([7]) отличен от нуля. Индекс Пуанкаре отличен от нуля, например, если коэффициенты многочлена L непрерывно дифференцируемы по λ в точке λ_0 и соответствующая якобиева матрица не вырождена.

Если индекс Пуанкаре нуля (w_0, λ_0) отличен от нуля, то при малых q_0 контур удовлетворяет условиям теоремы. При увеличении числа q_0 контур расширяется и может перестать им удовлетворять по различным причинам: он может слиться с другим, “плохой” (например, не замкнутой) ветвью линии уровня; слиться с аналогичным контуром вокруг другого нуля функции $L(wi, \lambda)$, в результате чего вращение может стать равным нулю; натолкнуться на линию уровня $\Psi(nw, \lambda) = q_0$ при каком-то $n = 0, 2, 3\dots$ Это происходит, как правило, либо при $n = 0$, либо при $n = 2$.

В условиях теоремы 2 на пересечении границы любого ограниченного открытого множества в пространстве непрерывных 2π-периодических функций, содержащего начало координат, находится по крайней мере одна точка $x(t)$, ряд Фурье которой не содержит слагаемого с $\cos t$, такая, что при некотором $w > 0$ функция $x(wt)$ является периодическим решением уравнения (1) при каком-то $\lambda \in \Lambda$ (при этом $(w, \lambda) \in \mathcal{D}(q_0)$).

Если нелинейность в уравнении (4) зависит только от переменной x и не зависит от производных, то оценка q_0 может быть улучшена. В теории абсолютной устойчивости похожие идеи использовались В.М. По́повым, непосредственно в частотных критериях отсутствия циклов Е. Гарбером ([6]).

Положим $\Psi(w, \lambda) = \big|L(wi, \lambda)/M(wi, \lambda)\big|$. Пусть замкнутый контур $\Gamma(q_0)$ ограничивает конечную область $\mathcal{D}(q_0) \subset \Pi$. Пусть при $n = 0, 2, 3, \dots$ верны условия (5). Пусть каждая точка (w, λ) границы $\Gamma(q_0)$ либо принадлежит линии уровня $\Psi(w, \lambda) = q_0$, либо числа $\Im m\, L(nwi, \lambda)/M(nwi, \lambda)$ при всех натуральных n имеют одинаковый знак.

Теорема 3. Пусть вращение $\gamma(\Phi,\Gamma(q_0))$ поля Φ на границе $\Gamma(q_0)$ отлично от нуля. Пусть $\bigl|f(x,\lambda)\bigr| \leqslant q|x|$, причем $q < q_0$. Тогда множество циклов уравнения

$$L\Bigl(\frac{d}{dt},\lambda\Bigr)x = M\Bigl(\frac{d}{dt},\lambda\Bigr)f(x,\lambda)$$

образует полную непрерывную ветвь в пространстве $\mathbb{R}^\ell$.

3. Примеры для уравнений третьего порядка

Во всех примерах этого раздела мы полагаем, что $\lambda_0 = 0$, $w_0 = 1$.

Самое простое уравнение $x'' + \lambda x' + x = f(x)$ имеет при $|f(x)| \leqslant q|x|$ $(0 < q < 1)$ полную непрерывную ветвь циклов при $\lambda = 0$, при $\lambda \neq 0$ циклов нет. Из теоремы 2 следует лишь $q_0 = 0,6$ (вместо оптимального $q_0 = 1$).

Рассмотрим уравнение

$$x''' + (2-\lambda)x'' + (1-2\lambda+2\lambda^2)x' + (2+\lambda/2)x = f(x,x',\lambda). \tag{7}$$

Утверждение 1. Пусть верна оценка $|f(x,y_1,\lambda)| \leqslant 1,475|x|$. Тогда при $-0,426 < \lambda < 1,304$ циклы уравнения (7) с периодами $T \in [1,355\pi; 3,271\pi]$ образуют полную непрерывную ветвь в пространстве (x,x',x'').

Для этого дифференциального многочлена при $q_0 \approx 1,475$ контур $\Gamma(q_0)$ наталкивается на линию уровня $\Psi(2w,\lambda) = q_0$. Теорема 3 (если нелинейность зависит только от x) дает лишь уточнение диапазона изменения параметра $(-0,426 < \lambda < 0,347)$ и не дает улучшения оценки величины q_0.

Рассмотрим теперь уравнение

$$x''' + (2+\lambda)x'' + (1-2\lambda+2\lambda^2)x' + (2+\lambda/2)x = f(x,x',\lambda). \tag{8}$$

Утверждение 2. Пусть верна оценка $|f(x,y_1,\lambda)| \leqslant 0,348|x|$. Тогда при $-0,181 < \lambda < 0,438$ циклы уравнения (7) с периодами $T \in [1,814\pi; 2,230\pi]$ образуют полную непрерывную ветвь в пространстве (x,x',x'').

В этом случае при $q_0 \approx 0,348$ контур $\Gamma(q_0)$ наталкивается на такой же замкнутый контур вокруг нуля $\xi_1 \approx (0,918; 0,914)$ функции $L(wi,\lambda)$. Оба контура сначала сливаются в “восьмерку”, а потом вращение $\gamma(\Phi,\Gamma(q_0))$ становится равным нулю (индексы Пуанкаре двух нулей равны 1 и -1).

Если в правой части (7) нелинейность зависит только от переменной x, то к нему применима теорема 3.

У т в е р ж д е н и е 3. *Пусть верна оценка* $|f(x,\lambda)| \leqslant 0,999|x|$. *Тогда при* $-0,413 < \lambda < 0,500$ *циклы уравнения* (8) *с периодами* $T \in [1,544\pi; 2,829\pi]$ *образуют полную непрерывную ветвь в пространстве* (x, x', x'').

Контур, по которому надо считать вращение состоит из двух частей: часть линии уровня $\Psi(w,\lambda) = 0,999$, которая начинается и кончается в области $\Im m\, L(wi,\lambda) < 0$, и отрезок прямой, который соединяет точки $(1,073; 1,071)$ и $(0,707; 0,500)$. При этом нуль ξ_1 в эту область не попадает, вращение векторного поля совпадает с ненулевым индексом Пуанкаре нуля $(1;0)$.

Уравнение (8) в условиях утверждения 3 имеет по крайней мере 2 глобальных ветви. Для поиска второй ветви достаточно рассмотреть оставшуюся часть области, ограниченной кривой $\Psi(w,\lambda) = 0,999$.

4. Локальные ветви

Вернемся к изучению системы (1). Пусть снова на промежутке $\lambda \in \Lambda = [a,b]$ у матрицы $A(\lambda)$ есть пара простых собственных значений $\sigma(\lambda) \pm w(\lambda)i$, причем $\sigma(\lambda_0) = 0$, $\lambda_0 \in (a,b)$, $\sigma(a)\sigma(b) < 0$, $w(\lambda) > 0$ и $w(\lambda) \in [w_1, w_2]$, $w_1 < w_0 = w(\lambda_0) < w_2$.

Если вместо глобальной оценки (2) при некотором $\zeta_0 > 0$ справедлива аналогичная локальная оценка

$$|f(z,\lambda)| \leqslant q|z|, \qquad z \in \mathbb{R}^{\ell},\ |z| \leqslant \zeta_0,\ \lambda \in \Lambda, \tag{9}$$

то вместо полной непрерывной ветви существует локальная непрерывная ветвь из циклов в окрестности положения равновесия $x = 0$, то есть на границе любого ограниченного открытого связного множества достаточно малого диаметра, содержащего начало координат, находится по крайней мере одна точка, лежащая на цикле уравнения при каком-то $\lambda \in \Lambda$. “Достаточно малый диаметр” зависит от чисел ζ_0 и q и матрицы $A(\lambda)$.

Т е о р е м а 4. *Существует такое* $q_0 > 0$, *что при* $q < q_0$ *из оценки* (9) *вытекает существование локальной непрерывной ветви из циклов уравнения* (1) *при* $\lambda \in \Lambda$.

Если вместо (2) при некотором $c >> 1$ справедлива оценка

$$|f(z,\lambda)| \leqslant q|z| + c, \qquad z \in \mathbb{R}^{\ell}, \lambda \in \Lambda, \tag{10}$$

то существует непрерывная ветвь из циклов на бесконечности, то есть на границе любого ограниченного открытого связного множества в $\mathbb{R}^{\ell}$, содержащего шар $\{\|x\| \leqslant \rho\}$ достаточно большого радиуса ρ, находится по крайней мере одна точка, лежащая на цикле уравнения при каком-то $\lambda \in \Lambda$.

Теорема 5. Существует такое $q_0 > 0$, что при $q < q_0$ из оценки (10) *вытекает существование непрерывной ветви на бесконечности из циклов уравнения* (1) *при $\lambda \in \Lambda$.*

Теоремы этого раздела по духу близки к теоремам о бифуркациях Андронова–Хопфа в нуле и на бесконечности. Основное их отличие заключается в возможной нелинеаризуемости уравнения в нуле или на бесконечности. Обе теоремы также могут быть сформулированы для уравнений с запаздыванием.

5. Системы с нелинейностями, известными приближенно

В этом разделе приводится утверждение о существовании ветвей из циклов для уравнения высшего порядка в кольцевой окрестности нуля[3]. Аналогичное утверждение можно сформулировать и для системы (1), во-первых, соответствующий результат получится не столь конструктивный, во-вторых, потребуются еще более громоздкие вспомогательные построения и обозначения.

Рассмотрим уравнение

$$L\Big(\frac{d}{dt}, \lambda\Big)x = f(x, \lambda). \tag{11}$$

Пусть нелинейность удовлетворяет оценке

$$\big[f(x, \lambda)\big]^2 \leqslant q^2x^2 + \varepsilon^2, \qquad x \in \mathbb{R}, |x| \leqslant \zeta_0,\ \lambda \in \Lambda. \tag{12}$$

Здесь $\varepsilon > 0$ — очень малое число, например порядка машинной точности, ζ_0 — число, вообще говоря, порядка 1. В отличие от похожей оценки (10), которая использовалась “на бесконечности”, оценка (12) определяет существование ветвей циклов в кольцевой окрестности нуля диаметра порядка ζ_0. Несколько вычурная форма оценки (12) используется для упрощения и без того громоздких конечных формулировок. Естественно, оценки $f^2 \leqslant q^2x^2+\varepsilon^2$ и $|f| \leqslant q_1|x| + \varepsilon_1$ вытекают одна из другой.

Будем говорить, что ветвь циклов соединяет шары[4] B_{r_*} и B_{r^*} $(r_* < r^*)$, если на границе любого ограниченного открытого связного множества $\overline{B_{r_*}} \subset$

[3] Поскольку уравнение имеет порядок больший 2, точнее говорить о шаровом слое

[4] Используется обозначение $B_r = \{x \in \mathbb{R}^\ell : \|x\| \leqslant r\}$, где $\|\cdot\|$ (без указания пространства) — обычная евклидова норма $\sqrt{\sum(\cdot)^2}$ в $\mathbb{R}^\ell$.

$\boldsymbol{G} \subset \overline{B_{r^*}}$ находится по крайней мере одна точка, лежащая на цикле уравнения (11) при каком-то $\lambda \in \Lambda$.

Предположим, что для некоторого числа q_0 можно построить контур $\Gamma(q_0)$, удовлетворяющий условиям теоремы 2. Введем обозначения

$$\beta(r,\varepsilon) = \frac{\pi}{q_0^2 - q^2}\left(r^2 q_0^2 + 2\varepsilon^2\right), \qquad r_1^2 = \frac{2\varepsilon^2}{q_0^2 - q^2},$$

$$r_* = r_1\sqrt{\ell} + q_0\sqrt{\beta(r_1,\varepsilon)} \sup_{(w,\lambda)\in\mathcal{D}(q_0)} \sqrt{\sum_{n=0,2,3\ldots} \frac{n^{2\ell}-1}{(n^2-1)|L(wni,\lambda)|^2}}$$

и

$$\nu^2(w,\lambda) = \sum_{n=0,2,3\ldots} |L(wni,\lambda)|^{-2}, \qquad (w,\lambda) \in \mathcal{D}(q_0).$$

Т е о р е м а 6. *Пусть вращение $\gamma(\Phi,\Gamma(q_0))$ плоского векторного поля $\Phi = \big(\Re\mathrm{e}\, L(wi,\lambda), \Im\mathrm{m}\, L(wi,\lambda)\big)$ на границе $\Gamma(q_0)$ отлично от нуля. Пусть $r_2 > 0$ удовлетворяет равенству*

$$\zeta_0 = r_2 + q_0\sqrt{\beta(r_2,\varepsilon)} \sup_{(w,\lambda)\in\mathcal{D}(q_0)} \nu(w,\lambda).$$

Пусть выполнена оценка (12), в которой $q < q_0$. Пусть $r_* < r^* = \sqrt{\ell/4\pi}\; r_2$. Тогда существует ветвь циклов (11), соединяющая шары B_{r_*} и B_{r^*}.

6. Уравнение в частных производных

Рассмотрим краевую задачу для уравнения в частных производных:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}u = u_{tt} + \lambda u_t + u_{xx} + 2u &= f(x,u,u_x,u_t;\lambda), \\ u(t,x) = u(t+T,x), \qquad u(t,0) &= u(t,\pi) = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Здесь $T > 0$ — априори неизвестный период по переменной t.

Зададимся некоторым вещественным ϕ. Обозначим через $\mathfrak{M}(\phi)$ множество функций $u(t,x):\ \{t \in [0,2\pi]\}\times\{x\in[0,\pi]\} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям

$$u'(0,x) = u'(2\pi,x),\ u(0,x) = u(2\pi,x),\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0,\ \ t\in[0,2\pi],\ x\in[0,\pi]$$

и

$$\int_0^{2\pi} dt \int_0^{\pi} u(t,x)\, \sin x\, \cos(t+\phi)\, dx = 0.$$

Т е о р е м а 7. *Пусть при некотором $q < .36777$ справедлива оценка*

$$|f(x,u,y,z;\lambda)| \leqslant q\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Тогда при любом ϕ множество таких $u(t,x) \in \mathfrak{M}(\phi)$, что функция $u(wt,x)$ является решением задачи (13) при $|\lambda| \leqslant \gamma = .6534913795$ и $w \in [\gamma/2,\gamma]$ имеет непустое пересечение с границей любого ограниченного открытого множества $\boldsymbol{G} \subset C\big([0,2\pi]\times[0,\pi],\mathbb{R}\big)$, $0 \in \boldsymbol{G}$.

Оператор $\mathfrak{L}$ может иметь и другие коэффициенты (не только при u_t), зависящие от λ; важно только, чтобы при каком-то λ (в (13) это $\lambda = 0$) оператор $\mathfrak{L}$ имел вырожденный вид $u_{tt} + u_{xx} + (1+\alpha)u$, $\alpha > 0$ (чтобы у него было нетривиальное ядро из функций, удовлетворяющих краевым условиям $u(t,x) = u(t+T,x)$, $u(t,0) = u(t,\pi) = 0$). Естественно, все константы в теореме 7 поменяются.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (гранты 00-15-96116, 00-01-00571, 01-01-00146, 01-01-06372).

Список литературы

1. *Марсден Дж., Мак-Кракен М.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980.

2. *Козякин В.С., Красносельский М.А.* Метод функционализации параметра в задаче о точках бифуркации. // ДАН СССР. 1980. Т. 254. №5. С. 1061-1064.

3. *Красносельский А.М., Красносельский М.А.* Циклы больших амплитуд в автономных системах с гистерезисом. // ДАН СССР. 1985. Т. 283. №1. С. 23-26.

4. *Красносельский М.А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М.: Гостехиздат, 1956.

5. *Красносельский М.А.* Положительные решения операторных уравнений. М.: Гостехиздат, 1962.

6. Справочник по теории автоматического управления. Под ред. А.Красовского, М.: Наука, 1987.

7. *Красносельский М.А., Перов А.И., Поволоцкий А.И., Забрейко П.П.* Векторные поля на плоскости. М.: Физматгиз, 1963.