А.М. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ, д-р физ.-мат. наук,

Д.И. РАЧИНСКИЙ, канд. физ.-мат. наук

(Институт проблем передачи информации РАН, Москва)

ОБ ОДНОМ НЕЛОКАЛЬНОМ ПРИЗНАКЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЦИКЛОВ СИСТЕМ С ГИСТЕРЕЗИСОМ[1]

Предлагаются нелокальные признаки существования циклов для автономных уравнений высшего порядка с гистерезисными нелинейностями. Основные теоремы гарантируют существование хотя бы одного цикла и содержат простые дополнительные условия общего положения, при которых у уравнения есть однопараметрический континуум различных циклов.

1. Введение

1.1. Постановка задачи. Рассматриваются системы, динамика которых описывается автономными обыкновенными дифференциальными уравнениями высшего порядка с гистерезисными нелинейностями:

$$L\Big(\frac{d}{dt}\Big)x = f\big(x, \xi(t)\big). \tag{1}$$

Здесь и всюду ниже $L(p) = p^\ell + a_1 p^{\ell-1} + \ldots + a_\ell$ — вещественный многочлен с постоянными коэффициентами, $f(\ldots)$ — непрерывная функция, ξ — выход так называемой гистерезисной *нелинейности Прейсаха* (определение и свойства см. в разделе 2). Нелинейность Прейсаха (или *модель Прейсаха*) описывается континуальным набором неидеальных реле; она играет важную роль в теории магнетизма [1, 2], при описании макроэкономических зависимостей [3, 4] и др. Общая теория гистерезиса была создана в 70х годах и подытожена в [5], ссылки на эту основополагающую в математической теории гистерезиса книгу могут сопроводить значительную часть статьи, ниже мы ссылаемся на нее лишь при указании конкретных фактов и результатов.

[1]Работа частично написана во время визита А.М. Красносельского в University College, Корк, Ирландия. Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, гранты 02-01-06577, 01-01-00146, 00-01-00571, 00-15-96116.

В настоящей работе изучаются периодические решения уравнения (1) — пары периодических функций $\{x(t), \xi(t)\}$ $(t \geqslant t_0)$, удовлетворяющие (1) такие, что при некотором начальном состоянии гистерезисной нелинейности $\xi(t)$, $t \geqslant t_0$ является выходом нелинейности Прейсаха при входе $x(t)$.

Общепринятым фазовым пространством для уравнения с гистерезисом является произведение $\mathbb{R}^\ell \times \Omega$ пространства $\mathbb{R}^\ell$ точек $(x, x', \dots, x^{(\ell-1)})$ и гистерезисной нелинейности (см., например, [9]). Для задач о периодических решениях уравнений с нелинейностью Прейсаха удобно использовать произведение $\mathbb{R}^{\ell+1}$ пространства $\mathbb{R}^\ell$ на прямую $\mathbb{R}$ значений выхода ξ нелинейности. Циклами системы (1) называются и ее периодические решения, и геометрические объекты в пространствах $\mathbb{R}^\ell$ и $\mathbb{R}^{\ell+1}$. Гистерезисная нелинейность Прейсаха *статична*, каждое периодическое решение $\{x(t), \xi(t)\}$ порождает континуум сдвигов $\{x(t+s), \xi(t+s)\}$; все эти сдвиги определяют один и тот же цикл.

Предлагаются нелокальные признаки существования циклов автономных уравнений с гистерезисом. Основные теоремы гарантируют существование хотя бы одного цикла и содержат простые дополнительные условия общего положения, при которых у уравнения есть однопараметрический континуум различных циклов. Использованы методы общего нелинейного анализа, математической теории гистерезиса и предложенный авторами подход к исследованию различных задач о периодических решениях автономных уравнений.

Работа устроена следующим образом. В разделе 2 определяется нелинейность Прейсаха и приводятся ее основные свойства. В разделе 3 формулируются основные результаты о существовании циклов и их континуумов. В разделе 4 приведен пример — для конкретного многочлена L явно вычислены все входящие в теоремы 1 и 2 постоянные. В разделе 5 предлагается описание классов начальных состояний нелинейности Прейсаха, которые определяют периодические состояния при периодическом входе. В разделе 6 сформулирован ряд полезных замечаний. Все доказательства вынесены в приложение.

1.2. Неединственность периодических режимов в системах с гистерезисом. При изучении периодических колебаний в системах с гистерезисными нелинейностями естественными являются не просто ситуации с неединственностью, но ситуации, когда множество периодических режимов континуально. Возникающие континуумы периодических решений уравнений с гистерезисом имеют естественную конечномерную структуру.

Обычно континуумы решений нелинейных уравнений возникают в двух ситуациях. Во-первых, возможны неробастные континуумы — при малейшем "шевелении" уравнения они либо совсем пропадают, либо склеиваются в единственную точку. Вторая ситуация — это когда уравнения переопределены: неизвестных больше чем уравнений. В некотором смысле, это значит, что рассматриваются уравнения с параметром.

В работе рассматривается иная ситуация: уравнения не переопределены и возникающие континуумы циклов не разрушаются малым возмущением. Причина существования таких континуумов определяется природой гистерезиса и заключается, грубо говоря, в следующем. При изучении замкнутых систем с гистерезисными нелинейностями обычно рассматривается только уравнение, описывающее динамику самой системы. Уравнения (часто довольно сложные!), описывающие внутреннее устройство гистерезисной нелинейности и зависимость её состояния от меняющегося входа по возможности не отслеживается. Естественным требованием является лишь периодичность состояния гистерезисной нелинейности и её выхода с тем же периодом, что и периодическое решение уравнений динамики замкнутой системы.

Если каждому периодическому входу на гистерезисную нелинейность соответствует единственное начальное состояние, при котором состояние гистерезисной нелинейности периодично (естественно, с тем же периодом), то проблем нет. В этом случае, как правило, если неединственность периодических решений и возникает, то это "обычная" для нелинейных уравнений неединственность: существует конечное число изолированных решений. Однако, модель Прейсаха (и многие другие виды гистерезисных нелинейностей) устроены так, что при периодических входах (любых или достаточно “узких”) они имеют континуумы начальных состояний, порождающих периодические выходы. Размерность этих континуумов начальных состояний часто бывает бесконечной, она ничего не определяет. Различные периодические выходы модели Прейсаха при одном и том же периодическом входе отличаются константой. Периодические решения уравнений динамики замкнутых систем типа (1) также могут образовывать континуумы. Размерность континуумов решений совпадает с размерностью выхода гистерезисной нелинейности, входящей в систему. В случае нелинейности Прейсаха эта размерность рана 1.

Для большинства известных гистерезисных нелинейностей (и для нелинейности Прейсаха) при каждом достаточно “узком” периодическом входе существует континуум Ω начальных состояний гистерезисной нелинейности, при которых ее выход периодичен (“узость” входа легко определяется для конкретных классов нелинейностей). Вообще говоря, чем меньше амплитуда входа тем “больше” множество Ω. Для элементарных гистерезисных нелинейностей типа преобразователей с короткой памятью начальное состояние служит параметром семейства возможных периодических выходов и размерность этого семейства равна размерности множества Ω.

2. Нелинейность Прейсаха

2.1. Неидеальные реле. Будем обозначать через

$$\eta(t) = \mathcal{R}_{\alpha\beta}[t_0, \eta_0]x(t), \qquad t \geqslant t_0, \tag{2}$$

переменное состояние неидеального реле с пороговыми числами α, β ($\alpha > \beta$) при входе $x(t)$ ($t \geqslant t_0$) и начальном состоянии η_0. Здесь вход — произвольная непрерывная скалярная функция; η_0 — одно из чисел 1 и -1. Значения $\eta(t)$ ($t \geqslant t_0$) оператора (2) определены при $\eta_0 = 1$, если $x(t_0) > \beta$, и при $\eta_0 = -1$, если $x(t_0) < \alpha$. Значение функции $\eta(t)$ при каждом $t = \tau$ — это состояние неидеального реле в момент τ; как обычно, оно определяется формулой

$$\mathcal{R}_{\alpha\beta}[t_0,\eta_0]x(\tau) = \begin{cases} \eta_0, & \text{если } \beta < x(t) < \alpha \text{ при всех } t \in [t_0,\tau]; \\ 1, & \text{если найдется такое } t_1 \in [t_0,\tau], \text{ что} \\ & x(t_1) \geqslant \alpha \text{ и } x(t) > \beta \text{ при всех } t \in [t_1,\tau]; \\ -1, & \text{если найдется такое } t_1 \in [t_0,\tau], \text{ что} \\ & x(t_1) \leqslant \beta \text{ и } x(t) < \alpha \text{ при всех } t \in [t_1,\tau]. \end{cases} \tag{3}$$

В силу этой формулы при произвольном $\tau \geqslant t_0$ из оценки $x(\tau) \geqslant \alpha$ вытекает равенство $\eta(\tau) = 1$, а из оценки $x(\tau) \leqslant \beta$ — равенство $\eta(\tau) = -1$. Скалярная функция $\eta(t)$ удовлетворяет соотношениям $\eta(t_0) = \eta_0$ и $|\eta(t)| = 1$ при всех t и имеет не более конечного числа разрывов на каждом отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$.

2.2. Системы реле. Рассматривается набор $\mathcal{B}$ неидеальных реле, параметризованных парами (α,β) из полуплоскости $\Pi = \{(\alpha,\beta) : \alpha > \beta\}$. Состояниями набора $\mathcal{B}$ называют измеримые функции $\eta(\cdot,\cdot) : \Pi \to \mathbb{R}$, при некотором $x_0 \in \mathbb{R}$ удовлетворяющие равенствам

$$\begin{gathered} \eta(\alpha,\beta) = -1, \quad \beta \geqslant x_0; \qquad \eta(\alpha,\beta) = 1, \quad \alpha \leqslant x_0; \\ |\eta(\alpha,\beta)| = 1, \quad \beta < x_0 < \alpha; \end{gathered} \tag{4}$$

если верны эти равенства, то будем писать $\eta(\alpha,\beta) \in \Omega(x_0)$. Входами набора $\mathcal{B}$ служат произвольные непрерывные скалярные функции $x(t)$ $(t \geqslant t_0)$.

Если $\eta_0(\alpha,\beta) \in \Omega\big(x(t_0)\big)$, то говорят, что вход $x(t)$ $(t \geqslant t_0)$ *допустим* при начальном состоянии $\eta_0(\alpha,\beta)$ или что начальное состояние *допустимо* при входе $x(t)$. При каждом непрерывном входе $x(t)$ $(t \geqslant t_0)$ и каждом допустимом при входе $x(t)$ начальном состоянии $\eta_0(\alpha,\beta)$ определена функция

$$\eta(t,\alpha,\beta) = \mathcal{R}_{\alpha\beta}[t_0,\eta_0(\alpha,\beta)]x(t), \qquad t \geqslant t_0,\ \alpha > \beta, \tag{5}$$

называемая переменным состоянием набора реле $\mathcal{B}$. Равенство (5) — это правило определения переменных состояний индивидуальных реле из $\mathcal{B}$ при общем входе $x(t)$. Функция (5) измерима при каждом t в полуплоскости Π, при всех t справедливо включение $\eta(t,\alpha,\beta) \in \Omega\big(x(t)\big)$.

Пусть $\mu(\alpha,\beta)$ — заданная на Π интегрируемая функция:

$$\mu_* \stackrel{\text{def}}{=} \iint\limits_{\alpha>\beta} |\mu(\alpha,\beta)|\, d\alpha\, d\beta < \infty. \tag{6}$$

Выход набора $\mathcal{B}$ при входе $x(t)$ и допустимом начальном состоянии $\eta_0(\alpha,\beta)$ определяется равенством

$$\xi(t) = \iint\limits_{\alpha>\beta} \mu(\alpha,\beta)\mathcal{R}_{\alpha\beta}[t_0,\eta_0(\alpha,\beta)]x(t)\, d\alpha\, d\beta, \qquad t \geqslant t_0. \tag{7}$$

Выход всегда непрерывен (хотя функция (5) разрывна); его значения ограничены по модулю константой (6); справедливо равенство

$$\xi(t) = \iint\limits_{\alpha>\beta} \mu(\alpha,\beta)\eta(t,\alpha,\beta)\, d\alpha\, d\beta, \qquad t \geqslant t_0. \tag{8}$$

Гистерезисную нелинейность, переменные состояния и выходы которой определяются формулами (5) и (7), называют *моделью Прейсаха.*

2.3. Свойства нелинейности Прейсаха.

Полугрупповое тождество. Справедливо тождество

$$\eta_\tau(t,\alpha,\beta) = R_{\alpha\beta}[\tau,\eta(\tau,\alpha,\beta)]x_\tau(t), \qquad t \geqslant \tau,\ \ \alpha > \beta,$$

при каждом $\tau \geqslant t_0$, где $x_\tau(t)$ и $\eta_\tau(t,\alpha,\beta)$ — это сужения входа $x(t)$ $(t \geqslant t_0)$ и переменного состояния (5) на интервал $t \geqslant \tau$.

Статичность. При любой строго возрастающей непрерывной неограниченной функции $\theta(t)$ $(t \geqslant t_0)$ переменное состояние (5) связано с переменным состоянием $\eta_*(t,\alpha,\beta) = R_{\alpha\beta}[\theta^{-1}(t_0),\eta_0(\alpha,\beta)]x_*(t)$ при входе $x_*(t) = x\bigl(\theta(t)\bigr)$ равенством $\eta_*(t,\alpha,\beta) = \eta\bigl(\theta(t),\alpha,\beta\bigr)$ при всех $t \geqslant \theta^{-1}(t_0)$, $\alpha > \beta$.

Физическая реализуемость. Из равенства $x_1(t) = x_2(t)$ входов $x_j(t)$ на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ вытекает равенство $\eta_1(t,\alpha,\beta) = \eta_2(t,\alpha,\beta)$ переменных состояний $\eta_j(t,\alpha,\beta) = R_{\alpha\beta}[t_0,\eta_0(\alpha,\beta)]x_j(t)$ на том же отрезке при любом допустимом начальном состоянии $\eta_0(\alpha,\beta)$. Иными словами, сужения функций (5) и (7) на произвольный отрезок $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ определяются при заданном начальном состоянии значениями входа $x(t)$ на том же отрезке.

Непрерывность. Непрерывность операторов (5) и (7) на множестве их определения доказана при различных метриках в пространствах состояний $\Omega = \cup_{x_0 \in \mathbb{R}} \Omega(x_0)$ нелинейности Прейсаха (см. [5–8]); в пространстве непрерывных входов $x(t)$ и выходов $\xi(t)$ используется равномерная норма.

3. Основные теоремы

3.1. Предварительные условия. Всюду предполагается, что $f(x, y)$ — это ограниченная непрерывно дифференцируемая функция, для которой верно глобальное условие Липшица

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leqslant q|x_1 - x_2| + q_1|y_1 - y_2|, \qquad x_j, y_j \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Будем считать справедливой оценку

$$|\mu(\alpha, \beta)| \leqslant \nu(\alpha - \beta), \qquad \alpha > \beta, \tag{10}$$

где функция $\nu(y)$ интегрируема на луче $y \geqslant 0$:

$$\nu_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_0^\infty \nu(y)\, dy < \infty. \tag{11}$$

В силу (10) и (11) выходы $\xi(t)$ при гладких входах $x(t)$ абсолютно непрерывны (см., например, [6]) и для производной выхода почти всюду верна оценка

$$|\xi'(t)| \leqslant 2\nu_\infty |x'(t)|. \tag{12}$$

3.2. Положения равновесия. Периодичность решения $\big\{x(t), \xi(t)\big\}$, (где $\xi(t)$ — выход (7) нелинейности Прейсаха при входе $x(t)$) означает периодичность обеих его компонент с общим априори неизвестным периодом $T > 0$ и периодичность переменного состояния (5) гистерезисной нелинейности:

$$x(t) = x(t+T), \quad \xi(t) = \xi(t+T), \quad \eta(t, \alpha, \beta) = \eta(t+T, \alpha, \beta), \quad t \geqslant t_0,\ \alpha > \beta.$$

Начальное состояние $\eta_0(\alpha, \beta)$ в (5) и (7) также априори неизвестно.

Состояние и выход модели Прейсаха при постоянном входе постоянны: если $x(t) \equiv x_0$, то $\eta(t,\alpha,\beta) \equiv \eta_0(\alpha,\beta)$ и $\xi(t) \equiv \xi_0$. Решения $\big\{x(t),\xi(t)\big\} \equiv \big\{x(t_0),\xi(t_0)\big\}$ будем называть стационарными, а их значения $\big\{x(t_0),\xi(t_0)\big\}$ — положениями равновесия.

При $-1 \leqslant a \leqslant 1$, $\rho \in \mathbb{R}$ положим

$$\phi_a(\rho) = \iint\limits_{\alpha\leqslant\rho} \mu(\alpha,\beta)\,d\alpha d\beta - \iint\limits_{\beta\geqslant\rho} \mu(\alpha,\beta)\,d\alpha d\beta + a \iint\limits_{\beta<\rho<\alpha} |\mu(\alpha,\beta)|\,d\alpha d\beta. \tag{13}$$

Функция $\phi_a(\rho)$ непрерывна по совокупности аргументов a и ρ. В силу (4) при постоянном входе $x(t) \equiv x_0$ и любых допустимых начальных состояниях $\eta_0(\alpha,\beta) \in \Omega(x_0)$ значения всех возможных выходов $\xi(t) \equiv \xi_0$ нелинейности Прейсаха составляют отрезок $\phi_{-1}(x_0) \leqslant \xi_0 \leqslant \phi_1(x_0)$. Пара $\big\{x(0),\xi(0)\big\}$ является положением равновесия уравнения (1), если и только если $\xi_0 = \phi_a(x_0)$ при некотором $a \in [-1,1]$ и $\rho = x_0$ удовлетворяет при этом a уравнению

$$L(0)\rho = f(\rho,\phi_a(\rho)). \tag{14}$$

Если $L(0) \neq 0$, то из-за ограниченности функции $f(x,y)$ уравнение (14) имеет хотя бы одно решение $\rho = \rho^*$ при каждом $a \in [-1,1]$, причем

$$|\rho^*| \leqslant \rho_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sup|f(x,y)||L(0)|^{-1}.$$

Поэтому у уравнения (1) всегда есть положения равновесия. В частности, если решение $\rho = \rho^*(a)$ уравнения (14) при каждом a единственно и

$$\iint\limits_{\beta<\rho<\alpha} |\mu(\alpha,\beta)| > 0 \tag{15}$$

при всех $\rho \in [-\rho_1,\rho_1]$, то положения равновесия образуют непрерывную кривую $\big\{\rho^*(a),\xi^*(a)\big\}$ $(a \in [-1,1])$ без самопересечений.

3.3. Существование циклов. Пусть у многочлена $L(p)$ есть пара мнимых сопряженных корней $\pm w_0 i$ и пусть верно условие нерезонансности

$$L(nw_0 i) \neq 0, \qquad n = 0, \pm 2, \pm 3, \ldots. \tag{16}$$

Положим

$$(17)\quad \mu_0=\iint\limits_{\alpha>\beta}\mu(\alpha,\beta)\,d\alpha\,d\beta,\quad k_1(w)=|\,\Im m\,L(wi)|,\quad k_2(w)=\min_{n=2,3,\dots}|L(nwi)|$$

и определим при каждом $r>0$ число

$$(18)\qquad d(r)=\int\limits_0^\pi \sin t\;f(r\sin t,\mu_0)\,dt-\int\limits_0^\pi \sin t\;f(-r\sin t,-\mu_0)\,dt.$$

Теорема 1. *Пусть многочлены $L(wi)$ и $\Im m\,L(wi)$ имеют пару общих вещественных корней $\pm w_0$ $(w_0>0)$ одинаковой нечетной кратности. Пусть w_0 — единственный корень многочлена $\Im m\,L(wi)$ на отрезке $[w_1,w_2]$ и пусть*

$$(19)\qquad L(0)\neq 0,\qquad L(nwi)\neq 0\quad \text{при}\quad w_1\leqslant w\leqslant w_2,\quad n=2,3,\dots,$$

где $w_0/2<w_1<w_0<w_2$. Пусть при некотором $a\in[-1,1]$ уравнение (14) *имеет единственное решение $\rho=\rho_a^*$. Пусть верны оценки* (9) – (11)*, причем для коэффициентов Липшица q и q_1 функции $f(x,y)$ справедлива оценка*

$$(20)\qquad q_0\overset{\mathrm{def}}{=}q+2\nu_\infty q_1<\min_{w_1\leqslant w\leqslant w_2}\;\min_{n=2,3,\dots}|L(nwi)|.$$

Пусть при $w=w_1,w_2$ справедливо по крайней мере одно неравенство

$$(21)\qquad q_0<|\,\Im m\,L(wi)|,$$

или

$$(22)\qquad q>\frac{2q_0\sqrt{k_2^2(w)-k_1^2(w)}-2k_1(w)\sqrt{k_2^2(w)-q_0^2}}{2\sqrt{k_2^2(w)-k_1^2(w)}-\sqrt{q_0^2-k_1^2(w)}}.$$

Пусть при всех достаточно больших r для функции (18) *верны оценки*

$$(23)\qquad d(r)\,\frac{\partial f}{\partial x}\big(\rho_a^*,\phi_a(\rho_a^*)\big)<0,\qquad |d(r)|\geqslant c,\qquad c>0.$$

Тогда у уравнения (1) *с нелинейностью Прейсаха* (7) *существует нестационарное периодическое решение периода $T\in[2\pi/w_2,2\pi/w_1]$.*

Если у многочлена $L(p)$ нет мнимых корней и числа q и q_1 в условии Липшица (9) малы, то у (1) нет нестационарных периодических решений.

Условие (20) теоремы 1 означает, что при всех $w \in [w_1, w_2]$ верна оценка $q_0 < k_2(w)$. Условия (21), (22) проверяются лишь при $w = w_j$. Функция в правой части оценки (22) определена в точности при тех w, для которых верна противоположная (21) оценка $q_0 \geqslant k_1(w)$. Допускается, чтобы в одной из точек w_1 и w_2 была верна оценка (21), а в другой — оценка (22).

Из (22) вытекает ограничение величины q_0. Так как $q \leqslant q_0$, то

$$q_0 < \sqrt{\frac{1}{2}\Big(\sqrt{9k_1^4(w) + 16k_1^2(w)k_2^2(w)} - 3k_1^2(w)\Big)}, \qquad w = w_1, w_2. \tag{24}$$

3.4. Существование континуума циклов.

Теорема 2. *Пусть многочлены $L(wi)$ и $\Im m\, L(wi)$ имеют пару общих вещественных корней $\pm w_0$ ($w_0 > 0$) одной и той же нечетной кратности и выполнены условия нерезонансности* (16). *Пусть верны оценки* (10) *и* (11), *ограниченная гладкая функция $f(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица* (9) *и для функции* (18) *справедлива оценка $|d(r)| \geqslant c > 0$ при всех $r \geqslant r_*$. Тогда найдутся такие $\bar{q} > 0$, $w_1 \in (w_0/2, w_0)$ и $w_2 > w_0$, определяемые по многочлену L, что при $q + 2\nu_\infty q_1 < \bar{q}$ верны следующие утверждения.*

(i) *Либо положение равновесия уравнения* (1) *единственно, либо положения равновесия образуют непрерывную кривую.*

(ii) *Если хотя бы для одного положения равновесия (x^*, ξ^*) верна оценка*

$$d(r_*)\,\frac{\partial f}{\partial x}(x^*, \xi^*) < 0, \tag{25}$$

то у уравнения (1) *есть хотя бы один цикл с периодом $2\pi/w_2 \leqslant T \leqslant 2\pi/w_1$.*

(iii) *Если оценка* (25) *справедлива для всех положений равновесия уравнения* (1), *то для всех циклов с периодами $2\pi/w_2 \leqslant T \leqslant 2\pi/w_1$ верны оценки*

$$\|x(t) - \bar{x}\|_{L_2} \geqslant r_1, \qquad \|x(t)\|_C \leqslant r_0, \tag{26}$$

где $\bar{x}$ — это среднее за период значение функции $x(t)$ и $r_1, r_0 > 0$. Если при этом $R_\mu > r_0$, то у уравнения (1) *есть континуум различных циклов.*

Оценки (26) означают, что все существующие в силу теоремы 2 нестационарные периодические решения уравнения (1) отделены в функциональных пространствах L_2, C и др. от одномерного подпространства функций-констант (содержащего все стационарные решения) и от бесконечности.

4. Пример

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$x''' + x'' + x' + x = f\big(x, \xi(t)\big). \tag{27}$$

Многочлен $L(p) = p^3 + p^2 + p + 1$ имеет пару простых корней $\pm i$, $w_0 = 1$, $1/2 < w_1 < 1 < w_2$. Справедливы равенства $L(wi) = (iw + 1)(1 - w^2)$, $\Im m\, L(wi) = w(1 - w^2)$, $k_1(w) = w|1 - w^2|$, $k_2(w) = (4w^2 - 1)\sqrt{w^2 + 1}$.

В таблице 1 указаны различные значения q_0, q, w_1 и w_2, для которых верны предположения теоремы 1; значение $2\nu_\infty q_1$ в четвертом столбце таблицы равно разности значений во втором и третьем столбцах. В последних трех столбцах указаны значения функции $k_1(w)$ при $w = w_1$ и $w = w_2$ и минимум функции $k_2(w)$; так как функция $k_2(w)$ возрастает, ее минимум равен $k_2(w_1)$.

Наибольшее значение функции $k_1(w)$ на отрезке $1/2 \leqslant w \leqslant 1$ достигается в точке $w = 1/\sqrt{3}$ и равно $2\sqrt{3}/9 = 0,384900,..$ При $q_0 < 2\sqrt{3}/9$ концы отрезка $[w_1, w_2]$ определяются из оценки (21), в силу которой w_1 — это корень уравнения $q_0 = k_1(w)$ из отрезка $[1/\sqrt{3}, 1]$, а w_2 — корень уравнения $q_0 = k_1(w)$, лежащий на луче $w \geqslant 1$. В таблице используются приближения w_1 и w_2 к этим корням с точностью $0,001$ при $q_0 = 0,3848,\ 0,3,\ 0,2,\ 0,1$ (четыре нижние строки таблицы). Величина $q \in [0, q_0]$ при $q_0 < 2\sqrt{3}/9$ произвольна.

При $q_0 \geqslant 2\sqrt{3}/9$ величины q, w_1 и w_2 определяются из оценки (22). Соотношение (24) определяет максимальное q_0: правая часть (24) равна нулю при $w = 1/2$ и $w = 1$ и достигает на отрезке $[1/2, 1]$ максимума $1,295015$, ограничивающего q_0 сверху. В первой строке таблицы используется близкое к максимуму значение $q_0 = 1,295$. В строках со второй по одиннадцатую $q_0 = 1,2;\ 1,1;\ \ldots;\ 0,4;\ 0,385$ (последнее значение близко к $2\sqrt{3}/9$).

Величина q при заданном q_0 ограничена снизу минимумом q_{min} правой части оценки (22) на отрезке $w \in [1/2, 1]$. В таблице используются значения q, близкие к этому минимуму; при этом значения $2\nu_\infty q_1$ близки к максимуму $q_0 - q_{min}$. По выбранным q_0 и q из уравнения

$$q = \frac{2q_0\sqrt{k_2^2(w) - k_1^2(w)} - 2k_1(w)\sqrt{k_2^2(w) - q_0^2}}{2\sqrt{k_2^2(w) - k_1^2(w)} - \sqrt{q_0^2 - k_1^2(w)}},$$

определяются оценки сверху для w_1 и снизу для w_2, в таблице используются приближения этих оценок. Оценка (20) верна при всех q_0.

Ширина интервалов $(q_{min}, q_0]$ и $[0, q_0 - q_{min})$ возможных значений величин q и $2\nu_\infty q_1$ при $q_0 \geqslant 2\sqrt{3}/9$ равна с точностью до последнего знака значению в четвертом столбце таблицы. Она увеличивается от почти нулевой при $q_0 = 1,295$ до почти равной q_0 при $q_0 = 0,385$. При $q_0 < 2\sqrt{3}/9 = 0,3849...$ оба интервала равны $[0, q_0]$. Указанный в таблице интервал $[w_1, w_2]$ расширяется при уменьшении q_0 от значения $q_0 = 1,295$ до $q_0 = 0,385$. При $q_0 < 2\sqrt{3}/9$ интервал $[w_1, w_2]$ сужается с уменьшением q_0 и оценки периода уточняются.

Пусть $q = 0,305$, $2\nu_\infty q_1 = 0,295$ и верна оценка (9). Пусть при некотором $a \in [-1, 1]$ уравнение $\rho = f(\rho, \phi_a(\rho))$ имеет единственное решение $\rho = \rho_a^*$ и при всех достаточно больших r верны оценки (23). Тогда у уравнения (27) есть нестационарное периодическое решение с периодом $5,575 \leqslant T \leqslant 8,913$.

5. Периодические выходы и решения

5.1. Теорема о гистерезисных нелинейностях. При доказательстве теорем 1 и 2 используется предложенный в [11, 12] метод анализа задач о существовании циклов. Его применение для уравнения (1) с нелинейностью Прейсаха основано на следующей теореме о периодических переменных состояниях и выходах гистерезисной нелинейности (7), доказанной в [13].

Пусть $x(t) \equiv x(t + T)$ $(t \geqslant t_0)$. По периодическому входу $x(t)$ определим числа $x_m = \min x(t)$ и $x_M = \max x(t)$ и множества

$$G(x_m, x_M) = \{(\alpha, \beta) : \beta < x_m \leqslant x_M < \alpha\}, \quad G_c(x_m, x_M) = \Pi \backslash G(x_m, x_M).$$

Из определения неидеального реле вытекает, что при $(\alpha,\beta)\in G_c(x_m,x_M)$ функция (3), то есть переменное состояние реле с пороговыми числами α, β при входе $x(t)$, является периодической на всем луче $t\geqslant t_0$ при единственном начальном состоянии η_0 (при начальном состоянии $-\eta_0$ переменное состояние либо не определено, либо не является периодическим). Это единственное состояние обозначим через $\eta_{per}(t,\alpha,\beta)$ и положим

$$\mathcal{J}_a x(t)=\iint\limits_{G_c(x_m,x_M)}\mu(\alpha,\beta)\eta_{per}(t,\alpha,\beta)\,d\alpha\,d\beta+a\iint\limits_{G(x_m,x_M)}|\mu(\alpha,\beta)|\,d\alpha\,d\beta, \tag{28}$$

где $t\geqslant t_0$, $a\in[-1,1]$. Построенный оператор (28) задан на классе всех непрерывных периодических входов, периоды функций $x(t)$ и $\mathcal{J}_a x(t)$ совпадают.

Т е о р е м а 3. *Справедливы следующие утверждения:*

(i) *Класс всех периодических выходов нелинейности Прейсаха при периодическом входе $x(t)$ $(t\geqslant t_0)$ определяется равенством $\xi(t)=\mathcal{J}_a x(t)$, где a — произвольное число из отрезка $[-1,1]$.*

(ii) *Класс всех периодических переменных состояний нелинейности Прейсаха при периодическом входе $x(t)$ $(t\geqslant t_0)$ определяется равенством*

$$\eta(t,\alpha,\beta)=\begin{cases}\eta_{per}(t,\alpha,\beta) & \text{при } \alpha>\beta\geqslant x_m \text{ и при } x_M\geqslant\alpha>\beta,\\ \eta_*(\alpha,\beta) & \text{при } \beta<x_m\leqslant x_M<\alpha,\end{cases} \tag{29}$$

где $\eta_*(\alpha,\beta)$ — произвольная измеримая функция со значениями ±1. Периоды переменных состояний (29) и входа совпадают. Выход при переменном состоянии (29) определяется равенством $\xi(t)=\mathcal{J}_a x(t)$ при

$$a\iint\limits_{G(x_m,x_M)}|\mu(\alpha,\beta)|\,d\alpha\,d\beta=\iint\limits_{G(x_m,x_M)}\mu(\alpha,\beta)\eta_*(\alpha,\beta)\,d\alpha\,d\beta. \tag{30}$$

(iii) *Каждое переменное состояние нелинейности Прейсаха при периодическом с периодом T входе $x(t)$ $(t\geqslant t_0)$ совпадает при всех $t\geqslant t_0+T$ с одним из периодических переменных состояний (29).*

(iv) *Если верны соотношения* (6), (10) *и* (11), *то при любых T-периодических входах $x_1(t)$, $x_2(t)$ $(t \geqslant t_0)$ и любых $a_1, a_2 \in [-1,1]$ верна оценка*

$$\|\mathcal{J}_{a_1} x_1(t) - \mathcal{J}_{a_2} x_2(t)\|_{C[t_0,t_0+T]} \leqslant 4\nu_\infty \|x_1(t) - x_2(t)\|_{C[t_0,t_0+T]} + \mu_* |a_1 - a_2|. \tag{31}$$

5.2. Следствия. В силу утверждения (i) для любого периодического решения уравнения (1) верны соотношения $\xi(t) \equiv \mathcal{J}_a x(t)$, где $-1 \leqslant a \leqslant 1$. Из утверждений (i) и (ii) вытекает, что по каждому T-периодическому решению $\{x(t), \xi(t)\}$ $(t \geqslant t_0)$ определен непустой класс $K\big(x(t), \xi(t)\big)$ таких периодических переменных состояний $\eta(t,\alpha,\beta) \equiv \eta(t+T,\alpha,\beta)$ нелинейности Прейсаха при входе $x(t)$, выход при которых равен $\xi(t)$. Другими словами, определен непустой класс начальных состояний $\eta_0(\alpha,\beta) \in \Omega\big(x(t_0)\big)$, при которых компоненты решения связаны равенством (7) и переменное состояние (5) T-периодично. Все состояния $\eta(t,\alpha,\beta) \in K\big(x(t), \xi(t)\big)$ совпадают с однозначно определяемой по входу $x(t)$ функцией $\eta_{per}(t,\alpha,\beta)$ в области $(\alpha,\beta) \in G_c(x_m, x_M)$ при всех t. При $(\alpha,\beta) \in G(x_m,x_M)$ для каждого из периодических переменных состояний $\eta(t,\alpha,\beta) \in K\big(x(t), \xi(t)\big)$ верно соотношение $\eta(t,\alpha,\beta) \equiv \eta_*(\alpha,\beta)$, где к измеримой функции $\eta_*(\alpha,\beta)$ со значениями ± 1 предъявляется единственное требование — она должна удовлетворять равенству (30); параметр $a \in [-1,1]$ в этом равенстве определяется по компоненте $\xi(t)$ периодического решения из равенства (28):

$$\xi(t) = \iint\limits_{G_c(x_m,x_M)} \mu(\alpha,\beta)\eta_{per}(t,\alpha,\beta)\, d\alpha\, d\beta + a \iint\limits_{G(x_m,x_M)} |\mu(\alpha,\beta)|\, d\alpha\, d\beta$$

(если множитель при a нулевой, то в (30) можно использовать любое a). Так как таких функций $\eta_*(\alpha,\beta)$ бесконечно много, то для каждого периодического решения $\{x(t), \xi(t)\}$ класс $K\big(x(t), \xi(t)\big)$ состоит из бесконечного числа различных периодических переменных состояний.

5.3. О теореме 2. В условиях утверждения (iii) теоремы 2 у уравнения (1) есть континуум различных циклов. Каждому циклу отвечает однопараметрический континуум различных нестационарных периодических решений $\{x(t+\theta), \xi(t+\theta)\}$ и каждому из них отвечает континуальное множество $K(x(t), \xi(t))$ периодических переменных состояний нелинейности Прейсаха.

Причина существования континуума циклов не связана с особенностями поведения нелинейности $f(x,y)$. Она состоит в том, что у уравнения (1) есть нестационарное периодическое решение $\{x(t), \xi(t)\} = \{x(t), \mathcal{J}_a x(t)\}$ при каждом $a \in [-1,1]$ и эти решения различны при различных a (то есть речь идет о существовании однопараметрического континуума циклов). Можно указать дополнительные предположения о функциях $f(x,y)$ и $\mu(\alpha,\beta)$, гарантирующие взаимную однозначность и непрерывность отображения отрезка $-1 \leqslant a \leqslant 1$ на множество всех циклов уравнения (1).

При доказательстве теорем 1 и 2 в пространствах функций конструируются операторные уравнения, содержащие оператор (28) и поэтому явно зависящие от скалярного параметра a. По решениям этих уравнений определяются периодические решения $\{x(t), \xi(t)\} = \{x(t), \mathcal{J}_a x(t)\}$ уравнения (1). Зависимость от скалярного параметра a позволяют доказать существование континуума циклов и простую одномерную структуру такого континуума.

6. Замечания

6.1. О предположении (23). Рассмотрим основное в теоремах 1 и 2 предположение (23) о нелинейности. Если $d(r) \to d_0$ при $r \to \infty$, то это предположение принимает вид $d_0 \dfrac{\partial f}{\partial x}\big(\rho_a^*, \phi_a(\rho_a^*)\big) < 0$, Пусть, например, справедливо равенство $f = f_1 + f_2$, где $f_1(x,\mu_0) \to f^{\pm}$ при $x \to \pm\infty$ и

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f_2(\theta, \pm\mu_0)\, d\theta = 0, \tag{32}$$

Тогда $d_0 = 2(f^+ - f^-)$. Соотношение (32) верно для всех стремящихся к нулю на бесконечности функций f_2, периодических функций с нулевым средним значением, функций $\sin|x|^s$ $(s>0)$ и др. Для уравнения

$$L\Big(\frac{d}{dt}\Big)x = f(x) + q_1\xi(t) \tag{33}$$

функция (18) определяется равенством $d(r) = 4\Big(q_1\mu_0 + \int\limits_0^{\pi/2} \sin t \; f_{odd}(r\sin t)\,dt\Big)$, где $f_{odd}(x) = \big(f(x) - f(-x)\big)/2$ — это нечетная часть функции $f(x)$. Если $f_{odd}(x) \to f_0$ при $x \to +\infty$, то $d(r) \to d_0 = 4(q_1\mu_0 + f_0)$ при $r \to +\infty$.

6.2. Об уравнении с четной линейной частью. Это соотношение означает, что не является четной функцией. У уравнения (1) с четным многочленом $L(p)$ может не быть циклов при выполнении других условий теоремы 1. Например, рассмотрим уравнение (33). Домножим его на $x'(t)$ и проинтегрируем по периоду T. Если многочлен $L(p)$ четный, то получим равенство $0 = \int\limits_0^T \xi(t)x'(t)\,dt$. Если $\mu(\alpha,\beta) > 0$ при всех α,β, то для любого периодического выхода нелинейности Прейсаха при любом периодическом входе $x(t) \not\equiv const$ верно соотношение (см. [5]) $\operatorname{sgn}\int\limits_0^T \xi(t)x'(t)\,dt = \operatorname{sgn}\mu(\alpha,\beta) > 0$, следовательно, $x' = 0$ и все периодические решения стационарны.

6.3. О допустимой асимптотике нелинейности на бесконечности. Оценку $|d(r)| \geqslant c > 0$ при больших r можно заменить на менее ограничительную оценку $d(r) \geqslant \chi(r) > 0$, где $\chi(r) \to 0$. Ограниченность функции $f(x,y)$ можно заменить условием $x^{-1}f(x,y) \to 0$; при этом важна быстрота роста нелинейности $f(x,y)$ по x на бесконечности. Переход к неограниченным нелинейностям связан с громоздкими дополнительными построениями при доказательстве аналога леммы 2 Приложения.

Аналоги теоремы 1 верны для уравнений с нелинейностями $f(x,y)$, для которых определены пределы $d_\pm = \lim_{x\to\pm\infty} x^{-1}f(x,y)$. В силу условия (9) и ограниченности выхода нелинейности Прейсаха значение пределов $d_\pm$ не зависит от y. Для уравнений с такими нелинейностями условие (23) заменяется условием $(d_+ + d_-)\,\dfrac{\partial f}{\partial x}\big(\rho_a^*, \phi_a(\rho_a^*)\big) < 0$,

П Р И Л О Ж Е Н И Е

1. Выбор неизвестных. Пусть $w \in \Omega = [w_1, w_2]$. В силу статичности модели Прейсаха каждое 2π-периодическое решение $\{x(t), \xi(t)\}$ уравнения

$$L\Big(w\frac{d}{dt}\Big)x = f\big(x, \xi(t)\big) \tag{П.1}$$

определяет $2\pi/w$-периодическое решение $\{x(wt), \xi(wt)\}$ уравнения (1). Будем искать компоненту $x(t)$ периодического решения уравнения (П.1) в виде

$$x(t) = \rho + r\sin t + h(t), \qquad \rho \in \mathbb{R},\ r > 0, \tag{П.2}$$

где разложение в ряд Фурье 2π-периодической функции $h(t)$ не содержит нулевой и первых гармоник или, что то же, $P_0 h = P_1 h = 0$, где

$$P_0 x(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} x(s)\,ds, \qquad P_1 x(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \cos(t-s)\,x(s)\,ds. \tag{П.3}$$

Будет доказано, что в условиях теоремы 1 найдутся такие $\rho \in \mathbb{R}$, $r > 0$, $w \in \Omega$ и 2π-периодическая функция $h(t)$, при которых (П.2) определяет 2π-периодическое решение $\{x(t), \xi(t)\}$ уравнения (П.1), причем $\xi(t) = \mathcal{J}_a x(t)$.

Периоды $(2\pi/w)$-периодических решений уравнения (1) априори неизвестны и каждое из них вложено в континуум $\{x(wt+\theta), \xi(wt+\theta)\}$ $(\theta \in \mathbb{R})$. При переходе к уравнению (П.1) и представлению (П.2) из континуума сдвигов выделяется единственное решение и тем самым устраняется заведомая неединственность. Основные неизвестные — это частота w, нулевая гармоника ρ, амплитуда первой гармоники r компоненты $x(t)$ решения, и проекция $h(t)$ функции $x(t)$ на бесконечномерное подпространство коразмерности 3.

2. Линейные подпространства и операторы. Ниже все пространства состоят из скалярных функций, определенных на отрезке $[0, 2\pi]$. Скалярное произведение в пространстве L_2 обозначается $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Рассмотрим ортогональные проекторы (П.3) в пространстве L_2 и положим $Q = I - P_0 - P_1$ и $\Pi^* = QL_2$. Обозначим через $\mathcal{A}(w)$ $(w \in \Omega)$ линейный оператор, сопоставляющий каждой функции $u(t)$ из подпространства Π^* пространства L_2 единственное решение $x(t) \in \Pi^*$ линейного уравнения

$$L\Big(w\frac{d}{dt}\Big)x = u(t). \tag{П.4}$$

Существование решения $x(t)$ следует из включения $u(t) \in \Pi^*$ и соотношений (19), единственность — из включения $x(t) \in \Pi^*$. При $w \neq w_0$ операторы $\mathcal{A}(w)$ непрерывно продолжимы на все пространство L_2, однако их нормы не ограничены. В подпространстве Π^* справедлива равномерная на Ω оценка:

$$\big\|\mathcal{A}(w)\big\|_{L_2\to L_2} \leqslant c_* < \infty, \quad c_* = \sup_{w\in\Omega} q_*(w), \qquad q_*(w) \overset{\text{def}}{=} \sup_{n=2,3,\dots} |L(wni)|^{-1}.$$

Пусть C_0 — пространство непрерывных 2π-периодических функций с равномерной нормой. Каждый оператор $\mathcal{A}(w)$ действует из $\Pi^* \subset L_2$ в C_0 и вполне непрерывен; он непрерывен как оператор, действующий из подпространства $C_0 \cap \Pi^*$ в C^1. Более того, оператор $(w,h) \mapsto \mathcal{A}(w)h$ со значениями в C_0 вполне непрерывен по совокупности переменных $w \in \Omega$, $h = h(t) \in \Pi^*$.

Обозначим через P_n ортогональные проекторы в пространстве L_2 на и двумерные подпространства Π_n, натянутые на функции $\sin nt$ и $\cos nt$. Эти проекторы коммутируют с оператором дифференцирования; справедливы соотношения $P_nQ = QP_n = 0$ при $n = 0,1$ и $P_nQ = QP_n = P_n$ при $n \geqslant 2$. Пусть

$$U_{n,w}(a\cos nt + b\sin nt) = |L(wni)|^{-1}\Big[\big(a\,\Re L(wni) - b\,\Im L(wni)\big)\cos nt + \\ + \big(a\,\Im L(wni) + b\,\Re L(wni)\big)\sin nt\Big].$$

Операторы $\mathcal{A}(w)Q$ определены на всем L_2 и допускают представление

$$\mathcal{A}(w)Qu(t) = \sum_{n=2,3,\dots} |L(wni)|^{-1}\, U_{n,w}P_n u(t); \tag{П.5}$$

справедливы равенства $\|\mathcal{A}(w)Q\|_{L^2\to L^2} = q_*(w)$. Операторы $\mathcal{A}(w)Q$ действуют из C_0 в C^1 и верна равномерная при всех $w \in \Omega$ оценка $\|\mathcal{A}(w)Q\|_{C_0\to C^1} \leqslant \kappa_0$.

Лемма 1. *Пусть $w \in \Omega$, $h(t) \in \Pi^*$. Равенство* (П.4) *для функций $u(t) \in L_2$ и $x(t) = \rho + r\sin t + h(t)$ эквивалентно соотношениям*

$$\pi r\,\Re L(wi) = \langle \sin t, u(t)\rangle, \qquad \pi r\,\Im L(wi) = \langle \cos t, u(t)\rangle, \tag{П.6}$$

$$h(t) = \mathcal{A}(w)Qu(t), \qquad 2\pi\rho\, L(0) = \langle 1, u(t)\rangle. \tag{П.7}$$

Лемма доказываются прямым вычислением. Равенства (П.6), (П.7) — это ортогональные проекции в L_2 равенства (П.4) на плоскость Π_1, бесконечномерное подпространство Π^* и подпространство функций-констант. Например, формулы (П.6) вытекают из равенства $L\big(w\,d/dt\big)r\sin t = P_1 u(t)$.

3. Основная деформация. В силу леммы 1 каждое решение системы

$$
(\Pi.8)\qquad
\begin{aligned}
\pi\,\Re e\,L(wi) &= \frac{1}{r}\,\langle \sin t, f\big(x(t),\xi(t)\big)\rangle, & h &= \mathcal{A}(w)Qf\big(x(t),\xi(t)\big),\\
\pi\,\Im m\,L(wi) &= \frac{1}{r}\,\langle \cos t, f\big(x(t),\xi(t)\big)\rangle, & L(0)\rho &= \frac{1}{2\pi}\,\langle 1, f\big(x(t),\xi(t)\big)\rangle
\end{aligned}
$$

является 2π-периодическим решением уравнения (П.1). Здесь $x(t)$ определяется равенством (П.2) и $\xi(t) = \mathcal{J}_a x(t)$ при некотором $a \in [-1,1]$. Везде далее значение параметра a считается фиксированным.

Пусть ρ_a^* — это единственное решение уравнения (14). Положим

$$
\begin{aligned}
x_\lambda(t) &= (1-\lambda)\rho_a^* + \lambda\rho + r\sin t + \lambda h(t), & \xi_\lambda(t) &= \mathcal{J}_a x_\lambda(t),\\
x^\lambda(t) &= \rho + \lambda r\sin t + \lambda h(t), & \xi^\lambda(t) &= \mathcal{J}_a x^\lambda(t)
\end{aligned}
$$

и рассмотрим при $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ деформацию

$$
(\Pi.9)\qquad \Phi_\lambda(r,w,h,\rho) =
\begin{cases}
\dfrac{1}{r}\,\langle \sin t, f\big(x_\lambda(t),\xi_\lambda(t)\big)\rangle - \lambda\pi\,\Re e\,L(wi),\\
\pi\,\Im m\,L(wi) - \dfrac{\lambda}{r}\,\langle \cos t, f\big(x(t),\xi(t)\big)\rangle,\\
h - \lambda\,\mathcal{A}(w)Qf\big(x(t),\xi(t)\big),\\
L(0)\rho - \dfrac{1}{2\pi}\,\langle 1, f\big(x^\lambda(t),\xi^\lambda(t)\big)\rangle,
\end{cases}
$$

в пространстве $\mathbb{E} = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times(C_0\cap\Pi^*)\times\mathbb{R}$ с нормой $|r| + |w| + \|h\|_C + |\rho|$. При $\lambda = 1$ особые точки векторного поля $\Phi_1(r,w,h,\rho)$ совпадают с решениями системы (П.8). При $\lambda = 0$ каждая компонента векторного поля

$$
(\Pi.10)\qquad \Phi_0(r,w,h,\rho) =
\begin{cases}
\dfrac{1}{r}\,\langle \sin t, f\big(\rho_a^* + r\sin t, \mathcal{J}_a(\rho_a^* + r\sin t)\big)\rangle,\\
\pi\,\Im m\,L(wi),\\
h,\\
L(0)\rho - f(\rho,\phi_a(\rho));
\end{cases}
$$

зависит только от соответствующей переменной, это позволяет вычислить вращение этого поля на границе некоторой области G. Для этого необходимо доказать невырожденность деформации $\Phi_\lambda(\ldots)$ на границе области G.

4. *Локализация решений.* Определим область $G \subset \mathbb{E}$, в которой будем искать особые точки поля $\Phi_1(r, w, h, \rho)$, равенством

$$G = G(r_1, r_2, w_1, w_2, k_0, \rho_0) = [r_1, r_2] \times [w_1, w_2] \times \{h : \|h\|_C \leqslant k_0\} \times [-\rho_0, \rho_0].$$

Область G конструируется так, чтобы обеспечить невырожденность на ее границе ∂G деформации (П.9) и одновременно гарантировать отличие от нуля вращения $\gamma(\Phi_0, G)$ векторного поля Φ_0 (см., например, [10]). В силу принципа ненулевого вращения из соотношения $\gamma(\Phi_0, G) \neq 0$ и гомотопности векторных полей Φ_λ на ∂G вытекает существование особой точки (r, w, h, ρ) векторного поля Φ_1 в области G и, следовательно, справедливость вывода теоремы 1.

5. *Вычисление вращения.* Воспользуемся теоремой о произведении вращений для вычисления вращения $\gamma(\Phi_0, \partial G)$. Пусть определены вращения γ_r, γ_w и γ_ρ первой, второй и четвертой компонент поля (П.10) на границах отрезков $r \in [r_1, r_2]$, $w \in [w_1, w_2]$ и $\rho \in [-\rho_0, \rho_0]$. Область G является произведением этих отрезков и шара $\{h \in C_0 \cap \Pi^* \colon \|h\|_C \leqslant k_0\}$. Так как вращение компоненты h поля (П.10) на сфере $\{h \in C_0 \cap \Pi^* : \|h\|_C = k_0\}$ равно 1 и поле (П.10) есть прямая сумма своих компонент, то $\gamma(\Phi_0, \partial G) = \gamma_r \, \gamma_w \, \gamma_\rho$.

В силу оценки $\Im m\, L(w_1 i) \Im m\, L(w_2 i) < 0$ определено вращение γ_w и $|\gamma_w| = 1$. Четвертая компонента по условию теоремы обращается в нуль в единственной точке $\rho = \rho_a^*$ и имеет противоположные знаки при $\rho > \rho_a^*$ и при $\rho < \rho_a^*$. Значит, при $\rho_0 > |\rho_a^*|$ верно равенство $|\gamma_\rho| = 1$ и следовательно $|\gamma(\Phi_0, \partial G)| = |\gamma_r|$.

Если либо $\beta < x_m = \min x(t)$, либо $\alpha > x_M = \max x(t)$, то периодический выход неидеального реле с пороговыми числами α, β при периодическом входе $x(t)$ постоянен: $\eta(t) \equiv \eta_0$. Поэтому для всякого периодического выхода нелинейности Прейсаха при периодическом входе $x(t)$ верна оценка

$$\text{(П.11)} \quad \|\xi(t) - P_0 \xi(t)\|_C \leqslant 2 \,\mathrm{mes}_\mu \{(\alpha, \beta) : x_m \leqslant \beta < \alpha \leqslant x_M\} \leqslant b\, (x_M - x_m)^2,$$

где $b = \max\{|\mu(\alpha,\beta)| : x_m \leqslant \beta \leqslant \alpha \leqslant x_M\}$. Положим $\xi_*(t) = \mathfrak{J}_a(\rho_a^* + r\sin t)$, $\bar{\xi}_* = P_0\xi_*(t)$. Из оценки (31) вытекает соотношение $\bar{\xi}_* = \phi_a(\rho_a^*) + o(1)$ при $r \to 0$ и так как $\|\xi_*(t) - \bar{\xi}_*\|_C = O(r^2)$, то для первой компоненты поля (П.10) при малых r верны равенства

$$\frac{1}{r}\left\langle \sin t, f\big(\rho_a^* + r\sin t, \mathfrak{J}_a(\rho_a^* + r\sin t)\big)\right\rangle = \frac{1}{r}\left\langle \sin t, f(\rho_a^* + r\sin t, \bar{\xi}_*)\right\rangle + O(r) =$$
$$= \left\langle \sin^2 t, \frac{\partial f}{\partial x}(\rho_a^*, \bar{\xi}_*)\right\rangle + o(1) = \pi\frac{\partial f}{\partial x}(\rho_a^*, \bar{\xi}_*) + o(1) = \pi\frac{\partial f}{\partial x}\big(\rho_a^*, \phi_a(\rho_a^*)\big) + o(1).$$

Поэтому знак первой компоненты поля (П.10) при малых r совпадает со знаком частной производной $f_x\big(\rho_a^*, \phi_a(\rho_a^*)\big)$.

Из равенств $\eta(t,\alpha,\beta) = 1$ при $\alpha < x(t)$ и $\eta(t,\alpha,\beta) = -1$ при $\beta > x(t)$ при всех t следует, что

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_a(\rho_a^* + r\sin t) &\to \mu_0 \quad \text{при} \quad r \to \infty \quad \text{для каждого} \quad 0 < t < \pi,\\ \mathfrak{J}_a(\rho_a^* + r\sin t) &\to -\mu_0 \quad \text{при} \quad r \to \infty \quad \text{для каждого} \quad \pi < t < 2\pi, \end{aligned}$$

где μ_0 определяется равенством (17), При больших r из этих соотношений и оценки $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leqslant q_1|y_1 - y_2|$ вытекают равенства

$$\begin{aligned} f\big(\rho_a^* + r\sin t, \mathfrak{J}_a(\rho_a^* + r\sin t)\big) &= f(\rho_a^* + r\sin t, \mu_0) + o(1) \quad \text{при} \quad 0 < t < \pi,\\ f\big(\rho_a^* + r\sin t, \mathfrak{J}_a(\rho_a^* + r\sin t)\big) &= f(\rho_a^* + r\sin t, -\mu_0) + o(1) \quad \text{при} \quad \pi < t < 2\pi. \end{aligned}$$

Поэтому при $r \to \infty$

$$\int_0^{2\pi} \sin t\ f\big(\rho_a^* + r\sin t, \mathfrak{J}_a(\rho_a^* + r\sin t)\big)\,dt = \int_0^{\pi} \sin t\ f(\rho_a^* + r\sin t, \mu_0)\,dt -$$
$$- \int_0^{\pi} \sin t\, f(\rho_a^* - r\sin t, -\mu_0)\,dt + o(1).$$

Л е м м а 2. *Для любой непрерывной ограниченной функции $\varphi(\cdot)$ при каждых $\theta \in \mathbb{R}$ и $R > 0$ на каждом отрезке $[c,b]$ верно соотношение*

$$\lim_{r\to\infty} \sup_{y \in C^1,\, \|y\|_{C^1} \leqslant R} \left| \int_c^b \sin(t+\theta)\varphi\big(r\sin t + y(t)\big)\,dt - \int_c^b \sin(t+\theta)\varphi(r\sin t)\,dt \right| = 0,$$

Лемма 2 доказывается в следующем пункте. Из нее вытекают равенства

$$\int_0^\pi \sin t\ f(\rho_a^* \pm r\sin t, \pm\mu_0)\,dt = \int_0^\pi \sin t\ f(\pm r\sin t, \pm\mu_0)\,dt + o(1)$$

и, далее,

$$\int_0^\pi \sin t\ f(\rho_a^* + r\sin t, \mu_0)\,dt - \int_0^\pi \sin t\ f(\rho_a^* - r\sin t, -\mu_0)\,dt = d(r) + o(1)$$

при больших r, где $d(r)$ — функция (18). Значит, для первой компоненты поля (П.10) верно равенство

$$\frac{1}{r}\,\langle \sin t, f\big(\rho_a^* + r\sin t, \mathcal{J}_a(\rho_a^* + r\sin t)\big)\rangle = \frac{d(r)+o(1)}{r} \quad \text{при} \quad r\to\infty.$$

По условию теоремы при $r \geqslant r_*$ знак функции $d(r)$ постоянен и, более того, $|d(r)| \geqslant c > 0$. Поэтому при больших r первая компонента поля (П.10) имеет тот же постоянный знак $\operatorname{sgn} d(r_*)$. В силу оценки (23) этот знак противоположен знаку $\operatorname{sgn} f_x\big(\rho_a^*, \phi_a(\rho_a^*)\big)$ первой компоненты при малых r и, следовательно, вращение γ_r первой компоненты на границе отрезка $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$ равно либо 1, либо -1, если r_1 достаточно мало и r_2 достаточно велико. Значит, при таких r_1 и r_2 верно равенство $|\gamma(\Phi_0, \partial G)| = 1$, то есть вращение поля (П.10) на границе области G отлично от нуля.

6. Доказательство леммы 2. Фиксируем $R>0$ и $\varepsilon>0$. Нам нужно доказать при каждом достаточно большом r оценку

$$\left|\int_c^b \sin(t+\theta)\,\big[\varphi\big(r\sin t + y(t)\big) - \varphi(r\sin t)\big]\,dt\right| < \varepsilon \tag{П.12}$$

где $\|y\|_{C^1[c,b]} \leqslant R$. Пусть $t_1 < t_2 < \ldots < t_N$ — это все нули функции $\cos t$ на интервале (c,b). Положим $t_0 = c$, $t_N = b$. Выберем достаточно малое $\delta > 0$, при котором $t_n - t_{n-1} > 2\delta$ для всех $n = 1,\ldots,N$ и верна оценка

$$8\delta N \sup|\varphi(x)| < \varepsilon. \tag{П.13}$$

Рассмотрим отрезки $I_n = [t_{n-1}+\delta, t_n-\delta]$. Так как расстояние от них до нулей функции $\cos t$ не меньше δ, то на каждом из отрезков I_n верна оценка $|\cos t| \geqslant \sin\delta > 0$ и, следовательно,

$$\min_{t\in I_1\cup\ldots\cup I_N} |r\cos t + y'(t)| > \frac{r}{2}\sin\delta$$

при всех достаточно больших r и всех $y(t)$ из шара $\|y\|_{C^1[c,b]} \leqslant R$. Поэтому функция $x(t) = r\sin t + y(t)$ строго монотонна на каждом I_n. Так как $r\sin\tau$ монотонна на интервале $(t_{n-1},t_n)\supset I_n$, то формула $r\sin\tau = r\sin t + y(t)$ $(\tau\in(t_{n-1},t_n))$ определяет строго монотонную функцию $\tau(t;r)$ аргумента $t\in I_n$ при каждом большом r. Пусть функция $t(\tau;r)$ обратна к $\tau(t;r)$. Положим

$$J_n = \int_{I_n} \sin(t+\theta)\varphi\bigl(r\sin t + y(t)\bigr)\,dt.$$

Замена переменной $t\mapsto\tau$ приводит к равенству

$$J_n = \int\limits_{\tau_{n-1}(r)}^{\tau_n(r)} \sin\bigl(t(\tau;r)+\theta\bigr)\varphi\bigl(r\sin\tau\bigr)\,t'(\tau;r)\,d\tau;$$

здесь $\tau_{n-1}(r) = \tau(t_{n-1}+\delta;r)$, $\tau_n(r) = \tau(t_n-\delta;r)$. Из равенств $\sin\tau = \sin t + y(t)r^{-1}$, $\cos\tau = \dfrac{dt}{d\tau}\cos t + y'(t)r^{-1}$, где $t = t(\tau;r)\in I_n$, $\tau\in[\tau_{n-1}(r),\tau_n(r)]\subset(t_{n-1},t_n)$, и оценок $\|y\|_{C^1[c,b]}\leqslant R$, $|\cos t|\geqslant\sin\delta$ вытекают соотношения

$$t(\tau;r)\to\tau, \quad t'(\tau;r)\to 1, \quad \tau_{n-1}(r)\to t_{n-1}+\delta, \quad \tau_n(r)\to t_n-\delta$$

при $r\to\infty$, где сходимость равномерна по τ. Поэтому

$$J_n = \int_{I_n}\sin(\tau+\theta)\varphi(r\sin\tau)\,d\tau + o(1), \quad r\to\infty, \quad n=1,\ldots,N.$$

Из этих соотношений и оценок (П.13) и

$$\left|\int_{[c,b]\setminus(I_1\cup\ldots\cup I_N)} \sin(t+\theta)\,\bigl[\varphi\bigl(r\sin t + y(t)\bigr) - \varphi(r\sin t)\bigr]\,dt\right| \leqslant 4\delta N\sup|\varphi(x)|$$

вытекает оценка (П.12) при всех достаточно больших r. Лемма доказана.

7. *Вспомогательные оценки.* Остается доказать невырожденность деформации (П.9) на границе области G. В этом пункте приводятся вспомогательные оценки. Всюду используется обозначение $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L_2}$.

Лемма 3. Пусть $w_1 \leqslant w \leqslant w_2$. Из равенства второй и третьей компонент деформации (П.9) *нулю вытекают оценки*

$$(\text{П.14}) \qquad k_1(w) \leqslant q_0, \qquad q \leqslant 2\,\frac{q_0\sqrt{k_2^2(w)-k_1^2(w)} - k_1(w)\sqrt{k_2^2(w)-q_0^2}}{2\sqrt{k_2^2(w)-k_1^2(w)} - \sqrt{q_0^2-k_1^2(w)}},$$

$$(\text{П.15}) \qquad \|h'\|_{L_2} \leqslant r\sqrt{\pi\frac{q_0^2-k_1^2(w)}{k_2^2(w)-q_0^2}},$$

где $k_1(w)$ и $k_2(w)$ определяются равенствами (17).

Доказательство. Так как оператор $\mathcal{A}(w)Q$ действует из C_0 в C^1 и

$$h(t) = \lambda\mathcal{A}(w)\,Qf\big(x(t),\xi(t)\big),$$

то $h(t), x(t) \in C^1$. Поэтому функции $\xi(t) = \mathfrak{J}_a x(t)$ и

$$u(t) \overset{\text{def}}{=} \frac{d}{dt}\,f\big(x(t),\xi(t)\big) = x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t),\xi(t)\big) + \xi'(t)\frac{\partial f}{\partial \xi}\big(x(t),\xi(t)\big)$$

абсолютно непрерывны. Из (12) вытекают соотношения $\|\xi'\| \leqslant 2\nu_\infty\|x'\|$ и

$$\|u\|^2 \leqslant \|q|x'| + q_1|\xi'|\|^2 \leqslant \big(q\|x'\| + q_1\|\xi'\|\big)^2 \leqslant (q+2\nu_\infty q_1)^2\|x'\|^2 = q_0^2\|x'\|^2.$$

Из формулы (П.5) следуют соотношения

$$(\text{П.16}) \qquad |L(wni)|\|P_n h'\| = \lambda\|P_n u\|, \qquad n = 2,3,\ldots$$

В силу равенства нулю второй компоненты деформации (П.9) верна оценка

$$(\text{П.17}) \qquad r\sqrt{\pi}|\,\Im m\,L(wi)| \leqslant \lambda\|P_1 u\|.$$

Возведем соотношения (П.16) и (П.17) в квадрат и сложим. Получим

$$\pi r^2|\,\Im m\,L(wi)|^2 + \sum_{n=2,3,\ldots}|L(wni)|^2\|P_n h'\|^2 \leqslant \lambda^2\|u\|^2.$$

Так как $\lambda \leqslant 1$ и $\|u\| \leqslant q_0\|x'\|$, то

$$(\text{П.18}) \qquad \pi r^2|\,\Im m\,L(wi)|^2 + \sum_{n=2,3,\ldots}|L(wni)|^2\|P_n h'\|^2 \leqslant q_0^2\Big(\pi r^2 + \sum_{n=2,3,\ldots}\|P_n h'\|^2\Big)$$

и, далее,

$$\pi r^2 k_1^2(w) + k_2^2(w)\|h'\|^2 \leqslant q_0^2\Big(\pi r^2 + \|h'\|^2\Big).$$

В силу оценки $k_2(w) > q_0$ отсюда вытекают соотношения $k_1(w) \leqslant q_0$ и (П.15).

Из равенства деформации нулю и $\langle \cos t, f\big(\rho + r\sin t, \bar\xi\big)\rangle = 0$ вытекает равенство $r\pi\, \Im m\, L(wi) = \lambda\langle \cos t, \big[f(x(t),\xi(t)) - f(\rho + r\sin t, \bar\xi)\big]\rangle$, поэтому,

$$r\sqrt{\pi}\,|\,\Im m\, L(wi)| \leqslant \Big\|f\big(x(t),\xi(t)\big) - f(\rho + r\sin t, \bar\xi)\Big\|.$$

Здесь $\bar\xi = P_0\xi(t)$. В силу условия Липшица (9),

$$\Big\|f\big(x(t),\xi(t)\big) - f(\rho + r\sin t, \bar\xi)\Big\| \leqslant q\|h\|_{L_2} + q_1\|\xi(t) - \bar\xi\|$$

и, так как,

$$\|h\| \leqslant \frac{\|h'\|}{2}, \qquad \|\xi(t) - \bar\xi\| \leqslant \|\xi'(t)\| \leqslant 2\nu_\infty\|x'\| = 2\nu_\infty\sqrt{\pi r^2 + \|h'\|^2}\,,$$

то

$$r\sqrt{\pi}|\,\Im m\, L(wi)| \leqslant \frac{q}{2}\|h'\| + 2\nu_\infty q_1\sqrt{\pi r^2 + \|h'\|^2}.$$

В силу соотношений $k_1(w) = |\,\Im m\, L(wi)|$ и (П.15) отсюда вытекает оценка

$$k_1(w) \leqslant \frac{q}{2}\sqrt{\frac{q_0^2 - k_1^2(w)}{k_2^2(w) - q_0^2}} + 2\nu_\infty q_1\sqrt{1 + \frac{q_0^2 - k_1^2(w)}{k_2^2(w) - q_0^2}}.$$

Но $2\nu_\infty q_1 = q_0 - q$, поэтому

$$2k_1(w)\sqrt{k_2^2(w) - q_0^2} \leqslant q\sqrt{q_0^2 - k_1^2(w)} + 2(q_0 - q)\sqrt{k_2^2 - k_1^2(w)}.$$

Эта оценка эквивалентна второй из оценок (П.14). Лемма доказана.

8. Невырожденность деформации. Пусть $(r,w,h,\rho) \in G$ — особая точка деформации (П.9) при $\lambda \in [0,1]$. Из леммы 3 вытекает оценка

$$\text{(П.19)} \qquad \|h'\|_{L_2} \leqslant \kappa_* r, \qquad \text{где} \qquad \kappa_* \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\omega\in\Omega,\ k_1(w)\leqslant q_0} \sqrt{\pi\frac{q_0^2 - k_1^2(w)}{k_2^2(w) - q_0^2}}.$$

Покажем, что особая точка (r,w,h,ρ) не может располагаться на границе ∂G множества G при достаточно малом r_1 и достаточно больших r_2, k_0, ρ_0.

По предположению w_0 — это корень одной и той же нечетной кратности K для многочленов $L(wi)$ и $\Im m\, L(wi)$. Поэтому $\Im m\, L(wi) = (w-w_0)^K M(w)$, $\Re e\, L(wi) = (w-w_0)^K M_1(w)$, где $M(w)$ и $M_1(w)$ — вещественные многочлены, и так как w_0 — это единственный корень многочлена $\Im m\, L(wi)$ на отрезке $[w_1, w_2]$, то знаменатель функции $R(w) = M_1(w)/M(w)$ не обращается в нуль на $[w_1, w_2]$. Из равенства деформации (П.9) нулю следует, что

$$\lambda^2 R(w)\langle \cos t, f\big(x(t), \xi(t)\big)\rangle = \langle \sin t, f\big(x_\lambda(t), \xi_\lambda(t)\big)\rangle. \tag{П.20}$$

Положим

$$\rho_\lambda = (1-\lambda)\rho_a^* + \lambda\rho, \qquad \bar\xi = P_0\xi(t), \qquad \bar\xi_\lambda = P_0\xi_\lambda(t), \qquad c_0 = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}\Big)^{1/2}.$$

Из $\|h\|_C \leqslant c_0\|h'\|_{L_2}$ и (П.19) вытекает оценка $\|h\|_C \leqslant c_0\kappa_* r$, поэтому

$$\|x(t)-\rho\|_C = \|r\sin t + h(t)\|_C \leqslant (1+c_0\kappa_*)\, r,$$
$$\|x_\lambda(t)-\rho_\lambda\|_C = \|r\sin t + \lambda h(t)\|_C \leqslant (1+c_0\kappa_*)\, r$$

и в силу (П.11) при малых r верны равенства $\|\xi(t)-\bar\xi\|_C = O(r^2)$, $\|\xi_\lambda(t)-\bar\xi_\lambda\|_C = O(r^2)$. В силу липшицевости функции $f(\cdot,\cdot)$ из (П.20) следует, что

$$\lambda^2 R(w)\langle \cos t, f\big(x(t), \bar\xi\big)\rangle = \langle \sin t, f\big(x_\lambda(t), \bar\xi_\lambda\big)\rangle + O(r^2). \tag{П.21}$$

Из равенства $\|h\|_C = O(r)$ вытекают соотношения

$$f\big(x(t), \bar\xi\,\big) = f\big(\rho + r\sin t + h(t), \bar\xi\,\big) = f(\rho, \bar\xi) + \big(r\sin t + h(t)\big)\frac{\partial f}{\partial x}(\rho, \bar\xi) + o(r)$$

при $r \to 0$. Точно так же

$$f\big(x_\lambda(t), \bar\xi_\lambda\big) = f\big(\rho_\lambda, \bar\xi_\lambda\big) + \big(r\sin t + \lambda h(t)\big)\frac{\partial f}{\partial x}(\rho_\lambda, \bar\xi_\lambda) + o(r)$$

и так как функция $h(t)$ ортогональны в L_2 функциям $\sin t$ и $\cos t$, то

$$\langle \cos t, f\big(x(t), \bar\xi\,\big)\rangle = o(r), \qquad \langle \sin t, f\big(x_\lambda(t), \bar\xi_\lambda\big)\rangle = \pi r\,\frac{\partial f}{\partial x}(\rho_\lambda, \bar\xi_\lambda) + o(r).$$

Подставим эти соотношения в (П.21) и получим $\pi r\, f_x(\rho_\lambda, \bar\xi_\lambda) = o(r)$. Но $\|x_\lambda(t)-\rho_\lambda\|_C = O(r)$, поэтому $\bar\xi_\lambda = \phi_a(\rho_\lambda) + o(1)$ при $r \to 0$ и в силу непрерывности производной $f_x(\cdot,\cdot)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}\big(\rho_\lambda, \phi_a(\rho_\lambda)\big) = o(1) \quad \text{при} \quad r \to 0, \tag{П.22}$$

Так как $\|x^\lambda(t)-\rho\|_C=\lambda\|r\sin t+h(t)\|_C=O(r)$, то $\|\xi^\lambda(t)-\phi_a(\rho)\|_C=o(1)$ при малых r и из равенства нулю деформации (П.9) вытекает соотношение

$$\text{(П.23)}\qquad L(0)\rho-f\big(\rho,\phi_a(\rho)\big)=o(1)\quad\text{при}\quad r\to 0,$$

По предположению функция $L(0)\rho-f\big(\rho,\phi_a(\rho)\big)$ имеет единственный нуль $\rho=\rho_a^*$ и ее модуль стремится к бесконечности при $\rho\to\pm\infty$. Поэтому при $r\to 0$ из (П.23) вытекает равенство $\rho=\rho_a^*+o(1)$, следовательно $\rho_\lambda=\rho_a^*+o(1)$ и соотношение (П.22) можно переписать в виде $f_x\big(\rho_a^*+o(1),\phi_a(\rho_a^*+o(1))\big)=o(1)$, $r\to 0$. Отсюда и из условия $f_x\big(\rho_a^*,\phi_a(\rho_a^*)\big)\neq 0$ вытекает оценка $r>r_1$ при некотором малом $r_1>0$ для всех особых точек (r,w,h,ρ) деформации (П.9).

Докажем существование оценки сверху для r. В силу ограниченности функции $f(\cdot,\cdot)$ из равенства нулю деформации (П.9) вытекает оценка

$$\text{(П.24)}\qquad \rho\leqslant\rho_1\stackrel{\text{def}}{=}|L(0)|^{-1}\sup|f(x,y)|.$$

Так как операторы $\mathcal{A}(w)Q$ действуют из в C_0 в C^1 и верна равномерная оценка $\|\mathcal{A}(w)Q\|_{C_0\to C^1}\leqslant\kappa_0$ их норм при всех $w_1\leqslant w\leqslant w_2$, то из равенства нулю третьей компоненты деформации следуют включение $h\in C^1$ и оценка

$$\text{(П.25)}\qquad \|h\|_{C^1}\leqslant k_1\stackrel{\text{def}}{=}\kappa_0\sup|f(x,y)|.$$

Поэтому $\|x_\lambda(t)-r\sin t\|_{C^1}\leqslant\rho_\lambda+\|\lambda h(t)\|_{C^1}\leqslant R\stackrel{\text{def}}{=}\rho_a^*+\rho_1+\kappa_0$. В частности, $x_\lambda(t)=x(t)$, $\|x(t)-r\sin t\|_{C^1}\leqslant R$ при $\lambda=1$. Из равномерных при каждом малом $\delta>0$ и всех $y(t)$ из шара $\|y\|_{C^1}\leqslant R$ соотношений

$$\max_{\delta\leqslant t\leqslant\pi-\delta}\big|\mathcal{J}_a\big(r\sin t+y(t)\big)-\mu_0\big|\to 0,\qquad \max_{\pi+\delta\leqslant t\leqslant 2\pi-\delta}\big|\mathcal{J}_a\big(r\sin t+y(t)\big)+\mu_0\big|\to 0$$

при $r\to\infty$ вытекают равенства

$$\langle\cos t,f\big(x(t),\xi(t)\big)\rangle=\int\limits_0^\pi\cos t\,f\big(x(t),\mu_0\big)\,dt+\int\limits_\pi^{2\pi}\cos t\,f\big(x(t),-\mu_0\big)\,dt+o(1),$$

$$\langle\sin t,f\big(x_\lambda(t),\xi_\lambda(t)\big)\rangle=\int\limits_0^\pi\sin t\,f\big(x_\lambda(t),\mu_0\big)\,dt+\int\limits_\pi^{2\pi}\sin t\,f\big(x_\lambda(t),-\mu_0\big)dt+o(1)$$

при $r \to \infty$. Здесь $\|x_\lambda(t) - r\sin t\|_{C^1} \leqslant R$, поэтому ко всем четырем интегралам в правых частях этих равенств применима лемма 2 и, следовательно, интегралы в первом равенстве можно заменить интегралами

$$\int\limits_0^\pi \cos t\, f\bigl(r\sin t, \mu_0\bigr)\, dt = \int\limits_\pi^{2\pi} \cos t\, f\bigl(r\sin t, -\mu_0\bigr)\, dt = 0,$$

а во втором равенстве — интегралами

$$\int\limits_0^\pi \sin t\, f\bigl(r\sin t, \mu_0\bigr)\, dt, \qquad \int\limits_\pi^{2\pi} \sin t\, f\bigl(r\sin t, -\mu_0\bigr)\, dt.$$

В результате получим соотношения $\langle \cos t, f(\ldots)\rangle = o(1)$, $\langle \sin t, f(\ldots)\rangle = d(r) + o(1)$ при $r \to \infty$. По условию теоремы $|d(r)| \geqslant c > 0$ при $r \geqslant r_*$, поэтому равенство (П.20) возможно лишь при r из некоторого конечного интервала $0 < r < r_2$. Так как равенство (П.20) верно для каждой особой точки деформации, то для всех особых точек доказана оценка $r < r_2$.

В силу леммы 3 для особых точек деформации верны оценки (П.14). Но по условию теоремы в каждой из точек $w = w_1$ и $w = w_2$ верна хотя бы одна из противоположных (П.14) оценок (21) и (22). Поэтому деформация невырождена при $w = w_1$ и $w = w_2$. Из оценок (П.24) и (П.25) вытекает невырожденность деформации при $\rho > \rho_0$ и $\|h\|_C > k_1$. Значит, при достаточно малом r_1, достаточно большом r_2 и при $\rho_0 > \rho_1$ и $k_0 > k_1$ деформация невырождена на всей границе области G. Теорема доказана.

9. Доказательство теоремы 2. При входах $x_j(t) \equiv \rho_j$ оценка (31) нормы разности периодических выходов нелинейности Прейсаха имеет вид $|\phi_{a_1}(\rho_1) - \phi_{a_2}(\rho_2)| \leqslant 4\nu_\infty|\rho_1 - \rho_2| + \mu_*|a_1 - a_2|$. Если $\bigl\{\rho_j, \phi_{a_j}(\rho_j)\bigr\}$ — это положения равновесия уравнения (1), то есть $L(0)\rho_j = f\bigl(\rho_j, \phi_{a_j}(\rho_j)\bigr)$, то

$$|L(0)||\rho_1 - \rho_2| \leqslant q|\rho_1 - \rho_2| + q_1|\phi_{a_1}(\rho_1) - \phi_{a_2}(\rho_2)| \leqslant (q + 4\nu_\infty q_1)|\rho_1 - \rho_2| + \mu_* q_1|a_1 - a_2|.$$

При $q + 4\nu_\infty q_1 < |L(0)|$ отсюда вытекает единственность положения равновесия $\bigl\{\rho_a^*, \phi_a(\rho_a^*)\bigr\}$ при каждом a и утверждение (i) теоремы 2.

Выберем $w_1 \in (w_0/2, w_0)$ и $w_2 > w_0$, при которых верны соотношения (19) и у $\Im m\, L(wi)$ нет отличных от w_0 корней на $[w_1, w_2]$. В силу (16) для этого достаточно выбрать w_j близкими к w_0. Если хотя бы для одного положения равновесия $\{\rho_a^*, \phi_a(\rho_a^*)\}$ верна оценка (25), то при $q+4\nu_\infty q_1 < |L(0)|$ и

$$q+2\nu_\infty q_1 < \min_{w_1 \leqslant w \leqslant w_2} \min_{n=2,3,\ldots} |L(nwi)|, \qquad q+2\nu_\infty q_1 < |\Im m\, L(w_j i)|, \quad j = 1, 2,$$

выполнены все предположения теоремы 1 и поэтому верно утверждение (ii). Если оценка (25) верна для каждого положения равновесия $\{\rho_a^*, \phi_a(\rho_a^*)\}$, то при тех же q и q_1 у уравнения (П.1) есть нестационарное периодическое решение $\{x(t), \mathfrak{J}_a x(t)\}$ с первой компонентой вида (П.2) при каждом a.

Рассмотрим континуум $\{x(t+\theta), \mathfrak{J}_a x(t+\theta)\}$ нестационарных периодических решений уравнения (П.1) и построенный по ним цикл Γ_a уравнения (1) в пространстве $\mathbb{R}^{\ell+1}$. Выберем из континуума решение $\{x(t), \mathfrak{J}_a x(t)\}$ с первой компонентой вида (П.2). Из оценок (П.24), (П.25) и $r_1 < r < r_2$ вытекают оценки (26) при $r_0 = r_2 + \rho_1 + k_1$. Для доказательства утверждения (iii) осталось показать, что при $r_0 < R_\mu$ циклы Γ_a различны при различных a.

Пусть $\{x(t), \eta(t, \alpha, \beta)\}$ — решение уравнения (1), $\xi(t)$ — выход нелинейности Прейсаха при переменном состоянии $\eta(t, \alpha, \beta)$. Пусть при некотором t^* верны равенства $x'(t^*) = \ldots = x^{(\ell)}(t^*) = 0$. Тогда $L(0)x(t^*) = f\big(x(t^*), \xi(t^*)\big)$. Поэтому $\{x(t^*), \xi(t^*)\}$ — положение равновесия и пара $\{x^1(t), \eta^1(t, \alpha, \beta)\} \equiv \{x(t^*), \eta(t^*, \alpha, \beta)\}$ является решением уравнения (1) при $t \geqslant t^*$. В силу условия Липшица (9) значения $x(t^*)$, $x'(t^*) = \ldots = x^{(\ell-1)}(t^*) = 0$ и начальное состояние $\eta(t^*, \alpha, \beta)$ определяют единственное решение задачи Коши для уравнения (1) при $t \geqslant t^*$ и, следовательно, решения $\{x(t), \eta(t, \alpha, \beta)\}$ и $\{x^1(t), \eta^1(t, \alpha, \beta)\}$ совпадают при $t \geqslant t^*$. Значит, $x(t) \equiv x(t^*)$, $\xi(t) \equiv \xi(t^*)$; так как для нестационарных периодических решений это невозможно, то хотя бы одна из производных $x'(t), \ldots, x^{(\ell)}(t)$ отлична от нуля при каждом t, то есть $\big(x(t), \ldots, x^{(\ell-1)}(t)\big)$ — это гладкая кривая в пространстве $\mathbb{R}^\ell$.

Пусть периодические решения $\{x_j(t), \xi_j(t)\} = \{x_j(t), \mathfrak{J}_{a_j} x_j(t)\}$, $j = 1, 2$, определяют один и тот же цикл, то есть $\big(x_j(t), \ldots, x_j^{(\ell-1)}(t), \xi_j(t)\big)$ — это два представления одной и той же непрерывной кривой в пространстве $\mathbb{R}^{\ell+1}$. Тогда $x_2(t) = x_1\big(\tau(t)\big), \dots, x_2^{(\ell-1)}(t) = x_1^{(\ell-1)}\big(\tau(t)\big), \xi_2 = \xi_1\big(\tau(t)\big)$, где $\tau(t)$ — строго монотонная функция, и так как $L(\dfrac{d}{dt})x_j(t) = f\big(x_j(t), \xi_j(t)\big)$, то $x_2^{(\ell)}(t) = x_1^{(\ell)}\big(\tau(t)\big)$. Из соотношений $|x_1'(t)| + \ldots + |x_1^{(\ell)}(t)| > 0$ и $x_2^{(k)}(t) = x_1^{(k)}\big(\tau(t)\big)$ при всех $k = 1, \dots, \ell$ и $t \in \mathbb{R}$ вытекает тождество $\tau' \equiv 1$ и, следовательно, $x_2(t+\theta) \equiv x_1(t)$, $\xi_2(t+\theta) \equiv \xi_1(t)$. Но $\xi_2(t+\theta) = \mathcal{J}_{a_2} x_2(t+\theta)$, поэтому $\xi_1(t) = \mathcal{J}_{a_1} x_1(t) = \mathcal{J}_{a_2} x_1(t)$. Если $\|x_1(t)\|_C \leqslant r_0 < R_\mu$, то из равенства $\mathcal{J}_{a_1} x_1(t) = \mathcal{J}_{a_2} x_1(t)$ вытекает, что $a_1 = a_2$. Поэтому циклы Γ_a различны при различных a. Теорема доказана.

Список литературы

1. *Ewing J.A.* Experimental research in magnetism. // Philosophical Transactions of the Royal Society of London, **176**, II, 1895.

2. Physica B, Condensed Matter. Proc. of the 3d Int. Symposium on Hysteresis and Micromagnetic Modelling. 306, No 1-4, 2001.

3. *Cross R.* Hysteresis. The Handbook of Economic Methodology. Edward Edgar, 1995.

4. *Dixit A.K., Pindyck R.S.* Investment under Uncertainty. Princeton U.P., 1994.

5. *Красносельский М.А., Покровский А.В.* Системы с гистерезисом. М.: Наука, 1983.

6. *Brokate M., Sprekels J.* Hysteresis and phase transitions. Springer, New York, 1996.

7. *Visintin A.* Differential models of hysteresis. Springer, Berlin, 1994.

8. *Krejčí P.* Hysteresis, convexity and dissipation in hyperbolic equations. Gakkotosho, Tokyo, 1996.

9. *Красносельский М.А., Покровский А.В.* Операторы задачи о вынужденных колебаниях в системах с гистерезисом. // Доклады АН СССР. 1992. Т. 334. №3. С. 540-543.

10. *Красносельский М.А., Забрейко П.П.* Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука, 1975.

11. *Блиман П.-А., Красносельский А.М., Рачинский Д.И.* Секторные оценки нелинейностей и существование автоколебаний в системах управления. // Автоматика и телемеханика. 2000. №6. С. 3-18.

12. *Красносельский А.М., Рачинский Д.И.* О существовании циклов в автономных системах. // Доклады Академии наук. 2002. Т. 384. №2. 161-166.

13. *Рачинский Д.И.* Диссертация на соискание ученой степени доктора физ.-мат. наук, 2002.

№	q_0	q (min)	$2\nu_\infty q_1$ (max)	w_1	w_2	$k_1(w_1)$	$k_1(w_2)$	$k_2(w_1)$
1	1,295	1,294994	0,000006	0,8494	1,0497	0,237	0,108	3.717
2	1,2	1,158	0,042	0,833	1,059	0,255	0,129	3.450
3	1,1	1,014	0,086	0,816	1,070	0,273	0,156	3.183
4	1,0	0,870	0,130	0,797	1,081	0,291	0,183	2.899
5	0,9	0,728	0,172	0,777	1,092	0,308	0,211	2.614
6	0,8	0,586	0,214	0,756	1,104	0,324	0,242	2.331
7	0,7	0,445	0,255	0,732	1,115	0,340	0,272	2.026
8	0,6	0,305	0,295	0,705	1,127	0,355	0,305	1,708
9	0,5	0,166	0,334	0,671	1,139	0,369	0,339	1,340
10	0,4	0,025	0,375	0,613	1,152	0,383	0,377	0,795
11	0,385	0,0003	0,3847	0,5784	1,1547	0,3849	0,3849	0,517
12	0,3848	0	0,3848	0,5849	1,1547	0,384801	0,38489	0,567
13	0,3	0	0,3	0,786	1,126	0,3004	0,301	2,740
14	0,2	0	0,2	0,878	1,089	0,201	0,202	4,219
15	0,1	0	0,1	0,945	1,047	0,101	0,1007	5,499

Таб. 1. Соответствие между величинами q_0, q, w_1 и w_2