О глобальных ветвях циклов при бифуркациях Хопфа

А.М. Красносельский, Д.И. Рачинский (Москва)
E-mails: Sashaamk@iitp.ru; rach@iitp.ru

Рассмотрим систему

$$\frac{dz}{dt} = A(\lambda)z + F(z, \lambda), \qquad z \in \mathbb{R}^N, \tag{1}$$

с непрерывной правой частью, имеющую нулевое положение равновесия при всех значениях скалярного параметра $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$. Говорят, что λ_0 — это точка бифуркации Хопфа, если по каждому достаточно малому $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\lambda = \lambda(\varepsilon) \in (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon)$, при котором у системы (1) есть цикл с амплитудой $\|z\|_C < \varepsilon$. Другими словами, у системы есть сколь угодно малые циклы при некоторых сколь угодно близких к λ_0 значениях параметра. В силу теорем Андронова–Хопфа и их модификаций (см., например, [1,2]) при $F(z, \lambda) = o(z)$, $z \to 0$, точки бифуркации Хопфа определяются по главной линейной части системы, то есть по матрице $A(\lambda)$. Именно, предположим, что у матрицы $A(\lambda)$ есть пара простых собственных значений $\sigma(\lambda) \pm w(\lambda)i$ (здесь $\sigma(\lambda)$, $w(\lambda)$ — это непрерывные действительные функции, функция $w(\lambda)$ положительна). Пусть эти собственные значения пересекают мнимую ось в точках $\pm w_0 i$ при $\lambda = \lambda_0$ и пусть выполнено условие нерезонансности: точки $\pm n w_0 i$ не принадлежат спектру матрицы $A(\lambda_0)$ при целых $n \neq \pm 1$. Тогда λ_0 — это точка бифуркации Хопфа, причем периоды возникающих малых циклов стремятся к $2\pi/w_0$ при $\lambda \to \lambda_0$.

Эта теорема носит локальный характер: она содержит информацию о циклах, расположенных в малой окрестности нулевого положения равновесия в фазовом пространстве $\mathbb{R}^N$, и при значениях параметра, близких к точке бифуркации λ_0. Одна из естественных задач, связанных с анализом бифуркации Хопфа, заключается в том, чтобы проследить и изучить возникающие при бифуркации ветви циклов в нелокальных областях. Стандартные подходы здесь основаны на методе продолжения по параметру и теоремах о неявной функции, при применении которых необходима достаточно подробная информация о правой части системы (1) и дополнительные условия гладкости.

В настоящей работе предлагаются грубые условия существования глобальной ветви циклов, начинающейся в нуле и уходящей в бесконечность, оценка интервала значений параметра λ, при которых эти циклы существуют, и общая оценка их периодов.

Рассматрим систему (1) и предположим, что для непрерывной нелинейности $F(z, \lambda)$ верна равномерная по $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ секторная оценка

$$|F(z, \lambda)| \leq q|z|, \qquad z \in \mathbb{R}^N. \tag{2}$$

Других требований к нелинейности не предъявляется (в том числе, не предполагается более высокий порядок малости нелинейности по сравнению с линейным слагаемым при $z \to 0$). Как оказывается, естественные модификации стандартных предположений теорем Андронова – Хопфа о линейной части системы (1) гарантируют существование глобальной ветви циклов при выполнении оценки (2) с достаточно малым q.

Будем говорить, что у уравнения (1) есть глобальная непрерывная ветвь циклов при λ из отрезка $[\lambda_1, \lambda_2]$, если замыкание любой ограниченной окрестности нуля в фазовом пространстве $\mathbb{R}^N$ содержит хотя бы при одном $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ хотя бы один цикл уравнения (1), имеющий по крайней мере одну точку на границе этой окрестности. В частности, если имеется такая ветвь, то у уравнения (1) есть циклы всех положительных амплитуд $r = \|z\|_C > 0$. Из определения глобальной непрерывной ветви циклов не вытекает ни непрерывная зависимость от параметра λ ни, тем более, что множество циклов является непрерывным образом луча.

Теорема. *Пусть у матрицы $A(\lambda)$ есть пара простых собственных значений $\sigma(\lambda) \pm w(\lambda)i$ (где $\sigma(\lambda)$, $w(\lambda)$ — непрерывные действительные функции) таких, что $\sigma(\lambda_1)\sigma(\lambda_2) < 0$ и $0 < w_1 \le w(\lambda) \le w_2$ при всех $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$. Пусть числа nwi не принадлежат спектру матрицы $A(\lambda)$ при всех $w \in [w_1, w_2]$, $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ и целых $n \ne \pm 1$. Тогда найдется такое $q > 0$, при котором из оценки (2) вытекает существование глобальной непрерывной ветви циклов у уравнения (1) при $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ с периодами $T \in [2\pi/w_2, 2\pi/w_1]$.*

Вместо неравенства (2) можно использовать другие близкие оценки, например, $|F(z,\lambda)| \le |Dz|$.

Приведенную теорему естественно дополнить алгоритмом определения допустимого коэффициента q секторной оценки. Авторам известен простой эффективный алгоритм оценки коэффициента q для уравнений высшего порядка (см., [3]). Ограничимся здесь простыми примерами.

Пример 1.

Рассмотрим уравнение

$$x''' + (2-\lambda)x'' + (1 - 2\lambda + 2\lambda^2)x' + (2 + \lambda/2)x = f(x, x', x'', \lambda).$$

Пусть $|f(x,x_1,x_2,\lambda)| \le 1,268|x|$. Тогда при $-0,426 < \lambda < 1,304$ у этого уравнения есть глобальная непрерывная ветвь циклов с периодами $1,355\pi < T < 3,271\pi$.

Пример 2.

Рассмотрим уравнение

$$x''' + (2+\lambda)x'' + (1 - 2\lambda + 2\lambda^2)x' + (2 + \lambda/2)x = f(x, x', x'', \lambda).$$

Пусть $|f(x,x_1,x_2,\lambda)| \le 0{,}384|x|$. Тогда у этого уравнения есть глобальная непрерывная ветвь циклов при $-0{,}181 < \lambda < 0{,}457$ с периодами $1{,}814\pi < T < 2{,}230\pi$, а также другая глобальная непрерывная ветвь циклов при $0{,}457 < \lambda < 1{,}099$ с периодами $2{,}044\pi < T < 2{,}345\pi$.

Результаты без существенных изменений и трудностей переносятся на системы с запаздываниями и некоторые другие классы систем.

Работа поддержана грантом РФФИ № 01-01-00146, Д.И. Рачинский поддержан грантом Фонда содействия отечественной науке.

Литература

1. Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980.

2. Козякин В.С., Красносельский М.А. Метод функционализации параметра в задаче о точках бифуркации. ДАН СССР, **254**, №5, 1980, 1061-1064.

3. Красносельский А.М., Рачинский Д.И. О непрерывных ветвях циклов в системах с нелинеаризуемыми нелинейностями. Доклады Академии наук, **389**, №1, 2003, 11-16.