УДК 517.2 *МАТЕМАТИКА*

О существовании циклов в автономных системах

© 2001 г. А.М. Красносельский, Д.И. Рачинский

Представлено академиком Н.А. Кузнецовым xx.xx.2001 г.

Поступило xx.xx.2001 г.

1. Введение

Рассматриваются квазилинейные автономные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнения высших порядков с запаздыванием и без запаздывания и уравнения в частных производных. Предлагаются достаточные условия существования цикла и нескольких различных циклов в ситуациях, когда нелинейности линеаризуемы в нуле и на бесконечности и глобально удовлетворяют достаточно узким секторным оценкам. Результаты носят общий характер и могут быть доказаны по одной и той же схеме, примененной в [2] для одного класса уравнений теории управления. При доказательстве конкретных теорем (особенно для уравнений в частных производных) приходится использовать специфику изучаемой задачи. Справедливы аналогичные общие теоремы для дифференциальных уравнений в абстрактных банаховых пространствах, в настоящей работе они не формулируются.

Линейные части уравнений предполагаются вырожденными: если нелинейность равна нулю, то у уравнения есть нетривиальные периодические решения. Оказывается, что если нелинейность линеаризуема в нуле и на бесконечности и линейные приближения в нуле и на бесконечности удовлетворяют условию типа неравенства, то при достаточно узкой секторной оценке у нелинейного уравнения есть нетривиальный цикл.

Результаты работы могут быть интерпретированы как условия сохранения по крайней мере одного цикла при разрушении двумерного инвариантного подпространства, состоящего из циклов, в результате нелинейного возмущения линейного уравнения. Теоремы о существовании циклов в системах, полученных возмущением уравнения, у которого есть семейство периодических траекторий, восходят к работам Пуанкаре (см., например, [3], гл.III) и Андронова (см. часть 1 и исторический обзор в книге [1]); этой задаче посвящена обширная литература. Основная специфика предлагаемых в настоящем сообщении результатов состоит в "грубости" предположений о нелинейном возмущении: выделен широкий класс негладких возмущений, при которых у возмущенной системы есть хотя бы один или несколько циклов. Этот класс описывается величинами ε и $q_0 = q_0(\varepsilon)$, участвующими в формулировках теорем 1 и 2. Выбор q_0, не зависящего от ε в условиях теорем 1 и 2, вообще говоря, невозможен (см. пример после теоремы 2). Формулировки остальных результатов для простоты приведены для индивидуальных нелинейностей; эти результаты аналогично могут быть переформулированы для классов нелинейностей.

Аналогичные результаты для операторных уравнений и краевых задач типа задачи Дирихле хорошо известны и могут быть найдены практически в любой монографии по нелинейному анализу (см., например, [4]). Однако в задаче о периодических решениях автономных уравнений возникает ряд стандартных сложностей (априори неизвестен период, решение в функциональном пространстве заведомо неединственно и др.), требующих специальных методов анализа. Геометрические конструкции в фазовом пространстве (типа принципа тора; см. [5] или [6]) не используются. Построения проводятся в специально сконструированном бесконечномерном пространстве.

2. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассмотрим систему

$$z' = Az + qF(z), \qquad z \in \mathbb{R}^\ell. \tag{1}$$

Пусть матрица A имеет пару простых собственных значений $\pm w_0 i$ ($w_0 > 0$) и числа $n w_0 i$ не являются ее собственными значениями при целых $n \neq \pm 1$. Пусть вектор-функция $F(z)$ непрерывна и верна оценка

$$|F(z)| \leqslant |z|, \qquad z \in \mathbb{R}^\ell. \tag{2}$$

Здесь $|\cdot|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^\ell$, порожденная скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (выбор скалярного произведения при формулировке теорем роли не играет). Из оценки (2) вытекает, что нуль — это положение равновесия системы (1). Будем предполагать, что функция $F(z)$ дифференцируема в нуле и на бесконечности, то есть определены матрицы B_0 и B_∞, при которых

$$\lim_{z\to 0} |z|^{-1} |F(z) - B_0 z| = \lim_{|z|\to\infty} |z|^{-1} |F(z) - B_\infty z| = 0.$$

Пусть A^* — сопряженная для A матрица. Определим векторы e, g и e_*, g_*, для которых верны соотношения

$$Ae = -w_0 g, \quad Ag = w_0 e, \quad A^* e_* = w_0 g_*, \quad A^* g_* = -w_0 e_*,$$
$$\langle e_*, e \rangle = \langle g_*, g \rangle = 1, \qquad \langle e_*, g \rangle = \langle g_*, e \rangle = 0.$$

В силу этих соотношений функции $e \sin w_0 t + g \cos w_0 t$, $e \cos w_0 t - g \sin w_0 t$ являются $2\pi/w_0$-периодическими решениями линейного уравнения $z' = Az$, полученного из (1) при $q = 0$. Положим

$$\mu_0 = \langle e_*, B_0 e \rangle + \langle g_*, B_0 g \rangle, \qquad \mu_\infty \langle e_*, B_\infty e \rangle + \langle g_*, B_\infty g \rangle.$$

Теорема 1. По каждому $\varepsilon > 0$ можно указать такое $q_0 = q_0(\varepsilon) > 0$, при котором из оценок $|\mu_0| \geqslant \varepsilon$, $|\mu_\infty| \geqslant \varepsilon$, $|q| \leqslant q_0$ и $\mu_0\mu_\infty < 0$ вытекает существование по крайней мере одного нетривиального цикла у системы (1).

Диаметр существующего в силу теоремы 1 цикла системы (1) и расстояние от этого цикла до нуля ограничены сверху и снизу положительными константами, которые зависят от $F(z)$. Период цикла при малых $|q|$ близок к периоду $2\pi/w_0$ циклов системы $z' = Az$. Если у матрицы A есть K пар простых собственных значений $\pm w_1 i, \dots, \pm w_K i$ и числа $w_1 n i, \dots, w_K n i$ не являются ее собственными значениями при целых $n \neq \pm 1$ (в частности числа $\pm w_1 i, \dots, \pm w_K i$ не кратны друг другу), то из оценки $\mu_0\mu_\infty < 0$ вытекает существование по крайней мере K нетривиальных циклов различных периодов у системы (1) при каждом достаточно малом по модулю значении q.

Оценка $\mu_0\mu_\infty < 0$ может быть интерпретирована следующим образом. Рассмотрим линеаризации $z' = (A + qB_0)z$ и $z' = (A + qB_\infty)z$ системы (1) в нуле и на бесконечности. В силу теории возмущений при малых по модулю значениях q у матриц $A + qB_0$ и $A + qB_\infty$ есть пары простых собственных значений $\sigma_0(q) \pm w_0(q)i$ и $\sigma_\infty(q) \pm w_\infty(q)i$, для которых справедливы равенства

$$\sigma_0(0) = \sigma_\infty(0) = 0, \quad w_0(0) = w_\infty(0) = w_0$$

и $\sigma_0'(0) = \mu_0/2$, $\sigma_\infty'(0) = \mu_\infty/2$. Поэтому при малых $|q|$ неравенство $\mu_0\mu_\infty < 0$ эквивалентно оценке $\sigma_0(q)\sigma_\infty(q) < 0$. Для системы на плоскости ($\ell = 2$) эта оценка имеет простой геометрический смысл: неустойчивость нулевого положения равновесия и диссипативность системы (при возрастании времени, если $\sigma_0(q) > 0$, $\sigma_\infty(q) < 0$, и при убывании времени, если $\sigma_0(q) < 0$, $\sigma_\infty(q) > 0$).

Если у матрицы A нет собственных значений на мнимой оси, то при малых $|q|$ у системы (1) нет нетривиальных периодических решений.

3. Уравнения высшего порядка

Рассмотрим уравнение

$$L\Big(\frac{d}{dt}\Big)x = qf(x, x', \dots, x^{(\ell-1)}), \tag{3}$$

где $L(p)$ — это вещественный многочлен степени ℓ. Пусть у многочлена $L(p)$ есть пара корней $\pm w_0 i$ ($w_0 > 0$) кратности r и числа $n w_0 i$ не являются его корнями при целых $n \neq \pm 1$. Другими словами, справедливо представление

$$L(p) = (p^2 + w_0^2)^r M(p),$$

причем

$$M(n w_0 i) \neq 0, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Функции $\xi \cos w_0 t + \eta \sin w_0 t$ $(\xi, \eta \in \mathbb{R})$ являются периодическими решениями уравнения (3) при $q = 0$.

Будем использовать обозначения $z = (z_1, \dots, z_\ell)$ и $f(z) = f(z_1, \dots, z_\ell)$. Пусть верна секторная оценка

$$|f(z)| \leqslant |z|, \qquad z \in \mathbb{R}^\ell.$$

Пусть скалярная функция $f(z)$ непрерывна во всем пространстве $\mathbb{R}^\ell$ и дифференцируема в нуле и на бесконечности: при некоторых $a, b \in \mathbb{R}^\ell$

$$\lim_{z \to 0} \frac{f(z) - \langle a, z \rangle}{|z|} = \lim_{|z| \to \infty} \frac{f(z) - \langle b, z \rangle}{|z|} = 0.$$

По векторам $a = (a_1, \dots, a_\ell)$ и $b = (b_1, \dots, b_\ell)$ определим многочлены

$$N_0(p) = a_\ell p^{\ell-1} + \ldots + a_2 p + a_1, \qquad N_\infty(p) = b_\ell p^{\ell-1} + \ldots + b_2 p + b_1.$$

Положим

$$\mu_0 = \Im m\big(M(-w_0 i) N_0(w_0 i)\big), \qquad \mu_\infty = \Im m\big(M(-w_0 i) N_\infty(w_0 i)\big).$$

Т е о р е м а 2. *Пусть кратность r корней $\pm w_0 i$ многочлена $L(p)$ нечетна. Тогда по каждому $\varepsilon > 0$ можно указать такое $q_0 = q_0(\varepsilon) > 0$, при котором из оценок $|\mu_0| \geqslant \varepsilon$, $|\mu_\infty| \geqslant \varepsilon$, $|q| \leqslant q_0$ и $\mu_0 \mu_\infty < 0$ вытекает существование хотя бы одного нетривиального цикла у уравнения* (3).

Приведем пример, показывающий зависимость q_0 от ε. Пусть $L(p) = p^3 + p^2 + p + 1$, $f(x, x', x'') = x'' + x' + 2x + \varphi(x)$. Здесь условие $\mu_0 \mu_\infty < 0$ имеет вид $\varphi'(0)\varphi'(\infty) < 0$. При любом сколь угодно малом q выберем $\varphi(x)$, удовлетворяющую очень узкой секторной оценке. Так как уравнение (3) в рассматриваемом случае имеет вид $x''' + x'' + x' + x - q(x'' + x' + 2x) = q\varphi(x)$ и характеристический многочлен левой части при малых $q \neq 0$ не имеет чисто мнимых корней, то нетривиальных периодических решений нет.

Теорема 2 развивает результаты работы [2], где изучен класс уравнений теории управления, включающий уравнения

$$L\Big(\frac{d}{dt}\Big) x = q f(x). \tag{4}$$

Здесь скалярная нелинейность не зависит от производных переменной x. Для таких уравнений оценка q_0 величины $|q|$ определяется только линейной частью, оценки $|\mu_0| \geqslant \varepsilon$ и $|\mu_\infty| \geqslant \varepsilon$ не используются. По многочлену $L(p)$ можно определить такое число $q_0 > 0$, что при любой нелинейности $f(x)$, удовлетворяющей секторной оценке $|f(x)| \leqslant |x|$ и условию $f'(0)f'(\infty) < 0$, у уравнения

(4) при $|q| \leqslant q_0$ есть хотя бы один нетривиальный цикл. В [2] указаны явные алгоритмы вычисления величины q_0; посчитаны примеры. Так, например, уравнение $x''' + x'' + x' + x = qf(x)$ имеет по крайней мере один нетривиальный цикл периода $T \in [6{,}283\,, 7{,}652]$, если $f'(0)f'(\infty) < 0$ и $|q| < 0{,}745$.

Условие $\mu_0\mu_\infty < 0$ теоремы 2 исключает ситуацию, когда многочлен $L(p)$ четный (содержит только четные степени переменной p) и функция $f(\cdot)$ зависит только от четных производных переменной x. В этой специальной ситуации естественно существование глобального континуума циклов всех положительных амплитуд. Для уравнений (4) существование глобальных континуумов циклов доказано в [7]. Такие уравнения являются гамильтоновыми.

Условие об асимптотической линейности на бесконечности может быть заменено на существенно менее ограничительное, по крайней мере для уравнений вида (4). Например, при $f'(0) < 0$ условие $f'(\infty) > 0$ можно заменить условием $xf(x) \geqslant \xi x^2$, где $\xi > 0$ (при этом предположение о линеаризуемости нелинейности на бесконечности уже не нужно).

4. Уравнения с запаздыванием

Приведем аналог теоремы 2 для уравнения

$$(5)\quad L\Big(\frac{d}{dt}\Big)x + L_1\Big(\frac{d}{dt}\Big)x(t-\theta) = qf\big(x, x', \dots, x^{(\ell-1)}; x(t-\theta), \dots, x^{(\ell-1)}(t-\theta)\big)$$

с запаздыванием θ. Здесь $L(p)$ и $L_1(p)$ — многочлены степеней ℓ и ℓ_1, $\ell > \ell_1$.

Пусть функция $f(z;y) = f(z_1, \dots, z_\ell; y_1, \dots, y_\ell)$ непрерывна по совокупности переменных и верна оценка

$$|f(z;y)| \leqslant |z| + |y|, \qquad z, y \in \mathbb{R}^\ell.$$

Пусть $f(z,y)$ дифференцируема в нуле и на бесконечности:

$$\lim_{|z|+|y|\to 0} \frac{f(z;y) - \langle a, z\rangle - \langle c, y\rangle}{|z| + |y|} = \lim_{|z|+|y|\to \infty} \frac{f(z;y) - \langle b, z\rangle - \langle d, y\rangle}{|z| + |y|} = 0.$$

По компонентам векторов a, b, c, d определим целые аналитические функции

$$\Phi_0(p) = a_\ell p^{\ell-1} + \ldots + a_2 p + a_1 + (c_\ell p^{\ell-1} + \ldots + c_2 p + c_1)e^{-\theta p},$$

$$\Phi_\infty(p) = b_\ell p^{\ell-1} + \ldots + b_2 p + b_1 + (d_\ell p^{\ell-1} + \ldots + d_2 p + d_1)e^{-\theta p}.$$

По многочленам $L(p)$ и $L_1(p)$ определим целую функцию $\Psi(p) = L(p) + L_1(p)e^{-\theta p}$; пусть $\Psi^{(k)}(p)$ — ее производная порядка k.

Теорема 3. *Пусть $\Psi(\pm w_0 i) = 0$ $(w_0 > 0)$, нули $\pm w_0 i$ имеют нечетный порядок r и $\Psi(\pm n w_0 i) \neq 0$ при целых $n \neq \pm 1$. Пусть*

$$\Re\big(\Psi^{(r)}(-w_0 i)\Phi_0(w_0 i)\big)\ \Re\big(\Psi^{(r)}(-w_0 i)\Phi_\infty(w_0 i)\big) < 0. \tag{6}$$

Тогда при каждом достаточно малом по модулю значении q у уравнения (5) есть хотя бы одно нестационарное периодическое решение.

Каждой паре нулей $\pm wi$ $(w > 0)$ функции $\Psi(p)$ соответствует двумерное подпространство периодических решений уравнения (5) при $q = 0$.

Например, рассмотрим уравнение

$$x'(t) + \alpha x(t) + \beta x(t-\theta) = qf\big(x(t), x(t-\theta)\big).$$

Здесь $L(p) = p + \alpha$, $L_1(p) \equiv \beta$, $\Psi(p) = p + \alpha + \beta e^{-\theta p}$, $\Phi_0(p) = a + ce^{-\theta p}$, $\Phi_\infty(p) = b + de^{-\theta p}$. Если $|\beta| > |\alpha|$ и верны соотношения

$$\alpha + \beta\cos\big(\theta\sqrt{\beta^2-\alpha^2}\,\big) = 0, \qquad \beta\sin\big(\theta\sqrt{\beta^2-\alpha^2}\,\big) > 0,$$

то у функции $\Psi(p)$ есть пара мнимых нулей $\pm i\sqrt{\beta^2-\alpha^2}$ первого порядка; других нулей на мнимой оси у функции $\Psi(p)$ нет. Оценка (6) имеет вид

$$\big((\beta a - \alpha c) + \theta\beta(\alpha a - \beta c)\big)\big((\beta b - \alpha d) + \theta\beta(\alpha b - \beta d)\big) < 0. \tag{7}$$

В частности, при $\alpha = 0$ у уравнения

$$x'(t) + \beta x(t-\theta) = qf\big(x(t), x(t-\theta)\big)$$

с достаточно малым $|q|$ есть хотя бы одно нестационарное периодическое решение, если $\theta\beta = \pi/2 + 2\pi n$ при целом n и $(a - \theta\beta c)(b - \theta\beta d) < 0$. Для уравнения

$$x'(t) + \alpha x(t) + \beta x(t-\theta) = qf\big(x(t)\big)$$

с не содержащей запаздывания нелинейностью оценка (7) при $\alpha\theta \neq -1$ имеет вид $ab < 0$ и означает, что производные нелинейности в нуле и на бесконечности имеют разные знаки. Теорема 3 не применима к уравнению первого порядка с не содержащей запаздывания линейной частью $(\beta = 0)$. Для уравнения

$$x'' + \alpha^2 x = qf\big(x, x', x(t-\theta), x'(t-\theta)\big)$$

второго порядка условия теоремы выполнены при

$$\big(\alpha a_2 + \alpha c_2\cos(\alpha\theta) - c_1\sin(\alpha\theta)\big)\big(\alpha b_2 + \alpha d_2\cos(\alpha\theta) - d_1\sin(\alpha\theta)\big) < 0.$$

Если использовать естественные модификации функций $\Phi_0(p)$, $\Phi_\infty(p)$ и $\Psi(p)$, то теорема 3 без изменения формулировки применима к уравнениям с несколькими сосредоточенными запаздываниями. Например, для уравнения

$$L\Big(\frac{d}{dt}\Big)x + L_1\Big(\frac{d}{dt}\Big)x(t-\theta_1) + L_2\Big(\frac{d}{dt}\Big)x(t-\theta_2) = qf\big(x, x', \ldots\big)$$

нужно положить $\Psi(p) = L(p) + L_1(p)e^{-\theta_1 p} + L_2(p)e^{-\theta_2 p}$. В условиях теоремы 3 верно представление $\Psi(p) = (p^2 + w_0^2)^r\Theta(p)$, где $\Theta(p)$ — целая функция и $\Theta(nw_0 i) \neq 0$ при целых n; оценка (6) эквивалентна оценке

$$\Im m\big(\Theta(-w_0 i)\Phi_0(w_0 i)\big)\ \Im m\big(\Theta(-w_0 i)\Phi_\infty(w_0 i)\big) < 0.$$

5. Уравнения в частных производных

Рассмотрим в полосе $t \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$ уравнение

$$u_{tt} + u_{xx} + \alpha^2 u = qf(x, u, u_t, u_x), \qquad u \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

с краевыми условиями

$$u(t, 0) \equiv u(t, \pi) \equiv 0. \tag{9}$$

Нас интересуют периодические по t решения задачи (8), (9). Их периоды априори неизвестны. Решения $u(t, x) \not\equiv u(x)$ называют нестационарными.

Пусть при всех $u, v, y \in \mathbb{R}$ и $0 \leqslant x \leqslant \pi$ верна секторная оценка

$$|f(x, u, v, y)| \leqslant \rho, \qquad \rho = |u| + |v| + |y|. \tag{10}$$

Пусть функция $f(x, u, v, y)$ дифференцируема в нуле и на бесконечности при почти каждом x:

$$\lim_{\rho\to 0}\ \rho^{-1}\big(f(x, u, v, y) - a_0(x)u - b_0(x)v - c_0(x)y\big) = 0,$$
$$\lim_{\rho\to \infty}\ \rho^{-1}\big(f(x, u, v, y) - a_\infty(x)u - b_\infty(x)v - c_\infty(x)y\big) = 0.$$

Пусть функции $a_0(x)$, $b_0(x)$, $c_0(x)$ и $a_\infty(x)$, $b_\infty(x)$, $c_\infty(x)$ интегрируемы с квадратом на отрезке $0 \leqslant x \leqslant \pi$. Для простоты предположим, что $f(x, u, v, y)$ удовлетворяет локальному условию Гельдера с показателем $\gamma \in (0, 1)$, то есть

$$|f(x_1, u_1, v_1, y_1) - f(x_2, u_2, v_2, y_2)| \leqslant d(r)\big(|x_1 - x_2|^\gamma + |u_1 - u_2|^\gamma + |v_1 - v_2|^\gamma + |y_1 - y_2|^\gamma\big)$$

при $\rho_j = |u_j| + |v_j| + |y_j| \leqslant r$, $j = 1, 2$.

Т е о р е м а 4. *Пусть $\alpha > 1$ не целое число. Пусть*

$$\int_0^\pi b_0(x)\sin^2 x\,dx \int_0^\pi b_\infty(x)\sin^2 x\,dx < 0. \tag{11}$$

Тогда у задачи (8), (9) *есть хотя бы одно нестационарное периодическое решение при каждом достаточно малом по модулю значении q.*

Для уравнения

$$u_{tt} + u_{xx} + \alpha^2 u = qf(u, u_t, u_x), \tag{12}$$

где нелинейность не зависит от x, условие (11) имеет вид $b_0 b_\infty < 0$.

Рассмотрим условия существования у уравнения (12) нескольких периодических решений различных периодов.

Т е о р е м а 5. *Пусть $\alpha > 1$ не целое число. Пусть найдется K различных натуральных чисел $m = m_1, \ldots, m_K$, для каждого из которых при $n = 1, \ldots, m$ и всех целых $j \geqslant 2$ верны соотношения*

$$m < \alpha, \qquad \alpha^2 \neq m^2 + (m^2 - n^2)/(j^2 - 1).$$

Пусть $b_0 b_\infty < 0$. Тогда при любом достаточно малом по модулю значении q у задачи (9), (12) *есть по крайней мере K нестационарных периодических решений; периоды всех этих решений различны.*

В теоремах 4, 5 речь идет о классических решениях уравнений (8) и (12). Эти решения лежат в классе $C^{2+\gamma_1}(\Pi)$, где $\Pi = \{(t,x) : t \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant x \leqslant \pi\}$, $\gamma_1 > 0$.

В условиях теоремы 5 из соотношений

$$\alpha > 2, \quad \alpha \neq j, \quad \alpha^2 \neq 4 + 3(j^2 - 1)^{-1}, \quad j = 2, 3, \ldots$$

вытекает оценка $K \geqslant 2$ для числа K различных периодических (с различными периодами) решений задачи (8), (9); оценка $K \geqslant 3$ верна при

$$\alpha > 3, \quad \alpha \neq j, \quad \alpha^2 \neq 9 + 5(j^2 - 1)^{-1}, \quad \alpha^2 \neq 9 + 8(j^2 - 1)^{-1}, \quad j = 2, 3, \ldots$$

При каждом не целом α справедлива грубая оценка $K \geqslant \left[\frac{\sqrt{3\alpha^2+1}}{2}\right]$, где $[p]$ — это целая часть числа p. Например, $K \geqslant 2$ при всех не целых $\alpha > \sqrt{5}$.

Пусть Ω — замкнутая ограниченная область в $\mathbb{R}^\ell$ с достаточно гладкой границей Г. Естественные аналоги теорем 4 и 5 верны для уравнения

$$u_{tt} + \Delta u + \alpha^2 u = q\, f(x, u, u_t, u_{x_1}, \ldots, u_{x_\ell}), \qquad u \in \mathbb{R}, \tag{13}$$

в цилиндре $t \in \mathbb{R}$, $x = (x_1, \ldots, x_\ell) \in \Omega$. Здесь Δ — оператор Лапласа в области Ω с краевыми условиями $u \equiv 0$, $x \in \Gamma$. Его спектр $\sigma(\Delta)$ состоит из последовательности вещественных отрицательных собственных значений $\lambda_0 > \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots$, $\lambda_m \to -\infty$. Пусть $u_m(x)$ — собственная функция, отвечающая собственному значению λ_m.

Предположим, что функция $f(x,u,v,y)$ ($x \in \Omega$, $u,v \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^\ell$) непрерывна, справедлива секторная оценка (10) и

$$\lim_{\rho\to 0} \rho^{-1}\bigl(f(x,u,v,y) - a_0(x)u - b_0(x)v - \langle c_0(x), y\rangle\bigr) = 0, \qquad x \in \Omega,$$

$$\lim_{\rho\to \infty} \rho^{-1}\bigl(f(x,u,v,y) - a_\infty(x)u - b_\infty(x)v - \langle c_\infty(x), y\rangle\bigr) = 0, \qquad x \in \Omega,$$

где скалярные функции $a_0(x)$, $b_0(x)$, $a_\infty(x)$, $b_\infty(x)$ и вектор-функции $c_0(x)$, $c_\infty(x)$ интегрируемы с квадратом на Ω. Тогда при $\alpha^2 + \lambda_0 > 0$ из оценки

$$\int\limits_\Omega b_0(x)\, u_m^2(x)\, dx \int\limits_\Omega b_\infty(x)\, u_m^2(x)\, dx < 0 \tag{14}$$

для $m = 0$ вытекает существование периодического по t нестационарного решения у уравнения (13) при любом достаточно малом $|q|$. Если для $K \geqslant 1$ различных простых собственных значений λ_m верны соотношения $\alpha^2+\lambda_m > 0$, $j^2(\alpha^2+\lambda_m) \neq \alpha^2+\lambda_n$ при всех целых $j \geqslant 2$, $n \geqslant 0$ и для и всех соответствующих им собственных функций $u_m(x)$ выполнены оценки (14), то у уравнения (13) есть по крайней мере K нестационарных периодических решений, периоды которых попарно различны. Гладкость этих решений определяется гладкостью нелинейности $f(\cdot)$ и границы Γ области Ω. Если нелинейность $f(\cdot)$ не зависит от переменной x, то $a_0(x) \equiv a_0$, $b_0(x) \equiv b_0, \ldots$ и оценки (14) эквивалентны одному неравенству $b_0 b_\infty < 0$.

В заключение рассмотрим параболическое уравнение

$$u_t - \Delta u + \beta u(t-\theta) = q f(x,u), \qquad u,t \in \mathbb{R}, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^\ell, \tag{15}$$

с запаздыванием θ в линейной части. Как и выше, здесь $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial^2 x_1} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial^2 x_\ell}$ — это оператор Лапласа в ограниченной области Ω с условиями $u \equiv 0$ на границе. Пусть все его собственные значения отличны от числа β и хотя бы для одного простого собственного значения λ_m верны соотношения $\lambda_m^2 < \beta^2$, $\theta\lambda_m \neq 1$ и

$$-\lambda_m + \beta\cos\bigl(\theta\sqrt{\beta^2 - \lambda_m^2}\,\bigr) = 0, \qquad \beta\sin\bigl(\theta\sqrt{\beta^2 - \lambda_m^2}\,\bigr) > 0. \tag{16}$$

Пусть $|f(x,u)| \leqslant |u|$, функция $f(x,u)$ непрерывна, дифференцируема в нуле и на бесконечности по переменной u при почти каждом $x \in \Omega$ и ее производные $b_0(x)$ и $b_\infty(x)$ по u в нуле и на бесконечности интегрируемы с квадратом. Пусть верна оценка (14). Тогда у уравнения (15) при малых $|q|$ есть по крайней мере одно нестационарное периодическое решение.

Вместо оператора Лапласа в уравнениях (13) и (15) можно использовать другие эллиптические дифференциальные операторы (по переменной x) второго порядка, в том числе несимметрические и с переменными коэффициентами. Аналоги сформулированных теорем справедливы и для систем уравнений в частных производных. Все сформулированные теоремы, видимо, могут быть объединены и сформулированы в виде следствий из теорем о дифференциальных уравнениях в абстрактных банаховых пространствах.

6. Робастность условий существования циклов

Линейные части всех рассматриваемых уравнений предполагаются вырожденными. Основное условие вырожденности — это ограничение типа равенства на коэффициенты линейной части уравнения и входящие в линейную часть запаздывания. Это равенство нарушается при малых возмущениях линейной части. Однако, изменение коэффициентов линейной части эквивалентно возмущению нелинейности $f(\cdot)$ линейными слагаемыми. Поэтому при возмущениях коэффициентов линейной части слагаемыми порядка $|q|$ приведенные теоремы применимы к возмущенному уравнению.

Теоремы формально не могут быть использованы при возмущении величины запаздываний в линейной части. Однако, если возмущение мало по сравнению с $|q|$, то утверждения всех теорем справедливы для возмущенных уравнений. В качестве примера рассмотрим параболическое уравнение

$$u_t - \Delta u + \beta u(t-\theta_1) = qf(u), \qquad u, t \in \mathbb{R},\ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^\ell. \tag{17}$$

Пусть собственные значения оператора Δ отличны от числа β и хотя бы для одного простого собственного значения λ_m верны соотношения $\lambda_m^2 < \beta^2$, $\theta\lambda_m \neq 1$ и соотношения (16), где $|\theta - \theta_1| \leqslant \varepsilon|q|$. Пусть $|f(u)| \leqslant |u|$, функция $f(u)$ непрерывна, дифференцируема в нуле и на бесконечности и знаки ее производных в нуле и на бесконечности различны. Тогда у уравнения (17) при достаточно малых ε и $|q|$ есть хотя бы одно нестационарное периодическое решение.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (гранты 00-15-96116, 00-01-00571, 01-01-00146, 01-01-06372). Авторы благодарны Алексею Боровских за полезную дискуссию.

Список литературы

1. *Андронов А.А.* Собрание трудов. Изд-во АН СССР, 1956.

2. *Блиман П.-А., Красносельский А.М., Рачинский Д.И.* Секторные оценки нелинейностей и существование автоколебаний в системах управления. // Автоматика и телемеханика. 2000. №6. С. 3-18.

3. *Пуанкаре А.* Новые методы небесной механики. Избранные труды. Т.1. М.: Наука, 1971.

4. *Красносельский М.А., Забрейко П.П.* Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука, 1975.

5. *Плисс В.А.* Нелокальные проблемы теории колебаний. М.-Л.: Наука, 1964.

6. *Leonov G.A., Burkin I.M., Shepeljavyi A.I.* Frequency methods in oscillation theory. Dorderecht: Kluwer, 1996.

7. *Красносельский А.М., Рачинский Д.И.* О существовании континуумов циклов в автономных гамильтоновых системах управления. // Автоматика и телемеханика. 2001. №2. С. 65-74.

Ссылки на английские переводы:

2. *Bliman P.-A., Krasnosel'skii A.M., Rachinskii D.I.* Sector estimates of nonlinearities and self-oscillations existence in control systems // Automation and Remote Control. 2001. V.61. №6. Part 1. P. 889-903.

3. *Poincare H.*, Les Méthodes Nouvelles de la Méchanique Céleste. V. 1, Paris, 1892.

4. *Krasnosel'skiĭ M.A., Zabreĭko P.P.* Geometrical Methods of Nonlinear Analysis. Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo, Springer, 1984.

7. *Krasnosel'skii A.M., Rachinskii D.I.* Existence of cycle continua in Hamiltonian control systems // Automation and Remote Control. 2001. V.62. №2. P. 227-235.

А.М. Красносельский, Д.И. Рачинский

О существовании циклов в автономных системах

РЕФЕРАТ

Предлагаются условия существования циклов в квазилинейных автономных системах. Рассматриваются системы обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнения высших порядков и уравнения с запаздыванием, а также уравнения в частных производных. Приводятся достаточные условия существования циклов в ситуациях, когда нелинейности линеаризуемы в нуле и на бесконечности и глобально удовлетворяют достаточно узким секторным оценкам. Для уравнений в частных производных доказывается существование нескольких различных циклов.

A.M. Krasnosel'skii, D.I. Rachinskii

On existence of cycles in autonomous systems

Институт проблем передачи информации РАН, Москва

Institute for Information Transmission Problems, Moscow, Russia

Контактные телефоны:

(дом) **936-32-30**, Красносельский Александр Маркович
E-mail: amk@iitp.ru

(дом) **122-62-50**, Рачинский Дмитрий Игоревич
E-mail: rach@iitp.ru

Служебный общий: **299-83-54**

Главному редактору журнала
“Доклады Академии наук”
академику В.А. Кабанову

Глубокоуважаемый Виктор Александрович!

Прошу Вас опубликовать в журнале “Доклады Академии наук” в разделе “Математика” статью А.М. Красносельского, Д.И. Рачинского “О существовании циклов в автономных системах”. Статья не содержит запрещенных к публикации сведений, в экспертизе не нуждается и может быть опубликована в открытой печати.

Директор ИППИ РАН
академик Н.А. Кузнецов