

А.М. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ, д-р физ.-мат. наук,
Д.И. РАЧИНСКИЙ, канд. физ.-мат. наук
(Институт проблем передачи информации РАН, Москва) ,

П.-А. БЛИМАН, канд. физ.-мат. наук
(Национальный исследовательский институт информатики и автоматки, Реконкур,
Франция)

О СИЛЬНЫХ РЕЗОНАНСАХ ПРИ БИФУРКАЦИЯХ ХОПФА В СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ¹

Рассмотрены резонансы 0:1 и 1:1 при бифуркациях Хопфа в системах управления с параметром. Предложены условия возникновения циклов в окрестности положения равновесия и на бесконечности. В окрестности положения равновесия отдельно рассмотрены случаи нелинейностей с главной квадратичной частью и с главной однородной частью общего (неполиномиального) вида. На бесконечности рассмотрен основной случай ограниченных нелинейностей типа насыщения и сводящихся к ним в результате процедуры усреднения.

¹Работа частично написана в период пребывания А.М.Красносельского во Французском национальном исследовательском институте информатики и автоматки (INRIA) в 2000 г. Российские соавторы поддержаны грантами Российского Фонда Фундаментальных Исследований №№ 0001-00571 и 00-15-96116.

1. Введение. Постановка задачи

1.1. Бифуркации Хопфа. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$(1) \quad x' = g(x, \lambda), \quad x \in \mathbb{R}^N$$

со скалярным параметром $\lambda \in \Lambda = [-1, 1]$. Пусть $g(0, \cdot) \equiv 0$, то есть 0 является положением равновесия системы для всех λ .

Определение 1. Значение λ_0 параметра называется **точкой бифуркации Хопфа в нуле с частотой $w_0 > 0$** для системы (1), если для всех достаточно малых $r > 0$ существуют такие λ_r , что уравнение (1) при $\lambda = \lambda_r$ имеет T_r -периодическое решение $x_r = x_r(t)$, причем

$$\lambda_r \rightarrow \lambda_0, \quad \|x_r\|_C \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad T_r \rightarrow \frac{2\pi}{w_0} \quad \text{при} \quad r \rightarrow 0.$$

Переменная r в этом определении — это дополнительный параметр. Использование дополнительного параметра, отличного от λ , обычно в теории бифуркаций Хопфа [14, 10]. В определении можно полагать $r \in (0, 1)$, однако естественно возникающие параметры принимают малые значения. В условиях некоторых теорем настоящей работы можно полагать $r = \lambda - \lambda_0$ или $r = \lambda_0 - \lambda$.

Наиболее естественный подход к задаче о бифуркациях Хопфа заключается в следующем. Предположим, что функция $g(x, \lambda) : \mathbb{R}^N \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^N$ непрерывна и дифференцируема в нуле по x :

$$(2) \quad g(x, \lambda) = A(\lambda)x + f(x, \lambda),$$

где $A(\lambda)$ — это Якобиева матрица функции $g(x, \lambda)$ в нуле и²

$$(3) \quad \lim_{|x| \rightarrow 0} |x|^{-1} \sup_{\lambda \in \Lambda} |f(x, \lambda)| = 0.$$

Следующее утверждение является удобной стандартной переформулировкой главной части знаменитой теоремы Хопфа [12, 14, 10].

Утверждение 1. Пусть матрица $A(\lambda)$ имеет пару простых сопряженных собственных значений $\sigma(\lambda) \pm w(\lambda)i$, пусть $\sigma(\lambda_0) = 0$, $w(\lambda_0) > 0$ и пусть числа $kw(\lambda_0)i$ для $k = 0, \pm 2, \pm 3, \dots$ не являются собственными значениями $A(\lambda_0)$. Пусть скалярная функция $\sigma(\lambda)$ дифференцируема при $\lambda = \lambda_0$ и

$$(4) \quad \left. \frac{d}{d\lambda} \sigma(\lambda) \right|_{\lambda=\lambda_0} \neq 0.$$

Тогда λ_0 — точка бифуркации Хопфа в нуле с частотой $w_0 = w(\lambda_0)$ для уравнения (1).

²Здесь и ниже через $|\cdot|$ обозначаются модули вещественных и комплексных чисел, а также нормы в конечномерных пространствах.

Если пара комплексных чисел $\sigma(\lambda) \pm w(\lambda)i$ удовлетворяет условиям теоремы, то говорят, что эта пара *пересекает мнимую ось **трансверсально** в точке λ_0* .

В условиях утверждения 1 можно доказать дополнительные важные утверждения о функциях λ_r и T_r и о циклах $x_r(t)$; мы из здесь не обсуждаем.

Обычно циклы $x_r(t)$ существуют либо при $\lambda_r > \lambda_0$, либо при $\lambda_r < \lambda_0$. Если уравнение (1) в естественном смысле гамильтоново, возникает ситуация $\lambda_r \equiv \lambda_0$.

Сформулируем определение точки бифуркации на бесконечности, следуя [5]. Теперь предположения о существовании положений равновесия не нужны.

Определение 2. *Значение параметра λ_0 называется **точкой бифуркации Хопфа на бесконечности с частотой $w_0 > 0$** для системы (1), если для достаточно больших значений $r > 0$ существуют такие λ_r , что уравнение (1) при $\lambda = \lambda_r$ имеет T_r -периодическое решение $x_r = x_r(t)$ и*

$$\lambda_r \rightarrow \lambda_0, \quad \|x_r\|_C \rightarrow \infty \quad \text{и} \quad T_r \rightarrow \frac{2\pi}{w_0} \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty.$$

В следующем утверждении (см. [5]) определяющую роль играет линейная часть уравнения (1) на бесконечности.

Утверждение 2. *Пусть нелинейность $g(x, \lambda)$ в (1) имеет вид (2), где функция $f(x, \lambda)$ сублинейна на бесконечности:*

$$(5) \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^{-1} \sup_{\lambda \in \Lambda} |f(x, \lambda)| = 0.$$

Пусть матрица $A(\lambda)$ имеет пару простых сопряженных собственных значений $\sigma(\lambda) \pm w(\lambda)i$, пусть $\sigma(\lambda_0) = 0$, $w(\lambda_0) > 0$ и пусть числа $kw(\lambda_0)i$ для $k = 0, \pm 2, \pm 3, \dots$ не являются собственными значениями $A(\lambda_0)$. Пусть $\sigma(\lambda)$ дифференцируема при $\lambda = \lambda_0$ и пусть справедливо условие (4). Тогда λ_0 — точка бифуркации Хопфа на бесконечности с частотой $w_0 = w(\lambda_0)$ для уравнения (1).

Оба утверждения 1 и 2 могут доказываться различными методами: нормальные формы [13, 18], теорема о неявной функции [13, 18], интегральные многообразия [10, 19], метод функционализации параметра [4]. В настоящей работе мы используем комбинацию метода гармонического баланса и топологических методов [9].

1.2. Резонансные бифуркации Хопфа. Важным условием утверждений 1 и 2 является *условие нерезонансности*: пара простых собственных значений матрицы $A(\lambda)$ при $\lambda = \lambda_0$ пересекает мнимую ось, остальные $N - 2$ собственных значения матрицы $A(\lambda_0)$ не попадают на множество $\{kw_0i\}$, $k \in \mathbb{Z}$. Если это условие нарушается, то ситуацию называют *резонансной*. Простейший случай резонансной ситуации возникает, если кроме первой пары собственной значений существует еще ровно одна пара простых собственных значений вида $\pm kw_0i$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Если $k = 0$, то это вещественный корень, если $k = 1$, то при $\lambda = \lambda_0$ у матрицы $A(\lambda)$ на мнимой оси есть пара корней кратности 2, если $k > 1$, то при $\lambda = \lambda_0$ у $A(\lambda_0)$ на мнимой оси есть две пары простых собственных значений $\pm w_0i$ и $\pm kw_0i$.

Так как отрезки, высекаемые на мнимой оси собственными значениями и началом координат, относятся как $k:1$, то такую ситуацию естественно назвать *резонанс $k:1$* .

Пусть $k \geq 2$ — целое число. В силу соответствующего утверждения (1 или 2 для бифуркаций в нуле или на бесконечности) величина λ_0 является точкой бифуркации Хопфа с частотой $k\omega_0$. Возникает естественный вопрос: *является ли λ_0 точкой бифуркации Хопфа с частотой ω_0 или нет?* Утверждения 1 и 2 не дают ответа на этот вопрос.

Этот ответ различный для различных k и существенно зависит от свойств сублинейных нелинейностей (в условиях обоих утверждений 1 и 2 от нелинейности требуется лишь непрерывность и сублинейность).

Для $k > 2$ (так называемый *слабый резонанс*) ситуация вообще говоря следующая. Если нелинейность имеет главную полиномиальную часть порядка $k - 1$ или меньше (например, обладает достаточно высокой гладкостью, аналитическая и пр.), тогда циклы периода близкого к $2\pi/\omega_0$, вообще говоря, не существуют. В частности, квадратичная часть никогда не определяет ситуацию. Более точно, циклы существуют для малых множеств значений параметров [13, 1]. Если основная однородная часть не является полиномиальной, такие циклы могут существовать.

Случай $k = 2$ (один из случаев *сильного резонанса*) был изучен в [19, 15, 17] с различных позиций и различными методами. Метод, примененный в [17], отчасти используется и в настоящей работе.

Если $k = 0$ и $k = 1$, то невозможно применить утверждение 1 или 2 для доказательства существования малых (или больших) циклов какой угодно частоты. Будут изучены именно эти случаи сильного резонанса $k = 0$ и $k = 1$. Для них предлагаются достаточные условия существования малых и больших циклов для систем управления с одной нелинейностью, оценки их количества и простейшие асимптотики.

Изучаемые уравнения рассмотрены в следующем разделе.

1.3. Система управления с одной скалярной нелинейностью. Рассмотрим уравнение

$$(6) \quad L\left(\frac{d}{dt}, \lambda\right)x = M\left(\frac{d}{dt}, \lambda\right)f(x, \lambda)$$

динамики одноконтурной системы, зависящей от параметра λ , состоящей из линейного интегрирующего звена с дробно рациональной передаточной функцией $W(p, \lambda) = M(p, \lambda)/L(p, \lambda)$ и нелинейной функциональной обратной связи $f(x, \lambda)$. Блок-схема такой системы изображена на Рис. 1.

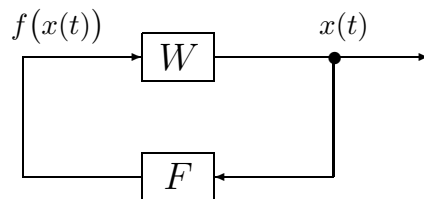


Рис. 1. Одноконтурная система

Здесь

$$(7) \quad L(p, \lambda) = p^\ell + a_1(\lambda)p^{\ell-1} + \dots + a_\ell(\lambda), \quad M(p, \lambda) = b_0(\lambda)p^m + b_1(\lambda)p^{m-1} + \dots + b_m(\lambda)$$

— взаимно простые вещественные многочлены, $\ell = \deg L(p, \lambda) > m = \deg M(p, \lambda)$. Функция $f(x, \lambda) : \mathbb{R} \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ считается непрерывной по совокупности переменных, $\Lambda = [-1, 1]$ — множество значений параметра. Во всех утверждениях о бифуркациях в окрестности положения равновесия предполагается, что $f(0, \lambda) = 0$, т.е. нуль — это положение равновесия системы при всех λ .

Решения уравнения (1) понимаются в обычном в теории управления смысле ([20, 2]) как решения эквивалентной системы первого порядка в пространстве состояний.

Мы рассматриваем это уравнение вместо общего случая (1)–(2). Общий случай может быть рассмотрен аналогично, выкладки и ответы становятся существенно более громоздкими, однако суть результатов и метода остается такой же.

1.4. Краткое описание результатов. В следующем разделе 2 изучается случай резонанса 0:1, то есть случай, когда при одном значении параметра $\lambda = \lambda_0$ мнимую ось пересекают одновременно 3 корня многочлена $L(p)$: пара простых сопряженных корней и один вещественный корень (через ноль по вещественной оси). Остальные корни при $\lambda = \lambda_0$ не попадают на множество $\{\pm k\omega_0 i\}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Предлагается анализ бифуркаций Хопфа в нуле для уравнения (6) с нелинейностью $f(x, \lambda)$ имеющей главную квадратичную часть (теоремы 1 и 2) и главную однородную часть общего вида (теорема 3). Теорема 3 более общая, теорема 1 из нее вытекает. Теорема 1 сформулирована отдельно по нескольким причинам. Во-первых, частный случай квадратичных нелинейностей особенно важен. Во-вторых, в нем можно досчитать ответ “до числа”. В-третьих, во многих связанных задачах (например, теорема 6), квадратичный случай принципиально отличается от “общего”; в задаче о резонансе 0:1 это не так.

Теорема 4 продолжает теорему 3 для уравнений с запаздыванием.

Бифуркации Хопфа на бесконечности рассматриваются для ограниченных нелинейностей с насыщением и “близких” к ним (теорема 5). Мы не формулируем теорем о бифуркациях на бесконечности ни для неограниченных нелинейностей, ни для нелинейностей, малых на бесконечности (если нелинейность на бесконечности однородна и порядок однородности не равен нулю, то она либо неограничена, либо стремиться к нулю). Для изучения систем с неограниченными сублинейными нелинейностями требуется сложная дополнительная техника (см., [6]). Системы с нелинейностями, стремящимися к нулю на бесконечности представляются нереалистичными.

В разделе 3 рассматривается резонанс 1:1, то есть случай, когда для $\lambda = \lambda_0$ мнимую ось в одной и той же точке пересекают ровно 2 пары сопряженных собственных корней многочлена L , а остальные корни при $\lambda = \lambda_0$ не принадлежат множеству $\{\pm k\omega_0 i\}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Теорема 6 содержит достаточные условия существования малых циклов для систем с нелинейностями f , имеющими главную квадратичную часть. Эта теорема более громоздка чем теорема 1, в ней используются также и кубические слагаемые.

В теоремах 8 и 9 рассматриваются системы, имеющие главную однородную часть общего вида. Наиболее прост (теорема 8) случай, когда главная часть не является четной. При этом достаточные условия используют только эту главную часть.

Если главная часть четная ($|x|^s$, $s > 1$), ситуация существенно усложняется (как это и было в теореме 6 при $s = 2$). Снова главная однородная часть не определяет ответа, необходимо использовать старшие нечетные члены. Они могут играть или не играть определяющей роли, эта ситуация естественна и при нерезонансных бифуркациях Хопфа (см. [7]). Приведенная теорема 9 охватывает простейший случай, когда старшие четные члены не слишком превосходят старшие нечетные (заметим, что теорема 6 сюда не входит, квадратичные члены уже слишком большие и кубическими не мажорируются). Для рассмотрение общего случая необходимо использовать итерационные процедуры, аналогичные процедурам из [7].

Доказательства вынесены в приложение, они используют общую идею, она объяснена в самом начале. Далее показано, как именно эта идея реализуется в условиях конкретных теорем. Полное подробное доказательство дано только для теоремы 3, другие доказательства аналогичны и приведены фрагментарно. В большей части теорем в качестве параметра циклов выбирается, грубо говоря, амплитуда основных гармоник циклов. Однако в части теорем использована параметризация исходным параметром λ .

1.5. Замечания. А. Случаи резонанса 0:1 и 1:1 очень различны со всех точек зрения. Мы скомпоновали их в одну статью именно потому, что оба этих случая могут быть исследованы похожими методами. Конечно, основной вопрос о возникновении циклов общий для обоих случаев.

В. Случай резонанса 1:1 очень похож на другой вырожденный случай, когда вместо условия нерезонансности нарушается условие трансверсальности (см. [7]). Если рассмотреть уравнение

$$x' = Ax + f(x, \lambda), \quad x \in \mathbb{R}^N$$

с сублинейной $f(x, \lambda)$ и вообще независимой от параметра λ линейной частью, то возникают похожие на на резонанс 1:1 эффекты: также при исследовании систем с гладкими нелинейностями основную роль играют и квадратичные, и кубические слагаемые; также различна роль четных и нечетных компонент $f(x, \lambda)$.

С. Для того, чтобы значение параметра было точкой бифуркации Хопфа *необходимо*, чтобы на мнимой оси лежала по крайней мере одна пара собственных значений матрицы $A(\lambda_0)$ (конечно, если эта матрица определена).

Д. Для того, чтобы привести две пары собственных значений на мнимую ось при одном и том же значении параметра, мы должны, вообще говоря, иметь возможность влиять на два независимых скалярных параметра реальной системы.

2. Резонанс 0:1

2.1. Ветвление положений равновесия. В условиях всех теорем этого раздела происходит ветвление положений равновесия в нуле и на бесконечности. Это ветвление определяется наличием у главной линейной части простого вещественного корня, пересекающего мнимую ось — проходящего через начало координат на комплексной плоскости. Рассмотрим подробнее лишь случай ветвления в нуле.

Предположим, что

$$L(p, \lambda) = (p + a(\lambda))L_0(p, \lambda),$$

$L_0(0, \lambda_0) \neq 0$, $a(\lambda) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \lambda_0$, и $a(\lambda) \neq 0$ для $\lambda \neq \lambda_0$. Пусть $f(x, \lambda)$ — сублинейна (в нуле или на бесконечности) и $f(x, \lambda_0) \not\equiv 0$. Тогда скалярное уравнение

$$L_0(0, \lambda)a(\lambda)r = M(0, \lambda)f(r, \lambda)$$

относительно неизвестной r имеет по крайней мере одно (малое или большое, в зависимости от того, где f сублинейна) решение r_λ для любого $\lambda \neq \lambda_0$ достаточно близкого к λ_0 . Каждое решение этого уравнения является положением равновесия нашей системы, эти положения равновесия существуют и при $\lambda > \lambda_0$, и при $\lambda < \lambda_0$.

Решения r_λ формируют соответствующую ветвь положений равновесия.

Еще раз подчеркнем, что существование нетривиальных положений равновесия определяется лишь вещественным корнем многочлена $L(p, \lambda)$. Остальные корни многочлена $L(p, \lambda)$ роли не играют. Ветвление положений равновесия не связано непосредственно с возникновением циклов и далее не обсуждается.

2.2. Бифуркации в окрестности положения равновесия. Для простоты мы предполагаем во всех теоремах, что $w_0 = 1$, очевидно, такое предположение не нарушает общности рассуждений.

Рассмотрим уравнение (6).

В этой части работы предлагаются четыре теоремы. Две первые имеют общий характер для “гладких” нелинейностей, например тех, которые могут быть представлены в виде рядов Тейлора. Естественно, у таких нелинейностей основные члены — квадратичные.

Третья теорема имеет общий характер для негладких нелинейностей. Предполагается, что нелинейность имеет вид

$$(8) \quad a(\lambda)|x|^s + b(\lambda)x|x|^{s-1} + o(|x|^s)$$

(то есть имеет однородную порядка $s > 1$ главную часть). Для этого случая точные вычисления “в формулах” не даются, и условия теоремы 3 представляются проверяемыми только приближенно, например, на компьютере. Приведены примеры.

Четвертая теорема относится к уравнениям с запаздыванием. Одним из приятных особенностей предлагаемого метода является то, что он переносится на более сложные системы с запаздыванием, гистерезисом, управлением по производным без существенных методических сложностей (конечно, ответы получатся более громоздкими).

2.2.1. Квадратичные нелинейности. Предположим³, что

$$(9) \quad f(x, \lambda) = x^2 + o(x^2).$$

Пусть $L(p, \lambda_0) = (p^3 + p)L_1(p, \lambda_0)$, более того

$$(10) \quad L(p, \lambda) = (p^2 + 1 + a(\lambda)p + b(\lambda))(p + d(\lambda))L_1(p, \lambda_0).$$

Здесь

$$(11) \quad a(\lambda), b(\lambda), d(\lambda) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \lambda \rightarrow \lambda_0,$$

$$(12) \quad L_1(ki) \neq 0 \quad \text{при} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

³Это общая ситуация, возможный коэффициент перед x^2 включается в $M(p, \lambda)$.

Представление (10) и условие о взаимной простоте многочленов L и M влечет соотношения $M(0, \lambda_0) \neq 0$ и $M(\pm i, \lambda_0) \neq 0$. Ниже регулярно используются обозначение

$$W_1(p, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{M(p, \lambda)}{L_1(p, \lambda)}.$$

Пусть функции $a(\lambda), b(\lambda)$ и $d(\lambda)$ дифференцируемы⁴ при $\lambda = \lambda_0$:

$$(13) \quad a(\lambda) = \alpha(\lambda - \lambda_0) + o(\lambda - \lambda_0), \quad b(\lambda) = \beta(\lambda - \lambda_0) + o(\lambda - \lambda_0), \quad d(\lambda) = \delta(\lambda - \lambda_0) + o(\lambda - \lambda_0).$$

Положим

$$(14) \quad c_1 = \alpha^{-1} \Re W_1(i, \lambda_0), \quad c_2 = \delta W_1^{-1}(0, \lambda_0).$$

Теорема 1. Пусть выполнены условия трансверсальности

$$(15) \quad \alpha \neq 0, \quad \delta \neq 0$$

и пусть определено число

$$(16) \quad \xi_0 = (-2(2c_1c_2 + 1))^{-1/2},$$

то есть

$$(17) \quad 2c_1c_2 + 1 < 0.$$

Тогда при достаточно малом $r_0 > 0$ для любого $r \in (0, r_0)$ найдутся такие

$$w_r = 1 \mp \xi_0 r (\Im W_1(i, \lambda_0) + \beta c_1) + o(r), \quad \lambda_r = \lambda_0 \pm 2c_1 r \xi_0 + o(r),$$

что для $\lambda = \lambda_r$ уравнение (6) имеет $(2\pi w_r^{-1})$ -периодическое решение

$$(18) \quad x_r(t) = r(\sin w_r t + \xi_0) + h_r(t),$$

где $\|h(t)\|_C = O(r^2)$ — некоторая $(2\pi w_r^{-1})$ -периодическая функция.

Выбор верхних или нижних символов “−” или “+” из “∓” и “±” соответствует двум ветвям циклов: при $\lambda > \lambda_0$ и при $\lambda < \lambda_0$.

Теорема 2. Пусть справедливы соотношения (15), (17) и $\Re W_1(i, \lambda_0) \neq 0$. Тогда для всех $\lambda \neq \lambda_0$, достаточно близких к λ_0 , существует $2\pi w_\lambda^{-1}$ -периодический цикл

$$x_\lambda(t) = r_\lambda(\sin w_\lambda t + \xi_0) + h_\lambda(t)$$

уравнения (6), где $\|h(t)\|_C = O((\lambda - \lambda_0)^2)$ — некоторая $(2\pi w_\lambda^{-1})$ -периодическая функция,

$$w_\lambda = 1 - \frac{1}{2}(\lambda - \lambda_0)(c_1^{-1} \Im W_1(i, \lambda_0) + \beta) + o(\lambda - \lambda_0), \quad r_\lambda = \left| \frac{\lambda - \lambda_0}{2c_1 \xi_0} \right|.$$

⁴Будем писать $\gamma_1 = o(\gamma_2)$, если $\lim \gamma_1/\gamma_2 = 0$; и $\gamma_1 = O(\gamma_2)$, если $\overline{\lim} |\gamma_1/\gamma_2| < \infty$. По какой переменной берутся пределы, всегда ясно из контекста.

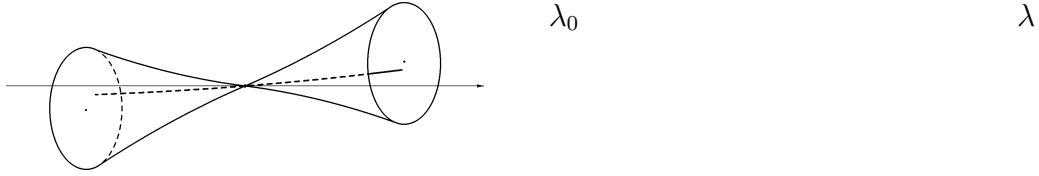


Рис. 2. Циклы и положения равновесия в условиях теоремы 1

На Рис. 2 нарисованы 2 кривых из положений равновесия и 2 семейства циклов. Все это образуется при близких к λ_0 значениям λ в окрестности нуля пространства состояний. Множество ненулевых положений равновесия (пунктирная кривая) локально является почти прямой и обладают центральной симметрией в пространстве $\mathbb{R}^\ell \times \Lambda$. Множество циклов (изображено в виде двух конических поверхностей, на которых расположены циклы), как это видно из теоремы, такой симметрией не обладает; наоборот оно обладает симметрией относительно гиперплоскости $\lambda = \lambda_0$.

2.2.2. Однородные нелинейности общего вида. Пусть

$$(19) \quad f(x, \lambda) = F(x, \lambda) + \Phi(x, \lambda),$$

где

$$F(\xi x, \lambda) = \xi^s F(x, \lambda), \quad \xi > 0$$

($s > 1$ — показатель однородности),

$$(20) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sup_{\lambda \in \Lambda} |x|^{-s} |\Phi(x, \lambda)| = 0.$$

Положим

$$\Psi_1(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\sin t + \xi, \lambda_0) dt, \quad \Psi_S(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin t F(\sin t + \xi, \lambda_0) dt.$$

Мы будем говорить, что скалярное уравнение $\mathcal{F}(x) = 0$ имеет *регулярное решение* \tilde{x} , если в некоторой малой окрестности \tilde{x} функция $\mathcal{F}(\cdot)$ положительна с одной стороны от \tilde{x} и отрицательна с другой стороны.

Теорема 3. Пусть уравнение

$$(21) \quad c_1 c_2 \xi \Psi_S(\xi) + \Psi_1(\xi) = 0$$

относительно неизвестной ξ имеет регулярное решение ξ_0 . Тогда существует $r_0 > 0$ такое, что при каждом $r \in (0, r_0)$ существуют

$$(22) \quad w_r = 1 + (\text{Im } W_1(i, \lambda_0) + \beta c_1) \Psi_S(\xi_0) r^{s-1} + o(r^{s-1}), \quad \lambda_r = \lambda_0 - c_1 r^{s-1} \Psi_S(\xi_0) + o(r^{s-1})$$

такие, что для $\lambda = \lambda_r$ уравнение (6) имеет $(2\pi w_r^{-1})$ -периодическое решение вида (18), где $\|h(t)\|_C = o(r^s)$ — некоторая $(2\pi w_r^{-1})$ -периодическая функция.

Естественно, уравнение (21) может иметь разное количество регулярных решений. Каждое из них порождает свою собственную ветвь циклов. Их количество может быть достаточно большим. Если функция $F(x, \lambda_0)$ нечетная, то 0 — всегда корень этого уравнения.

Заметим, что в теореме автоматически содержатся ответы на следующие вопросы: как соотносятся периоды рождающихся циклов с числом 2π и с какой стороны от точки бифуркации (при каких значениях λ , больших λ_0 или меньших) рождаются циклы.

Приведем примеры.

Пусть $F(x, \lambda) = x^2$. Тогда $\Psi_1(\xi) = \xi^2 + 1/2$, $\Psi_S(\xi) = 2\xi$. Уравнение (21) имеет вид $2c_1c_2\xi^2 + \xi^2 + 1/2 = 0$. Если выполнено условие (17), то последнее уравнение имеет два корня $\pm\xi_0$. Поэтому теорема 1 следует из теоремы 3.

Пусть $F(x, \lambda) = x|x|$, подобные нелинейности используются при моделировании некоторых систем управления движением судов [3] — ??.

Если выполнено условие (17), то определена величина ξ_0 (равенством (16)). Если она удовлетворяет неравенству $\xi_0 > 1$ (то есть $c_1c_2 < -.75$), то существует цикл вида (18), так как в этом случае $|\sin t + \xi_0| = \sin t + \xi_0$ и существует тот же самый цикл, что и для случая $F(x) = x^2$. Других циклов с $\xi > 1$ не бывает.

Теперь будем искать циклы с $\xi < 1$. Положим $\xi = \sin \eta$, $|\eta| \leq \pi/2$. В этом случае

$$\Psi_1(\xi) = \frac{1}{2\pi} (2\eta(2 - \cos 2\eta) + 3 \sin 2\eta), \quad \Psi_S(\xi) = \frac{4}{3\pi} (3\eta \sin \eta + \cos \eta(2 + \sin^2 \eta)),$$

и уравнение (21) относительно переменной η имеет вид

$$(23) \quad \frac{8c_1c_2}{3} \sin \eta (3\eta \sin \eta + \cos \eta(2 + \sin^2 \eta)) + 2\eta(2 - \cos 2\eta) + 3 \sin 2\eta = 0.$$

Это уравнение всегда имеет нулевой регулярный корень.

На Рис. 3 при некоторых c_1c_2 изображены графики левой части уравнения (23) как функции η ; корни уравнения отмечены точками на оси абсцисс. Если $c_1c_2 = -.75$, ненулевой корень уравнения (21) становится нерегулярным, при $c_1c_2 > -.75$ он пропадает совсем.

Таким образом, при $c_1c_2 > -.75$ у уравнения (21) есть один нулевой корень, а при $c_1c_2 < -.75$ у него есть много корней — целых 5 (три из них видны на Рис. 3, еще два имеют вид $\pm\xi_0$, где $|\xi_0| > 1$)! Это соответствует двум семействам циклов с каждой стороны от точки бифуркации λ_0 плюс еще один цикл с нулевым ξ_0 , про который без дополнительных предположений неизвестно с какой стороны от λ_0 он располагается.

Подчеркнем различие в условиях теорем 1 и 2 с одной стороны и теоремы 3 с другой. В предположениях теорем 1 и 2 точно известно, что для всех $\lambda \neq \lambda_0$ существует малый цикл. В предположениях теоремы 3 мы этого утверждать не можем! Если основное уравнение имеет единственное регулярное решение, малые циклы существуют только с одной

$$c_1 c_2 = -1.8$$

$$c_1 c_2 = -1.4$$

$$c_1 c_2 = -.8$$

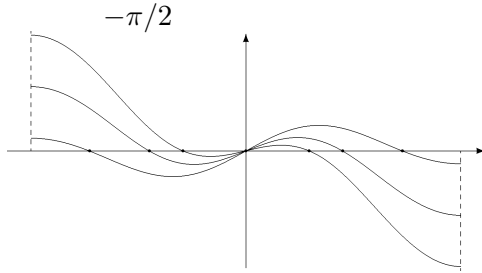


Рис. 3. Решения уравнения (23)

стороны от точки λ_0 . Даже если таких решений несколько (как в приведенном примере) для того, чтобы циклы рождались по обе стороны от точки бифуркации, необходимо, чтобы для различных корней уравнения (21) были разными знаки функции $\Psi_S(\cdot)$. Вообще, в примерах корни часто входят парами, разного знака, такие корни могут породить один и тот же цикл $x(t) = r(\sin wt + \xi) + h(t)$.

2.2.3. Системы с запаздыванием. Рассмотрим систему

$$(24) \quad L\left(\frac{d}{dt}, \lambda\right)x = M\left(\frac{d}{dt}, \lambda\right)f(x(t), x(t-h), \lambda).$$

с запаздыванием $h \in \mathbb{R}$. Пусть при некотором $s > 1$

$$f(x, y, \lambda) = F(x, y, \lambda) + \Phi(x, y, \lambda), \quad F(\theta x, \theta y, \lambda) = \theta^s F(x, y, \lambda), \quad \theta > 0,$$

причем

$$\lim_{|x|+|y| \rightarrow 0} \sup_{\lambda \in \Lambda} \frac{|\Phi(x, y, \lambda)|}{x^2 + y^2} = 0.$$

Пусть нелинейность $F(x, y, \lambda)$ удовлетворяет условию Липшица в окрестности нуля:

$$(25) \quad |F(x_1, y_1, \lambda) - F(x_2, y_2, \lambda)| \leq K (|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|).$$

Предположение об условии Липшица не делалось для уравнений без запаздывания, так как в условиях теорем 1–3 оно было выполнено автоматически: и для квадратичной функции, и для главной части функции вида (8) при $s > 1$ (это и есть однородная функция порядка s общего вида).

Положим

$$\begin{aligned}\Psi_1(\xi) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\sin t + \xi, \sin(t - h) + \xi, \lambda_0) dt, \\ \Psi_S(\xi) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin t F(\sin t + \xi, \sin(t - h) + \xi, \lambda_0) dt, \\ \Psi_C(\xi) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos t F(\sin t + \xi, \sin(t - h) + \xi, \lambda_0) dt\end{aligned}$$

и рассмотрим уравнение

$$(26) \quad \alpha W_1(0, \lambda_0) \Psi_1(\xi) + \delta \xi (-\Im W_1(i, \lambda_0) \Psi_C(\xi) + \Re W_1(i, \lambda_0) \Psi_S(\xi)) = 0.$$

Это уравнение близко к (21), очевидно, если $F(x, y) = F(x)$, то верно тождество $\Psi_C \equiv 0$.

Теорема 4. Пусть уравнение (26) имеет по крайней мере одно регулярное решение ξ_0 . Тогда существует $r_0 > 0$ такое, что для каждого $r \in (0, r_0)$ найдутся

$$w_r = 1 + y_0 r^{s-1} + o(r^{s-1}), \quad \lambda_r = \lambda_0 + (c_2 \xi_0)^{-1} \Psi_1(\xi_0) r^{s-1} + o(r^{s-1})$$

где

$$2y_0 = \frac{\beta}{\alpha} [-\Re W_1(i, \lambda_0) \Psi_S(\xi_0) + \Im W_1(i, \lambda_0) \Psi_C(\xi_0)] + \Re W_1(i, \lambda_0) \Psi_C(\xi_0) + \Im W_1(i, \lambda_0) \Psi_S(\xi_0),$$

такие, что при $\lambda = \lambda_r$ уравнение (24) имеет $(2\pi w_r^{-1})$ -периодическое решение (18); $\|h(t)\|_C = o(r^s)$ — некоторая $(2\pi w_r^{-1})$ -периодическая функция.

Приведем естественный пример. Пусть $F(x, y) = \sigma_1(\lambda)x^2 + 2\sigma_2(\lambda)xy + \sigma_3(\lambda)y^2$, тогда

$$\begin{aligned}\Psi_1(\xi) &= \xi^2(\sigma_1 + 2\sigma_2 + \sigma_3) + \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3 + 2\sigma_2 \cos h), \\ \Psi_S(\xi) &= 2\xi(\sigma_1 + \sigma_2 + (\sigma_2 + \sigma_3) \cos h), \quad \Psi_C(\xi) = -2\xi(\sigma_2 + \sigma_3) \sin h\end{aligned}$$

($\sigma_j = \sigma_j(\lambda_0)$) и из теоремы 4 вытекает

Следствие 1. Пусть $W_1(p, \lambda) \equiv 1$, то есть рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка и пусть

$$\alpha \left(\alpha(\sigma_1 + 2\sigma_2 + \sigma_3) + 2\delta(\sigma_1 + \sigma_2 + (\sigma_2 + \sigma_3) \cos h) \right) \left(\sigma_1 + \sigma_3 + 2\sigma_2 \cos h \right) < 0.$$

Тогда по обе стороны от точки λ_0 рождается по ветке малых циклов.

2.3. Бифуркации на бесконечности.

2.3.1. Нелинейности с насыщением. Обычно слова “нелинейность с насыщением” означает, что $f(x)$ монотонная и имеет различные конечные пределы при $x \rightarrow +\infty$ и при $x \rightarrow -\infty$. Более общий класс нелинейностей, рассмотренный ниже, включает в себя все такие нелинейности как частный случай. Это объясняет название настоящего раздела.

Снова предположим, что справедливо представление (19), причем функция $\Phi(x, \lambda)$ имеет равномерно по λ сублинейную первообразную:

$$(27) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sup_{\lambda \in \Lambda} \frac{1}{x} \left| \int_0^x \Phi(u, \lambda) du \right| = 0,$$

а $F(x, \lambda)$ — это главная однородная часть $f(x, \lambda)$:

$$(28) \quad F(\xi x, \lambda) = F(x, \lambda), \quad \xi > 0.$$

Последнее равенство означает, что при некоторых $f^+(\lambda)$ и $f^-(\lambda)$ справедливы равенства

$$(29) \quad F(x, \lambda) = \frac{1}{2}(f^+(\lambda) + f^-(\lambda)) + \frac{1}{2}(f^+(\lambda) - f^-(\lambda)) \operatorname{sign} x \equiv \begin{cases} f^+(\lambda), & x > 0, \\ f^-(\lambda), & x < 0. \end{cases}$$

Значение такой функции в нуле не играет роли. Так как $F(x, \lambda)$ разрывна в нуле и $f(x, \lambda)$ непрерывна, функция $\Phi(x, \lambda)$ должна быть также разрывна в нуле, чтобы скомпенсировать скачок функции F .

Многие ограниченные функции имеют сублинейные на бесконечности первообразные. Например, все периодические и почти периодические функции с нулевым средним; все функции стремящиеся к нулю на бесконечности; функции $\sin \sqrt{|x|}$ и $\sin x^3$ и т.д. Функции 1 , $\arctan x$ и $\sin \log(1 + |x|)$ не удовлетворяют (27).

Предположим, что многочлен $L(p, \lambda)$ удовлетворяет условиям предыдущих разделов: верно представление (10), справедливы равенства (13). Вновь рассмотрим числа (14).

Положим

$$\tilde{f} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\pi(f^+(\lambda_0) + f^-(\lambda_0))}{2(f^+(\lambda_0) - f^-(\lambda_0))}, \quad \mu \stackrel{\text{def}}{=} -\pi c_1 c_2;$$

Пусть Q — количество вещественных корней $\eta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ трансцендентного уравнения

$$(30) \quad \tilde{f} + \eta = \mu \sin 2\eta.$$

На Рис. 4. легко видеть, что при $\mu > 0$ уравнение (30) может иметь 0,1 или 3 регулярных корня $\eta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, а при $\mu < 0$ таких корней 0, 1, или 2. Для каждого двух различных η соответствующие $\xi = \sin \eta$ также различны. Регулярность корня η эквивалентна $1 \neq 2\mu \sin 2\eta$. Рис. 4 иллюстрирует зависимость величины Q от значений параметров \tilde{f} и μ ; особую роль играет знак величины μ . Если $|\mu| \leq 1/2$, то корень единственный, при $|\mu| > 1/2$ возникают зоны с $Q > 1$. Наклонные сплошные прямые — возможные графики линейных функций $\tilde{f} + \eta$. Наклонные пунктирные прямые разделяют зоны положения графиков линейных функций с разными Q , эти прямые либо касаются синусоиды, либо проходят через крайние точки графика синусоиды.

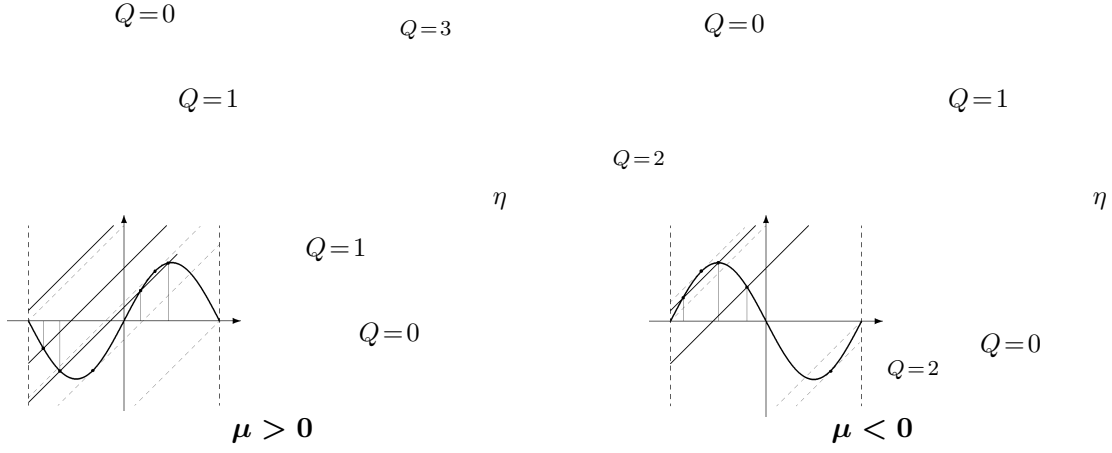


Рис. 4. Различное количество Q решений уравнения $\tilde{f} + \eta = \mu \sin 2\eta$

Теорема 5. Пусть $Q > 0$ и пусть

$$(31) \quad f^-(\lambda_0) \neq f^+(\lambda_0).$$

Тогда λ_0 — это точка бифуркации Хопфа на бесконечности с частотой 1 для уравнения (6). Для всех достаточно больших r существуют по крайней мере Q различных ветвей нетривиальных циклов (18), где $\|h(t)\|_C = o(r)$ — некоторая $(2\pi w^{-1})$ -периодическая функция. Для каждого регулярного корня $\eta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ уравнения (30) справедливы равенства

$$\begin{aligned} \xi &= \sin \eta, & \lambda &= \lambda_0 + (c_2 r)^{-1} W_1(0, \lambda_0) \Psi_1(\xi) + o(r^{-1}) \\ 2(1 - w) &= -\beta(\lambda - \lambda_0) - r^{-1} \Im W_1(i, \lambda_0) \Psi_S(\xi) + o(r^{-1}). \end{aligned}$$

3. Резонанс 1:1

3.1. Квадратичные нелинейности. В этом разделе рассматриваются нелинейности $f(\cdot)$, имеющие вид $f(x) = ax^2 + o(x^2)$. Это естественное предположение, если считать, что нелинейность обладает достаточной гладкостью, например, дважды непрерывно дифференцируемая в окрестности нуля. Такие нелинейности естественны и всем хороши, однако в некотором смысле в конкретной изучаемой задаче они “случай необщего положения”: некие числа, играющие определяющую роль, обращаются в ноль. Поэтому исследование резонанса 1:1 для этого случая отличается от других случаев, в которых нелинейность имеет положительно однородную часть. Примером нелинейности с неквадратичной главной однородной частью является нелинейность $f(x) = x|x|$.

Ситуация с квадратичными нелинейностями довольно вычурная. Она специально выделена в отдельные теоремы исключительно из-за привычки к дифференцируемым и аналитическим нелинейностям — для таких нелинейностей естественно появление главных квадратичных членов.

Случай, когда нелинейность имеет полиномиальные старшие слагаемые, причем и квадратичные, и кубические слагаемые тождественно обращаются в ноль, также может

быть рассмотрен аналогичными методами. Мы этот случай не рассматриваем, считая что он уж слишком вырожденный.

3.1.1. Различие между случаями 0:1 и 1:1. Вначале отметим, что в резонансе 1:1 ни при каких сублинейных нелинейностях не возникают ветви положений равновесия — нет вещественного корня.

Основное различие между резонансами 0:1 и 1:1 для систем с квадратичными главными частями состоит в следующем.

Для случая резонанса 0:1 квадратичная часть полностью определяет ситуацию — будут ли рождаться циклы. В ситуации общего положения, “члены следующего порядка” не влияют на ответ. Проекция нелинейности из правой части на $\sin wt$ и $\cos wt$ имеет ненулевые квадратичные члены.

В случае резонанса 1:1 квадратичная часть не вполне определяет ситуацию. Проекция нелинейности на $\sin wt$ и $\cos wt$ имеет нулевые квадратичные члены и ненулевые кубические. Поэтому необходим более детальный анализ, кубические слагаемые проекций формируются и из квадратичных, и из кубических членов разложений нелинейностей.

Довольно интересно, что такая ситуация специфична именно для квадратичных (и вообще для полиномиальных) нелинейностей! Если основная однородная часть нелинейности имеет общий вид, например, (8), то тогда именно она определяет возникновение малых циклов!

3.1.2. Основные теоремы. В последующих теоремах предполагается, что

$$f(x, \lambda) = \sigma_2(\lambda)x^2 + \sigma_3(\lambda)x^3 + o(x^3).$$

Пусть

$$(32) \quad L(p, \lambda) = \left[(1 + p^2)^2 + a_1(\lambda)p^3 + a_2(\lambda)p^2 + a_3(\lambda)p + a_4(\lambda) \right] L_1(p, \lambda).$$

Здесь $L_1(p, \lambda)$ не имеет корней вида ki , $k \in \mathbb{Z}$, и $a_j(\lambda) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \lambda_0$. Более того, пусть все функции $a_j(\lambda)$ дифференцируемы в точке λ_0 и

$$\frac{d}{d\lambda} a_j(\lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_0} = \alpha_j, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Положим

$$c = \frac{3}{4}\sigma_3(\lambda_0) + (W_1(0, \lambda_0) + \frac{1}{18} \Re W_1(2i, \lambda_0))\sigma_2^2(\lambda_0), \quad d = \frac{1}{18}\sigma_2^2(\lambda_0) \Im W_1(2i, \lambda_0).$$

Теорема 6. Пусть $\alpha_1 \neq \alpha_3$. Пусть

$$(33) \quad c \Re W_1(i, \lambda_0) - d \Im W_1(i, \lambda_0) > \frac{\alpha_4 - \alpha_2}{\alpha_3 - \alpha_1} (c \Im W_1(i, \lambda_0) + d \Re W_1(i, \lambda_0)).$$

Тогда для достаточно малых $r > 0$ существует λ_r такое, что уравнение (6) для $\lambda = \lambda_r$ имеет по крайней мере два различных цикла

$$x_r(r) = r \sin w_r t + \frac{\sigma_2(\lambda_0)r^2}{18} \left(9W_1(0, \lambda_0) - \Re [W_1(2i, \lambda_0)e^{2ti}] \right) + O(r^3)$$

различных периодов. Один из периодов больше 2π , другой — меньше. Если

$$(\alpha_3 - \alpha_1)(c \Im W_1(i, \lambda_0) + d \Re W_1(i, \lambda_0)) > 0,$$

то $\lambda_r > \lambda_0$, если

$$(\alpha_3 - \alpha_1)(c \Im W_1(i, \lambda_0) + d \Re W_1(i, \lambda_0)) < 0,$$

то $\lambda_r < \lambda_0$.

Теорема 7. Пусть $\alpha_1 \neq \alpha_3$. Пусть выполнено условие (33). Тогда для достаточно малых $\lambda - \lambda_0$ таких, что

$$(\lambda - \lambda_0)(\alpha_3 - \alpha_1)(c \Im W_1(i, \lambda_0) + d \Re W_1(i, \lambda_0)) > 0,$$

существует

$$r_\lambda = \sqrt{\frac{(\lambda - \lambda_0)(\alpha_3 - \alpha_1)}{c \Im W_1(i, \lambda_0) + d \Re W_1(i, \lambda_0)}}$$

такое, что уравнение (6) имеет по крайней мере два различных цикла.

$$x_\lambda(r) = r_\lambda \sin w_\lambda t + \frac{\sigma_2(\lambda_0)r_\lambda^2}{18} \left(9W_1(0, \lambda_0) - \Re[W_1(2i, \lambda_0)e^{2ti}] \right) + o(\lambda - \lambda_0)$$

различных периодов $T_\lambda = 2\pi/w_\lambda$. Один из периодов T_λ больше 2π , другой — меньше.

Обе теоремы могут быть переформулированы для случая

$$L(p, \lambda) = L_1(p, \lambda) \prod_{j=1,2} (1 + p^2 + b_j(\lambda)p + d_j(\lambda)),$$

где $\beta_j(\lambda), \gamma_j(\lambda) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \lambda_0$, при $\lambda = \lambda_0$ и

$$\frac{d}{d\lambda} b_j(\lambda) = \beta_j, \quad \frac{d}{d\lambda} d_j(\lambda) = \delta_j, \quad j = 1, 2.$$

3.2. Теоремы 8 и 9. Пусть нелинейность $f(x, \lambda)$ имеет вид (19), где $F(x, \lambda) = a(\lambda)|x|^s + b(\lambda)x|x|^{s-1}$ — положительно однородная часть ($s > 1$ — показатель однородности), а $\Phi(x, \lambda)$ удовлетворяет условию (20). Пусть многочлен L удовлетворяет предположениям предыдущего раздела.

Теорема 8. Пусть $b(\lambda_0) \neq 0$ и

$$(34) \quad \Delta \stackrel{\text{def}}{=} b(\lambda_0) \left(\Re W_1(i, \lambda_0) - \frac{\alpha_4 - \alpha_2}{\alpha_3 - \alpha_1} \Im W_1(i, \lambda_0) \right) > 0.$$

Тогда для достаточно малых $r > 0$ существует λ_r такое, что уравнение (6) для $\lambda = \lambda_r$ имеет по крайней мере два различных цикла

$$x_r(r) = r \sin w_r t + o(r)$$

различных периодов;

$$\lambda_r = \lambda_0 + r^{s-1} \frac{\kappa_s b(\lambda_0)}{\alpha_3 - \alpha_1} \Re W_1(i, \lambda_0) + o(r^{s-1}), \quad (1 - w_r)^2 = \pm \frac{\sqrt{\kappa_s \Delta}}{4} r^{s-1} + o(r^{s-1}).$$

Один из периодов больше 2π , другой — меньше. Если

$$\kappa_s b(\lambda_0)(\alpha_3 - \alpha_1) \Re W_1(i, \lambda_0) > 0,$$

то $\lambda_r > \lambda_0$, если

$$\kappa_s b(\lambda_0)(\alpha_3 - \alpha_1) \Re W_1(i, \lambda_0) < 0,$$

то $\lambda_r < \lambda_0$.

Сформулируем еще близкий по формулировке более общий результат.

Пусть $b(\lambda) = 0$ в некоторой окрестности точки λ_0 . Пусть $F(x, \lambda) = a(\lambda)|x|^s + b(\lambda)x|x|^{\gamma-1}$, где $\gamma > s$.

Теорема 9. Пусть $2s > \gamma + 1$. Пусть выполнено условие (34). Тогда справедливы все заключения теоремы 8.

Условие $2s > \gamma + 1$ очень существенно. Оно не выполнено для нелинейностей $ax^2 + bx^3$ ($s = 2, \gamma = 3$) — именно по этой причине в теореме 6 другой ответ.

3.3. Бифуркации на бесконечности. Мы снова рассмотрим случай нелинейностей с насыщением. Предположим, что справедливо представление (32), причем функция $\Phi(x, \lambda)$ имеет равномерно по λ сублинейную первообразную — выполнено условие (27) а $F(x, \lambda)$ имеет вид (29). Снова повторим замечание из раздела 2.3.1: так как $F(x, \lambda)$ разрывна в нуле и $f(x, \lambda)$ непрерывна, функция $\Phi(x, \lambda)$ должна быть также разрывна в нуле, чтобы скомпенсировать скачок функции F .

Теорема 10. Пусть $\alpha_1 \neq \alpha_3$, $f^+(\lambda_0) \neq f^-(\lambda_0)$ и

$$\left(\Re W_1(i, \lambda_0) - \Im W_1(i, \lambda_0) \frac{\alpha_4 - \alpha_2}{\alpha_3 - \alpha_1} \right) (f^+(\lambda_0) - f^-(\lambda_0)) > 0.$$

Тогда λ_0 — это точка бифуркации Хопфа на бесконечности с частотой 1 для уравнения (6), существуют две ветви циклов, периоды циклов одной из них меньше 2π , другой — больше. Если $\Im W_1(i, \lambda_0) \neq 0$, то обе ветви существуют для тех λ , для которых справедливы неравенства

$$(\lambda - \lambda_0)(f^+(\lambda_0) - f^-(\lambda_0))(\alpha_3 - \alpha_1) \Im W_1(i, \lambda_0) > 0.$$

При каждом достаточно большом r верны асимптотические равенства

$$\lambda = \lambda_0 + r^{-1} \frac{4(f^+(\lambda_0) - f^-(\lambda_0))}{\pi(\alpha_3 - \alpha_1)} \Im W_1(i, \lambda_0) + o(r^{-1}),$$

$$2(1 - w)^2 = r^{-1} \frac{f^+(\lambda_0) - f^-(\lambda_0)}{\pi} \left(\Re W_1(i, \lambda_0) - \Im W_1(i, \lambda_0) \frac{\alpha_4 - \alpha_2}{\alpha_3 - \alpha_1} \right) + o(r^{-1}).$$

1. *Основная схема доказательства теорем.* Основная идея была предложена и уже использовалась в работах А.М. Красносельского, Н.А. Кузнецова, Дж. МакИнерни, А.В. Покровского, Д.И. Рачинского, К. Шнайдера (см., например, [8, 17, 7]). По сути дела, она основана на применении метода гармонического баланса, обычного для теории управления, к задачам о бифуркациях Хопфа.

Смысл идеи, грубо говоря, заключается в следующем. *A priori* выделяются главные члены в соответствующих решениях. Эти главные члены образуются именно из тех гармоник, которые соответствуют проходящим через мнимую ось корням многочлена $L(\cdot, \lambda)$. Для резонанса 1:1 это только гармоники $\sin(\omega t + \phi)$, для резонанса 0:1 — гармоники $\sin(\omega t + \phi)$ и нулевая гармоника — константа. Главные члены имеют некоторую амплитуду r (эта амплитуда может быть параметром или неизвестной). Как оказывается, вообще говоря, остальные гармоники имеют амплитуду $o(r)$ при малых r (если рассматривается бифуркация Хопфа на бесконечности, то при больших r). Если переписать основное дифференциальное уравнение в операторном виде, то довольно часто (по крайней мере в условиях всех предлагаемых теорем) удастся увидеть топологическую эквивалентность исходного бесконечномерного уравнения и конечномерного уравнения в пространстве основных гармоник, которое получается, если отбросить в бесконечномерном уравнении все малые слагаемые. В изучаемых задачах последнее пространство всегда имеет размерность 3 для теорем о резонансе 0:1 и может быть различным для теорем о резонансе 1:1, соответствующее уравнение (которое получается из исходного отбрасыванием всех малых членов) решается явно. Это наблюдение лежит в основе предлагаемой конструкции.

2. *Замена времени.* Сделаем вначале замену времени в изучаемом уравнении. Рассмотрим уравнение

$$(П.1) \quad L\left(w \frac{d}{dt}, \lambda\right)x = M\left(w \frac{d}{dt}, \lambda\right)f(x, \lambda)$$

с вспомогательным параметром w ; значения w лежат в окрестности точки $w_0 = 1$. Очевидно, каждое 2π -периодическое решение $x(t)$ уравнения (П.1) определяет $2\pi/w$ -периодическое решение $x(\omega t)$ уравнения (6). Мы отождествляем 2π -периодические функции и их сужения на промежуток $[0, 2\pi]$. Положим $Px = P_1x + P_Sx + P_Cx$ и $Qx = x - Px$, где

$$(П.2) \quad P_1x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(s) ds, \quad P_Sx(t) = \frac{\sin t}{\pi} \int_0^{2\pi} x(s) \sin s ds, \quad P_Cx(t) = \frac{\cos t}{\pi} \int_0^{2\pi} x(s) \cos s ds,$$

и представим уравнение (П.1) в виде системы⁵ из двух уравнений

$$(П.3) \quad L\left(w \frac{d}{dt}, \lambda\right)Px(t) = M\left(w \frac{d}{dt}, \lambda\right)Pf(x(t), \lambda),$$

$$(П.4) \quad L\left(w \frac{d}{dt}, \lambda\right)Qx(t) = M\left(w \frac{d}{dt}, \lambda\right)Qf(x(t), \lambda).$$

⁵Проекторы P и Q коммутируют с оператором дифференцирования.

Мы будем искать 2π -периодические решения в виде

$$(П.5) \quad x(t) = r(\sin t + \xi) + h(t), \quad r > 0,$$

где $h(t) = Qx(t)$. Заметим, что каждое нетривиальное 2π -периодическое решение включено в континуум сдвигов $x(t + \phi)$, $0 \leq \phi < 2\pi$ одного решения, все такие сдвиги образуют один и тот же цикл. Только одно решение из этого цикла имеет вид (П.5) с $r > 0$.

Ниже будет показано, что для малого решения (П.5) норма компоненты h является по r бесконечно малой более высокого порядка, точнее

$$(П.6) \quad \|h\|_C \leq \kappa_0 r^s,$$

где постоянная $\kappa_0 > 0$ не зависит от λ и w .

3. *Вычисления для теоремы 1.* Так как $f(x, \lambda) = x^2 + o(x^2)$ и $\|h\|_C = O(r^2)$, то

$$(П.7) \quad f(x(t), \lambda) = r^2 \left(\frac{1}{2} + \xi^2 + 2\xi \sin t \right) + h_1(t) + h_2(t),$$

причем $h_1(t) = Qf(x(t), \lambda) = O(r^2)$ и $h_2 \in PL^2$, $h_2 = o(r^2)$ при $r \rightarrow 0$.

Уравнения и их решения рассматриваются в пространствах вещественнозначных функций, определенных на промежутке $[0, 2\pi]$. Ниже будут использоваться обозначения комплексного анализа, уравнение в \mathbb{C} — это пара вещественных уравнений. Если мы пишем векторное поле с комплексными компонентами, это всего лишь обозначение двух компонент обычного поля. Все производные — это обычные вещественные производные.

Рассмотрим уравнение (П.3). Умножим его на e^{-it} и проинтегрируем от нуля до 2π . В силу тождества

$$(П.8) \quad \int_0^{2\pi} e^{-it} \frac{d^k}{dt^k} e(t) dt = (i)^k \int_0^{2\pi} e^{-it} e(t) dt$$

($e(t)$ — любая периодическая функция) справедливы равенства

$$\int_0^{2\pi} e^{-it} L\left(w \frac{d}{dt}, \lambda\right) \sin t dt = \pi L(iw, \lambda), \quad \int_0^{2\pi} e^{-it} M\left(w \frac{d}{dt}, \lambda\right) \sin t dt = \pi M(iw, \lambda).$$

Поэтому из выражений (П.5) и (П.7) для $x(t)$ и $f(x(t), \lambda)$ вытекает равенство

$$(П.9) \quad L(iw, \lambda) = 2r\xi M(iw, \lambda) + \psi_1, \quad \psi_1 = o(r).$$

Если мы умножим уравнение (П.3) на 1 и проинтегрируем, то получим

$$(П.10) \quad L(0, \lambda)\xi = \frac{r}{2} M(0, \lambda) \left(\frac{1}{2} + \xi^2 \right) + \psi_2, \quad \psi_2 = o(r).$$

Система (П.9), (П.10) эквивалентна (П.3).

Для объяснения результатов будем предполагать, что r — это параметр, а λ и w — неизвестные. Опустим “малые” слагаемые в (П.9) и (П.10). Во-первых, опустим слагаемые ψ_i и перепишем уравнения в виде

$$(П.11) \quad L(iw, \lambda) = 2r\xi M(iw, \lambda), \quad L(0, \lambda)\xi = rM(0, \lambda) \left(\frac{1}{2} + \xi^2 \right).$$

Во-вторых, линеаризуем⁶ уравнения (П.11) в точке $\lambda = \lambda_0$, $w = 1$, считая $\lambda \approx \lambda_0$, $w \approx 1$:

$$(П.12) \quad \begin{aligned} i(2(1-w) + \beta(\lambda - \lambda_0) + i\alpha(\lambda - \lambda_0))L_1(i, \lambda_0) &= 2r\xi M(i, \lambda_0), \\ \delta(\lambda - \lambda_0)L_1(0, \lambda_0)\xi &= \frac{r}{2}M(0, \lambda_0)(1 + \xi^2). \end{aligned}$$

В процессе линеаризации мы использовали непрерывность всего и формулы (13), отброшенные слагаемые малы по сравнению с $|\lambda - \lambda_0| + |w - w_0|$.

Теперь будем считать, что величины $1 - w$ и $\lambda - \lambda_0$ имеют порядок r при $r \rightarrow 0$:

$$1 - w = yr, \quad \lambda - \lambda_0 = zr.$$

Тогда (П.12) будет иметь вид

$$(П.13) \quad i(2y + \beta z + i\alpha z) = 2\xi W_1(i, \lambda_0), \quad \delta z \xi = W_1(0, \lambda_0)(\frac{1}{2} + \xi^2).$$

Последняя система трех вещественных уравнений (записанная как одно комплексное и одно вещественное) с неизвестными ξ , y , z имеет решение (16), если выполнено условие (17). Это условие — именно условие разрешимости системы (П.13).

Анализ системы (П.13) совсем прост. Очевидно, $\xi \neq 0$, поэтому

$$z = W_1(0, \lambda_0) \frac{\frac{1}{2} + \xi^2}{\delta \xi},$$

следовательно,

$$(П.14) \quad -\alpha W_1(0, \lambda_0) \frac{\frac{1}{2} + \xi^2}{\delta \xi} = \Re[2\xi W_1(i, \lambda_0)] \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} + \xi^2 = -2c_1 c_2 \xi^2.$$

и $2y + \beta z = \Im[2\xi W_1(i, \lambda_0)]$. Последнее уравнение служит для определения y по известным ξ и z , основным оказывается уравнение (П.14).

Фактически теорема 1 доказана. Формальные топологические конструкции, доводящие изложенную схему до доказательства, совпадают с более общими, применяемыми ниже для доказательства теоремы 3.

4. Доказательство теоремы 3. Вернемся к строгому доказательству теоремы 3. В предыдущем разделе был предложен неформальный подсчет ответа в условиях теоремы 1. Ниже дано формальное обоснование проведенных выкладок для более общего случая теоремы 3.

Вначале перейдем от дифференциальных уравнений (П.3), (П.4) к операторным, которые далее будут исследованы топологическими методами.

Уравнение (П.4) эквивалентно уравнению

$$(П.15) \quad h(t) = H(w, \lambda)Qf(x(t), \lambda),$$

⁶Подчеркнем, что для линеаризации не используется никакая дополнительная гладкость по λ коэффициентов многочленов L_1 и M .

где $h = Qx$. Здесь $H = H(w, \lambda)$ обозначает линейный оператор, сопоставляющий каждой 2π -периодической функции ν решение $\chi = H(w, \lambda)\nu$ также периода 2π уравнения

$$L\left(w\frac{d}{dt}, \lambda\right)\chi = M\left(w\frac{d}{dt}, \lambda\right)\nu$$

удовлетворяющее $P\chi = 0$. Этот оператор определен на подпространстве $\mathbb{E} = QL^2 \subset L^2$, он вполне непрерывен и нормален, его собственные значения — это величины $\mu_k(w, \lambda) = W(wki, \lambda)$, $k = \pm 2, \pm 3, \dots$. Нормы операторов $H(w, \lambda)$ равномерно ограничены:

$$\sup_{w, \lambda} \|H(w, \lambda)\|_{\mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}} = \sup_{w, \lambda} |\mu_k(w, \lambda)| \leq \kappa_1.$$

Здесь мы берем *supremum* относительно всех w , достаточно близких к $w_0 = 1$ и λ , достаточно близких к λ_0 . “Достаточно близких” означает, что для этих w и λ многочлен $L(p, \lambda)$ не имеет корней вида $\pm wki$ с целыми $k \neq 0, 1$. Это возможно, в силу предположения о том, что многочлен $L(p, \lambda)$ имеет вид (10) и непрерывно зависит от λ .

Более того, оператор $H(w, \lambda)$ при фиксированных w, λ действует из пространства \mathbb{E} в пространство $\mathbb{E}_C = \{\chi \in \mathbb{E} \cap C, \chi(0) = \chi(2\pi)\} \subset C$ и

$$\sup_{w, \lambda} \|H(w, \lambda)\|_{\mathbb{E} \rightarrow C} \leq \kappa_2.$$

Если w и λ лежат в достаточно малых окрестностях U_1, U_2 точек $w_0 = 1$ и λ_0 , то оператор $H(w, \lambda)\nu$ вполне непрерывен по совокупности переменных ν, w, λ , как оператор, действующий из $U_1 \times U_2 \times \mathbb{E}$ в \mathbb{E}_C .

Все вышесказанное применимо к линейным операторам $H(w, \lambda)Q$. Эти операторы определены на всем L^2 и обладают там всеми хорошими свойствами: полная непрерывность, нормальность, равномерная оценка норм.

Уравнение (П.15) при всех $w \approx 1$, $\lambda \approx \lambda_0$ и $r \approx 0$ эквивалентно операторному уравнению

$$(П.16) \quad h = H(w, \lambda)Qf(x(t), \lambda).$$

Если r достаточно мало, то при $w \approx 1$, $\lambda \approx \lambda_0$ каждая функция $h(t)$, удовлетворяющая (П.16), является $O(r^s)$, то есть справедлива равномерная оценка

$$(П.17) \quad \|h\|_C \leq \kappa_3 r^s.$$

Это следует непосредственно из равенства (П.16) и выражения (П.5) для $x(t)$.

5. *Уравнение в трехмерном пространстве.* Теперь перейдем к переписыванию в удобном виде уравнения (П.3) — в виде уравнения, похожего на (П.13). Уравнение (П.3) можно переписать в виде системы

$$(П.18) \quad \begin{aligned} \int_0^{2\pi} L\left(w\frac{d}{dt}, \lambda\right)r\xi dt &= \int_0^{2\pi} M\left(w\frac{d}{dt}, \lambda\right)f(x(t), \lambda) dt, \\ \int_0^{2\pi} e^{-it}L\left(w\frac{d}{dt}, \lambda\right)r \sin t dt &= \int_0^{2\pi} e^{-it}M\left(w\frac{d}{dt}, \lambda\right)f(x(t), \lambda) dt. \end{aligned}$$

Воспользуемся тождеством (П.8) и перепишем равенства (П.18) в виде

$$\int_0^{2\pi} L(0, \lambda) r \xi dt = \int_0^{2\pi} M(0, \lambda) f(x(t), \lambda) dt,$$

$$\int_0^{2\pi} e^{-it} L(wi, \lambda) r \sin t dt = \int_0^{2\pi} e^{-it} M(wi, \lambda) f(x(t), \lambda) dt.$$

то есть в виде

$$(П.19) \quad 2\pi L(0, \lambda) r \xi = M(0, \lambda) \int_0^{2\pi} f(x(t), \lambda) dt, \quad -i\pi L(wi, \lambda) r = M(wi, \lambda) \int_0^{2\pi} e^{-it} f(x(t), \lambda) dt.$$

Пусть верно представление (19). Тогда равенства (П.19) могут быть переписаны в виде

$$(П.20) \quad 2\pi L(0, \lambda) r \xi = M(0, \lambda) \left[\int_0^{2\pi} F(x(t), \lambda) dt + \Theta_1(r, \xi, w, \lambda, h) \right],$$

$$-i\pi L(wi, \lambda) r = M(wi, \lambda) \left[\int_0^{2\pi} e^{-it} F(x(t), \lambda) dt + \Theta_2(r, \xi, w, \lambda, h) \right],$$

где

$$\Theta_1(r, \xi, w, \lambda, h) = \int_0^{2\pi} \Phi(x(t), \lambda) dt, \quad \Theta_2(r, \xi, w, \lambda, h) = \int_0^{2\pi} e^{-it} \Phi(x(t), \lambda) dt; \quad \Theta_1, \Theta_2 = o(r^s).$$

Здесь и ниже через Θ_j будут обозначаться различные явно выписанные бесконечно малые относительно малого r величины. В рассуждениях предполагается, что $\|h\|_C \leq \kappa_3 r^s$. Равенства (П.20) могут быть переписаны в виде

$$(П.21) \quad 2\pi L(0, \lambda) \xi = r^{s-1} M(0, \lambda) \left[\int_0^{2\pi} F(\sin t + \xi, \lambda) dt + \Theta_3(r, \xi, w, \lambda, h) \right],$$

$$-i\pi L(wi, \lambda) = r^{s-1} M(wi, \lambda) \left[\int_0^{2\pi} e^{-it} F(\sin t + \xi, \lambda) dt + \Theta_4(r, \xi, w, \lambda, h) \right],$$

где

$$\Theta_3(r, \xi, w, \lambda, h) = r^{-s} \Theta_1(r, \xi, w, \lambda, h) + \int_0^{2\pi} \left[F(\sin t + \xi + r^{-1} h(t), \lambda) - F(\sin t + \xi, \lambda) \right] dt,$$

$$\Theta_4(r, \xi, w, \lambda, h) = r^{-s} \Theta_2(r, \xi, w, \lambda, h) + \int_0^{2\pi} e^{-it} \left[F(\sin t + \xi + r^{-1} h(t), \lambda) - F(\sin t + \xi, \lambda) \right] dt.$$

Величины Θ_3 и Θ_4 бесконечно малые при малых r в силу липшицевости функции $F(\cdot, \lambda)$ и в силу оценки (П.17).

Теперь воспользуемся представлением (10) и преобразуем левые части равенств (П.21):

$$(П.22) \quad \begin{aligned} 2\pi d(\lambda)(1+b(\lambda))\xi &= r^{s-1}W_1(0, \lambda) \left[\int_0^{2\pi} F(\sin t + \xi, \lambda) dt + \Theta_3 \right], \\ -i\pi(wi+d(\lambda))(1-w^2+b(\lambda)+iwa(\lambda)) &= r^{s-1}W_1(wi, \lambda) \left[\int_0^{2\pi} e^{-it}F(\sin t + \xi, \lambda) dt + \Theta_4 \right]. \end{aligned}$$

Будем искать при каждом r неизвестные величины w и λ в виде

$$1 - w = yr^{s-1}, \quad \lambda = \lambda_0 + zr^{s-1}.$$

Подставим эти выражения в (П.22); после сокращения обеих частей равенства на r^{s-1} получим систему с неизвестными z , y и ξ :

$$(П.23) \quad \begin{aligned} 2\pi z\delta(1+o(r))(1+b(\lambda))\xi &= W_1(0, \lambda) \left[\int_0^{2\pi} F(\sin t + \xi, \lambda) dt + \Theta_3 \right], \\ \pi(w-id(\lambda))((1+w)y + \beta z + o(r) + i\alpha z) &= W_1(wi, \lambda) \left[\int_0^{2\pi} e^{-it}F(\sin t + \xi, \lambda) dt + \Theta_4 \right]. \end{aligned}$$

В этой системе (в отличии от предыдущих!) и правые, и левые части уравнений при $r \rightarrow 0$ не являются бесконечно малыми. Перепишем эту систему в виде⁷

$$(П.24) \quad \begin{aligned} z\delta\xi &= W_1(0, \lambda_0)\Psi_1(\xi) + \Theta_5(r), \\ 2y + \beta z + i\alpha z &= -iW_1(wi, \lambda_0)\Psi_S(\xi) + \Theta_6(r). \end{aligned}$$

Конечно, величины Θ_5 и Θ_6 непрерывно зависят от всех неизвестных $\xi, y, z, h(t)$. Однако, при малых r эти величины сколь угодно малы (если величины ξ, y, z конечны и функция $h(t)$ удовлетворяет оценке (П.17)).

6. Завершение доказательства теоремы 3. Теперь рассмотрим полную систему, состоящую из системы (П.24) и уравнения (П.16).

Если отбросить в этой системе малые члены, то останется система (уже без $r!$)

$$(П.25) \quad \begin{aligned} z\delta\xi &= W_1(0, \lambda_0)\Psi_1(\xi), \\ (2y + \beta z + i\alpha z) &= -iW_1(wi, \lambda_0)\Psi_S(\xi), \\ h(t) &= 0. \end{aligned}$$

эту систему перепишем в вещественном виде

$$(П.26) \quad \begin{aligned} z\delta\xi &= W_1(0, \lambda_0)\Psi_1(\xi), \\ \alpha z &= -\Re[W_1(wi, \lambda_0)]\Psi_S(\xi), \\ 2y + \beta z &= \Im[W_1(wi, \lambda_0)]\Psi_S(\xi), \\ h(t) &= 0. \end{aligned}$$

⁷Здесь мы воспользовались равенством $\int \cos tF(\sin t + \xi) dt = 0$.

Третье уравнение системы (П.26) — это уравнение для определения неизвестного y . Если выразить z через ξ с помощью второго уравнения и подставить полученное соотношение в первое уравнение, то получится уравнение (21). В условиях теоремы 3 система (П.26) имеет решение

$$(П.27) \quad \xi = \xi_0, \quad y = \frac{1}{2}(\Im W_1(i, \lambda_0) + \beta c^{-1})\Psi_S(\xi_0), \quad z = -c_1\Psi_S(\xi_0), \quad h(t) = 0$$

ненулевого топологического индекса. Следовательно (это следует⁸ из регулярности ξ_0), при малых r у полной системы тоже найдется по крайней мере одно решение $\xi_r, y_r, z_r, h_r(t)$, причем эти решения образуют по r непрерывные ветви в смысле М.А.Красносельского (см. [9]).

Представление (22) следует из (П.27).

Теорема 3 доказана полностью.

7. Доказательство теоремы 4. Доказательство теоремы 4 о уравнениях с запаздыванием практически ничем не отличается от представленного доказательства теоремы 3. Так как функция $\Psi_C(\cdot, \lambda)$ не обращается в ноль (в отличие от ее аналога в теореме 3, см. сноску на стр. 23), то финальное уравнение вместо (21) принимает вид (26): в ходе аналогичного доказательства вместо (П.23) выписывается аналогичная система

$$\begin{aligned} 2\pi z\delta(1 + o(r))(1 + b(\lambda))\xi &= \\ &= W_1(0, \lambda) \left[\int_0^{2\pi} F(\sin t + \xi, \sin(t - h) + \xi, \lambda) dt + \Theta_3 \right], \\ \pi(w - id(\lambda))((1 + w)y + \beta z + o(r) + i\alpha z) &= \\ &= W_1(wi, \lambda) \left[\int_0^{2\pi} e^{-it} F(\sin t + \xi, \sin(t - h) + \xi, \lambda) dt + \Theta_4 \right], \end{aligned}$$

которая переписывается в виде

$$(П.28) \quad \begin{aligned} z\delta\xi &= W_1(0, \lambda_0)\Psi_1(\xi) + \Theta_5(r), \\ 2y + \beta z + i\alpha z &= W_1(wi, \lambda_0)(\Psi_C(\xi) - i\Psi_S(\xi)) + \Theta_6(r). \end{aligned}$$

На исследовании системы (П.28) и деталях доказательства останавливаться не будем.

8. Теорема 5. Доказательство теоремы 5 о бифуркациях на бесконечности также аналогично доказательству теоремы 3.

Решение ищется в том же виде (П.5), только параметр r вместо малого выбирается большим. Уравнение для бесконечномерной компоненты сохраняет свой вид, для всех решений $h(t)$ этого уравнения справедлива равномерная оценка $|h(t)| \leq \text{const}$.

При выписывании уравнений в трехмерном пространстве сохраняются почти все выкладки, причем выполнено соотношение (28), то есть $F(x, \lambda)$ задается формулами (29).

⁸Здесь опущены длинные и трудные, но совершенно стандартные рассуждения теории вращения векторных полей. Эти рассуждения можно найти в общем виде в [9] или для очень близкого конкретного случая в [17].

Лемма 1. Справедливы равенства:

$$(П.29) \quad \Psi_1(\xi) = \begin{cases} f^+(\lambda_0), & \text{при } \xi > 1, \\ \frac{f^+(\lambda_0)+f^-(\lambda_0)}{2} + \frac{f^+(\lambda_0)-f^-(\lambda_0)}{\pi} \arcsin \xi, & \text{при } |\xi| \leq 1, \\ f^-(\lambda_0), & \text{при } \xi < -1; \end{cases}$$

$$(П.30) \quad \Psi_S(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{при } |\xi| \geq 1, \\ 2(f^+(\lambda_0)-f^-(\lambda_0))\sqrt{1-\xi^2}, & \text{при } |\xi| < 1. \end{cases}$$

Легко проверить, что уравнение (21) имеет регулярные решения только при $|\xi| < 1$ и, поэтому, оно принимает вид (30). Подсчет возможен на компьютере, программа MapleV легко справляется с вычислениями.

Существенная трудность при доказательстве малости отбрасываемых слагаемых состоит в оценке выражений

$$\int_0^{2\pi} \Phi(r \sin t + h(t), \lambda) dt \quad \text{и} \quad \int_0^{2\pi} e^{-it} \Phi(r \sin t + h(t), \lambda) dt.$$

По ходу доказательства надо доказать, что при $r \rightarrow \infty$ эти выражения стремятся к нулю. Требуемый факт содержится в следующем утверждении.

Лемма 2. В условиях теоремы 5 при любой ограниченной функции $e(t)$ при каждом $R > 0$ справедливо равенство

$$(П.31) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \sup_{\lambda \in \Lambda, \|h\|_C \leq R} \left| \int_0^{2\pi} e(t) \Phi(r \sin t + h(t), \lambda) dt \right| \rightarrow 0.$$

Это утверждение похоже на лемму Римана из теории рядов Фурье, его доказательство см. в [11] или в [16].

9. Резонанс 1:1. Введение. При доказательстве теорем о резонансе 1:1 будем поступать аналогично. Введем новый параметр w , зафиксировав при этом период циклов, перейдем к уравнению (П.1). Выберем явный вид неизвестного решения, зафиксировав при этом фазу, тем самым избавившись от априорной неоднозначности соответствия цикла, как геометрического объекта в пространстве состояний, периодическому решению — элементу функционального пространства. Неизвестное 2π -периодическое решение будем искать в виде

$$(П.32) \quad x(t) = r \sin t + h(t).$$

Подставим $x(t)$ в равенство (П.1), получим уравнение с малым параметром r и неизвестными w , λ и $h(t)$. Далее, рассмотрим отдельно проекции этого уравнения на двумерное подпространство Π , натянутое на функции $\sin t$ и $\cos t$, и на бесконечномерное подпространство коразмерности 2.

Снова, как и при доказательстве теоремы 3, главными уравнениями, определяющими ответ, являются уравнения в конечномерном пространстве. Уравнение в бесконечномерном пространстве используется только для доказательства оценки $h = O(r^s)$ на решениях. Главная проблема — выделить в конечномерных уравнениях старшие по r слагаемые (предполагая, что $h = O(r^s)$). при этом возникают несколько трудностей.

Во-первых, иногда оказывается, что порядок старших слагаемых в уравнениях не совпадает (как это было при доказательстве теоремы 3) с порядком старших членов нелинейности. Например, так бывает, если старшие члены нелинейностей квадратичные: квадратичные члены в уравнениях зануляются, старшие члены в уравнениях кубические и они определяются и квадратичными, и кубическими членами разложения нелинейности. При этом, естественно, все построения существенно более громоздки.

Во-вторых, при отбрасывании “малых слагаемых” в уравнениях в конечномерном пространстве возникают неконтролируемые бесконечно малые нелинейности. Они могут мажорировать главные однородные слагаемые. Причем это не недостаток метода — просто ответы другие, для конструирования ответа необходимы существенные дополнительные построения.

Приведем простое соображение, почему четные слагаемые нелинейности отличаются от нечетных. Дело в том, что выражение

$$\int_0^{2\pi} e^{-it} F(r \sin t) dt$$

обращается в нуль для четных $F(\cdot)$. А для нечетных $F(\cdot)$ оно чисто мнимое и никогда (если F не равна нулю тождественно) в нуль не обращается. А именно это выражение и его асимптотика по r определяет ответы в задаче о резонансе 1:1.

10. Доказательство теоремы 6. При доказательстве всех теорем о резонансе 1:1 используются проекторы $Px = P_Sx + P_Cx$ и $Qx = x - Px$, где P_S и P_C определены равенствами (П.2). Вновь рассмотрим систему (П.3). Теперь мы будем искать 2π -периодические решения в виде

$$(П.33) \quad x(t) = r \sin t + r^2(\phi_0 + \phi_1 \sin 2t + \phi_2 \cos 2t) + h(t), \quad r > 0,$$

где $h = o(r^2)$ (в условиях теоремы 6) или в виде (П.32), где $h(t) = Qx(t) = O(r^s)$, в условиях теоремы 8–10 ($s = 0$ в условиях теоремы 10).

В доказательствах подробно остановимся лишь на выделении главных слагаемых в конечномерных уравнениях. Корректность процедуры отбрасывания малых нелинейностей в условиях конкретных теорем и бесконечномерное уравнение почти не обсуждаются.

В условиях теоремы (6) мы сразу полагаем⁹ справедливым представление (П.33), $h \cong 0$, $f(x, \lambda) \cong F(x, \lambda_0) = \sigma_2(\lambda_0)x^2 + \sigma_3(\lambda_0)x^3$ и $M(wi, \lambda) \cong M(i, \lambda_0)$

$$L(wi, \lambda) \cong \left(4(1-w)^2 + [\alpha_4 - \alpha_2 + (\alpha_3 - \alpha_1)i](\lambda - \lambda_0)\right) L_1(i, \lambda_0).$$

Нам еще понадобятся значения многочленов L и M в точках 0 и $2wi$, они определяются с точностью малых слагаемых аналогично:

$$M(2wi, \lambda) \cong M(2i, \lambda_0), \quad M(0, \lambda) \cong M(0, \lambda_0), \quad L(2wi, \lambda) \cong 9L_1(2i, \lambda_0), \quad L(0, \lambda) \cong L_1(0, \lambda_0).$$

⁹Знаком “ \cong ” мы обозначаем равенство “с точностью до младших членов”.

В условиях этой теоремы (как это видно из представления (П.33)) явно выписываются не только старшие члены разложения неизвестного цикла, линейные по r , но и следующие квадратичные слагаемые. Все дело в том, что проекция квадратичных членов на основные гармоники равна нулю. Поэтому приходится считать следующие, кубические члены. А они определяются как сумма двух компонент: первая порождается кубами линейных слагаемых $r \sin t$, а вторая — из квадратичных слагаемых нелинейности, как результат произведений линейных слагаемых и квадратичных по r членов.

Теперь составим уравнения гармонического баланса в пятимерном (вещественном) пространстве старших гармоник: функций-констант, $\sin(t + \phi)$, $\sin(2t + \phi)$. Эти уравнения с параметром r и неизвестными $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \lambda, w$ имеют вид

$$\begin{aligned} 2\pi\phi_0 &= \sigma_2(\lambda_0)W_1(0, \lambda_0) \int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt, & 9\pi(\phi_2 - i\phi_1) &= \sigma_2(\lambda_0)W_1(2i, \lambda_0) \int_0^{2\pi} e^{-2ti} \sin^2 t \, dt, \\ & & -i\pi \left(4(1-w)^2 + [\alpha_4 - \alpha_2 + (\alpha_3 - \alpha_1)i](\lambda - \lambda_0) \right) &= \\ & & = r^2 W_1(i, \lambda_0) \int_0^{2\pi} e^{-ti} \left(\sigma_2(\lambda) (2 \sin t (\phi_0 + \phi_1 \sin 2t + \phi_2 \cos 2t)) + \sigma_3(\lambda) (\sin t)^3 \right) dt. \end{aligned}$$

Первые два уравнения служат для определения неизвестных ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2 :

$$\phi_0 = \frac{\sigma_2(\lambda_0)}{2} W_1(0, \lambda_0), \quad \phi_1 = \frac{\sigma_2(\lambda_0)}{18} \Im W_1(2i, \lambda_0), \quad \phi_2 = -\frac{\sigma_2(\lambda_0)}{18} \Re W_1(2i, \lambda_0).$$

Последнее уравнение служит для определения неизвестных $\lambda - \lambda_0$ и $(1 - w)^2$, линейно зависящих от r^2 . Единственное, что надо проверить, это положительность найденного выражения для $(1 - w)^2$. Именно за эту положительность и отвечает условие (33).

11. Теоремы 8 и 9. Теорема 8 — простейшая теорема о резонансе 1:1. Конечномерное пространство, в котором рассматривается основное уравнение, имеет размерность 2, уравнение имеет вид

$$4(1 - w)^2 + [\alpha_4 - \alpha_2 + (\alpha_3 - \alpha_1)i](\lambda - \lambda_0) = \kappa_s b(\lambda_0) r^{s-1} W_1(i, \lambda_0) \quad \left(\kappa_s \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |\sin t|^{s+1} dt \right).$$

Оно разрешается в явном виде относительно переменных $y = r^{1-s}(\lambda - \lambda_0)$ и $z = r^{1-s}(1 - w)^2$:

$$4z + [\alpha_4 - \alpha_2 + (\alpha_3 - \alpha_1)i]y = \kappa_s b(\lambda_0) W_1(i, \lambda_0),$$

эквивалентно

$$(\alpha_3 - \alpha_1)y = \kappa_s b(\lambda_0) \Re W_1(i, \lambda_0), \quad 4z + (\alpha_4 - \alpha_2)y = \kappa_s b(\lambda_0) \Im W_1(i, \lambda_0).$$

Условие (34) — это выписанное в явном виде требование $z > 0$.

При доказательстве этой теоремы не возникает никаких проблем при оценке отбрасываемых малых слагаемых.

При доказательстве теоремы 9 анализ конечномерного уравнения совершенно такой же. Различие заключается именно при оценке отбрасываемых малых слагаемых. Если выполнено условие $2s > \gamma + 1$, то все корректно, а если такое условие не выполнено, то конечномерное уравнение имеет другой вид (см. теорему 6). На деталях оценок малых слагаемых мы не останавливаемся, они довольно просты.

12. Теорема 10. В условиях этой теоремы все сравнительно просто. Условие (31) гарантирует невырожденность нечетного однородного слагаемого $\frac{1}{2}(f^+(\lambda_0) - f^-(\lambda_0)) \operatorname{sign} x$ (четное однородное слагаемое порядка 0 — это константа).

Основное уравнение равенства главных гармоник достаточно рассмотреть в двумерном пространстве функций вида $\sin(t + \phi)$. Оно имеет вид

$$4(1 - w)^2 + [\alpha_4 - \alpha_2 + (\alpha_3 - \alpha_1)i](\lambda - \lambda_0) = \frac{1}{2\pi r}(f^+(\lambda_0) - f^-(\lambda_0))W_1(i, \lambda_0) \int_0^{2\pi} |\sin t| dt,$$

то есть

$$4(1 - w)^2 + [\alpha_4 - \alpha_2 + (\alpha_3 - \alpha_1)i](\lambda - \lambda_0) = \frac{2}{\pi r}(f^+(\lambda_0) - f^-(\lambda_0))W_1(i, \lambda_0).$$

Положим $(1 - w)^2 = zr^{-1}$, $\lambda - \lambda_0 = yr^{-1}$. Теперь уравнение относительно положительного y и произвольного вещественного z принимает вид

$$4z + [\alpha_4 - \alpha_2 + (\alpha_3 - \alpha_1)i]y = \frac{2}{\pi}(f^+(\lambda_0) - f^-(\lambda_0))W_1(i, \lambda_0).$$

В условиях теоремы 10 это уравнение имеет единственное решение

$$y = \frac{2(f^+(\lambda_0) - f^-(\lambda_0))}{\pi(\alpha_3 - \alpha_1)} \Im W_1(i, \lambda_0),$$

$$z = \frac{f^+(\lambda_0) - f^-(\lambda_0)}{\pi} \left(\Re W_1(i, \lambda_0) - \Im W_1(i, \lambda_0) \frac{\alpha_4 - \alpha_2}{\alpha_3 - \alpha_1} \right).$$

При доказательстве корректности отбрасывания малых членов в теореме 10 существенно используется лемма 2.

Список литературы

1. *Арнольд В.И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
2. *Бесекерский В.А., Попов Е.П.* Теория систем автоматического регулирования. М.: Наука, 1972.
3. *Григорьев Ф.Н., Кузнецов Н.А.* Узнать ссылку // Автоматика и телемеханика. 2000.
4. *Козьякин В.С., Красносельский М.А.* Метод функционализации параметра в задаче о точках бифуркации. Доклады АН СССР. 1980. Т. 254. №5. С. 1061–1064.
5. *Красносельский А.М., Красносельский М.А.* Циклы больших амплитуд в автономных системах с гистерезисом // Доклады АН СССР. 1985. Т. 283. №1. С. 23–26.
6. *Красносельский А.М., Кузнецов Н.А., Рачинский Д.И.* О резонансных уравнениях с неограниченными нелинейностями // Доклады Академии наук. 2000. Т. 373. №3. С. 295–299.
7. *Красносельский А.М., Кузнецов Н.А., Рачинский Д.И.* Нелинейные бифуркации Хопфа // Доклады Академии наук. 2000. Т. 373. №4. С. 455–458.
8. *Красносельский А.М., МакИнерни Дж., Покровский А.В.* Слабые резонансы при бифуркации Хопфа в системах управления с неполиномиальными нелинейностями // Доклады Академии наук. 2000. Т. . №. С. – .
9. *Красносельский М.А., Забрейко П.П.* Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука, 1975.
10. *Марсден Дж., Мак-Кракен М.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980.
11. *Alonso J.M., Ortega R.* Unbounded solutions of semilinear equations at resonance // Nonlinearity. 1996. V. 9. P. 1099–1111.
12. *Andronov A.A., Witt A.* Sur la theorie mathematiques des autooscillations // C. R. Acad. Sci. Paris. 1930. V. 190. P. 256–258.
13. *Guckenheimer J., Holmes Ph.* Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields. Applied mathematical Sciences. V. 42. New York: Springer, 1990.
14. *Hopf E.* Abzweigung einer periodischen Lösung von einer stationaren Lösung eines Differential Systems. Ber. Math. Phys. Sachsische Ac. der Wiss. Leipzig. 1942. V. 94. P. 1–22.
15. *Knobloch E., Proctor M.R.E.* The double Hopf bifurcation with 2:1 resonance // Proc. R. Soc. Lond. A, 1988. V. 415, P. 61–90.
16. *Krasnosel'skii A.M., Rachinskii D.I.* Hopf bifurcations from infinity, generated by bounded nonlinear terms // Funct. Differ. Equ. 1999. V. 6. №3-4. С. 357–374.

17. *Krasnosel'skii A.M., Rachinskii D.I., Schneider K.* Hopf bifurcations in resonance 2:1 // Institute for Nonlinear Sciences, National University of Ireland, University College, Cork, report 00-005, May, 2000, 1–18.
18. *Shilnikov L.P., Shilnikov A.L., Turaev D.V., Chua L.O.* Methods of qualitative theory in nonlinear dynamics. Part I. World Scientific Series on Nonlinear Science. River Edge: World Scientific Publishing Co., 1998.
19. *Schneider K.R.* Perturbed center manifolds and applications to Hopf bifurcation. Труды IX международной конференции по нелинейным колебаниям (ICNO-9). Т. 3. С. 450–455. Киев: Наукова Думка, 1984.
20. *Vidyasagar M.* Nonlinear system analysis. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1993.