ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2001, том 381, № 2, с. 1–5

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ МОДЕЛИ ПРЕЙСАХА И ИХ СВОЙСТВА

© 2001 г. А. М. Красносельский, Р. Кросс, А. В. Покровский

Представлено академиком Н.А. Кузнецовым 02.07.2001 г.

Поступило 03.07.2001 г.

Изучен новый тип гистерезисной нелинейности, названной нестационарной моделью Прейсаха. Предложено детальное описание этой нелинейности, изучены ее основные свойства (монотонность, непрерывность, реакция на периодические воздействия) и исследуется возможность численных аппроксимаций такой нелинейности. Приведены простейшие утверждения о замкнутых системах с нестационарной нелинейностью Прейсаха. Необходимость изучения таких нелинейностей вызвана прикладными вопросами, возникающими в математической экономике при изучении динамики макроэкономических показателей и влияния этих показателей на процесс принятия решений.

ВВЕДЕНИЕ

Стандартная (стационарная[1]) модель Прейсаха [1] – это взвешенная сумма неидеальных реле, пороговые значения α, $\beta(\alpha \le \beta)$ которых не меняются во времени. При описании гистерезисных эффектов, возникающих в некоторых прикладных задачах, в частности, в задачах макроэкономики, такая модель оказывается не вполне адекватной.

Рассмотрим, например, решения, связанные с необратимыми затратами, принятые в условиях неопределенности относительно аггрегированного дохода на вложение (см. [4]). Здесь α обозначает уровень доходов, необходимый фирме для дополнительных вложений в проект, а β – уровень доходов, при котором проект будет закрыт. Во многих монетарных системах (например, США и Европейский Союз), на процесс решения влияет дополнительная переменная – устанавливаемая центральным банком учетная ставка. Пороговые значения для решений определяются этой переменной и зависят от конкретного рынка или (в случае Европейского союза) страны. Таким образом, пороговое значение является нестационарным, зависит от рынка, региона и (в случае Европы) специфических факторов страны, влияющих на деловой климат.

Для анализа проблем такого типа, стационарная модель Прейсаха должна быть расширена: необходимо включить в рассмотрение неидеальные реле с пороговыми значениями, зависящими от времени.

В сообщении предлагается описание нестационарной нелинейности Прейсаха. Сообщение построено следующим образом. В следующем разделе описаны обычное неидеальное реле и стандартная стационарная модель Прейсаха, приведены их простейшие свойства. Далее вводится переменное неидеальное реле и переменная модель Прейсаха. Для этой нелинейности формулируются базисные свойства, отчасти аналогичные свойствам стационарной модели Прейсаха. Отдельно выделены утверждения об аппроксимации с произвольной точностью нестационарной нелинейности Прейсаха конечными системами переменных реле. Завершают сообщение простейшие утверждения о замкнутых системах с нестационарными нелинейностями Прейсаха.

НЕЛИНЕЙНОСТЬ ПРЕЙСАХА

Обозначим через

$$\eta(t) = R_{\alpha,\beta}[t_0, \eta_0]x(t), \quad t \ge t_0, \tag{1}$$

переменное состояние неидеального реле с пороговыми значениями α, β $(\alpha < \beta)$ при входе $x(t)$, $(t \ge t_0)$, и начальном состоянии η_0. Здесь входом является произвольная непрерывная скалярная функция; начальное состояние η_0 может принимать одно из двух значений: 1 или –1. Скалярная функция $\eta(t)$ удовлетворяет условию $\eta(t_0) = \eta_0$, также принимает значения 1 или –1 (т.е. $|\eta(t)| = 1$ для всех t) и имеет лишь конечное число переключений на каждом конечном интервале $t_0 \le t \le t_1$. Значения оператора (1) определяются формулами

[1] В англоязычной литературе используется термин “time-independent”, который, возможно, лучше отражает суть дела.

Институт проблем передачи информации Российской академии наук, Москва

Университет Страткдайда, Глазго, Великобритания

Национальный университет, Корк, Ирландия

$$R_{\alpha,\beta}[t_0, \eta_0]x(t) = \begin{cases} \eta_0, & \text{если } \alpha < x(\tau) < \beta \text{ при всех } \tau \in [t_0, t]; \\ 1, & \text{если найдется такое } t_1 \in [t_0, t], \text{ что } x(t_1) \ge \beta \text{ и } x(\tau) > \alpha \text{ при всех } \tau \in [t_1, t]; \\ -1, & \text{если найдется такое } t_1 \in [t_0, t], \text{ что } x(t_1) \le \alpha \text{ и } x(\tau) < \beta \text{ при всех } \tau \in [t_1, t]. \end{cases}$$

В такой постановке равенства $\eta(t) = 1$ при $x(t) \ge \beta$ и $\eta(t) = -1$ при $x(t) \le \alpha$ всегда верны при $t \ge t_0$. Для разнообразных формальных конструкций удобно определять оператор (1) для произвольных начальных состояний ± 1 (в том числе для $\eta = 1$ при $x(t_0) < \alpha$ и для $\eta = -1$ при $x(t_0) > \beta$). Положим

$$R_{\alpha,\beta}[t_0, \eta_0]x(t) = R_{\alpha,\beta}[t_0, \eta_1]x(t), \quad t \ge t_0,$$

где

$$\eta_1 = \begin{cases} -1, & \text{если } x(t_0) \le \alpha, \\ 1, & \text{если } x(t_0) \ge \beta, \\ \eta_0, & \text{если } \alpha < x(t_0) < \beta. \end{cases} \tag{2}$$

Теперь нелинейность (1) определена для каждого непрерывного входа $x(t)$ и каждого начального состояния $\eta_0 \in \{-1, 1\}$.

Рассмотрим семейство $\mathcal{R}$ реле $R^w = R_{\alpha_w, \beta_w}$ с пороговыми значениями α_w, β_w, $w \in \Omega$. Множество индексов Ω может быть конечным или бесконечным, следуя основополагающей работе [1], мы называем такое семейство букетом реле. Предположим, что на множестве Ω задана вероятностная мера μ. Мы всегда будем предполагать, что обе функции α_w, β_w измеримы по мере μ.

Выберем у каждого реле R^w из букета $\mathcal{R}$ некоторое начальное состояние $\eta_0(w)$. Будем предполагать, что функция $\eta_0(w)$: $\Omega \to \{-1, 1\}$ измерима, каждая такая функция является начальным состоянием букета $\mathcal{R}$. Для каждого начального состояния $\eta_0(w)$ и каждого непрерывного входа $x(t)$, $t \ge t_0$ определим функцию

$$\xi(t) = \xi[t_0, \eta_0](t) = \int_\Omega R^w[t_0, \eta_0(w)]x(t)d\mu, \quad t \ge t_0.$$

Описанная модель называется нелинейностью Прейсаха (стационарной); $\xi(t)$ – выход модели Прейсаха с начальным состоянием η_0 и входом $x(t)$.

Часто множество Ω рассматривается на двумерной полуплоскости $\Pi = \{(\alpha, \beta): \beta > \alpha\}$ (подробно такой подход см. в [1]). Для наших целей этот подход не совсем удобен.

Если мера μ атомарна и имеет конечный носитель w_1, w_2, w_N, то нелинейность Прейсаха является параллельным соединением реле $R^{w_j} = R_{\alpha_{w_j}, \beta_{w_j}}$ с весами $\mu(w_j)$:

$$\xi(t) = \xi[t_0, \eta_0](t) = \sum_{j=1}^{N} \mu(w_j) R^{w_j}[t_0, \eta_0(w_j)]x(t), \quad t \ge t_0.$$

НЕИДЕАЛЬНОЕ РЕЛЕ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПОРОГОВЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ

Положим

$$R^*x(t) = R^*[t_0, \eta_0]x(t) = R_{-1,1}[t_0, \eta_0]x(t).$$

Пусть $\alpha(t) < \beta(t)$, $t \ge t_0$, – две непрерывные скалярные функции.

Определим переменное состояние $\eta(t)$ нестационарного неидеального реле с пороговыми значениями $\alpha(t)$, $\beta(t)$ для всех $t \ge t_0$) с входом $x(t)$, $t \ge t_0$, и начальным состоянием $\eta_0 \in \{-1, 1\}$ соотношением:

$$\eta(t) = R_{\alpha(t),\beta(t)}[t_0, \eta_0]x(t) \stackrel{\text{def}}{=} R^*[t_0, \eta_0]y(t), \quad y(t) = \frac{2x(t) - \alpha(t) + \beta(t)}{\beta(t) - \alpha(t)}. \tag{3}$$

Здесь снова вход – произвольная непрерывная скалярная функция; начальное состояние η_0 принимает одно из значений: 1 или -1; скалярная функция $\eta(t)$ удовлетворяет $\eta(t_0) = \eta_0$ и $|\eta(t)| = 1$ для любого t и имеет лишь конечное число переключений на каждом конечном интервале $t_0 \le t \le t_1$. Равенства $\eta(t) = -1$ для $x(t) \le \alpha(t)$ и $\eta(t) = 1$ для $x(t) \ge \beta(t)$ выполнены для всех $t \ge t_0$.

Перечислим простейшие свойства операторов (3)

1. Антимонотонность[2] по пороговым значениям $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ при каждом входе $x(t)$: если $\alpha_0(t)$ $\alpha_1(t)$ и $\beta_0(t)$ $\beta_1(t)$, то

$$R_{\alpha_0(t),\beta_0(t)}[t_0, \eta_0]x(t) \ge R_{\alpha_1(t),\beta_1(t)}[t_0, \eta_0]x(t).$$

[2] Антимонотонность и монотонность операторов в функциональных пространствах всюду понимается в смысле теории конусов [2] относительно конуса неотрицательных функций.

2. Монотонность по входу и по начальному состоянию при фиксированных $\alpha(t)$ и $\beta(t)$: если $\eta_{0,1} \geq \eta_{0,2}$ и $x_1(t) \geq x_2(t)$ для $t \in [t_0, t_1]$, то

$$R_{\alpha(t),\beta(t)}[t_0, \eta_{0,1}]x(t) \geq R_{\alpha(t),\beta(t)}[t_0, \eta_{0,2}]x(t).$$

Это свойство означает, что каждое нестационарное реле монотонно, например в пространстве C.

3. Периодичность: если вход $x(t)$, $t \geq t_0$, и обе функции $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ периодичны с общим периодом $T > 0$, то выход также T-периодичен при $t \geq t_0 + T$.

НЕСТАЦИОНАРНАЯ МОДЕЛЬ ПРЕЙСАХА

Рассмотрим семейство $\mathcal{R}$ нестационарных реле $R^w = R_{\alpha_w(t),\beta_w(t)}$ с пороговыми значениями $\alpha_w(t)$, $\beta_w(t)$, $w \in \Omega$. Множество Ω снова может быть конечным или бесконечным, мы будем называть это семейство $\mathcal{R}$ букетом нестационарных реле. Снова предполагается, что на множестве Ω задана мера μ, обе функции $\alpha_w(t)$, $\beta_w(t)$ предполагаются измеримыми по мере μ при каждом t.

Измеримые функции $\eta(w)$: $\Omega \to \{-1, 1\}$ будем называть начальными состояниями букета $\mathcal{R}$.

Лемма [3]. *Для любого t функция $R^w[t_0, \eta_0(w)]x(t)$ измерима по w.*

В силу леммы для любого начального состояния $\eta_0(w)$ и любого входа $x(t) \in C$, $t \geq t_0$, можно определить функцию

$$\xi(t) = \Xi x(t) = \Xi[t_0, \eta_0]x(t) \overset{\text{def}}{=}$$
$$\overset{\text{def}}{=} \int\limits_{\Omega} R^w[t_0, \eta_0(w)]x(t)d\mu, \quad t \geq t_0. \tag{4}$$

Назовем описанную модель нестационарной нелинейностью Прейсаха; функция $\xi(t)$ – ее выход при начальном состоянии η_0 и входе $x(t)$.

Возможно рассмотрение универсального множества Ω пар $\{\alpha(t), \beta(t)\}$ непрерывных функций переменной t, этот подход здесь не обсуждается.

Можно рассмотреть аналогичную модель с зависимой от времени переменной мерой μ. Изучение такой модели, кажется, не встретит дополнительных существенных трудностей, мы рассматриваем случай постоянной меры для простоты.

Простейшие свойства нестационарной нелинейности Прейсаха – это монотонность и периодичность, которые вытекают из соответствующих свойств нестационарного реле.

Теорема 1. *Из неравенств $\eta_{0,1} \geq \eta_{0,2}$ и $x_1(t) \geq x_2(t)$ для $t \in [t_0, t_1]$ следует соотношение $\Xi[t_0, \eta_{0,1}]x_1(t) \geq \Xi[t_0, \eta_{0,2}]x_2(t)$.*

Если все реле из букета $\mathcal{R}$ имеют T-периодические пороговые значения $\{\alpha(t), \beta(t)\}$ и вход $x(t)$, $t \geq t_0$ периодичен с тем же периодом $T > 0$, то выход $\xi(t)$ также T-периодичен при $t \geq t_0 + T$.

Выход реле всегда либо константа, либо разрывная функция. Нестационарное реле, так же как, и обычное, разрывно как оператор в любом разумном функциональном пространстве, всегда разрывно. Нестационарная модель Прейсаха часто обладает лучшими свойствами.

Теорема 2. *Выход $\xi(t)$ является непрерывной функцией для каждого начального состояния η_0 при любом входе $x(t)$, если и только если мера μ удовлетворяет условию*

$$\forall \alpha^*, \beta^*\colon \mu\{w\colon \alpha_w = \alpha^*\} = 0,$$
$$\mu\{w\colon \beta_w = \beta^*\} = 0.$$

Условия непрерывности для оператора $x(t) \mapsto (t)$, порожденного нестационарной нелинейностью Прейсаха $\Xi(t)$, более сложны, нежели для его стационарного аналога.

Теорема 3. *Пусть равенства*

$$\mu\{w\colon \min_{\tau < t < \sigma}\{x(t) - \alpha_w(t)\} = 0\} =$$
$$= \mu\{w\colon \min_{\tau < t < \sigma}\{\beta_w(t) - x(t)\} = 0\} = 0,$$

верны для всех непрерывных функций $x(\cdot) \in C[t_0, t_1]$ и всех $t_0 < \tau < \sigma < t_1$.

Тогда оператор Прейсаха непрерывен в C.

Это утверждение не гарантирует никакой равномерной непрерывности даже на ограниченных множествах функций $x(t)$. Для равномерной непрерывности требуются дополнительные предположения.

Теорема 4. *Пусть X – компактное множество в $C[t_0, t_1]$. Пусть для любого $\delta > 0$ равенство $\mu\{\beta_w(t) - \alpha_w(t) > \delta\} = 1$ справедливо на каждом интервале $t \in [t_0, t_1]$. Предположим, наконец, что*

$$\mu\{w\colon \left|\min_{\tau < t < \sigma}\{x(t) - \alpha_w(t)\}\right| < \varepsilon\} < \lambda\varepsilon,$$
$$\mu\{w\colon \left|\min_{\tau < t < \sigma}\{\beta_w(t) - x(t)\}\right| < \varepsilon\} < \lambda\varepsilon$$

для некоторого $\lambda > 0$ и для всех $t_0 < \tau < \sigma < t_1$, всех $x(\cdot) \in X$ и всех $\varepsilon > 0$.

Тогда оператор Прейсаха удовлетворяет условию Липшица на X.

Теорема 5. *Для каждого фиксированного входа $x(t)$ выходы, соответствующие различным начальным значениям $\eta_{0,1}(w)$ и $\eta_{0,2}(w)$ "слипаются" во времени: функция*

$$|\xi[t_0, \eta_{0,1}(w)](t) - \xi[t_0, \eta_{0,2}(w)](t)|$$

не возрастает.

КОНЕЧНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ ПЕРЕМЕННОЙ МОДЕЛИ ПРЕЙСАХА

Возникает естественный вопрос: как вычислять модель Прейсаха численно? Один из возможных ответов приводится в настоящем разделе.

Зададимся некоторым начальным состоянием $\eta_0(w)$.

Обозначим через $\Omega_\mu \subset \Omega$ носитель меры μ. Предположим, что множество $\mathcal{W}$ функций $[t_0, t_1] \mapsto (\alpha_w(t), \beta_w(t))$, $w \in \Omega_\mu$ компактно в пространстве $C = C([t_0, t_1])$ непрерывных функций.

Выберем конечную ε-сеть $(\alpha_j(t), \beta_j(t))$, $j = 1, 2, \ldots, N$ в множестве $\mathcal{W}$. Через $\mathcal{B}$ ниже обозначается шар в C радиуса ε с центром в $(\alpha_j(t), \beta_j(t))$. Рассмотрим разбиение $\mathcal{P}$ множества $\mathcal{W}$ такое, что $\mathcal{P} \subset \mathcal{B}$. Без ограничения общности мы можем считать, что для любого w, удовлетворяющего $(\alpha_w(t_0), \beta_w(t_0)) \in \mathcal{P}$ функция $\eta_0(w)$ принимает одни и те же значения $\eta_{0,j}$ (иначе мы выберем более мелкое разбиение).

Рассмотрим оператор Прейсаха

$$\Xi_\varepsilon x(t) = \sum_{j=1}^{N} \mu_j R_{\alpha_j, \beta_j}[t_0, \eta_{0,j}]x(t),$$

где $\mu_j = \mu(\{w: (\alpha_w, \beta_w) \in \mathcal{P}\})$.

Этот оператор является естественным приближением для основного оператора Прейсаха ξ. Сформулируем одно утверждение о точности этого приближения.

Рассмотрим функции

$$\alpha_j^-(t) = \min\{\alpha(t): (\alpha(t), \beta(t)) \in \mathcal{P}\},$$
$$\alpha_j^+ = \max\{\alpha(t): (\alpha(t), \beta(t)) \in \mathcal{P}\},$$
$$\beta_j^-(t) = \min\{\beta(t): (\alpha(t), \beta(t)) \in \mathcal{P}\},$$
$$\beta_j^+ = \max\{\beta(t): (\alpha(t), \beta(t)) \in \mathcal{P}\}$$

и соответствующие операторы Прейсаха

$$\Xi_\varepsilon^- x(t) = \sum_{j=1}^{N} \mu_j R_{\alpha_j^-, \beta_j^-}[t_0, \eta_{0,j}]x(t),$$
$$\Xi_\varepsilon^+ x(t) = \sum_{j=1}^{N} \mu_j R_{\alpha_j^+, \beta_j^+}[t_0, \eta_{0,j}]x(t).$$

Т е о р е м а 6. *Справедливы соотношения*

$$\Xi_\varepsilon^+ x(t) \le \Xi x(t) \le \Xi_\varepsilon^- x(t).$$

Если выполнены условия теоремы 3, *то при* $\varepsilon \to 0$

$$\|\Xi_\varepsilon^- x(t) - \Xi_\varepsilon^+ x(t)\| \to 0.$$

ПРОСТЕЙШИЕ ЗАМКНУТЫЕ СИСТЕМЫ

Ниже предлагаются некоторые иллюстративные предложения относительно замкнутых систем с переменными нелинейностями Прейсаха. Выбор рассмотренных примеров определяется лишь их простотой, они являются следствиями рассмотренных выше свойств нестационарной модели Прейсаха и весьма общих методов нелинейного анализа. Аналогичные утверждения можно сформулировать для существенно более общих систем. Например, можно точно определить переменную нелинейность Прейсаха, в которой пороговые значения $\alpha_w(t)$ и $\beta_w(t)$ отдельных реле зависят не только от времени, но и от фазовых переменных. Интересно было бы изучить более сложные задачи для замкнутых систем, например, задачи о различных бифуркациях.

Рассмотрим уравнение

$$z' = f(t, z, y), \quad y(t) = \Xi x(t), \quad x(t) = \langle c, z(t)\rangle. \quad (5)$$

Здесь $z, c \in \mathbb{R}^n$, $x, y \in \mathbb{R}$, $t \ge t_0$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – это скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Начальное состояние $\eta_0(w)$ для оператора $\Xi x(t)$ предполагается фиксированным. Рассмотрим задачу Коши

$$z(t_0) = z_0 \quad (6)$$

для уравнения (5).

Т е о р е м а 7. *Пусть все условия теоремы* 4 *выполняются для каждого компактного множества X. Пусть носители мер* $\mu^*(t; \cdot)$ *для всех t принадлежат общему компакту* $K \subset \Pi$. *Пусть функция* $f(t, z, y)$ *удовлетворяет условию Липшица по переменным z и y. Тогда задача Коши* (6) *для уравнения* (5) *имеет единственное решение.*

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из теоремы 4 и принципа сжатых отображений.

Рассмотрим уравнение

$$L\left(\frac{d}{dt}\right)x = \Xi x(t) + \varphi(t); \quad (7)$$

здесь $L(p)$ – вещественный многочлен, $t \ge t_0$, $\varphi(\cdot)$: $[t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция. Начальное состояние $\eta_0(w)$ оператора $\Xi x(t)$ предполагается фиксированным. Рассмотрим начальные условия

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x_1, \ldots \quad (8)$$

и соответствующую задачу Коши (7), (8).

Т е о р е м а 8. *Пусть у многочлена* $L(p)$ *есть только вещественные корни. Тогда задача Коши* (8) *для уравнения* (7) *имеет по крайней мере одно решение.*

Доказательство основывается на первой части теоремы 1 и принципе Биркгофа–Тарского (см., например, [2]).

Рассмотрим снова уравнение (7) с T-периодической функцией φ. Предположим, что все функции $\alpha_w(t)$ и $\beta_w(t)$ также периодичны с тем же самым периодом T.

Т е о р е м а 9. *Пусть выполнены условия теоремы* 3. *Пусть многочлен* $L(p)$ *не имеет корней вида* 0, $\pm\frac{2\pi i}{T}$, ..., $\frac{2k\pi i}{T}$, ... *Тогда уравнение* (7) *имеет по крайней мере одно T-периодическое решение.*

Д о к а з а т е л ь с т в о основано на теореме 3 и принципе Шаудера.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 0001–00571, 01–01–00146 и 00–15–96116).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красносельский М.А., Покровский А.В.* Системы с гистерезисом. М.: Наука, 1983.
2. *Красносельский М.А., Лифшиц Е.А., Соболев А.В.* Позитивные линейные системы: метод положительных операторов. М.: Наука, 1985.
3. *Doob J.L.* Stochastic Processes. N. Y.: Wiley, 1953.
4. *Dixit A.K., Pindyck R.S.* Investment under Uncertainty. Princeton, 1994.