ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2001, том 378, № 3, с. 1–6

МАТЕМАТИКА

УДК 517.977

О КОНТИНУУМАХ ЦИКЛОВ В СИСТЕМАХ С ГИСТЕРЕЗИСОМ

© 2001 г. А. М. Красносельский, Д. И. Рачинский

Представлено академиком Н.А. Кузнецовым 09.01.2001 г.

Поступило 19.01.2001 г.

Изучаются автономные системы со сложными гистерезисными нелинейностями. Предлагаются условия существования континуума циклов малых амплитуд в окрестности одного из положений равновесия, близкие к теоремам о бифуркациях Хопфа в системах обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром.

1. ВВЕДЕНИЕ

Решения замкнутых систем дифференциальных уравнений со сложными гистерезисными нелинейностями, как правило, рассматриваются в произведении фазового пространства $\mathbb{R}^N$ системы и метрического пространства Ω состояний нелинейности. При изучении периодических решений систем с различными гистерезисными нелинейностями (Прейсаха, Ишлинского, их векторных аналогов и др. [1]) вместо бесконечномерного пространства Ω удается использовать пространство $\mathbb{R}^k$ значений выходов нелинейности. Переход к пространству $\mathbb{R}^{N+k}$ основан на построении оператора, сопоставляющего каждому периодическому входу гистерезисной нелинейности единственный периодический выход с заданным средним значением. Такой переход возможен в различных задачах о периодических колебаниях и существенно упрощает их анализ.

В сообщении изучается существование циклов малых амплитуд у автономных систем со скалярными ($k = 1$) гистерезисными нелинейностями Прейсаха. Такие системы имеют в $\mathbb{R}^{N+1}$ кривую из положений равновесия, в окрестности этой кривой ищут циклы. Как оказывается, среднее значение периодического выхода гистерезисной нелинейности может быть задано произвольно в пределах некоторого интервала и изучаемая задача близка к задачам о бифуркации Хопфа в автономных системах обыкновенных дифференциальных уравнений со скалярным параметром (см., например, [2, 3] и имеющуюся там библиографию), при этом упомянутое среднее значение играет роль параметра. Основные в теоремах о точках бифуркации Хопфа условия на линейную часть гарантируют существование континуума циклов малой амплитуды в окрестности одного из положений равновесия системы с гистерезисом. Геометрия континуума циклов определяется главными нелинейными слагаемыми в конструируемых по задаче специальных уравнениях. В классической задаче о бифуркации Хопфа эти слагаемые кубические (они определяются квадратичными и кубическими слагаемыми в разложении правых частей системы), малые циклы образуют гладкую двумерную поверхность в произведении фазового пространства $\mathbb{R}^N$ и прямой значений параметра. В предлагаемых результатах главное слагаемое определяется гистерезисной нелинейностью и оказывается квадратичным, циклы лежат на двумерной поверхности, близкой к круглому конусу.

Доказательства теорем основаны на разработанном в [4] методе построения операторных уравнений, эквивалентных периодической задаче, и их анализе топологическими методами.

2. ГИСТЕРЕЗИСНАЯ НЕЛИНЕЙНОСТЬ ПРЕЙСАХА

Обозначим через

$$\eta(t) = R_{\alpha\beta}[t_0, \eta_0]x(t), \quad t \geq t_0, \tag{1}$$

переменное состояние неидеального реле с пороговыми числами α, β ($\alpha > \beta$) при входе $x(t)$ ($t \geq t_0$) и начальном состоянии η_0. Здесь вход – произвольная непрерывная скалярная функция; η_0 принимает значения 1 и –1 ; скалярная функция $\eta(t)$ удовлетворяет соотношениям $\eta(t_0) = \eta_0$ и $|\eta(t)| = 1$ при всех t и имеет не более конечного числа разрывов на каждом отрезке $t_0 \leq t \leq t_1$. Значения оператора (1) определены при $\eta_0 = 1$, если $x(t_0) \geq \alpha$, при $\eta_0 = -1$, если $x(t_0) \leq \beta$, и при каждом из двух начальных состояний $\eta_0 = 1$ и $\eta_0 = -1$, если $\beta < x(t_0) < \alpha$; значение функции (1) в момент t определяется формулой

Институт проблем передачи информации Российской Академии наук, Москва

$$R_{\alpha\beta}[t_0, \eta_0]x(t) = \begin{cases} \eta_0, & \text{если } \beta < x(\tau) < \alpha \text{ при всех } \tau \in [t_0, t]; \\ 1, & \text{если найдется такое } t_1 \in [t_0, t], \text{ что } x(t_1) \ge \alpha \text{ и } x(\tau) > \beta \text{ при всех } \tau \in [t_1, t]; \\ -1, & \text{если найдется такое } t_1 \in [t_0, t], \text{ что } x(t_1) \le \beta \text{ и } x(\tau) < \alpha \text{ при всех } \tau \in [t_1, t]. \end{cases}$$

Равенства $\eta(t) = 1$ при $x(t) \ge \alpha$ и $\eta(t) = -1$ при $x(t) \le \beta$ верны при $t \ge t_0$.

Рассмотрим набор неидеальных реле с пороговыми числами из множества $\Pi = \{(\alpha, \beta)\colon \alpha > \beta, |\alpha| \le d, |\beta| \le d\}$, где $d > 0$. Состояниями набора называют заданные на Π измеримые функции $\eta(\alpha, \beta)$, каждая из которых при некотором $x_0 \in \mathbb{R}$ удовлетворяет равенствам

$$\eta(\alpha, \beta) = \begin{cases} -1, & \beta \ge x_0; \\ 1, & \alpha \le x_0; \end{cases} \tag{2}$$

$$|\eta(\alpha, \beta)| = 1, \quad \beta < x_0 < \alpha:$$

если верны равенства w, то будем писать $\eta(\alpha, \beta) \in \Omega(x_0)$. При каждом непрерывном входе $x(t)$ $(t \ge t_0)$ и начальном состоянии $\eta_0(\alpha, \beta) \in \Omega(x(t_0))$ равенство

$$\eta(t, \alpha, \beta) = R_{\alpha\beta}[t_0, \eta_0(\alpha, \beta)]x(t), \quad t \ge t_0, \tag{3}$$

определяет переменное состояние набора реле. Функция (3) при каждом t измерима в области Π и $\eta(t, \alpha, \beta) \in \Omega(x(t))$, поэтому определен интеграл

$$\xi(t) = \iint_{\Pi} \mu(\alpha, \beta) R_{\alpha\beta}[t_0, \eta_0(\alpha, \beta)]x(t) d\alpha\, d\beta, \quad t \ge t_0; \tag{4}$$

здесь $\mu(\alpha, \beta)$ – заданная на замыкании $\overline{\Pi}$ множества Π непрерывная функция. Функцию (4) называют выходом набора реле при входе $x(t)$ и начальном состоянии $\eta_0(\alpha, \beta)$, она всегда непрерывна (хотя (3) – разрывная функция).

Формулы (3) и (4) определяют операторы вход–состояние и вход–выход гистерезисных нелинейностей Прейсаха, играющих важную роль при учете гистерезисных эффектов в различных приложениях (физика, экономика и др.). Более подробное описание и основные свойства можно найти, например, в [1]. Отметим, что при $x(t) \equiv \text{const}$ верны соотношения $\xi(t) \equiv \text{const}$ и $\eta(t, \alpha, \beta) \equiv \eta_0(\alpha, \beta)$. Если входы нелинейности Прейсаха связаны равенством $x_1(t) = x_2(\theta(t))$ и функция $\theta(t)$ возрастает и непрерывна, то при общем начальном состоянии выходы и переменные состояния удовлетворяют равенствам $\xi_1(t) = \xi_2(\theta(t))$ и $\eta_1(t, \alpha, \beta) = \eta_2(\theta(t), \alpha, \beta)$.

Особо важны периодические выходы. При каждом периодическом входе $x(t)$ и каждом λ из некоторого отрезка $\Lambda_p = [\lambda_1, \lambda_2]$ (зависящего от $x(t)$) возможен единственный выход $\xi(t)$ того же периода T, удовлетворяющий $\bar{\xi} = \lambda$, где

$$\bar{\xi} = \frac{1}{T}\int_0^T \xi(t) dt; \tag{5}$$

этот выход будем обозначать

$$\xi(t) = H(x(t), \lambda). \tag{6}$$

Через $\Omega_p = \Omega_p(x(t), \lambda)$ обозначим класс начальных состояний $\eta_0(\alpha, \beta)$, при которых верно равенство (6) и переменное состояние (3) периодично по t. Отрезок $\Lambda_p = \Lambda_p(x(t))$ определяется по входу, класс $\Omega_p = \Omega_p(x(t), \lambda)$ – по входу и числу $\lambda \in \Lambda_p$. Множества Λ_p, Ω_p могут быть континуальны или вырождаться в точку; здесь мы не останавливаемся на их построении. Несмотря на единственность периодического выхода при фиксированных $x(t)$ и $\bar{\xi}$, начальное состояние, при котором выход периодичен, единственным не является.

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим уравнение

$$z' = F(z, \xi(t)), \quad z \in \mathbb{R}^N, \tag{7}$$

со скалярной нелинейностью (4), вход которой определяется равенством

$$x(t) = \langle c, z(t) \rangle. \tag{8}$$

Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – некоторое фиксированное скалярное произведение в $\mathbb{R}^N$; через $|\cdot|$ обозначается соответствующая евклидова норма и модули скалярных величин. Система равенств (4), (7), (8), далее называемая системой с гистерезисом, – это основной изучаемый в сообщении объект.

Если функция $F(z, \lambda)$ обладает стандартной гладкостью, то каждое начальное значение $z_0 = z(t_0)$ первой компоненты и каждое начальное состояние $\eta_0(\alpha, \beta) \in \Omega(\langle c, z_0 \rangle)$ определяют единственное решение $\{z(t), \xi(t)\}$ системы с гистерезисом при $t \ge t_0$. Для периодического решения $\eta_0(\alpha, \beta)$ – это произвольное состояние из класса $\Omega_p(\langle c, z(t) \rangle, \bar{\xi})$, где $\bar{\xi}$ – среднее за период значение (5) гистерезисной компоненты $\xi(t)$; определяемое формулами

(3), (8) переменное состояние также периодично. Подчеркнем, что система с гистерезисом автономна, поэтому каждое периодическое с периодом $T > 0$ решение вложено в континуум решений $\{z(t + \phi), \xi(t + \phi)\}$, $\phi \in \mathbb{R}$, с общей циклической траекторией в пространстве $\mathbb{R}^{N+1}$; цикл, как и решение, будем обозначать $\{z(t), \xi(t)\}$.

Положения равновесия $\{z_0, \xi_0\}$ системы с гистерезисом – это нули функции $F(z, \lambda)$, для которых $\xi_0 \in \Lambda_p(x(t))$ при $x(t) \equiv \langle c, z_0\rangle$.

Пусть равенство $F(z, \lambda) = 0$ при $\lambda \in \Lambda^*$ (Λ^* – это некоторый открытый интервал) определяет непрерывную ветвь $z = \varphi(\lambda)$ неявной функции и пусть график $\Gamma \subset \mathbb{R}^{N+1}$ этой ветви состоит из положений равновесия системы с гистерезисом. Более того, пусть ξ_0 является внутренней точкой отрезка $\Lambda_p(\langle c, z_0\rangle)$ при всех $\{z_0, \xi_0\} \in \Gamma$. Нас интересуют условия рождения циклов малой амплитуды в окрестности одной из точек кривой Γ (эту кривую можно параметризовать отличным от λ вспомогательным параметром; предположение о том, что всем точкам кривой соответствуют различные λ почти не нарушает общности и сделано для упрощения обозначений).

Будем считать, что функция $F(z, \lambda)$ непрерывно дифференцируема по переменной z и удовлетворяет условию Липшица по λ в окрестности кривой Γ. Положим

$$A(\lambda) = F'_z(\varphi(\lambda), \lambda), \quad \lambda \in \Lambda^*.$$

Предполагается, что в некоторой точке $\mathcal{M}_0 = \{\varphi(\lambda_0), \lambda_0\} \in \Gamma$ спектр квадратной ($N \times N$)-матрицы $A(\lambda_0) = F'_z(\varphi(\lambda_0), \lambda_0)$, содержит пару простых собственных значений $\pm i w_0$ ($w_0 > 0$) и не содержит точек $i w_0 n$ при $n = 0, \pm 2, \pm 3, \ldots$ Так как матрица $A(\lambda)$ непрерывно зависит от λ, то при близких к λ_0 значениях λ ее спектр содержит пару простых собственных значений $\sigma(\lambda) \pm i w(\lambda)$, непрерывно зависящих от λ и таких, что $\sigma(\lambda_0) = 0$, $w(\lambda_0) = w_0$.

Т е о р е м а 1. *Пусть функция* $\sigma(\lambda)$ *принимает значения обоих знаков в каждой окрестности точки* $\lambda = \lambda_0$. *Тогда у системы с гистерезисом в малой окрестности положения равновесия* $\mathcal{M}_0$ *есть однопараметрический континуум циклов* $\{z_r(t), \xi_r(t)\}$, *где* $0 < r < r_0$. *Эти циклы различны при различных* $r \to +0$; *их нормы и периоды* T_r *при* $r \to +0$ *удовлетворяют соотношениям*

$$\|z_r(t) - \varphi(\lambda_0)\|_C \to 0,$$
$$\|\xi_r(t) - \lambda_0\|_C \to 0, \quad T_r \to T_0 \overset{\text{def}}{=} \frac{2\pi}{w_0}. \tag{9}$$

В частности, условия теоремы выполнены, если функция $\sigma(\lambda)$ дифференцируема в точке λ_0 и $\sigma'(\lambda_0) \neq 0$ – это основная ситуация.

Простейший пример уравнения (7), для которого выполнены условия теоремы 1, – это скалярное уравнение $x'' + \xi x' + x = \Psi(x, \xi)$, где $\Psi(x, \xi) = o(x)$. Если нулевому входу нелинейности Прейсаха может (при разных начальных состояниях) отвечать выход любого знака, то у уравнения есть континуум малых циклов в окрестности нулевого положения равновесия.

Если функция $F(z, \lambda)$ достаточно гладкая в окрестности точки $\mathcal{M}_0$, то при малых значениях $|\lambda - \lambda_0|$ функции $\sigma(\lambda)$ и $w(\lambda)$ непрерывно дифференцируемы и справедливо представление

$$F(\varphi(\lambda) + y, \lambda + \nu) = A(\lambda)y + a(\lambda)\nu + \Phi(\lambda, y, \nu),$$
$$y \in \mathbb{R}^N, \quad \lambda, \nu \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

Здесь матрица-функция $A(\lambda)$ и вектор-функция $a(\lambda)$ липшицевы, а для остаточного члена при $|y_j|$, $|\nu_j| \le \rho$ и $\rho \to +0$ верны равномерные по λ оценки

$$|\Phi(\lambda, y_1, \nu_1)| \le o(\rho), \tag{11}$$

$$|\Phi(\lambda_1, y_1, \nu_1) - \Phi(\lambda_2, y_2, \nu_2)| \le$$
$$\le o(\rho)|\lambda_1 - \lambda_2| + \varepsilon(\rho)(|y_1 - y_2| + |\nu_1 - \nu_2|), \tag{12}$$

где $\varepsilon(\rho) \to 0$ при $\rho \to 0$ (т.е. $\varepsilon(\rho) = o(1)$).

Т е о р е м а 2. *Пусть справедливы соотношения* (10)–(12) *и* $\sigma'(\lambda_0) \neq 0$. *Пусть функция* $\mu(\alpha, \beta)$ *липшицева. Тогда циклы* $\{z_r(t), \xi_r(t)\}$ *и их периоды непрерывно зависят от параметра* r. *При этом в малой окрестности точки* $\mathcal{M}_0$ *у системы с гистерезисом нет других циклов периода близкого к* T_0.

В условиях этой теоремы зависимость циклов от параметра r липшицева.

Пусть $\Xi_\lambda \subset \mathbb{R}^N$ – собственная плоскость матрицы $A(\lambda)$, отвечающая паре ее собственных значений $\sigma(\lambda) \pm i w(\lambda)$. Пусть Ξ^* – отвечающая паре собственных значений $\pm i w_0$ собственная плоскость сопряженной для $A(\lambda_0)$ матрицы $A^*(\lambda_0)$. Рассмотрим векторы $e_\lambda, g_\lambda \in \Xi_\lambda$ и $e^*, g^* \in \Xi^*$, для которых верны равенства

$$A^*(\lambda_0)e^* = w_0 g^*, \quad A(\lambda)e_\lambda = \sigma(\lambda)e_\lambda - w(\lambda)g_\lambda,$$
$$\langle e^*, e_\lambda\rangle + \langle g^*, g_\lambda\rangle = 2,$$
$$A^*(\lambda_0)g^* = -w_0 e^*, \quad A(\lambda)g_\lambda = w(\lambda)e_\lambda - \sigma(\lambda)g_\lambda, \tag{13}$$
$$\langle e^*, g_\lambda\rangle = \langle g^*, e_\lambda\rangle.$$

Определим проекцию $c_0 = \langle c, e_{\lambda_0}\rangle e^* + \langle c, g_{\lambda_0}\rangle g^*$ вектора c на Ξ^* и положим

$$\kappa = \left\langle c_0, a(\lambda_0) - \frac{4}{3\pi w_0}A(\lambda_0)a(\lambda_0)\right\rangle \times$$

$$\times \sqrt{\langle c, e_{\lambda_0}\rangle^2 + \langle c, g_{\lambda_0}\rangle^2}, \quad x_0 = \langle c, \varphi(\lambda_0)\rangle; \qquad (14)$$

$$u_\lambda(t) = e_\lambda \sin t + g_\lambda \cos t, \quad u_\lambda(t) = e_\lambda \cos t - g_\lambda \sin t.$$

Пусть главные члены нелинейности $\Phi(\lambda, y, \nu)$ в (10) квадратичны:

$$\Phi(\lambda, y, \nu) = D_\lambda(y, y) + \nu B(\lambda)y + \nu^2 b(\lambda) + \Phi_1(\lambda, y, \nu),$$
$$y \in \mathbb{R}^N, \quad \lambda, \nu \in \mathbb{R}. \qquad (15)$$

Здесь $D_\lambda(y, y)$ – это векторнозначная симметрическая квадратичная форма, непрерывно зависящая от λ; матрица-функция $B(\lambda)$ и вектор-функция $b(\lambda)$ также непрерывны; остаточный член $\Phi_1(\lambda, y, \nu)$ удовлетворяет при $|y|, |\nu| \le \rho$ равномерной по λ оценке

$$|\Phi_1(\lambda, y, \nu)| \le o(\rho^2), \quad \rho \to +0. \qquad (16)$$

Теорема 3. *Пусть справедливы соотношения* (10), (15), (16) *и* $\sigma'(\lambda_0) \ne 0$. *Положим*

$$\psi_0 = \mu(x_0, x_0), \quad \Delta_* = -\frac{\kappa\psi_0}{\sigma'(\lambda_0)},$$
$$z_0 = -\Delta_* A^{-1}(\lambda_0)a(\lambda_0). \qquad (17)$$

Тогда для циклов $\{z_r(t), \xi_r(t)\}$ *при* $r \to +0$ *верны асимптотические формулы*

$$\|z_r(t) - \varphi(\lambda_0) - rz_0 - ru_{\lambda_0}(t)\|_C = o(r),$$
$$\|\xi_r(t) - \lambda_0 - r\Delta_*\|_C = o(r). \qquad (18)$$

Положим $\mathscr{E} = \{\{z, \xi\} \in \mathbb{R}^{N+1}: z = z_0 + u_{\lambda_0}(t), \xi = \Delta_*, 0 \le t \le 2\pi\}$. В силу 10 циклы $\{z_r(t), \xi_r(t)\}$ асимптотически близки к эллипсам $\mathcal{M}_0 + r\mathscr{E}$, где $r > 0$. При $\Delta_* \ne 0$ эллипсы $\mathcal{M}_0 + r\mathscr{E}$ образуют коническую поверхность в трехмерном подпространстве $\Xi_{\lambda_0} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{N+1}$, а их центры – луч $r(z_0, \Delta_*)$, касательный к кривой Γ в вершине $\mathcal{M}_0$ конуса. При $\Delta_* = 0$ эллипсы образуют плоскость.

4. ВЫРОЖДЕННЫЕ СЛУЧАИ

В условиях теорем предыдущего раздела функция $\sigma(\lambda)$ принимает значения обоих знаков в каждой окрестности нуля; теоремы 2 и 3 применимы при более сильном ограничении $\sigma'(\lambda_0) \ne 0$. Здесь рассматриваются другие ситуации. Во всем разделе предполагаются справедливыми соотношения (10, (15) и (16).

Теорема 4. *Пусть* $\sigma(\lambda_0) = 0$, *пусть при* $\lambda \ne \lambda_0$ *функция* $\sigma(\lambda)$ *отлична от нуля и имеет постоянный знак. Пусть* $\kappa\psi_0 \ne 0$. *Если* $\sigma(\lambda)\kappa\psi_0 < 0$ *при* $\lambda \ne \lambda_0$, *то у системы с гистерезисом в малой окрестности точки* $\mathcal{M}_0$ *есть два континуума циклов. Циклы каждого из континуумов удовлетворяют соотношениям* (9), *для циклов одного континуума величина **5** больше* λ_0, *для циклов другого меньше. Если* $\sigma(\lambda)\kappa\psi_0 > 0$ *при* $\lambda \ne \lambda0$, *то в малой окрестности точки* $\mathcal{M}_0$ *у системы нет циклов периодов близких к* T_0.

Если функция $\sigma(\lambda)$ отлична от нуля и принимает значения разного знака при $\lambda < 0$ и $\lambda > \lambda_0$, то при $\kappa\psi_0 \ne 0$ разность $\bar{\xi} - \lambda_0$, где $\bar{\xi}$ – величина (5), имеет один и тот же знак для всех циклов, он определяется из оценки $\sigma(\bar{\xi})\kappa\psi_0 < 0$. При $\sigma'(\lambda_0) \ne 0$ эта оценка вытекает из 10.

В теоремах 1–4 точка $\mathcal{M}_0 \in \Gamma$, в окрестности которой существуют циклы сколь угодно малых амплитуд, и соответствующее значение $\lambda = \lambda_0$ определяются из уравнения $\sigma(\lambda) = 0$. При $\sigma(\lambda) \equiv 0$ важны нули функции $\psi(\lambda) = \mu(\langle c, \varphi(\lambda)\rangle, \langle c, \varphi(\lambda)\rangle)$. По определению $\psi_0 = \varphi(\lambda_0)$.

Теорема 5. *Пусть* $\sigma(\lambda) \equiv 0$, $\kappa \ne 0$. *Пусть* $\psi(\lambda_0) = 0$ *и пусть функция* $\varphi(\lambda)$ *принимает значения обоих знаков в любой окрестности точки* $\lambda = \lambda_0$. *Тогда у системы с гистерезисом в малой окрестности точки* $\mathcal{M}_0$ *есть однопараметрический континуум циклов*, *удовлетворяющих соотношениям* (9).

Например, $\sigma(\lambda) \equiv 0$ для системы $z' = Az + a\xi(t)$.

5. СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Положим

$$u^*(t) = e^* \sin t + g^* \cos t, \quad v^*(t) = e^* \cos t - g^* \sin t.$$

Через C_0 обозначим пространство 2π-периодических непрерывных функций $z(t)$ с равномерной нормой. В пространстве C_0 рассмотрим линейную оболочку E_λ функций (14) и дополнительное к плоскости E_λ подпространство E^0 всех функций $h(t)$, для которых

$$\int_0^{2\pi} \langle u^*(t), h(t)\rangle dt = \int_0^{2\pi} \langle v^*(t), h(t)\rangle dt = 0.$$

Функции $z(t) \in E_{\lambda_0}$ – это 2π-периодические решения уравнения $w_0 z' = A(\lambda_0)z$. Через Y обозначим действующий в E^0 линейный оператор, сопоставляющий функции $h(t)$ единственное 2π-периодическое решение $z(t) = Yh(t)$ неоднородного уравнения $w_0 z' = A(\lambda_0)z + h(t)$.

Замена времени $wt \mapsto t$ в системе с гистерезисом приводит к уравнению

$$wz' = F(z, \xi(t)), \tag{19}$$

где $\xi(t)$ определяется равенствами (4), (8). Будем искать 2π-периодические решения $\{z(t), \xi(t)\}$ этого уравнения в виде

$$\begin{aligned} z(t) &= \varphi(\lambda) + ru_\lambda(t) + h(t), \\ \xi(t) &= \lambda + H(\langle c, z(t)\rangle, \lambda), \end{aligned} \tag{20}$$

где $r > 0$ и $h(t) \in E^0$. Каждое такое решение при r, $\lambda - \lambda_0$ и $w - w_0$, близких к нулю, определяет малый цикл $\{z(wt), \xi(wt)\}$ системы с гистерезисом. Положим

$$\begin{aligned} &S(r, \lambda, h(t)) = \\ &= F(z(t), \xi(t)) - rA(\lambda)u_\lambda(t) - A(\lambda_0)h(t), \end{aligned}$$

где $z(t)$, $\xi(t)$ – функции (20), и перепишем (19) в виде

$$\begin{aligned} &w(ru_\lambda'(t) + h'(t)) = \\ &= rA(\lambda)u_\lambda(t) + A(\lambda_0)h(t) + S(r, \lambda, h(t)). \end{aligned} \tag{21}$$

Спроектируем это уравнение на E_λ вдоль E^0; получим систему

$$\begin{aligned} &\sigma(\lambda) + \frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} \langle u^*(t), S(r, \lambda, h(t))\rangle dt = 0, \\ &w - w(\lambda) - \frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} \langle v^*(t), S(r, \lambda, h(t))\rangle dt = 0 \end{aligned} \tag{22}$$

(при проектировании использованы соотношения (13)). Применение к уравнению (21) проектора Q_λ на подпространство E^0 вдоль плоскости E_λ приводит к дифференциальному уравнению $wh'(t) = A(\lambda_0)h(t) + Q_\lambda S(r, \lambda, h(t))$ и далее к эквивалентному операторному уравнению

$$\begin{aligned} &h(t) - w_0(wI + (w - w_0)TA(\lambda_0))^{-1} \times \\ &\times YQ_\lambda S(r, \lambda, h(t)) = 0. \end{aligned} \tag{23}$$

Систему (22), (23) запишем в виде

$$\Psi(r, \lambda, w, h(t)) = 0.$$

Здесь $r > 0$ будем рассматривать как параметр, числа λ, w и функцию $h(t) \in E^0$ – как неизвестные.

Для доказательства теоремы 1 достаточно установить существование при каждом достаточно малом r нуля $\{\lambda_r, w_r, h_r\}$ векторного поля $\Psi(r, \cdot)$ в произвольно малой окрестности точки $\{\lambda_0, w_0, 0\}$ пространства $\mathbb{E} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times E^0$. Воспользуемся топологическими методами (см., например, [5]). По построению векторное поле $\Psi(r, \cdot)$ вполне непрерывно, поэтому на границе каждой ограниченной области $G \subset \mathbb{E}$, где это поле не вырождено, определено его вращение $\gamma(\Psi(r, \cdot), G)$ и при $\gamma(\Psi(r, \cdot), G) \neq 0$ у поля $\Psi(r, \cdot)$ есть хотя бы один нуль в G.

По условию теоремы 1 при любом малом $\varepsilon > 0$ найдется такой отрезок $[\lambda_-, \lambda_+] \subset (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon)$, что $\sigma(\lambda_-)\sigma(\lambda_+) < 0$ и $|w(\lambda) - w_0| < \varepsilon$ при всех $\lambda \in [\lambda_-, \lambda_+]$. Рассмотрим область $G = [\lambda_-, \lambda_+] \times G_\varepsilon$, где $G_\varepsilon = \{|w - w_0| \le \varepsilon, \|h(t)\|_C \le \varepsilon\}$. Для нулей $\{\lambda_r, w_r, h_r\} \in G$ поля $\Psi(r, \cdot)$ легко устанавливается равномерное асимптотическое равенство $\|S(r, \lambda_r, h_r)\|_C = o(r)$. Поэтому при каждом достаточно малом $r > 0$ поле $\Psi(r, \cdot)$ не вырождено и линейно гомотопно полю $\Psi_0^*(\lambda, w, h) = \{\sigma(\lambda), w - w_0, h\}$ на границе ∂G области G, значит, вращения этих полей на ∂G равны. По теореме о произведении вращений $\gamma(\Psi_0^*(\cdot), G) = \dfrac{\operatorname{sign}\sigma(\lambda_+) - \operatorname{sign}\sigma(\lambda_-)}{2}$ (см.[5]). Соотношение $\gamma(\Psi_0^*(\cdot), G) \neq 0$ вытекает из оценки $\sigma(\lambda_+)\sigma(\lambda_-) < 0$, из него следует утверждение теоремы 1.

В условиях теоремы 2 для уравнения $\Psi(r, \lambda, w, h) = 0$ при малых $r > 0$ в окрестности точки $\{\lambda_0, w_0, 0\} \in \mathbb{E}$ применима теорема о неявной функции.

В условиях всех теорем для решений (20) уравнения (19) верны формулы

$$\begin{aligned} \|z(t) - \varphi(\lambda) - ru_\lambda(t)\|_C &= o(r), \\ \|\xi(t) - \lambda\|_C &= o(r). \end{aligned} \tag{24}$$

Если нелинейности допускают представления (10), (15), то в силу (23)

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \langle u^*(t), S(r, \lambda, h(t))\rangle dt = \\ &= \psi(\lambda)r^2(\kappa + \chi(\lambda)) + o(r^2), \quad \chi(\lambda) \to 0. \end{aligned} \tag{25}$$

Поэтому для нулей $\{\lambda_r, w_r, h_r\}$ поля $\Psi(r, \cdot)$ верно соотношение

$$\sigma(\lambda_r) + \kappa\psi(\lambda_r)r + o(r) = 0.$$

Теперь из (24) и равенства $\varphi(\lambda) = \varphi(\lambda_0) - (\lambda - \lambda_0)A^{-1}(\lambda_0)a(\lambda_0) + o(\lambda - \lambda_0)$ вытекают формулы $\lambda_r = \lambda_0 + r\Delta_* + o(r)$, $\varphi(\lambda_r) = \varphi(\lambda_0) + rz_0 + o(r)$ и (18).

Доказательства теорем 4, 5 близки к доказательству теоремы 1. При доказательстве теоремы 4 вместо G рассматриваются области $G^- = [\lambda_0 - \delta, \lambda_0] \times G_\varepsilon$ и $G^+ = [\lambda_0, \lambda_0 + \delta] \times G_\varepsilon$, где $|w(\lambda) - w_0| < \varepsilon$ при $|\lambda - \lambda_0| \le \delta$. При малых $r > 0$ на границах этих областей векторное поле $\Psi(r, \cdot)$ линейно гомотопно полю $\Psi_r^*(\lambda, w, h) = \{\sigma(\lambda) + \kappa\psi(\lambda)r, w - w_0, h\}$ и из соотношений $\sigma(\lambda)\kappa\psi(\lambda_0) = \sigma(\lambda)\kappa\psi_0 < 0$ при $\lambda \neq \lambda_0$ вытекает, что одно из вращений $\gamma(\Psi_r^*(\cdot), G^-)$ и $\gamma(\Psi_r^*(\cdot), G^+)$ равно 1, другое равно –1. В предположениях теоремы 5 при малых r векторные поля $\Psi(r, \cdot)$ и $\Psi_r^*(\cdot)$ линейно гомотопны на границе области $G = [\lambda_-, \lambda_+] \times G_\varepsilon$, где $\psi(\lambda_-)\psi(\lambda_+) < 0$, и $|\gamma(\Psi_r^*(\cdot), G)| = 1$. При доказательстве гомотопности полей $\Psi(r, \cdot)$ и $\Psi_r^*(\cdot)$ используется соотношение (25)

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 0001–0057 и 00–15–96116).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красносельский М.А., Покровский А.В.* Системы с гистерезисом. М.: Наука, 1983.
2. *Марсден Дж., Мак-Кракен М.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980.
3. *Kozyakin V.S., Krasnosel'skii M.A.* // Nonlin. Anal. 1987. V . 11. № 2. P. 149–161.
4. *Красносельский А.М., Кузнецов Н.А., Рачинский Д.И.* // ДАН. 2000. Т . 372. № 4. С. 455–458.
5. *Красносельский М.А., Забрейко П.П.* Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука, 1975.