УДК 517.977

А.М. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ, д-р физ.-мат. наук,
Д.И. РАЧИНСКИЙ, канд. физ.-мат. наук
(Институт проблем передачи информации РАН, Москва)

СУЩЕСТВОВАНИЕ КОНТИНУУМОВ ЦИКЛОВ В ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ[1]

Предлагаются простые условия существования глобальных континуумов циклов у автономных гамильтоновых одноконтурных систем управления. Условия используют обычные линейные двусторонние секторные оценки нелинейностей. Предельные границы секторных оценок определяются свойствами линейного звена. Предложенные методы позволяют по выбранному сектору установить двусторонние оценки периода цикла.

1. Введение. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение

$$L\Big(\frac{d}{dt}\Big)x = M\Big(\frac{d}{dt}\Big)f(x) \tag{1}$$

динамики одноконтурной системы, состоящей из линейного интегрирующего звена с дробно рациональной передаточной функцией $W(p) = M(p)/L(p)$ и нелинейной функциональной обратной связи $f(x)$. Блок-схема такой системы изображена на Рис. 1.

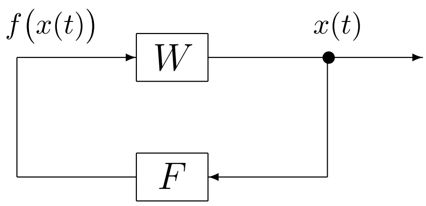

Рис. 1. Одноконтурная система

Здесь

$$L(p) = p^\ell + a_1 p^{\ell-1} + \ldots + a_\ell, \qquad M(p) = b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \ldots + b_m \tag{2}$$

[1]Работа написана в период пребывания А.М.Красносельского в Институте Нелинейных Наук в национальном университете Ирландии (г. Корк) и в период пребывания Д.И.Рачинского в университете г. Регенсбурга (Германия) при поддержке “Research Fellowship of the Alexander von Humboldt Foundation”. Авторы поддержаны грантами Российского Фонда Фундаментальных Исследований №№ 0001-00571 и 00-15-96116.

— взаимно простые вещественные многочлены, $\ell = \deg L(p) > m = \deg M(p)$. Функция $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ считается непрерывной. Всюду в статье предполагается, что $f(0) = 0$, т.е. нуль — это положение равновесия системы.

Решения уравнения (1) понимаются в обычном в теории управлении смысле как решения эквивалентной системы $z' = Az + B\,f(x),\ x = Cz,\ z \in \mathbb{R}^\ell$ в пространстве состояний.

Пусть нелинейность $f(x)$ удовлетворяет секторной оценке

$$|f(x)| \leqslant q|x|, \qquad q < \infty. \tag{3}$$

Если многочлен $L(p)$ не имеет мнимых корней, а сектор достаточно узкий:

$$q < \inf_{w\in\mathbb{R}} \left| \frac{L(wi)}{M(wi)} \right|,$$

то у системы (1) нет периодических нетривиальных режимов.

Всюду в статье предполагаются выполненными две основные гипотезы:

1. Оба многочлена (2) содержат неизвестную только в четных степенях;
2. У многочлена $L(p)$ есть чисто мнимые корни.

Первая гипотеза означает, что уравнение (1) в естественном смысле гамильтоново. Существует линейная замена переменных, приводящая систему в ℓ-мерном пространстве состояний к гамильтоновому виду. Реально используется существование стандартного первого интеграла.

Вторая гипотеза определяет геометрию циклов системы (1) при $f(x) \equiv 0$: в пространстве состояний есть плоскость, составленная из окружностей, которые являются циклами системы. При ненулевой функции $f(x)$ (возмущенная система) с этой плоскостью могут происходить самые различные вещи. Например, циклы могут вообще исчезнуть или изогнуться, но остаться в окрестности нуля или на бесконечности, а "нелокально" — пропасть. В статье приводятся условия, при выполнении которых у системы сохраняется однопараметрическое семейство циклов, проходящее через нуль и уходящее в бесконечность. Иными словами, при выполнении этих условий плоскость изгибается, но сохраняется во всем пространстве. В статье не предполагается никакая гладкость нелинейности, только непрерывность. Поэтому говорить, что существует двумерное многообразие, составленное из циклов, нельзя: изогнутая плоскость, возможно, перестает быть гладкой.

Вообще говоря, циклы у возмущенной системы всегда глобально сохранятся при достаточно малом q в оценке (3). В линейном случае $f(x) = \varepsilon x$ (в этом случае плоскость не будет изгибаться, а просто может повернуться, период циклов изменится) ответ следует из следующего простого факта: если четный многочлен $L(p)$ имеет пару сопряженных чисто мнимых корней нечетной кратности, то при достаточно малом по модулю ε четный многочлен $L(p)+\varepsilon M(p)$ также имеет пару чисто мнимых корней нечетной кратности. Этот факт вытекает из обычной теоремы Коши для функций действительной переменной. Видно, что нечетность кратности корня существенна.

Ситуация, когда хотя бы один из многочленов (2) содержит переменную в нечетной степени (не выполнена первая гипотеза) качественно отличается от рассмотренной. В этом случае естественно возникают ситуации, в которых плоскость из циклов схлопывается в единственный цикл или конечное количество циклов [1].

Отметим отсутствие в доказательствах геометрических конструкций в пространстве состояний. Построения проводятся в специально сконструированном бесконечномерном пространстве. Аналоги принципа тора (см., например, [2] или [3]) не используются.

2. Основной результат

Итак, пусть оба многочлена $L(p)$ и $M(p)$ четные, то есть $\ell = 2n_1,\ m = 2n_2$ и

$$L(p) = p^\ell + a_2 p^{\ell-2} + \ldots + a_\ell, \qquad M(p) = b_0 p^m + b_2 p^{m-2} + \ldots + b_m. \tag{4}$$

Т е о р е м а 1. *Пусть многочлен $L(wi)$ имеет пару вещественных корней $\pm w_0$ $(w_0 > 0)$. Пусть промежуток $\Omega = [w_1, w_2]$, $w_0/2 < w_1 < w_0 < w_2$ удовлетворяет следующим условиям:*

(i). *Кратность корней $\pm w_0$ нечетная и других корней на промежутке Ω у многочлена $L(wi)$ нет;*

(ii). *Многочлен $L(wi)$ не имеет корней wn, где $w \in \Omega$, $n = 0, \pm 2, \pm 3\ldots$; неравенство*

$$q < \inf_{n=0,2,3,4,\ldots;\, M(nwi)\neq 0} \left| \frac{L(nwi)}{M(nwi)} \right| \tag{5}$$

выполнено при всех $w \in [w_1, w_2]$;

(iii). *Неравенство*

$$q|M(wi)| < |L(wi)| \tag{6}$$

выполнено при $w = w_1$ и при $w = w_2$.

Пусть непрерывная функция $f(x)$ удовлетворяет оценке (3).

Тогда у уравнения (1) *при каждом $\rho > 0$ существует по крайней мере один нетривиальный цикл с периодом $T = T_\rho \in [2\pi/w_2, 2\pi/w_1]$ и нормой ρ в пространстве $L^2(0, T)$.*

Промежуток Ω и число q, удовлетворяющие условиям теоремы, существуют всегда, если только многочлен $L(wi)$ не имеет корней вида $w_0 n$, $n = 0, \pm 2, \pm 3, \ldots$ Для ослабления ограничения на $f(x)$ приходится выбирать более широкие промежутки Ω, при этом ухудшается оценка периодов существующих циклов.

Если скалярная функция $\chi(w) = \big|L(wi)/M(wi)\big|$ монотонна на промежутках $[w_0/2, w_0]$ и $[w_0, \infty)$, естественно полагать $w_2 = 2w_1$ и определять w_1 из уравнения $\chi(w) = \chi(2w)$. При этом допустимое в условиях теоремы 1 значение q оказывается максимальным.

Норма в пространстве L^2 в формулировке теоремы может быть заменена на норму в пространстве C.

Т е о р е м а 2. *Пусть*

$$L(w_1 i) L(w_2 i) < 0, \qquad 0 < w_1 < w_2, \tag{7}$$

и для промежутка $\Omega = [w_1, w_2]$ верны условия (ii), (iii) *теоремы* 1.

Пусть непрерывная функция $f(x)$ удовлетворяет оценке (3).

Тогда у уравнения (1) *при каждом $\rho > 0$ существует по крайней мере один нетривиальный цикл с периодом $T = T_\rho \in [2\pi/w_2, 2\pi/w_1]$ и нормой ρ в пространстве $L^2(0, T)$.*

Естественно, теорема 1 следует из теоремы 2. Теорема 2 доказана в приложении.

В силу (7) теоремы 2 у многочлена $L(wi)$ найдется хотя бы один корень w_0 нечетной кратности внутри промежутка Ω: $w_1 < w_0 < w_2$; при этом $w_0/2 < w_1$ по условию (ii).

3. Примеры

Пусть $L(p) = p^4 - 1$, $M(p) = 1$. Многочлен $L(p)$ имеет корни $\pm i$ и не имеет других корней на мнимой оси.

Теорема 3. Пусть непрерывная функция $f(x)$ удовлетворяет оценке (3), *в которой $q < \dfrac{15}{17}$. Тогда у уравнения $x^{(\mathrm{iv})} - x = f(x)$ при каждом $\rho > 0$ существует по крайней мере один нетривиальный цикл с периодом $T \in [\pi/w_1, 2\pi/w_1]$, где $w_1 = \sqrt[4]{\dfrac{2}{17}}$, и нормой ρ в пространстве $L^2(0,T)$.*

Теорема 3 следует из теоремы 1. Положим $w_2 = 2w_1$. Тогда неравенство (5) имеет вид $q < \min\{1,\ 16w_1^4 - 1,\ 81w_1^4 - 1,\ \ldots\} = \frac{15}{17}$, и условие (6) имеет такой же вид $q < \min\{1 - w_1^4,\ w_2^4 - 1\} = \min\{\frac{15}{17}, \frac{15}{17}\} = \frac{15}{17}$. Ясно, что если мы изменим границы промежутка $[w_1, w_2]$, то условия (5), (6) станут более ограничительными.

Величина w_1 найдена из уравнения $1 - w^4 = (2w)^4 - 1$.

Пусть $L(p) = (p^2 + 1 - \varepsilon)(p^2 + 1)(p^2 + 1 + \varepsilon) \equiv (p^2 + 1)\big((p^2+1)^2 - \varepsilon^2\big)$, $M(p) = 1$. Корни многочлена $L(p)$ равны $\pm\sqrt{1 \pm \varepsilon}\, i, \pm i$.

Теорема 4. Пусть $\varepsilon < 0,6$. Пусть непрерывная функция $f(x)$ удовлетворяет оценке (3), *в которой $q < 0,216 - 0,6\varepsilon^2$. Тогда у уравнения $L\big(\frac{d}{dt}\big)x = f(x)$ при каждом $\rho > 0$ существует по крайней мере один нетривиальный цикл с периодом $T \in [\pi/w_1, 2\pi/w_1]$ $(w_1 = \sqrt{0,4} \approx 0,632)$ и нормой ρ в $L^2(0,T)$.*

Теорема 4 следует из теоремы 2.

При $f(x) = 0$ в пространстве состояний есть три плоскости, состоящие из циклов разного периода. При $|f(x)| \leqslant q|x|$, $q < \frac{2}{9}\sqrt{3}\varepsilon^3$ и $\varepsilon < \varepsilon_0$ (ε_0 — это вещественный корень многочлена $2\sqrt{3}p^3 + 5,4p^2 - 1,944$; $\varepsilon_0 \approx 0,5196$) количество таких плоскостей сохранится в силу теоремы 1. Однако, уже при линейном возмущении $f(x) = \pm\frac{2}{9}\sqrt{3}\varepsilon^3\, x$ две из этих плоскостей сольются и останется две состоящих из циклов плоскости.

П Р И Л О Ж Е Н И Е

1. Выбор неизвестных. Вначале сделаем замену времени в уравнении (1). Пусть $w \in \Omega = [w_1, w_2]$. Каждое 2π-периодическое решение $x(t)$ уравнения

$$L\Big(w\frac{d}{dt}\Big)x = M\Big(w\frac{d}{dt}\Big)f(x) \tag{П.1}$$

определяет $2\pi/w$-периодическое решение $x(wt)$ уравнения (1). Мы будем рассматривать вместо (1) уравнение (П.1) и доказывать, что при некотором $w \in \Omega$ у (П.1) найдется 2π-периодическое решение. Это решение будем искать в виде

$$x(t) = r\sin t + h(t), \qquad r > 0, \tag{П.2}$$

где ряд Фурье 2π-периодической функции $h(t)$ не содержит первых гармоник, т.е.

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos t\, h(t)\, dt = \int\limits_0^{2\pi} \sin t\, h(t)\, dt = 0$$

или, что то же, $Ph = 0$, где

$$Px(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \cos(t-s)\, x(s)\, ds.$$

Сначала мы докажем, что в условиях теоремы 2 при любом положительном r найдутся такое число $w \in \Omega$ и такая функция $h(t)$, при которых (П.2) — это 2π-периодическое решение уравнения (П.1). Существование периодических решений любой нормы в L^2 устанавливается в самом конце доказательства.

Обратим внимание на то, что каждое нестационарное периодическое решение $x(t)$ уравнения с автономной нелинейностью $f(x)$ порождает континуум таких решений: функция $x(t+\alpha)$ также является периодическим решением при каждом вещественном α. Все эти решения определяют один и тот же цикл в пространстве состояний. Мы сначала выбрали в качестве дополнительного неизвестного частоту периодического решения, а потом устранили заведомую неединственность задачи, зафиксировав фазу, т.е. выбрав из континуума сдвигов единственное решение, имеющее нулевую проекцию на $\cos t$ и положительную проекцию на $\sin t$.

Подчеркнем еще раз, что периодическое решение уравнения (1) обладает априори неизвестным периодом $2\pi/w$, причем каждое такое решение вложено в континуум. Мы добавили в число явно указанных неизвестных частоту w, амплитуду первой гармоники r сделали свободным параметром и убрали неопределенную фазу α первой гармоники. При этом вместо неизвестного $x(t)$ мы используем неизвестное $h(t)$, имеющее коразмерность 2 в стандартных функциональных пространствах. Отсутствие вроде бы нехватающего скалярного неизвестного компенсируется существованием первого интеграла у изучаемой системы.

Получающаяся система оказывается корректно определена и может быть исследована топологическими методами.

2. *Линейные подпространства и операторы.* Первый линейный оператор, использующийся в работе — это проектор P. Мы будем использовать компоненты этого проектора: $P = P_{\cos} + P_{\sin}$, где

$$P_{\cos}x(t) = \frac{\cos t}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \cos s\, x(s)\, ds, \qquad P_{\sin}x(t) = \frac{\sin t}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \sin s\, x(s)\, ds.$$

Рассмотрим[2] плоскость $\Pi = P\, L^2$ и ортогональное ей в L^2 дополнение $\Pi^* = Q\, L^2$, где $Q = I - P$; $\mathrm{codim}\Pi^* = 2$.

Обозначим через $A(w)$ ($w \in \Omega$) линейный оператор, ставящий в соответствие каждой функции $u(t)$ из подпространства Π^* единственное решение $x(t) \in \Pi^*$ линейного уравнения

$$L\Big(w\frac{d}{dt}\Big)x = M\Big(w\frac{d}{dt}\Big)u(t). \tag{П.3}$$

[2]Все пространства состоят из скалярных функций, определенных на $[0, 2\pi]$.

Существование решения $x(t)$ следует из условия (ii) теоремы и из $u(t) \in \Pi^*$, единственность — из $x(t) \in \Pi^*$. При $L(wi) \neq 0$ операторы $A(w)$ могут быть рассмотрены во всем пространстве L^2, однако их нормы становятся сколь угодно малых $L(wi)$. В подпространстве Π^* эти нормы допускают равномерную на Ω оценку сверху:

$$\big\|A(w)\big\|_{\Pi^*\to\Pi^*} \leqslant c_* = \sup_{w\in\Omega}\, q_*(w) < \infty, \quad \text{где} \quad q_*(w) \overset{\text{def}}{=} \sup_{n\in\mathbb{Z}, n\neq\pm1} \Big|\frac{M(wni)}{L(wni)}\Big|.$$

Пусть C_0^1 — пространство непрерывно дифференцируемых 2π-периодических функций с обычной нормой $\|\cdot\|_{C^1}$. Каждый оператор $A(w)$ действует из Π^* в C_0^1 и вполне непрерывен. Более того, оператор $A(w)h$ вполне непрерывен по совокупности переменных w, h.

В силу четности многочленов (4) каждый оператор $A(w)$ самосопряжен в Π^*, каждый оператор $A(w)Q$ самосопряжен в L^2. Обычная тригонометрическая система

$$e_0 = 1, \quad e_1 = \cos t,\ g_1 = \sin t, \quad e_2 = \cos 2t,\ g_2 = \sin 2t, \quad \ldots \quad e_n = \cos nt,\ g_n = \sin nt, \quad \ldots$$

является ортогональным базисом из собственных функций, очевидны равенства

$$A(w)e_n = \frac{M(wni)}{L(wni)}\, e_n, \qquad A(w)g_n = \frac{M(wni)}{L(wni)}\, g_n, \quad n \neq 1$$

и $A(w)Qe_1 = A(w)Qg_1 = 0$. В доказательстве систематически используются обозначения P_n для ортопроекторов в L^2. При $n = 0$ это ортопроектор на одномерное подпространство Π_0 постоянных функций. При натуральных n — это ортопроекторы на двумерные подпространства Π_n, натянутые на функции $\sin nt$ и $\cos nt$, в частности $P_1 = P$. Очевидны соотношения $P_nQ = QP_n = P_n$, $n = 0, 2, 3, \ldots$; операторы P_n коммутируют с оператором дифференцирования.

Операторы $A(w)Q$ определены на всем L^2 и допускают спектральное представление

$$\text{(П.4)} \qquad A(w)Qu(t) = \sum_{\substack{n=0,2,3,\ldots;\\ M(wni)\neq 0}} \frac{M(wni)}{L(wni)} P_n u(t).$$

Их нормы определяются равенствами $\|A(w)Q\|_{L^2\to L^2} = q_*(w)$ и допускают равномерную при всех $w \in \Omega$ оценку $\|A(w)Q\|_{L^2\to L^2} \leqslant c_*$.

Лемма 1. Пусть $w \in \Omega$. Функции $x(t) = r\sin t + h(t)$ $(h \in \Pi^*)$ и $u(t) \in L^2$ удовлетворяют равенству (П.3), *если и только если справедливы равенства $h = A(w)Qu$ и*

$$\text{(П.5)} \qquad \pi L(wi)r = M(wi)\int_0^{2\pi} \sin t\ u(t)\,dt, \qquad 0 = \int_0^{2\pi} \cos t\ u(t)\,dt.$$

Лемма 2. Пусть $w \in \Omega$. Функция $x(t) = r\sin t + h(t)$ $(h \in \Pi^*)$ удовлетворяет равенству (П.1), *если и только если справедливы равенства $h = A(w)Qf(x(t))$ и*

$$\text{(П.6)} \qquad \pi L(wi)r = M(wi)\int_0^{2\pi} \sin t\ f(x(t))\,dt.$$

Лемма 2 означает, что второе равенство (П.5) всегда выполнено. Этот факт следует из отсутствия нечетных степеней у многочленов (4).

Для доказательства леммы 2 достаточно показать, что если функция $x(t) = r\sin t + h(t)$ удовлетворяет равенству $h = A(w)Qf(x(t))$, то справедливо равенство $P_{\cos} f(x(t)) = 0$.

Воспользуемся равенством

$$\int\limits_0^{2\pi} x'(t)\, f\big(x(t)\big)\, dt = 0.$$

Интеграл в левой части вычисляется в явном виде и равен $F(x(2\pi)) - F(x(0))$, где $F(x)$ — это первообразная функции $f(x)$. Этот интеграл равен нулю в силу периодичности функции $x(t)$.

А теперь равенство $P_{\cos} f(x(t)) = 0$ следует из соотношений

$$rP_{\cos} f(x(t)) = \frac{\cos t}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} (x'(s) - h'(s)) f\big(x(s)\big)\, ds = -\frac{\cos t}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} h'(s) f\big(x(s)\big)\, ds$$

и следующей леммы.

Лемма 3. Из соотношений $h = A(w)Qu$, $w \in \Omega$, $u \in L^2$ вытекают равенства

$$\int\limits_0^{2\pi} h'(t)\, P_n u(t)\, dt = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{П.7}$$

Доказательство лемм 1 и 3 не приводится. Формулы (П.5) вытекают из равенства

$$L\Big(w\frac{d}{dt}\Big) r\sin t = M\Big(w\frac{d}{dt}\Big) Pu(t).$$

Для доказательства формулы (П.7) достаточно воспользоваться представлением (П.4).

3. Основная деформация. В силу леммы 2 задачу о 2π-периодических решениях уравнения (П.1) можно заменить системой

$$\begin{cases} \pi L(wi) = \dfrac{M(wi)}{r} \displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \sin t\ f(r\sin t + h(t))\, dt, \\ h = A(w)Qf(r\sin t + h(t)). \end{cases} \tag{П.8}$$

Мы будем доказывать, что при каждом $r > 0$ найдется решение $\{w, h\}$ этой системы.

Продеформируем систему (П.8) к более простому виду. Для этого рассмотрим в пространстве $\mathbb{E} = \mathbb{R} \times \Pi^*$ деформацию

$$\Phi_\xi(w, h) = \begin{cases} \pi L(wi) - \dfrac{\xi M(wi)}{r} \displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \sin t\ f(r\sin t + h(t))\, dt, \\ h - \xi A(w)Qf(r\sin t + h(t)) \end{cases} \tag{П.9}$$

векторного поля

$$\text{(П.10)} \qquad \Phi_1(w,h) = \begin{cases} \pi L(wi) - \dfrac{M(wi)}{r} \displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \sin t\ f(r\sin t + h(t))\,dt, \\ h - A(w)Qf(r\sin t + h(t)) \end{cases}$$

в более простое векторное поле

$$\text{(П.11)} \qquad \Phi_0(w,h) = \begin{cases} \pi L(wi), \\ h. \end{cases}$$

Здесь $\xi \in [0,1]$ — параметр деформации, при $\xi = 1$ особые точки поля $\Phi_1(w,h)$ совпадают с решениями системы (П.8), нам надо доказать их существование. При $\xi = 0$ векторное поле $\Phi_0(w,h)$ имеет совсем простой вид и можно посчитать его топологические характеристики. Для их использования необходимо доказать, что деформация $\Phi_\xi(w,h)$ невырождена на границе некоторого множества, т.е. является гомотопией.

Подчеркнем, что каждая компонента поля (П.11) зависит только от своей переменной.

4. Основное множество. Определим множество $G \subset \mathbb{E}$, в котором мы будем искать особые точки поля $\Phi_0(w,h)$, равенством

$$G = G(w_1, w_2, k) = [w_1, w_2] \times \{\|h\|_{L^2} \leqslant kr\}.$$

Постоянная k определяются многочленами L и M, а также величинами w_1, w_2 и q.

Будет выбрано k такое, что на границе ∂G множества G деформация (П.9) невырождена и вращение[3] $\gamma(\Phi_0, \partial G)$ векторного поля $\Phi_0(w,h)$ на ∂G отлично от нуля. Это основная часть доказательства теоремы 2.

5. Вращение поля $\Phi_0(w,h)$. Для вычисления вращения $\gamma(\Phi_0, \partial G)$ воспользуемся формулой произведения вращений, следуя [4, 5].

Согласно этой формуле вращение $\gamma(\Phi_0, \partial G)$ равняется произведению двух вращений: вращения γ_w поля $\pi L(wi)$ на границе промежутка $\Omega = [w_1, w_2]$ и вращения γ_h поля h на сфере $\{h \in \Pi^*\colon\ \|h\|_{L^2} = k\,r\}$.

Условия применимости формулы $\gamma(\Phi_0, \partial G) = \gamma_w\,\gamma_h$ заключаются в следующем.

Во-первых множество, на границе которого считается вращение, должно быть декартовым произведением множеств, расположенных в подпространствах — множество G обладает этим свойством. Во-вторых, каждая компонента поля должна зависеть только от соответствующей переменной. В-третьих, соответствующая компонента векторного поля должна быть невырождена на соответствующей части границы множества G: компонента $\pi L(wi)$ должна быть невырождена при $w = w_j$, компонента h должна быть невырождена при $\|h\|_{L^2} = kr$. В рассматриваемом случае требуемая невырожденность очевидна.

Посчитаем теперь вращения γ_w и γ_h.

Вращение γ_w равно $+1$ или -1. Для доказательства этого в условиях теоремы 2 достаточно заметить, что компонента $\pi L(wi)$ в силу (7) на концах промежутка Ω принимает разные знаки.

---

[3]См. определение, основные свойства и методы использования в [4, 5].

Вращение γ_h равно 1 (вращение тождественного поля на границе всякой области, содержащей 0, равно 1).

Таким образом, вращение $\gamma(\Phi_0, \partial G)$ по модулю равно 1 и поэтому отлично от нуля.

6. Оценки. В этом разделе приводятся оценки, которые используются при доказательстве невырожденности деформации (П.9).

Лемма 4. Пусть $w \in \Omega$, обозначим

$$q_1(w) \stackrel{\text{def}}{=} \Big|\frac{L(wi)}{M(wi)}\Big|, \qquad q_2(w) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{\substack{n=0,2,3,\ldots;\\ M(wni)\neq 0}} \Big|\frac{L(nwi)}{M(nwi)}\Big|.$$

Пусть верна оценка (5), *т.е.* $q < q_2(w)$. *Тогда из* $\Phi_\xi(w,h) = 0$ *вытекают соотношения* $M(wi) \neq 0$, $q_1(w) \leqslant q$ *и*

$$\|h\| \leqslant r k_*(w), \qquad k_*(w) = \sqrt{\pi \frac{q^2 - q_1^2(w)}{q_2^2(w) - q^2}}. \tag{П.12}$$

В (П.12) и ниже $\|\cdot\|$ — это норма в L^2. Верно равенство $q_2(w)\, q_*(w) = 1$. Подчеркнем, что соотношение (П.12) является глобальным — оно верно не только при r в окрестности нуля или бесконечности, но для всех вообще особых точек деформации.

Доказательство. Неравенство $M(wi) \neq 0$ следует из взаимной простоты многочленов (2): при $M(wi) = 0$ первая компонента деформации (П.9) отлична от нуля.

Из равенства нулю второй компоненты деформации следуют равенства $P_n h = 0$ при $M(wni) = 0$ и

$$\Big|\frac{L(wni)}{M(wni)}\Big| \|P_n h\| = \xi \|P_n f(x)\|, \qquad n = 0, 2, 3, \ldots$$

при $M(wni) \neq 0$. Из равенства нулю первой компоненты деформации вытекает равенство

$$\sqrt{\pi} r \Big|\frac{L(wi)}{M(wi)}\Big| = \xi \|P_{\sin} f(x)\|.$$

В силу лемм 1 и 2 (переформулированных для нелинейностей $\xi f(x)$) верно равенство $\xi P_{\cos} f(x) = 0$. Возведем все эти соотношения в квадрат и сложим. Получим

$$\pi r^2 \Big|\frac{L(wi)}{M(wi)}\Big|^2 + \sum_{\substack{n=0,2,3,\ldots;\\ M(wni)\neq 0}} \Big|\frac{L(wni)}{M(wni)}\Big|^2 \|P_n h\|^2 = \xi^2 \|f(x)\|^2.$$

Поэтому и в силу неравенств $|f(x)| \leqslant q|x|$, $\xi \leqslant 1$ верно соотношение

$$\pi r^2 \Big|\frac{L(wi)}{M(wi)}\Big|^2 + \sum_{\substack{n=0,2,3,\ldots;\\ M(wni)\neq 0}} \Big|\frac{L(wni)}{M(wni)}\Big|^2 \|P_n h\|^2 \leqslant q^2 \|x\|^2 = q^2 \Big(\pi r^2 + \|h\|^2\Big).$$

Тем более,

$$\pi r^2 \Big|\frac{L(wi)}{M(wi)}\Big|^2 + \inf_{\substack{n=0,2,3,\ldots;\\ M(wni)\neq 0}} \Big|\frac{L(wni)}{M(wni)}\Big|^2 \sum_{\substack{n=0,2,3,\ldots;\\ M(wni)\neq 0}} \|P_n h\|^2 \leqslant q^2 \Big(\pi r^2 + \|h\|^2\Big)$$

или, что то же, $\pi r^2 q_1^2(w) + q_2^2(w)\|h\|^2 \leqslant q^2\Big(\pi r^2 + \|h\|^2\Big)$ и, наконец,

$$\big(q_2^2(w) - q^2\big)\|h\| \leqslant \pi r^2\big(q^2 - q_1^2(w)\big).$$

Отсюда вытекают утверждения леммы 4: неравенство $q_1(w) \leqslant q$ и оценка (П.12).

8. Невырожденность деформации. Зададим k в определении множества G равенством

$$k = \sup_{w\in\Omega} k_*(w) + 1.$$

Если $\Phi_\xi(w,h) = 0$, то в силу леммы 4 верны соотношения $M(wi) \neq 0$, $q_1(w) \leqslant q$ и (П.12). Так как при $w = w_j$ либо $M(wi) = 0$, либо $q_1(w) > q$ по условию (iii) теоремы, то деформация (П.9) невырождена на части $\{w = w_j, \|h\| \leqslant kr\}$ границы ∂G множества G. На оставшейся части $\{w \in \Omega, \|h\| = kr\}$ границы ∂G деформация невырождена в силу оценки (П.12) норм нулей деформации и определения числа k.

Из невырожденности деформации вытекает, что вращение $\gamma(\Phi_\xi, \partial G)$ поля $\Phi_\xi(w,h)$ на ∂G одинаково при всех ξ, поэтому $\gamma(\Phi_1, \partial G) \neq 0$. В силу этого неравенства поле $\Phi_1(w,h)$ имеет по крайней мере одну особую точку в G.

9. Завершение доказательства. Осталось доказать, что у векторного поля (П.10) при каждом $\rho > 0$ найдется особая точка нормы ρ в L^2. Для этого удобно использовать теорему 2 из [6]. Приведем эту теорему в минимальной достаточной формулировке.

Пусть оператор A_r при каждом $r \in [r_1, r_2]$ определен на замыкании $\overline{\Gamma}$ ограниченной выпуклой области Γ банахова пространства X. Пусть при каждом r вполне непрерывное векторное поле $x - A_r(x)$ невырождено на границе $\partial\Gamma$ области Γ и вращение этого поля на $\partial\Gamma$ отлично от нуля:

$$\gamma(x - A_r(x), \partial\Gamma) \neq 0.$$

Обозначим при через $H(r)$ множество решений уравнения $x = A_r(x)$; очевидно, $H(r)$ — это непустой компакт в X при каждом r.

Рассмотрим теперь некоторый определенный при $x \in \overline{\Gamma}$, $r \in [r_1, r_2]$ непрерывный функционал $\Psi(x,r) : \ \overline{\Gamma} \times [r_1, r_2] \to \mathbb{R}$.

Утверждение 1. Пусть

$$x \in H(r_1) \ \Rightarrow \ \Psi(x, r_1) < 0, \qquad x \in H(r_2) \ \Rightarrow \ \Psi(x, r_2) > 0.$$

Тогда найдутся такие r и $x \in H(r)$, что $\Psi(x,r) = 0$.

Зафиксируем $\rho > 0$. Рассмотрим малое r_1 и большое r_2.

Положим $X = \mathbb{E}$, $\overline{\Gamma} = [w_1, w_2] \times \{\|h\|_{L^2} \leqslant r_2 k\}$, $x - A_r(x) = \Phi_1(w,h) : \overline{\Gamma} \to X$, $\Psi(x,r) = \dfrac{1}{\sqrt{w}}\,\|r\sin t + h(t)\|_{L^2} - \rho$.

Величина $\dfrac{1}{\sqrt{w}}\,\|r\sin t + h(t)\|_{L^2}$ и есть норма в $L^2(0,T)$ решения уравнения (1).

Вращение $\gamma(\Phi_1, \partial\Gamma)$ отлично от нуля — именно это доказывалось в предыдущих разделах. В силу леммы 4 при малых r норма $\|r\sin t + h(t)\|_{L^2}$ решений мала и $\Psi(x,r) < 0$, при больших r эта норма велика и $\Psi(x,r) > 0$. По сформулированному утверждению при некотором r эта норма совпадает с ρ и именно при некотором $x = \{w, h\}$ — особой точке поля $\Phi_1(w,h)$.

Теорема 2 доказана.

Список литературы

1. *Блиман П.-А., Красносельский А.М., Рачинский Д.И.* Секторные оценки нелинейностей и существование автоколебаний в системах управления // АиТ. 2000. №6. С. 3–18.

2. *Leonov G.A., Burkin I.M., Shepeljavyi A.I.* Frequency methods in oscillation theory. Dorderecht: Kluwer, 1996.

3. *Плисс В.А.* Нелокальные проблемы теории колебаний. М.-Л.: Наука, 1964.

4. *Bobylev N.A., Burman M.Yu., Korovin S.K.* Approximation procedures in nonlinear oscillation theory. Berlin - New York: W. de Gruyter, 1994.

5. *Красносельский М.А., Забрейко П.П.* Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука, 1975.

6. *Красносельский А.М., Красносельский М.А.* Векторные поля в произведении пространств и приложения к дифференциальным уравнениям // Дифференциальные уравнения. 1977. Т. 33. №1. С. 60–67.