УДК 517.977

БЛИМАН П.-А., д-р наук
(Исследовательский институт по информатике и автоматике, Роконкур, Франция),

КРАСНОСЕЛЬСКИЙ А.М., д-р физ.-мат. наук,
РАЧИНСКИЙ Д.И., канд. физ.-мат. наук
(Институт проблем передачи информации РАН, Москва)

СЕКТОРНЫЕ ОЦЕНКИ НЕЛИНЕЙНОСТЕЙ И СУЩЕСТВОВАНИЕ АВТОКОЛЕБАНИЙ В СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ[1]

В статье предлагаются простые условия существования нетривиальных (отличных от состояния равновесия) периодических решений у автономных систем управления. Условия используют обычные линейные двусторонние секторные оценки нелинейностей и линейную асимптотику нелинейностей в нуле и на бесконечности. Предельные границы секторных оценок определяются свойствами линейного звена. Предложенные методы позволяют по выбранному сектору установить двусторонние оценки периода цикла.

1. Введение. Постановка задачи.

Рассмотрим уравнение

$$L\Big(\frac{d}{dt}\Big)x = M\Big(\frac{d}{dt}\Big)f(x) \tag{1}$$

динамики одноконтурной системы, состоящей из линейного интегрирующего звена с дробно рациональной передаточной функцией $W(p) = M(p)/L(p)$ и нелинейной функциональной обратной связи $f(x)$. Блок-схема такой системы изображена на Рис. 1.

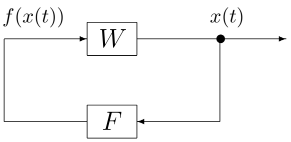

Рис. 1. Блок-схема замкнутой одноконтурной системы

[1]А.М.Красносельский и Д.И.Рачинский поддержаны грантами РФФИ №№ 97-01-00692 и 96-15-96048. Работа написана в период пребывания Д.И.Рачинского в университете г. Регенсбурга (Германия) при поддержке “Research Fellowship of the Alexander von Humboldt Foundation”.

2. Теоремы существования

Функцию $f(x)$ назовем *дифференцируемой на бесконечности*, если существует предел

$$f'(\infty) \overset{\text{def}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Дифференцируемая на бесконечности функция представима в виде $f(x) = f'(\infty)x + o(x)$, где $o(x)$ — члены меньшего, чем линейные, порядка, например ограниченные слагаемые.

Теорема 1. *Пусть многочлены $L(wi)$ и $\Im m[L(wi)M(-wi)]$ имеют пару общих вещественных корней $\pm w_0$ $(w_0 > 0)$ одной и той же нечетной кратности, пусть числа $w_0 n$ при целых $n \neq \pm 1$ не являются корнями многочлена $L(wi)$. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в нуле и на бесконечности, причем $f'(0) \cdot f'(\infty) < 0$. Тогда существует такое число $q > 0$, определяемое многочленами* (2), *что из оценки*

$$|f(x)| \leqslant q|x|, \qquad x \in \mathbb{R} \tag{4}$$

вытекает существование нетривиального цикла у уравнения (1).

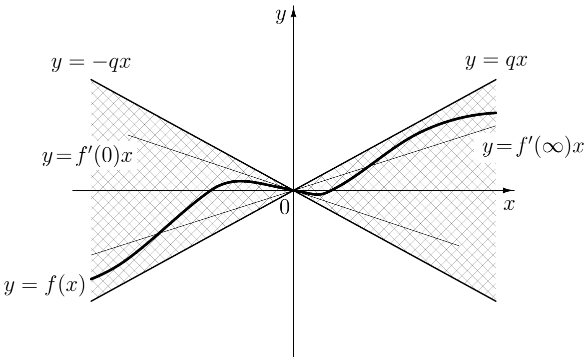

Рис. 2. Теорема 1

На Рис. 2 приведен возможный график функции $f(x)$, удовлетворяющий условиям теоремы 1, и использующиеся в теореме прямые линии. Допустимый сектор заштрихован.

Конечно, производные в нуле и на бесконечности удовлетворяют условиям $|f'(0)| \leqslant q$ и $|f'(\infty)| \leqslant q$. В последующих разделах статьи приведены оценки величины q и примеры явного ее вычисления. Вместо симметричной оценки (4) возможно применение несимметричных оценок (3). Отметим, что при $f'(0) \cdot f'(\infty) > 0$ циклов может и не быть, например, при линейной функции $f(x) = \alpha x$.

Мы не приводим соответствующего результата для случая $f'(0) = 0$. Он возможен, при этом надо использовать поведение функции $d(r)$ в нуле. Если и $f'(0) = 0$, и $f'(\infty) = 0$, то надо использовать асимптотику $d(r)$ и в нуле, и на бесконечности. В случае достаточной гладкости функции $f(x)$ в окрестности нуля условие $f'(0) < 0$ может быть заменено условиями $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0,\ f'''(0) < 0$ или $f^{(n)}(0) = 0,\ n = 0, \ldots, 2k;\ f^{(2k+1)}(0) < 0$.

Функция $d(r)$ использовалась в теории управления многими авторами (см. [7] и цитированную там литературу) под названием *describing function* — "описывающая функция".

Условие (6) и его аналоги обсуждались в [3, 4]. Приведем одно утверждение.

Утверждение 1. *Пусть $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$, где $f_1(x)$ — четная функция, $f_2(x)$ — нечетная функция с подлинейной первообразной:*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(u)\,du = 0, \tag{7}$$

а функция $f_3(x)$, также нечетная, удовлетворяет оценке $f_3(x) \geqslant c_* > 0,\ x \geqslant u_0 > 0$. Тогда функция (5), построенная по $f(x)$, удовлетворяет (6).

Условие (7) выполнено для всех периодических и почти периодических функций с нулевым средним, для функций $\sin(x^3)$, $\sin\sqrt{|x|}$, для убывающих к нулю функций и др. Его выполнение или невыполнение не зависит от значений функции $f(x)$ на ограниченном промежутке изменения переменной x. Условие (7) не выполнено для функции $\sin(\log(1 + |x|))$.

3. Вычисление допустимых границ

3.1. Достаточные условия.

Теорема 3. *Пусть многочлены $L(wi)$ и $\Im m[L(wi)M(-wi)]$ имеют пару общих вещественных корней $\pm w_0$ $(w_0 > 0)$ одной и той же нечетной кратности. Пусть промежуток $\Omega = [w_1, w_2]$, $w_0/2 < w_1 < w_0 < w_2$ удовлетворяет следующим условиям:*

(i). *Многочлен $L(wi)$ не имеет вещественных корней вида wn, где $w \in \Omega$, $n = 0, \pm 2, \pm 3, \ldots$;*

(ii). *Многочлен $\Im m[L(wi)M(-wi)]$ не имеет на Ω отличных от w_0 корней;*

(iii). *Справедлива оценка*

$$q < \inf_{w\in\Omega} \inf_{n=0,2,3,4,\ldots;\, M(nwi)\neq 0} \Big|\frac{L(nwi)}{M(nwi)}\Big|. \tag{8}$$

Пусть неравенства

$$\Big|\Im m\,\frac{L(wi)}{M(wi)}\Big|\bigg(\Big|\frac{L(wni)}{M(wni)}\Big|^2 - q^2\bigg) + \bigg(q^2 - \Big|\Im m\,\frac{L(wi)}{M(wi)}\Big|^2\bigg)\operatorname{sign}\Big(\Im m\,\frac{L(wi)}{M(wi)}\Big)\Im m\,\frac{nL(wni)}{M(wni)} > 0 \tag{9}$$

выполнены при $w = w_1$ и при $w = w_2$ для всех $n = 2, 3, 4, \ldots$, при которых $M(w_j ni) \neq 0$. Пусть выполнена оценка (4). Пусть непрерывная функция $f(x)$ дифференцируема в нуле и на бесконечности, пусть либо $f'(0)\cdot f'(\infty) < 0$, либо $f'(0) < 0$, функция $f(x)$ ограничена и функция (5) удовлетворяет при достаточно больших $r > 0$ оценке (6).

Тогда у уравнения (1) существует нетривиальный цикл с периодом $T \in [2\pi/w_2, 2\pi/w_1]$.

№	q	w_1 (Теорема 3)	w_1 (Теорема 4)	β
1	.827	—	.761	.421
2	.820	—	.801	.358
3	.800	—	.836	.301
4	.745	.821	.881	.223
5	.740	.847	.885	.217
6	.700	.891	.905	.181
7	.650	.917	.924	.146
8	.600	.935	.939	.119
9	.550	.949	.951	.096
10	.500	.960	.961	.077
11	.400	.976	.976	.047
12	.100	.998	.998	.003

Таб. 1. Соответствие между величинами q и w_1

верна при всех $w > w_0$, а неравенства (9), (10) — при всех близких к w_0 и больших w_0 значениях w. Каждое из таких значений может быть использовано в качестве w_2. В условиях теорем 3 и 4 это означает существование цикла с периодом $T \geqslant 2\pi$ у уравнения (1). Если многочлен $\Im m[L(wi)M(-wi)]$ не имеет вещественных корней нечетной кратности на интервале $[2w_0, \infty)$ и число таких корней на интервале $(w_0, 2w_0)$ нечетно, то оценки (12) и (9), (10) верны при всех близких к w_0 и меньших w_0 значениях w. В этом случае у уравнения (1) в условиях теорем 3 и 4 есть цикл с периодом $T \leqslant 2\pi$.

Подробно (как теорема 3) теорема 4 доказана не будет, схема доказательства приводится в конце работы.

3.2. Примеры. Приведем примеры возможных следствий из теорем 3 и 4 для конкретных уравнений. Рассмотрим уравнение

$$x''' + x'' + x' + x = f(x). \tag{13}$$

Для этого уравнения $L(p) = p^3 + p^2 + p + 1$, $M(p) \equiv 1$, $\Im m[L(wi)] = w(1 - w^2)$, $\Re e[L(wi)] = 1 - w^2$, $w_0 = 1$. Вначале сформулируем следствие из теоремы 3.

Следствие 1. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в нуле и на бесконечности. Пусть либо $f'(0) \cdot f'(\infty) < 0$, либо $f'(0) < 0$, функция $f(x)$ ограничена и функция (5) *удовлетворяет для достаточно больших $r > 0$ оценке* (6). *Пусть выполнено условие* (4), *в котором $q < .745$. Тогда уравнение* (13) *имеет по крайней мере один нетривиальный цикл с периодом $T \in [6.283, 7.652]$.*

где разложение в ряд Фурье 2π-периодической функции $h(t)$ не содержит первых гармоник или, что то же, $Ph = 0$, где

$$Px(t) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \cos(t-s)\, x(s)\, ds.$$

Мы докажем, что в условиях теоремы 3 найдутся такие $r > 0$, $w \in \Omega$ и 2π-периодическая функция $h(t)$, что функция (П.2) будет 2π-периодическим решением уравнения (П.1).

Обратим внимание на то, что каждое нестационарное периодическое решение $x(t)$ уравнения с автономной нелинейностью $f(x)$ порождает континуум таких решений: функция $x(t+\alpha)$ также является таким решением при каждом вещественном α. Мы сначала выбрали в качестве дополнительного неизвестного частоту периодического решения, а потом устранили заведомую неединственность задачи, зафиксировав фазу, т.е. выбрав из континуума сдвигов единственное решение, имеющее нулевую проекцию на $\cos t$ и положительную проекцию на $\sin t$.

Подчеркнем еще раз, что периодическое решение уравнения (1) обладает априори неизвестным периодом $2\pi/w$, причем каждое такое решение вложено в континуум. Мы добавили в число явно указанных неизвестных частоту w и амплитуду первой гармоники r и убрали неопределенную фазу α первой гармоники. При этом вместо неизвестного $x(t)$ мы используем неизвестное $h(t)$, имеющее коразмерность 2 в стандартных функциональных пространствах. Получающаяся система корректно определена и может быть исследована топологическими методами.

2. Линейные подпространства и операторы. Первый линейный оператор, использующийся в работе — это проектор P. Рассмотрим[2] плоскость $\Pi = P\,L^2$ и ортогональное ей в L^2 дополнение $\Pi^* = Q\,L^2$, где $Q = I - P$; $\operatorname{codim}\Pi^* = 2$.

Обозначим через $A(w)$ ($w \in \Omega$) линейный оператор, ставящий в соответствие каждой функции $u(t)$ из подпространства Π^* единственное решение $x(t) \in \Pi^*$ линейного уравнения

$$L\left(w\frac{d}{dt}\right)x = M\left(w\frac{d}{dt}\right)u(t). \tag{П.3}$$

Существование решения $x(t)$ следует из условия (i) и из $u(t) \in \Pi^*$, единственность — из $x(t) \in \Pi^*$. При $w \neq w_0$ операторы $A(w)$ могут быть рассмотрены во всем пространстве L^2, однако их нормы становятся сколь угодно большими при w близких к w_0. В подпространстве Π^* эти нормы допускают равномерную на Ω оценку сверху:

$$\big\|A(w)\big\|_{\Pi^*\to\Pi^*} \leqslant c_* = \sup_{w\in\Omega}\, q_*(w) < \infty, \quad \text{где} \quad q_*(w) \overset{\text{def}}{=} \sup_{n\in\mathbb{Z}, n\neq\pm1} \left|\frac{M(wni)}{L(wni)}\right|.$$

Пусть C_0 — пространство непрерывных 2π-периодических функций с равномерной нормой. Каждый оператор $A(w)$ действует из Π^* в C_0 и вполне непрерывен, он непрерывен как оператор из $C_0 \cap \Pi^*$ в C^1. Более того в Π^* оператор $A(w)h$ вполне непрерывен по совокупности переменных w, h.

[2]Все пространства состоят из скалярных функций, определенных на $[0, 2\pi]$.

Доказательство обеих лемм не приводится. Формулы (П.6) вытекают из равенства $L\left(w\frac{d}{dt}\right) r\sin t = M\left(w\frac{d}{dt}\right) Pu(t)$. Для доказателиства формулы (П.7) достаточно воспользоваться представлением (П.4).

3. Основная деформация. В силу леммы 1 и по построению операторов $A(w)$ задачу о 2π-периодических решениях уравнения (П.1) можно заменить системой

$$\begin{cases} \pi\,\Re e\,\dfrac{L(wi)}{M(wi)} = \dfrac{1}{r}\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \sin t\ f(r\sin t + h(t))\,dt, \\ \pi\,\Im m\,\dfrac{L(wi)}{M(wi)} = \dfrac{1}{r}\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \cos t\ f(r\sin t + h(t))\,dt, \\ h = A(w)Qf(r\sin t + h(t)). \end{cases} \tag{П.8}$$

Продеформируем систему (П.8) к более простому виду. Для этого рассмотрим в пространстве $\mathbb{E} = \{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\Pi^*\}$ деформацию

$$\Phi_\xi(r,w,h) = \begin{cases} \xi\pi\,\Re e\,\dfrac{L(wi)}{M(wi)} - \dfrac{1}{r}\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \sin t\ f(r\sin t + \xi h(t))\,dt, \\ \pi\,\Im m\,\dfrac{L(wi)}{M(wi)} - \dfrac{\xi}{r}\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \cos t\ f(r\sin t + h(t))\,dt, \\ h - \xi A(w)Qf(r\sin t + h(t)) \end{cases} \tag{П.9}$$

векторного поля

$$\Phi_1(r,w,h) = \begin{cases} \pi\,\Re e\,\dfrac{L(wi)}{M(wi)} - \dfrac{1}{r}\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \sin t\ f(r\sin t + h(t))\,dt, \\ \pi\,\Im m\,\dfrac{L(wi)}{M(wi)} - \dfrac{1}{r}\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \cos t\ f(r\sin t + h(t))\,dt, \\ h - A(w)Qf(r\sin t + h(t)) \end{cases} \tag{П.10}$$

в более простое векторное поле

$$\Phi_0(r,w,h) = \begin{cases} -\dfrac{1}{r}\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \sin t\ f(r\sin t)\,dt, \qquad \left(= -\dfrac{d(r)}{r}\right) \\ \pi\,\Im m\,\dfrac{L(wi)}{M(wi)}, \\ h. \end{cases} \tag{П.11}$$

Здесь $\xi \in [0,1]$ — параметр деформации, при $\xi = 1$ особые точки поля $\Phi_1(r,w,h)$ совпадают с решениями системы (П.8), нам надо доказать их существование. При $\xi = 0$

со знаком величины $-f'(0)$, а при $r = R$ имеет противоположный знак, совпадающий со знаком величины $-f'(\infty)$. В условиях теоремы 2 компонента (П.12) при $r = \rho$ положительна вместе в величиной $-f'(0)$, а при $r = R$ отрицательна в силу (6). Конечно, для этого ρ должно быть достаточно мало, а R — достаточно велико.

Вращение γ_w также равно $+1$ или -1. Для доказательства достаточно заметить, что знак компоненты (П.13) совпадает со знаком многочлена $\Im m[L(wi)M(-wi)]$. А этот многочлен имеет на промежутке $[w_1, w_2]$ единственный корень w_0, причем это, по условию, корень нечетной кратности. Следовательно, на концах промежутка Ω компонента (П.13) в ноль не обращается и принимает разные знаки.

Вращение γ_h равно 1 (вращение тождественного поля на границе всякой области, содержащей 0, равно 1).

Таким образом, вращение $\gamma(\Phi_0, \partial G)$ по модулю равно 1 и поэтому отлично от нуля.

6. Оценки. В этом разделе приводятся оценки, которые используются при доказательстве невырожденности деформации (П.9).

Лемма 3. Пусть $w \in \Omega$, обозначим

$$q_1(w) \stackrel{\text{def}}{=} \left|\Im m \frac{L(wi)}{M(wi)}\right|, \qquad q_2(w) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{\substack{n=0,2,3,\ldots;\\ M(wni)\neq 0}} \left|\frac{L(nwi)}{M(nwi)}\right|.$$

Из равенства второй и третьей компонент деформации нулю вытекает, что $q_1(w) \leqslant q$ и

$$\text{(П.14)} \quad \|h\| \leqslant r k_*(w), \ \ \|h\|_C \leqslant r k^*(w), \ \ k_*(w) = \sqrt{\pi \frac{q^2 - q_1^2(w)}{q_2^2(w) - q^2}}, \ \ k^*(w) = q^*(w) q \sqrt{\pi \frac{q_2^2 - q_1^2(w)}{q_2^2(w) - q^2}}.$$

В (П.14) и ниже $\|\cdot\|$ — это норма в L^2. Верно равенство $q_2(w)\, q_*(w) = 1$. Подчеркнем, что соотношения (П.14) являются глобальными — они верны не только при r в окрестности нуля или бесконечности, но для всех вообще особых точек деформации.

Доказательство. Из равенства

$$\text{(П.15)} \qquad h = \xi A(w)\, Q f(r \sin t + h(t))$$

следуют равенства $P_n h = 0$ при $M(wni) = 0$ и

$$\left|\frac{L(wni)}{M(wni)}\right| \|P_n h\| = \xi \|P_n f(x)\|, \qquad n = 0, 2, 3, \ldots$$

при $M(wni) \neq 0$. Из равенства нулю второй компоненты (П.9) вытекает оценка

$$\text{(П.16)} \qquad \sqrt{\pi} r \left| \Im m \frac{L(wi)}{M(wi)} \right| \leqslant \xi \|P f(x)\|.$$

Возведем все эти соотношения в квадрат и сложим. Получим

$$\pi r^2 \left| \Im m \frac{L(wi)}{M(wi)} \right|^2 + \sum_{\substack{n=0,2,3,\ldots;\\ M(wni)\neq 0}} \left|\frac{L(wni)}{M(wni)}\right|^2 \|P_n h\|^2 \leqslant \xi^2 \|f(x)\|^2.$$

Заменим функцию $f(x) = f'(0)x + \varphi(x)$ ее приближением $f'(0)x$ в окрестности нуля; здесь $\varphi(x)x^{-1} \to 0$ при $x \to 0$. В левой части (П.19) слагаемое порядка ρ равно нулю:

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos t \; f'(0)[\rho \sin t + h(t)]\, dt = 0.$$

В правой части (П.19) в условиях теорем 1 и 2 слагаемое порядка ρ отлично от нуля:

$$\int\limits_0^{2\pi} \sin t \; f'(0)[\rho \sin t + \xi h(t)]\, dt = \pi f'(0)\, \rho.$$

Все остальные слагаемые по ρ имеют меньший порядок в силу оценки $\|h\|_C \le k^* \rho$. Поэтому при достаточно малом ρ равенство (П.19) не может быть выполнено. Полученное противоречие доказывает соотношение $\{r, w, h\} \notin G_\rho$.

Соотношение $\{r, w, h\} \notin G_R$ в условиях теоремы 1 доказывается совершенно аналогично. Соотношение $\{r, w, h\} \notin G_R$ в условиях теоремы 2 вытекает из (П.19) и следующей леммы. Ее доказательство приведено, например, в [3, 4].

Лемма 4. Для каждого $c > 0$ справедливо равенство

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{h \in C^1_\circ,\, \|h\|_{C^1} \leqslant c,\, \alpha \in \mathbb{R}} \left| \int\limits_0^{2\pi} \sin(t+\alpha)\big(f(R\sin t + h(t)) - f(R \sin t)\big) dt \right| = 0. \tag{П.20}$$

В силу этой леммы

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos t \; f(R\sin t + h(t))\, dt \to 0, \qquad \int\limits_0^{2\pi} \sin t \; f(R\sin t + \xi h(t))\, dt - d(R) \to 0$$

при $R \to \infty$ и из (6) вытекает, что соотношение (П.19) (в котором ρ заменено на R) не может быть выполнено при достаточно больших R.

Оценка $\|h\|_{C^1} \leqslant c$ для особых точек деформации, необходимая для применения леммы 4, вытекает из (П.15) в силу ограниченности функции $f(x)$ и равномерной ограниченности норм операторов $A(w)\, Q : C_0 \to C^1$.

Пусть теперь $\{r, w, h\} \in G_w$. Из (П.15) вытекает включение $h \in C_0$, т.е. $h(0) = h(2\pi)$. Поэтому справедливо тождество

$$r \int\limits_0^{2\pi} \cos t\, f(r \sin t + h(t))\, dt + \int\limits_0^{2\pi} h'(t)\, f(r\sin t + h(t))\, dt = \int\limits_0^{r \sin t + h(t)} f(x)\, dx \Bigg|_{t=0}^{t=2\pi} \equiv 0$$

и равенство второй компоненты (П.9) нулю может быть переписано в виде

$$\pi\, \Im m\, \frac{L(wi)}{M(wi)} r^2 + \xi \int_0^{2\pi} h'(t)\, f(r \sin t + h(t))\, dt = 0.$$

9. Схема доказательства теоремы 4. Начальная часть совпадает с доказательством теоремы 3. Делается та же замена времени, рассматриваются те же неизвестные r, w, h, выписывается та же система (П.8). Но деформация рассматривается другая:

$$\Psi_\xi(r,w,h) = \begin{cases} \pi\,\Re e\,\dfrac{L(wi)}{M(wi)} - \dfrac{1}{r}\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin t\; f(r\sin t + h(t))\,dt, \\ \pi\,\Im m\,\dfrac{L(wi)}{M(wi)} - \dfrac{\xi}{r}\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos t\; f(r\sin t + h(t))\,dt, \\ h - \xi A(w) Q f(r\sin t + h(t)), \end{cases} \tag{П.21}$$

при этом векторное поле (П.10) деформируется в поле

$$\Psi_0(r,w,h) = \begin{cases} \pi\,\Re e\,\dfrac{L(wi)}{M(wi)} - \dfrac{1}{r}\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin t\; f(r\sin t + h(t))\,dt, \\ \pi\,\Im m\,\dfrac{L(wi)}{M(wi)}, \\ h. \end{cases} \tag{П.22}$$

Множество, на границе которого исследуется деформация, остается тем же. При доказательстве невырожденности гомотопии (П.21) лемма 3 заменяется близким утверждением.

Лемма 5. Пусть $w \in \Omega$, обозначим

$$q_1(w) \overset{\text{def}}{=} \left|\frac{L(wi)}{M(wi)}\right|, \qquad q_2(w) \overset{\text{def}}{=} \inf_{n=0,2,3,4,\ldots} \left|\frac{L(nwi)}{M(nwi)}\right|.$$

Тогда для каждой особой точки деформации (П.21) *верны соотношения* (П.14).

Величина $q_1(w)$ в этой лемме отличается от точно так же обозначенной величины в лемме 3. В лемме 3 не удалось использовать равенство нулю первой компоненты деформации, в лемме 5 это удается. В результате вместо неравенства (П.16) используется неравенство $\sqrt{\pi} r\left|\dfrac{L(wi)}{M(wi)}\right| \leqslant \|Pf(x)\|$, остаток доказательства леммы остается неизменным.

Векторное поле (П.22) соединяется с векторным полем (П.11) деформацией

$$\Xi_\xi(r,w,h) = \begin{cases} \xi\pi\,\Re e\,\dfrac{L(wi)}{M(wi)} - \dfrac{1}{r}\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin t\; f(r\sin t + \xi h(t))\,dt, \\ \pi\,\Im m\,\dfrac{L(wi)}{M(wi)}, \\ h. \end{cases} \tag{П.23}$$

При доказательстве невырожденности первой компоненты деформации (П.23) используются неравенства (11), лемма 5 и асимптотические разложения функции $f(x)$ в нуле и на бесконечности. Вращение векторного поля (П.11) считается также, как и при доказательстве теоремы 3.