УДК 517.977

КРАСНОСЕЛЬСКИЙ А.М., д-р физ.-мат. наук,
РАЧИНСКИЙ Д.И., канд. физ.-мат. наук
(Институт проблем передачи информации РАН, Москва)

О ГАМИЛЬТОНОВОСТИ СИСТЕМ ЛУРЬЕ[1]

Предлагаются простые условия гамильтоновости систем управления типа Лурье. Указывается явный алгоритм построения гамильтониана в терминах матриц управляемости и наблюдаемости.

1. Постановка задачи. Основной результат

Рассмотрим уравнение

$$L\Big(\frac{d}{dt}\Big)x = M\Big(\frac{d}{dt}\Big)f(x), \tag{1}$$

где

$$L(p) = p^\ell + \alpha_1 p^{\ell-1} + \cdots + \alpha_\ell, \qquad M(p) = \beta_0 p^m + \beta_1 p^{m-1} + \cdots + \beta_m \tag{2}$$

– взаимно простые вещественные многочлены степеней ℓ и m, $\ell > m$; $f(x)$ – скалярная непрерывная функция. Уравнение (1) описывает одноконтурную систему управления, состоящую из линейного звена с дробно-рациональной передаточной функцией $M(p)/L(p)$ и нелинейной обратной связи f.

Как известно, скалярное уравнение (1) эквивалентно системе

$$\dot z = Az + bf(c'z), \qquad z \in R^\ell. \tag{3}$$

Здесь A – квадратная порядка ℓ вещественная матрица; b и c – векторы из R^ℓ (здесь и далее вектор отождествляется со своим координатным столбцом в некотором фиксированном базисе; символ $'$ означает транспонирование). Уравнения (1) и (3) эквивалентны, если и только если верно равенство

$$M(p)/L(p) = c'(pI - A)^{-1}b, \tag{4}$$

[1]Авторы частично поддержаны грантами РФФИ №№ 97-01-00692 и 96-15-96048. Работа написана в период пребывания Д.И.Рачинского в университете г. Регенсбурга (Германия) при поддержке “Research Fellowship of the Alexander von Humboldt Foundation”.

где I – единичная матрица. В частности, (4) верно, если положить

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_\ell & -\alpha_{\ell-1} & -\alpha_{\ell-2} & \cdots & -\alpha_1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

и определить координаты b_k вектора b из системы

$$\begin{aligned} b_1 &= b_2 = \cdots = b_{\ell-m-1} = 0, \\ \beta_0 &= b_{\ell-m}, \\ \beta_1 &= b_{\ell-m+1} + \alpha_1 b_{\ell-m}, \\ &\vdots \\ \beta_m &= b_\ell + \alpha_1 b_{\ell-1} + \cdots + \alpha_m b_{\ell-m}; \end{aligned} \tag{6}$$

этот вид матрицы A и векторов b, c называется каноническим. Всякая эквивалентная уравнению (1) система (3) приводится к каноническому виду линейной невырожденной заменой $z = S\tilde{z}$.

Из формулы (4) вытекает, что $L(p)$ – это характеристический многочлен матрицы A.

Ниже изучаются уравнения (1), содержащие производные только четного порядка, то есть уравнения вида

$$L\Big(\frac{d^2}{dt^2}\Big)x = M\Big(\frac{d^2}{dt^2}\Big)f(x), \tag{7}$$

где L и M – произвольные взаимно простые многочлены (2) степеней ℓ и m, $\ell > m$.

Т е о р е м а 1. *Каждая эквивалентная уравнению* (7) *система*

$$\dot{\zeta} = \tilde{A}\zeta + \tilde{b} f(\tilde{c}'\zeta), \qquad \zeta \in R^{2\ell}, \tag{8}$$

приводима к гамильтоновой форме линейной невырожденной заменой координат.

Иначе говоря, каждое уравнение вида (1) с четными многочленами L и M имеет гамильтоново представление.

В следующем параграфе конструируются гамильтоновы координаты и гамильтониан системы.

2. Гамильтоновы координаты

Рассмотрим систему (8) вида

$$\dot{z} = Ty, \quad \dot{y} = Qz + cf(c'z), \qquad z, y \in R^\ell, \tag{9}$$

где T и Q — квадратные порядка ℓ матрицы, то есть положим

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & T \\ Q & 0 \end{pmatrix}, \quad \zeta = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_\ell \\ y_1 \\ \vdots \\ y_\ell \end{pmatrix}, \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_\ell \end{pmatrix}, \quad \tilde{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_\ell \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \tag{10}$$

через 0 обозначены скаляры и нулевые матрицы.

Л е м м а 1. *Если верно равенство* (4) *и*

$$A = TQ, \qquad b = Tc. \tag{11}$$

то система (9) *эквивалентна уравнению* (7).

Положим

$$\mathcal{H}(y, z) = \frac{1}{2}(y'Ty - z'Qz) - F(c'z), \tag{12}$$

где $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$. Если матрицы T и Q симметрические, то система (9) имеет гамильтонов вид

$$\dot{z}_k = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y_k}, \qquad \dot{y}_k = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z_k}, \qquad k = 1, \dots, \ell. \tag{13}$$

Поэтому для доказательства теоремы 1 достаточно по заданным векторам b, c и матрице A, удовлетворяющим равенству (4), построить симметрические матрицы T и Q, при которых верны равенства (11).

Через K и N обозначим квадратные порядка ℓ матрицы

$$K = [b, Ab, A^2b, ..., A^{\ell-1}b], \qquad N = [c, A'c, (A')^2c, ..., (A')^{\ell-1}c] \tag{14}$$

со столбцами A^kb и $(A')^kc$. Они называются матрицами управляемости и наблюдаемости системы (3) (см. [1, 2]) и играют важную роль при ее исследовании. Из равенства (4) вытекает невырожденность матриц K и N.

Т е о р е м а 2. *Пусть верно равенство* (4). *Пусть*

$$T = KN^{-1}, \qquad Q = NK^{-1}A, \tag{15}$$

где K, N – матрицы (14). *Тогда справедливы равенства $T = T'$, $Q = Q'$ и* (11). *Поэтому эквивалентная уравнению* (7) *система* (9) *гамильтонова.*

Если определить матрицу A и векторы b, c соотношениями (5), (6), то $N = I$, $T = K$, то есть T – это матрица Калмана системы (3) и $Q = K^{-1}A$.

П Р И Л О Ж Е Н И Е

1. Доказательство леммы 1. Пусть верны равенства (10) и (11). Эквивалентность системы (9) уравнению (7) означает, что

$$M(p^2)/L(p^2) = \tilde{c}'(p\tilde{I} - \tilde{A})^{-1}\tilde{b}, \tag{П.1}$$

где $\tilde{I}$ – единичная матрица порядка 2ℓ. Матрица

$$(p\tilde{I} - \tilde{A})^{-1} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$$

состоит из блоков

$$\begin{aligned} M_{11} &= p(p^2 I - TQ)^{-1}, & M_{12} &= (p^2 I - TQ)^{-1}T, \\ M_{21} &= (p^2 I - QT)^{-1}Q, & M_{22} &= p(p^2 I - QT)^{-1}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\tilde{c}'(p\tilde{I} - \tilde{A})^{-1}\tilde{b} = c' M_{12} c = c'(p^2 I - TQ)^{-1}Tc$$

и равенство (П.1) можно переписать в виде

$$M(p^2)/L(p^2) = c'(p^2 I - TQ)^{-1}Tc.$$

В силу (11) это равенство следует из (4). Лемма доказана.

2. Доказательство теоремы 2. Пусть справедливы равенства (4) и (15). Через e_k и g_k обозначим столбцы матриц N и K:

$$e_k = (A')^{k-1}c, \qquad g_k = A^{k-1}b, \quad k = 1, \ldots, \ell.$$

Равенство $K = TN$ означает, что

$$g_k = Te_k, \qquad e_k = T^{-1}g_k, \quad k = 1, \ldots, \ell. \tag{П.2}$$

В частности, $b = g_1 = Te_1 = Tc$ и, так как $A = TQ$ по определению, верны оба равенства (11).

Докажем симметричность матриц T и Q. Так как матрицы N и K не вырождены, то $e_1, \ldots, e_\ell$ и $g_1, \ldots, g_\ell$ – это два базиса в R^ℓ. Поэтому равенства $T = T'$ и $Q = Q'$ равносильны равенствам

$$e_n' T e_k = e_k' T e_n, \qquad g_n' Q g_k = g_k' Q g_n, \quad n, k = 1, \ldots, \ell. \tag{П.3}$$

Первая группа равенств (П.3) вытекает из соотношений

$$e_n' T e_k = e_n' g_k = c' A^{n-1} A^{k-1} b = c' A^{k-1} A^{n-1} b = e_k' g_n = e_k' T e_n.$$

Для доказательства равенств второй группы заметим, что в силу теоремы Гамильтона-Кэли $L(A) = L(A') = 0$, и, следовательно,

$$A^\ell b + \alpha_1 A^{\ell-1} b + \cdots + \alpha_\ell b = (A')^\ell c + \alpha_1 (A')^{\ell-1} c + \cdots + \alpha_\ell c = 0,$$

то есть

$$g_{\ell+1} := A^{\ell} b = -\alpha_1 g_{\ell} - \dots - \alpha_{\ell} g_1, \qquad e_{\ell+1} := (A')^{\ell} c = -\alpha_1 e_{\ell} - \dots - \alpha_{\ell} e_1$$

и из (П.2) вытекают соотношения

$$g_{\ell+1} = T e_{\ell+1}, \qquad e_{\ell+1} = T^{-1} g_{\ell+1}.$$

Поэтому при каждых $n, k = 1, \dots, \ell$ верны равенства

$$g_n' Q g_k = g_n' T^{-1} A g_k = g_n' T^{-1} g_{k+1} = g_n' e_{k+1} = b'(A')^{n-1}(A')^k c =$$

$$= b'(A')^{k-1}(A')^n c = g_k' e_{n+1} = g_k' T^{-1} g_{n+1} = g_k' T^{-1} A g_n = g_k' Q g_n.$$

Теорема доказана.

Список литературы

1. *Бесекерский В.А., Попов Е.П.* Теория систем автоматического регулирования. М.: Наука, 1972.

2. *Воронов А.А.* Введение в динамику сложных управляемых систем. М: Наука, 1985.