УДК 517.977 МАТЕМАТИКА

А.М. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ, академик Н.А. КУЗНЕЦОВ,
Д.И. РАЧИНСКИЙ

О резонансных уравнениях с неограниченными нелинейностями[1]

1. Введение

В работе предлагается метод исследования вырожденных асимптотически линейных задач с подлинейными неограниченными нелинейностями. Метод основан на равномерной сходимости к нулю проекций приращений нелинейностей на некоторые конечномерные подпространства. Такая сходимость ранее была использована при изучении резонансных уравнений многими авторами [1 – 5] в основном для ограниченных нелинейностей. Неограниченность нелинейностей существенно затрудняет анализ.

Теоремы о равномерной сходимости к нулю проекций приращений неограниченных нелинейностей применяются к исследованию разнообразных конкретных задач. В первую очередь это исследование периодических колебаний: существование вынужденных колебаний и их неограниченных последовательностей, существование неограниченных решений, существование нетривиальных циклов у автономных систем управления, новые теоремы о бифуркациях Хопфа на бесконечности. Для интегральных уравнений Гаммерштейна с простым вырождением линейной части проведен полный анализ возможных ситуаций, приведены примеры для двухточечной краевой задачи.

2. Теоремы о сходимости проекций приращений

2.1. Постановка задачи. Рассмотрим уравнение $x = Tx$ в банаховом пространстве E с асимптотически линейным ($Tx = Ax + F(x)$, где A — линейный оператор, а $F(x)$ подлинейный, то есть $\|F(x)\| \cdot \|x\|^{-1} \to 0$ при $\|x\| \to \infty$) вполне непрерывным оператором T. Если главная линейная часть $x = Ax$ невырождена (не имеет нетривиальных решений), то многие нелокальные вопросы связанные с этим уравнением решаются сравнительно просто. В вырожденных случаях (число 1 является собственным значением оператора A) ана-

[1]Работа написана в период пребывания Д.И.Рачинского в университете г. Регенсбурга (Германия) при поддержке “Research Fellowship of the Alexander von Humboldt Foundation”.

лиз существенно усложняется. Возникает необходимость использования тонких свойств подлинейных нелинейностей. При этом важную роль играет равномерная сходимость к нулю величин $\Delta F = \phi\big(F(\xi e+h) - F(\xi e)\big)$ при $\xi \to \infty$. Здесь $\phi(\cdot)$ — линейный функционал; сходимость должна быть равномерной относительно всех нормированных собственных функций e оператора A, $Ae = e$, и относительно векторов $h \in E$ из специальных множеств, зависящих от ξ.

В работе предлагаются условия сходимости ΔF к нулю для неограниченных функциональных нелинейностей $F(x(t)) = f(t, x(t))$ и рассматриваются приложения к дифференциальным уравнениям. Равномерность сходимости доказана для довольно узких классов приращений $h(t)$ аргумента. Выбор формулировок определяется приложениями.

2.2. Теоремы о сходимости. Пусть $\Theta(\xi) : [0, +\infty) \to [1, \infty)$ — монотонно возрастающая подлинейная на бесконечности функция: $\Theta(\xi)\xi^{-1} \to 0$ при $\xi \to \infty$. Пусть для каждого $p > 0$ найдется q, при котором $\Theta(p\xi) \leqslant q\Theta(\xi)$, $\xi \geqslant 0$.

Пусть $e(t) \in C^k([a, b], \mathbb{R})$, $k > 1$. Пусть $e'(t) = 0$ на конечном множестве критических точек, причем наивысший порядок касания графика $e(t)$ горизонтальной прямой равен k. Это предположение означает, что из $e'(t_0) = 0$ вытекает $[e''(t_0)]^2 + \ldots + [e^{(k)}(t_0)]^2 \neq 0$. В ситуациях общего положения $k = 2$.

Пусть непрерывная функция $f(t, x)$ удовлетворяет оценке

$$|f(t,x)| \leqslant c\,\Theta(|x|), \qquad t \in [a,b],\ x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

и условию Липшица: $|f(t, x) - f(s, x)| \leqslant c\Theta(|x|)|t - s|, \quad t, s \in [a, b],\ x \in \mathbb{R}$. Пусть $\varphi(t)$ также удовлетворяет условию Липшица: $|\varphi(t) - \varphi(s)| \leqslant c|t - s|$.

Т е о р е м а 1. *Пусть*

$$\lim_{\xi\to\infty} \Theta^{2k}(\xi)\xi^{-1} = 0. \tag{2}$$

Тогда при каждом $R > 0$ справедливо соотношение

$$\lim_{\xi\to\infty} \sup_{\|h(t)\|_{C^1}\leqslant R\Theta(\xi)} \left| \int_a^b \varphi(t)\Big(f\big(t,\xi e(t)+h(t)\big) - f\big(t,\xi e(t)\big)\Big)\,dt \right| = 0. \tag{3}$$

Если известна дополнительная информация о $f(t, x)$, то условие (2) может быть заменено менее ограничительным. Пусть справедливо условие Липшица

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leqslant d(\xi)|x-y|, \qquad |x|,|y| \geqslant \xi, \tag{4}$$

где $d(\xi) \to 0$ при $\xi \to \infty$. Пусть для любого $p > 0$ найдется такое q, что при $\xi \geqslant 0$ верна оценка $d(\xi) \leqslant qd(p\xi)$, аналогичная $\Theta(p\xi) \leqslant q\Theta(\xi)$.

Теорема 2. *Пусть $\{e'(\tau)=0\} \Rightarrow \{e(\tau)\neq 0\}$. Пусть верно* (4) *и*

$$\lim_{\xi\to\infty} \Theta^2(\xi)\xi^{-1} = \lim_{\xi\to\infty} \Theta^{2k}(\xi)d^{2k-2}(\xi)\xi^{-1} = 0. \tag{5}$$

Тогда при каждом $R>0$ справедливо соотношение (3).

Если соотношение (3) верно для функций f_j, то оно верно для их суммы $f=\sum f_j$. Слагаемые f_j могут удовлетворять условиям (1) и (4) с различными Θ_j и d_j, естественно $\Theta(\xi)=\max\Theta_j(\xi)$.

Теорема 3. *Пусть $|f(t,x)|\leqslant c\Theta_1(|x|)$. Пусть либо $\Theta_1^{2k-1}(\xi)\Theta(\xi)\xi^{-1}\to 0$ при $\xi\to\infty$, либо $\{e'(\tau)=0\}\Rightarrow\{e(\tau)\neq 0\}$, верно условие Липшица* (4) *и условия $\Theta_1(\xi)\Theta(\xi)\xi^{-1}\to 0$ и $\Theta_1(\xi)\Theta^{2k-1}(\xi)d^{2k-2}(\xi)\xi^{-1}\to 0$ при $\xi\to\infty$. Тогда при каждом $R>0$ справедливо равенство* (3).

2.3. Замечания.

1. Условие Липшица (4) с $d(\xi)\to 0$ довольно ограничительно. Если оно выполнено, то можно доказать утверждения о равенстве (3), не использующие производных $e'(t)$ и $h'(t)$, утверждения о вектор–функциях и т.д. Конечные формулировки при этом существенно слабее (см. [4]).

Вывод теоремы 2 верен, если $e(\tau)=e'(\tau)=0$ при некоторых τ и выполнен более ограничительный аналог условия (5). Вывод теорем 1 и 2 верен также при $e'(t)\geqslant\eta>0$, в этом случае равенство (3) вытекает из $\Theta^2(\xi)/\xi\to 0$.

2. Наиболее естественный случай — это $k=2$. Теоремы 1 – 3 сформулированы при произвольном k для довольно редких приложений. Приведем один пример. Пусть $e(t)$ — это собственная функция дифференциального оператора $Lx=x^{(\mathrm{IV})}$ с краевыми условиями $x'(0)=x''(0)=x'(1)=x''(1)=0$. Ведущее собственное значение этого оператора равно 0, соответствующая собственная функция — константа. Ее производная — тождественный ноль и все теоремы 1 – 3 неприменимы. Другие собственные значения (они равны μ^4, где μ — ненулевые корни трансцендентного уравнения $\cos\mu\cdot\cosh\mu=1$) соответствуют собственным функциям $e(t)$ с $k=3$, применимы теоремы 1 – 3.

Вообще говоря, условия (2) и (5) различны для различных k. Для функций $f(t,x)=x^\alpha+b(t)$ условие (5) не зависит от k и имеет вид $\alpha<0.5$.

3. Возможны модификации основных теорем для случая, когда нелинейность представима в виде суммы функций с различной асимптотикой на бесконечности. Предположим, что $f(t,x)=f_1(t,x)+f_2(t,x)$ и $\mathrm{mes}\{e(t)=0\}=0$.

Пусть $f_1(t,x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 2 и пусть $f_2(t,x)\to 0$ равномерно по t при $x\to\infty$. Тогда при каждом $R>0$ верно равенство (3).

Другой пример. Пусть $|f_1(t,x)| = (1+|x|)^\alpha$, пусть функция $f_2(t,x)$ не удовлетворяет условию Липшица типа (4). Пусть $|f_2(t,x)| \leqslant (1+|x|)^\beta$ при $\beta < \alpha$. Пусть $k = 2$. Теорема 1 применима, если $\alpha < 0.25$. Теорема 2 неприменима. Теорема 3 приводит к ограничениям $\alpha < 0.5$ и $\beta < (1-\alpha)/3$.

4. Теоремы 1 и 2 дают достаточные условия для (3). Проиллюстрируем необходимость этих условий следующим примером. Выберем $\alpha \in (0,1)$ и положим

$$[a,b]=[-1,1],\ f(x)=(1+|x|)^\alpha,\ \Theta(\xi)=(1+\xi)^\alpha,\ e(t)=1+t^2,\ h(t)\equiv\xi^\alpha,\ \varphi(t)\equiv 1.$$

Здесь $k = 2$, $f'(x) = \alpha(1+|x|)^{\alpha-1}\operatorname{sign} x$ и поэтому $d(\xi) = (1+\xi)^{\alpha-1}$. Неравенство $\alpha < 0.5$ необходимо и достаточно и для (3), и для условия (5) теоремы 2.

3. Существование вынужденных колебаний

Далее во всех приложениях используется следующее определение. Пусть $f(t,x)$ непрерывна по совокупности переменных и удовлетворяет оценке (1). Пусть либо $\Theta^4(\xi)\xi^{-1} \to 0$, либо выполнено (4) и условия $\Theta^4(\xi)d^2(\xi)\xi^{-1} \to 0$ и $\Theta^2\xi^{-1} \to 0$ при $\xi \to \infty$. Тогда будем говорить, что у нелинейности *правильный рост на бесконечности.*

Рассмотрим уравнение

$$x'' + n^2 x = f(x) + b(t) \tag{6}$$

с натуральным n, непрерывной 2π-периодической функцией $b(t)$ и непрерывной, вообще говоря, неограниченной функцией $f(x)$. Положим

$$\Psi(\xi) = \int_0^{2\pi} \sin nt\, f(\xi \sin nt)\, dt, \qquad \bar{b} = \int_0^{2\pi} e^{int} b(t)\, dt,$$

$$\psi_+ = \liminf_{\xi\to+\infty} |\Psi(\xi)|, \qquad \psi^+ = \limsup_{\xi\to+\infty} |\Psi(\xi)|. \tag{7}$$

Т е о р е м а 4. *Пусть $f(x)$ имеет правильный рост на бесконечности. Тогда при $\psi_+ < |\bar{b}| < \psi^+$ уравнение (6) имеет неограниченную последовательность 2π-периодических решений. При $|\bar{b}| < \psi_+$ у уравнения (6) есть хотя бы одно 2π-периодическое решение и множество таких решений ограничено.*

При $|\bar{b}| > \psi^+$ множество 2π-периодических решений уравнений (6) также ограничено, но возможно пусто. Если $\bar{b} = \pm\psi_+$ или $\bar{b} = \pm\psi^+$, то знания величин ψ_+, ψ^+ и $|\bar{b}|$ недостаточно для ответа на вопрос об ограниченности множества 2π-периодических решений уравнения (6).

Сформулируем аналог теоремы 4 для более общего уравнения

$$L\Big(\frac{d}{dt}\Big)x(t) = M\Big(\frac{d}{dt}\Big)\Big(f\big(x(t)\big) + g\big(x(t-\omega)\big) + b(t)\Big). \tag{8}$$

Здесь $L(p)$ и $M(p)$ — взаимно простые многочлены с вещественными коэффициентами, степень многочлена $L(p)$ строго больше степени многочлена $M(p)$. Если $M(p) \equiv 1$ и $\omega = 0$, то (8) — это обычное уравнение высшего порядка. Пусть $L(\pm ni) = 0$ при некотором натуральном n и пусть многочлен $L(wi)$ не имеет других целых корней w. Пусть величины (7) построены по функции

$$\Psi(\xi) = \int_0^{2\pi} \sin nt\, f(\xi \sin nt)\, dt + \int_0^{2\pi} \sin n(t+\omega)\, g(\xi \sin nt)\, dt.$$

Т е о р е м а 5. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют правильный рост на бесконечности. Если $\psi_+ < |\bar b| < \psi^+$, то уравнение (8) имеет неограниченную последовательность 2π-периодических решений. Если $|\bar b| < \psi_+$, то (8) имеет 2π-периодическое решение и множество таких решений ограничено.*

4. Существование неограниченных решений

Вернемся к уравнению (6). Опять пусть функция $b(t)$ периодична с периодом 2π. В этом разделе рассматриваются непериодические решения уравнения (6): изучается вопрос о существовании неограниченных решений. Этот вопрос был изучен в работах Х.Алонсо и Р.Ортега для уравнений с ограниченными нелинейностями ([1]). Теоремы 1, 2 приводят к более общим утверждениям.

Пусть числа (7) конечны и пусть $|\bar b| > \psi^+$. Пусть каждое начальное значение $\{x(0), x'(0)\}$ определяет единственное решение уравнения (6).

Т е о р е м а 6. *Пусть $f(x)$ имеет правильный рост на бесконечности. Тогда при достаточно больших $|x(0)| + |x'(0)|$ верно хотя бы одно из равенств*

$$\lim_{t\to+\infty} |x(t)| + |x'(t)| = \infty, \qquad \lim_{t\to-\infty} |x(t)| + |x'(t)| = \infty. \tag{9}$$

Эта теорема близка к утверждению 3.4 из [1]. Условие $|\bar b| > \psi^+$ менее ограничительно, чем его аналог из [1] даже для ограниченных $f(x)$. В условиях теоремы 6 существуют решения для которых верны оба соотношения (9).

5. Интегральные уравнения, двухточечная задача

Рассмотрим интегральное уравнение

$$x(t) = \int_a^b K(t,s) g\big(s, x(s)\big)\, ds \tag{10}$$

с нелинейностью $g(t,x) = \mu x + f(t,x)$, где $f(t,x)$ подлинейна и удовлетворяет (1); $\mu \neq 0$. Пусть линейный оператор $Ax(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)\,ds$ действует в $L^2 = L^2([a,b],\mathbb{R})$ и вполне непрерывен. Если $x \neq \mu Ax$ при $x \neq 0$, то уравнение (10) имеет хотя бы одно решение, множество решений ограничено.

Пусть μ — простое характеристическое значение оператора A, пусть $\mu Ae = e$, $\mu A^* e^* = e^*$, $(e^*, e) = 1$. Пусть функция $e^*(t)$ липшицева. Предположим, что A действует и непрерывен как оператор из L^2 в C^1, тогда $e(t) \in C^1$. Пусть $e'(t) = 0$ для конечного набора критических точек, причем $e(t)$ и $e''(t)$ не обращаются в ноль в этих точках. Положим $\Psi(\xi) = \int_a^b e^*(t) f\big(t, \xi e(t)\big)\,dt$ и

$$\psi_\pm = \liminf_{\xi \to \pm\infty} \Psi(\xi), \quad \psi^\pm = \limsup_{\xi \to \pm\infty} \Psi(\xi). \tag{11}$$

Теорема 7 обобщает основной результат из [8], она дает точные условия разрешимости (10) и условия ограниченности множества решений. Вычислен индекс $\operatorname{ind}_\infty \Phi$ на бесконечности (см. [6]) в L^2 поля $\Phi(x) = x - \mu Ax - Af(\cdot, x)$.

Теорема 7. *Пусть нелинейность $f(t,x)$ имеет правильный рост на бесконечности. Пусть A удовлетворяет всем перечисленным условиям. Тогда*

1. *Если $\psi^+ < 0 < \psi_-$ или $\psi^- < 0 < \psi_+$, то индекс на бесконечности поля $\Phi(x)$ определен, $|\operatorname{ind}_\infty \Phi| = 1$; уравнение (10) имеет хотя бы одно решение;*
2. *Если либо $\psi_- > 0$ и $\psi_+ > 0$ либо $\psi^- < 0$ и $\psi^+ < 0$, то индекс на бесконечности поля $\Phi(x)$ определен, $|\operatorname{ind}_\infty \Phi| = 0$;*
3. *Если $\psi_- < 0 < \psi^-$, или $\psi_+ < 0 < \psi^+$, или верны оба этих соотношения, то индекс на бесконечности поля $\Phi(x)$ не определен: существует неограниченная по норме последовательность $x_n \in L^2$ решений уравнения (10).*

Эта теорема не дает ответа на вопрос об индексе на бесконечности, только если одно из чисел (11) равно 0. При $\psi_- \cdot \psi^- = 0$ теорема 7 может быть применима, если $\psi_+ < 0 < \psi^+$. Если $\psi_- = \psi^-$ и $\psi_+ = \psi^+$, то случай 3 теоремы 7 не реализуется; здесь нелинейность асимптотически однородна в смысле [7].

В качестве примера рассмотрим двухточечную краевую задачу

$$x'' + n^2 x + f(t,x) = 0, \quad x(0) = x(\pi) = 0 \tag{12}$$

с натуральным n. Пусть функция $f(t,x)$ равномерно липшицева по t. Определим величины (11) по функции $\Psi(\xi) = \int_0^\pi \sin nt\, f\big(t, \xi \sin nt\big)\,dt$.

Теорема 8. *Пусть нелинейность $f(t,x)$ имеет правильный рост на бесконечности. Если либо $\psi^+ < 0 < \psi_-$, либо $\psi^- < 0 < \psi_+$, то задача (12) имеет* *по крайней мере одно решение, множество всех решений задачи* (12) *ограничено в* C. *Если либо* $\psi_- < 0 < \psi^-$, *либо* $\psi_+ < 0 < \psi^+$, *либо и то, и другое, то задача* (12) *имеет бесконечное неограниченное множество решений.*

6. Существование циклов у автономного уравнения

Рассмотрим уравнение

$$L\left(\frac{d}{dt}\right) x = f(x). \tag{13}$$

Здесь $L(p)$ – вещественный многочлен, $f(x)$ непрерывна и подлинейна, $f(0)=0$.

Теорема 9. *Пусть многочлены* $L(wi)$ *и* $\Im m\, L(wi)$ *имеют пару общих вещественных корней* $\pm w_0$ $(w_0>0)$ *одинаковой нечетной кратности. Пусть существует такой интервал* $\Omega=[w_-, w_+]$, $w_0/2<w_-<w_0<w_+$, *что* $L(wni)\neq 0$ *при* $w\in\Omega$, $n=0,2,3,\ldots$; $\Im m\, L(wi)\neq 0$ *при* $w\in\Omega$, $w\neq w_0$;

$$\beta_* \stackrel{\text{def}}{=} \max_{w\in\Omega} |L(wi)| < \min_{w\in\Omega} \min_{n=0,2,3,4,\ldots} |L(nwi)| \stackrel{\text{def}}{=} \beta^*.$$

Пусть $q \in \big(\beta_*, \beta^*\big)$ *и при* $w = w_\pm$ *для всех* $n = 2, 3, 4, \ldots$ *верна оценка*

$$|\Im m\, L(wi)|\big(|L(nwi)|^2 - q^2\big) + n\big(q^2 - |\Im m\, L(wi)|^2\big) \operatorname{sign}\big(\Im m\, L(wi)\big) \Im m\, L(nwi) > 0.$$

Пусть $f(x)$ *имеет правильный рост на бесконечности и* $|f(x)| \leqslant q|x|$, $x \in \mathbb{R}$. *Пусть существует* $f'(0) < 0$ *и при достаточно больших* ξ *верна оценка*

$$\Psi(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{2\pi} \sin t\, f(\xi \sin t)\, dt \geqslant c_0 > 0. \tag{14}$$

Тогда у уравнения (6) *существует цикл периода* $T\in [2\pi/w_+, 2\pi/w_-]$.

Приведем пример. Пусть функция $f(x)$ имеет правильный рост на бесконечности, пусть $f'(0) < 0$ и при достаточно больших ξ верна оценка (14). Пусть $|f(x)| \leq 0.745|x|$, $x \in \mathbb{R}$. Тогда уравнение $x''' + x'' + x' + x = f(x)$ имеет по крайней мере один цикл с периодом $T \in [6.283, 7.652]$.

7. Бифуркации Хопфа на бесконечности

Рассмотрим уравнение

$$L\Big(\frac{d}{dt}, \lambda\Big) x = M\Big(\frac{d}{dt}, \lambda\Big) f(x, \lambda). \tag{15}$$

Здесь $L(p, \lambda)$ и $M(p, \lambda)$ — вещественные взаимно простые при каждом λ многочлены степеней ℓ и m, $\ell > m$, зависящие от параметра $\lambda \in \Lambda = (a, b)$.

Значение λ_0 называется *точкой бифуркации Хопфа на бесконечности* для уравнения (15) с частотой w_0, если при любом $\varepsilon > 0$ найдется $\lambda_\varepsilon \in (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon)$ такое, что уравнение (15) с $\lambda = \lambda_\varepsilon$ имеет периодическое решение $x_\varepsilon(t)$ периода T_ε, удовлетворяющего $|T_\varepsilon - 2\pi/w_0| < \varepsilon$, и амплитуды $\max|x_\varepsilon(t)| > \varepsilon^{-1}$.

Следующий результат сформулирован в [7]. Пусть непрерывная нелинейность $f(x,\lambda)$ подлинейна. Пусть многочлен $L(p,\lambda)$ имеет пару простых сопряженных корней $\sigma(\lambda) \pm w(\lambda)i$ ($w(\lambda) > 0$), непрерывно зависящих от λ, причем $\sigma(\lambda_0) = 0$ и $\sigma(\lambda)$ принимает значения обоих знаков в каждой окрестности точки λ_0. Пусть $L(kw(\lambda_0)i, \lambda_0) \neq 0$ при $k = 0, 2, 3, \ldots$ Тогда λ_0 — это точка бифуркации Хопфа на бесконечности для уравнения (15) с частотой $w(\lambda_0)$.

Рассмотрим уравнение (15) с независящей от параметра линейной частью:

$$L\Big(\frac{d}{dt}\Big)x = M\Big(\frac{d}{dt}\Big)f(x,\lambda). \tag{16}$$

Предполагается, что вещественные многочлены $L(p)$, $M(p)$ степеней $\ell > m$ взаимно просты, у многочлена $L(p)$ есть пара мнимых корней $\pm w_0 i$; функция $f(x,\lambda)$ непрерывна и $|f(x,\lambda)| \leqslant \Theta(|x|)$. Для таких уравнений точки бифуркации Хопфа определяются асимптотическим поведением нелинейности.

Т е о р е м а 10. *Пусть функция $f(x,\lambda)$ имеет правильный рост на бесконечности. Пусть w_0 — это корень многочленов $\Im m[L(wi)M(-wi)]$ и $L(wi)$ одинаковой нечетной кратности, причем $L(kw_0 i) \neq 0$ при всех $k = 0, 2, 3, \ldots$ Пусть при каждом λ существует предел $\psi(\lambda) = \lim\limits_{\xi\to+\infty} \int_0^{2\pi} \sin t\, f(\xi \sin t, \lambda)\, dt$ и функция $\psi(\lambda)$ принимает значения обоих знаков в каждой окрестности точки λ_0. Тогда λ_0 является точкой бифуркации Хопфа на бесконечности для уравнения* (16) *с частотой w_0.*

По условию теоремы 10 многочлен $\Im m[L(wi)M(-wi)]$ ненулевой. Тождество $\Im m[L(wi)M(-wi)] \equiv 0$ выполнено, если и только если оба многочлена $L(p)$ и $M(p)$ четные. В этом случае, если многочлены удовлетворяют условиям теоремы 10, уравнение $L\big(d/dt\big)x = M\big(d/dt\big)f(x)$ с любой непрерывной ограниченной функцией $f(x)$ гамильтоново и имеет континуум циклов $x_\xi(t)$ большой амплитуды $\|x_\xi(t)\|_C \to \infty$ и периода $T_\xi \to 2\pi/w_0$ при $\xi \to \infty$. Поэтому, тождество $\Im m[L(wi)M(-wi)] \equiv 0$ гарантирует, что все значения $\lambda \in \Lambda$ являются точками бифуркации Хопфа для уравнения (16) с частотой w_0.

Простейшее уравнение, к которому применима теорема 10 — это $x''' + x'' + x' + x = f(x,\lambda)$. Аналог теоремы для ограниченных нелинейностей см. в [5].

Список литературы

1. *Alonso J.M., Ortega R.* Unbounded solutions of semilinear equations at resonance. Nonlinearity, **9**, 1996, 1099-1111.

2. *Dancer E.N.* On the use of asymptotics in nonlinear boundary value problems. Ann. Mat. Pure at Appl., **4**, 1982, 167-185.

3. *Gaines R.E., Mawhin J.* Coincidence degree and nonlinear differential equations. Lecture Notes in Math. №568, Berlin: Springer, 1977.

4. *Красносельский А.М.* О вынужденных колебаниях в системах с четными функциональными неограниченными характеристиками, Автоматика и телемеханика, 2, 27-36, 1997.

5. *Krasnosel'skii A.M., Rachinskii D.I.* Hopf bifurcations from infinity, generated by bounded nonlinear terms, Functional Differential Equations, **6**, 3-4, 1999.

6. *Красносельский М.А., Забрейко П.П.* Геометрические методы нелинейного анализа, М.: Наука, 1975.

7. *Красносельский А.М., Красносельский М.А.* Векторные поля в произведении пространств и приложения к дифференциальным уравнениям, Дифференциальные уравнения, **33**, №1, 60-67, 1997.

8. *Krasnosel'skii A.M., Mawhin J.* The index at infinity for some vector fields with oscillating nonlinearities, Discrete and Continuous Dynamical Systems, **6**, №1, 165-174, 2000.

Институт проблем передачи информации РАН, Москва