УДК 517.977

А.М. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ, академик Н.А. КУЗНЕЦОВ,
Д.И. РАЧИНСКИЙ

Нелинейные бифуркации Хопфа[1]

В статье предлагаются новые условия возникновения бифуркаций Хопфа в системах обыкновенных дифференциальных уравнений. В отличие от обычно рассматриваемых ситуаций, изучаются системы с вырожденной при всех значениях параметра линейной частью. Возникновение бифуркаций определяется меньшими членами.

1. Постановка задачи.

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$z' = A(\lambda)z + f(z,\lambda), \qquad z \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Предполагается, что матрица $A = A(\lambda)$ непрерывно зависит от параметра $\lambda \in (0,1)$; функция $f(z,\lambda) : \mathbb{R}^n \times (0,1) \to \mathbb{R}^n$ непрерывна по совокупности переменных и подлинейна:

$$\lim_{|z|\to 0} \sup_{\lambda\in(0,1)} \frac{|f(z,\lambda)|}{|z|} = 0.$$

Через $|\cdot|$ обозначается и норма в $\mathbb{R}^n$, и модули вещественных и комплексных чисел.

О п р е д е л е н и е 1. *Значение λ_0 параметра называется точкой бифуркации Хопфа уравнения* (1) *с частотой w_0, если в любой окрестности $(\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon)$ найдется такое значение параметра λ, при котором у уравнения* (1) *есть ненулевое периодическое решение амплитуды меньшей ε и периода, отличающегося от $2\pi/w_0$ меньше, чем на ε.*

О п р е д е л е н и е 2. *Нуль непрерывной функции называется правильным, если в каждой его окрестности функция принимает ненулевые значения обоих знаков.*

[1]Работа написана в период пребывания Д.И.Рачинского в университете г. Регенсбурга (Германия) при поддержке “Research Fellowship of the Alexander von Humboldt Foundation”.

при каждом λ они являются 2π-периодическими решениями линейных уравнений

$$z' = A(\lambda)z, \qquad z' = -A^*(\lambda)z. \tag{3}$$

2.1. Нелинейность с главными квадратичными членами. Пусть нелинейность $f(z,\lambda)$ допускает разложение по формуле Тейлора в нуле:

$$f(z,\lambda) = B_\lambda(z,z) + C_\lambda(z,z,z) + \Phi(z,\lambda). \tag{4}$$

Здесь $B = B_\lambda$ и $C = C_\lambda$ симметрические квадратичная и кубическая формы, непрерывно зависящие от λ. Остаточный член $\Phi(z,\lambda)$ удовлетворяет оценке

$$|\Phi(z,\lambda)| \leqslant c|z|^\gamma, \qquad \gamma > 3$$

при всех $\lambda \in (0,1)$ и достаточно малых z. Определим вектор–функции

$$\begin{aligned}
x = x(\lambda) &= -(A^2+4I)^{-1}\Big(AB(e,g) - B(g,g) + B(e,e)\Big),\\
y = y(\lambda) &= -(A^2+4I)^{-1}\Big(\frac{1}{2}AB(g,g) - \frac{1}{2}AB(e,e) + 2B(e,g)\Big),\\
z = z(\lambda) &= -\frac{1}{2}A^{-1}\Big(B(e,e) + B(g,g)\Big),
\end{aligned}$$

где I — единичная матрица, и скалярные функции

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda) &= \big(e_*, B(e,2z-y)\big) + \big(g_*, B(g,2z+y)\big) + \big(g_*, B(e,x)) + (e_*, B(g,x)\big),\\
\psi(\lambda) &= \frac{3}{4}\Big(\big(e_*, C(e,e,e)\big) + \big(g_*, C(e,e,g)\big) + \big(e_*, C(g,g,e)\big) + \big(g_*, C(g,g,g)\big)\Big).
\end{aligned}$$

Теорема 1. *Каждый правильный нуль функции $\varphi(\lambda)+\psi(\lambda)$ является точкой бифуркации Хопфа уравнения* (1) *с частотой* 1.

2.2. Нелинейность с главным однородным членом. Пусть функция $f(z,\lambda)$ имеет главный положительно однородный член в окрестности нуля:

$$f(z,\lambda) = D_\lambda(z) + \Phi(z,\lambda),$$

где

$$D_\lambda(\theta z) = \theta^\alpha D_\lambda(z), \qquad \theta \geqslant 0$$

при некотором $\alpha > 1$ и

$$|\Phi(z,\lambda)| \leqslant c|z|^\gamma, \qquad \gamma > \alpha \tag{5}$$

равномерной нормой $\|z\|_C = \max\{|z(t)| : 0 \leqslant t \leqslant 2\pi\}$. Через $E = E(\lambda) \subset \mathbb{C}_0$ обозначим подпространство, состоящее из функций $z = z(t)$, для которых

$$\int_0^{2\pi} (u_*, z)\, dt = \int_0^{2\pi} (v_*, z)\, dt = 0.$$

Периодические функции отождествляются со своими сужениями на период.

Через $H = H(\lambda)$ обозначим линейный оператор, сопоставляющий каждой функции $y \in E$ единственное решение $z = Hy \in E \bigcap \mathbb{C}_0^1$ уравнения $z' = Az + y(t)$. Существование $z(t)$ вытекает из включения $y \in E$, единственность — из $z \in E$. Оператор H вполне непрерывен в E. По ряду Фурье

$$y(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \bigl(a_k \cos kt + b_k \sin kt\bigr), \qquad a_k, b_k \in \mathbb{R}^n$$

функции $y \in E$ ряд Фурье функции Hy определяется равенством

$$Hy(t) = -A^{-1}a_0 + \sum_{k=2}^{\infty} (k^2 I + A^2)^{-1} \Bigl(-\bigl(kb_k + Aa_k\bigr) \cos kt + \bigl(ka_k - Ab_k\bigr) \sin kt\Bigr) +$$
$$+ (I + A^2 Q)^{-1} Q \Bigl(-\bigl(b_1 + Aa_1\bigr) \cos t + \bigl(a_1 - Ab_1\bigr) \sin t\Bigr) + \frac{1}{2} P \Bigl(-b_1 \cos t + a_1 \sin t\Bigr),$$

где

$$Pz = (e_*, z)e + (g_*, z)g, \qquad Q = I - P, \qquad z \in \mathbb{R}^n$$

— это проекторы на инвариантную для матрицы A плоскость $\xi e + \eta g$ $(\xi, \eta \in \mathbb{R})$ и дополнительное инвариантное подпространство размерности $n-2$. Отметим, что включение $y \in E$ эквивалентно равенству $Pa_1 = APb_1$.

3.2. Вспомогательное утверждение. Рассмотрим огрубленную систему

$$z' = A(\lambda)z + F(z, \lambda), \tag{7}$$

полученную из (1) отбрасыванием остаточного члена разложения (6).

Заменим время в (7) по формуле $wt \mapsto t$:

$$wz' = A(\lambda)z + F(z, \lambda). \tag{8}$$

Будем искать 2π-периодические решения этого уравнения в виде

$$z(t) = ru(t) + h(t),$$

где $r > 0$, $h \in E \bigcap \mathbb{C}_0^1$. Подставляя это выражение в (8), получим $wru' + wh' = rAu + Ah + F(z, \lambda)$ и, так как $u' = Au = v$, то

$$r(w-1)v + wh' = Ah + F(z, \lambda). \tag{9}$$

Т е о р е м а 3. *Найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что при каждом достаточно малом $r > 0$ и каждом $\lambda \in (0,1)$ система*

$$\begin{cases} r(w-1) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \big(v_*, F(ru+h,\lambda)\big)\,dt, \\ \qquad\qquad h = \Big(\dfrac{1}{w}-1\Big)HAh + \dfrac{1}{w}H\mathfrak{Q}F(ru+h,\lambda) \end{cases}$$

имеет единственное решение w_*, h_* в области $|w-1| \leqslant \varepsilon_0$, $\|h\|_C \leqslant \varepsilon_0$. Это решение (как элемент пространства $\mathbb{R}\times E$) непрерывно зависит от λ, r и при каждых λ, r может быть построено при помощи итерационной процедуры

$$\begin{aligned} &w_0 = 1, \qquad h_0 = 0, \\ &w_k = 1 + \frac{1}{2\pi r}\int\limits_0^{2\pi} \big(v_*, F(ru+h_{k-1},\lambda)\big)\,dt, \\ &h_k = \Big(\frac{1}{w_{k-1}}-1\Big)HAh_{k-1} + \frac{1}{w_{k-1}}H\mathfrak{Q}F(ru+h_{k-1},\lambda). \end{aligned}$$

Более того, найдется $L > 0$, не зависящее от λ, r, k, при котором верны оценки

$$\|h_k - h_*\|_C \leqslant (Lr)^{\alpha+\nu k}, \qquad |w_k - w_*| \leqslant (Lr)^{\alpha+\nu k-1}. \tag{11}$$

3.3. Теоремы. Положим

$$d_*(\lambda, r) = \int\limits_0^{2\pi} \big(u_*, F(ru + h_*(\lambda,r),\lambda)\big)\,dt.$$

В силу теоремы 3 каждое решение $\tilde\lambda, \tilde r$ ($\tilde r > 0$) скалярного уравнения $d_*(\lambda,r) = 0$ определяет 2π-периодическое решение $z(t) = \tilde r u(t) + h_*(t,\tilde\lambda,\tilde r)$ уравнения (8) при $\lambda = \tilde\lambda$, $w = w_*(\tilde\lambda,\tilde r)$.

Т е о р е м а 4. *Пусть $\lambda_k \to \lambda_0$, $r_k \to +0$ и $d_*(\lambda_k, r_k) = 0$ при $k = 1, 2, \ldots$ Тогда λ_0 — точка бифуркации Хопфа уравнения (7) с частотой 1.*

Вместо функции $d_*(\lambda, r)$ можно использовать ее приближения. Положим

$$d_k(\lambda, r) = \int\limits_0^{2\pi} \big(u_*, F(ru + h_k(\lambda,r),\lambda)\big)\,dt,$$

Список литературы

1. *Kozyakin V.S., Krasnosel'skii M.A.,* The method of parameter functionalization in the Hopf bifurcation problem // Nonlinear Anal. 1987. V. 11. №2. C. 149-161.

2. *Krasnosel'skii A.M., Mennicken R., Rachinskii D.I.,* Small periodic solutions generated by sublinear terms // Report 99-009 of Institute for Nonlinear Science, National University of Ireland, University College, Cork. 1999. P. 1–30.

3. *Кузнецов Н.А., Матвеенко Н.И., Юмагулов М.Г.* Признаки суб- и суперкритичности бифуркации Хопфа и задачи односторонней бифуркации // Автоматика и Телемеханика. 1998. №12, С. 51–59.

4. *Марсден Дж., Мак-Кракен М.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980.

Институт проблем передачи информации РАН, Москва