Изомонодромные слияния фуксовых особенностей и особенности уравнения Шлезингера*

И. В. Вьюгин
Институт проблем передачи информации РАН
vyugin@gmail.com

Аннотация

Исследуются изомонодромные слияния особенностей фуксовых систем. Показано, что в результате слияния почти всегда получаются фуксовы особые точки. В остальных случаях существует оценка порядка полюса коэффициентов в регулярной особой точке. С помощью техники слияний показано, что решения уравнений Шлезингера и Пенлеве 6 представляются в окрестности особой точки в виде сходящихся степенных рядов с нецелыми степенями и степенно-логарифмических рядов.

1. Введение

Рассмотрим фуксову систему следующего вида

$$\frac{dy}{dz} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{B_i^0}{z-a_i^0}\right) y,\ B_i^0 \in \mathrm{Mat}_{p\times p}(\mathbb{C}), y(z) \in \mathbb{C}^p. \quad (1)$$

Семейство таких систем

$$\frac{dy}{dz} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{B_i(a)}{z-a_i}\right) y \qquad (2)$$

с матрицами коэффициентов $B_i(a)$, непрерывно зависящими от параметра $a = (a_1, \ldots, a_n)$, и имеющее одно и то же представление монодромии $\mathscr{M}$, называется **изомонодромным** или **изомонодромной деформацией** (определения см. в [2, 3]). Основной из таких деформаций является деформация Шлезингера, задаваемая системой уравнений

$$dB_i = -\sum_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{[B_i, B_j]}{a_i - a_j} d(a_i - a_j), \qquad i = 1, \ldots, n, \quad (3)$$

называемой **уравнением Шлезингера**. Неизвестными функциями в этом уравнении являются коэффициенты $B_i(a)$, семейства систем (2), а начальными условиями — коэффициенты $B_i^0 = B_i(a^0)$ исходной системы (1).

Нас будет интересовать поведение коэффициентов $B_i(a)$, $i = 1, \ldots, n$ семейства (2) или, что то же самое, решений уравнения (3) при изомонодромном слиянии особых точек. **Изомонодромным слиянием** особых точек назовем изомонодромное семейство систем

$$\frac{dy}{dz} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{B_i(a(t))}{z-a_i(t)}\right) y,$$

зависящее от параметра $t \in \mathbb{C}$, при стремлении которого к нулю некоторые из особых $a_i(t)$ точек сливаются в одну. Вопросы об изучении слияний фуксовых особых точек ставились В. И. Арнольдом в [1] (см. задачи 1984-7 и 1987-12). Эти вопросы исследовались А. А. Болибрухом в работах [3, 4] и А. А. Глуцюком в работе [6]. А. А. Болибрухом в [3] было показано, что при изомонодромном слиянии фуксовых особых точек рождается регулярная точка. Здесь мы дадим более детальное описание изомонодромных слияний фуксовых особенностей, в частности покажем, что эта точка почти всегда является фуксовой, а иначе можно указать оценку порядка ее полюса (ранга Пуанкаре).

Главной темой работы является применение техники изомонодромных слияний к исследованию решений уравнения Шлезингера и шестого уравнения Пенлеве в окрестности неподвижной особой точки. Будет получен вид степенных разложений решений этих уравнений, включающих нецелые степени, и степенно-логарифмических разложений (с целыми степенями), сходящихся в окрестности неподвижной особенности.

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 08-01-00342-а, программы "Ведущие научные школы", грант НШ-3038.2008.1 и гранта поддержки молодых российских ученых-кандидатов наук МК-3178.2009.1.

1.1. Пфаффова форма изомонодромной деформации

Уравнение Шлезингера (3) является условием изомонодромности семейства (1), зависящего от параметра a (положения особых точек) и начальных данных $B_i(a^0) = B_i^0$. Известно, что решения уравнения Шлезингера являются мероморфными функциями n-мерного параметра a на пространстве $a \in \overline{\mathbb{C}}^n \setminus \bigcup_{i,j} \{a_i = a_j\}$.

Другим способом задания изомонодромных деформаций является задание с помощью пфаффовой системы

$$dy = \omega y, \qquad \omega = \sum_{i=1}^{n} \frac{B_i(a)}{z - a_i} d(z - a_i) \tag{4}$$

на пространстве $\{(z,a)\} = \overline{\mathbb{C}} \times D(a^0) \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \{z = a_i\}$, где $D(a^0)$ — некоторая окрестность точки a^0. Эта форма при фиксированном a дает фуксову систему вида (1). Форма (4) соответствует шлезингеровской деформации. Условие изомонодромности интерпретируется в этом случае как условие интегрируемости системы (4) по Фробениусу

$$d\omega = \omega \wedge \omega.$$

2. Каноническое семейство, проблема Римана–Гильберта и связности в расслоениях

Главным образом нас будет интересовать предельное поведение решений $B_i(a)$ уравнения Шлезингера (3) при стремлении одной точки к другой, но мы будем рассматривать несколько более общую ситуацию, так как это практически не усложняет доказательств. Будем рассматривать задачу изомонодромного слияния нескольких особых точек. Рассмотрим изомонодромное семейство систем (2), где некоторые поднаборы особых точек стремятся к своему пределу (каждый поднабор к своей предельной точке).

2.1. Каноническое нормализованное семейство.

Рассмотрим семейство фуксовых систем следующего вида

$$\frac{dy}{dz} = \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{B_i}{z - t a_i^0} \right) y, \qquad B_i \equiv \text{const}, \tag{5}$$

зависящее от комплексного параметра t. Легко видеть, что это семейство является изомонодромным, так как системы из него переходят друг в друга линейной заменой времени z. Однако, нетрудно убедиться, что, в случае, когда $B_\infty = \sum_{i=1}^{k} B_i \neq 0$, это семейство не является шлезингеровским. Оно определяется пфаффовой системой

$$dy = \omega_{pr} y, \qquad \omega_{pr} = \sum_{i=1}^{k} \frac{B_i}{z - a_i^0 t} d(z - a_i^0 t) - \frac{B_\infty}{t} dt,$$

где форма ω_{pr} отличается от шлезингеровской формы (4) наличием последнего члена. Чтобы получить из деформации (5) шлезингеровскую нужно применить калибровочное преобразование $\tilde{y} = t^{B_\infty} y$. Полученное семейство задается формой

$$\omega_{norm} = \sum_{i=1}^{k} \frac{B_i'(t)}{z - a_i^0 t} d(z - a_i^0 t), \qquad B_i' = t^{B_\infty} B_i t^{-B_\infty},$$

т.е. данное семейство уже шлезингеровское. Будем предполагать, что матрица B_∞ находится в жордановой нормальной форме. Этого всегда можно добиться постоянным калибровочным преобразованием. Такое семейство назовем **каноническим нормализованным семейством**. Системы нового семейства

$$\frac{dy}{dz} = \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{B_i'(t)}{z - t a_i^0} \right) y \tag{6}$$

сопряжены к старым. Отметим, что имеются две возможности: основная предполагает, что матрица B_∞ — диагональная, и особый случай, когда матрица B_∞ имеет нетривиальные жордановы клетки.

Рассмотрим двумерную систему. В первом случае $B_\infty = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, и матрицы коэффициентов семейства (6) будут $B_i' = \begin{pmatrix} b_{11}^i & b_{12}^i t^{\lambda_1 - \lambda_2} \\ b_{21}^i t^{\lambda_2 - \lambda_1} & b_{22}^i \end{pmatrix}$.

Во втором случае, когда $B_\infty = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ — жорданова клетка, получим

$$B_i' = \begin{pmatrix} b_{11}^i + b_{21}^i \ln t & b_{12}^i + (b_{22}^i - b_{11}^i) \ln t - b_{21}^i \ln^2 t \\ b_{21}^i & b_{22}^i - b_{21}^i \ln t. \end{pmatrix}.$$

Нас будет интересовать предельное поведение формы ω_{norm} при $t \to 0$. Нашей целью будет добиться того, чтобы предельное поведение $\omega_{norm}|_{t=0}$ было регулярным, то есть, чтобы предел был также невырожденной фуксовой системой. Для этого нам необходимо будет наложить на семейство (5) еще одно дополнительное условие.

Это условие

$$\forall i, j \qquad \left| \mathrm{Re}\rho_\infty^i - \mathrm{Re}\rho_\infty^j \right| < 1 \tag{7}$$

на собственные значения $\rho_\infty^1,\dots,\rho_\infty^p$ матрицы B_∞.

Теперь рассмотрим предел семейства (6) при $t\to 0$.

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{B_i'(t)}{z-a_i}=t^{B_\infty}\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{B_i}{z-a_i^0 t}\right)t^{-B_\infty}=$$

$$=t^{B_\infty}\left(\frac{\sum_{i=1}^{k}B_i}{z}+O(t)\right)t^{-B_\infty}=\frac{B_\infty}{z}+o(1).$$

Поэтому при наложенном условии (7) нормализованное слияние семейства (5) дает фуксову систему

$$\frac{dy}{dz}=\frac{B_\infty}{z}y. \tag{8}$$

Мы будем рассматривать такие слияния с центрами в точках b_s. Возьмем семейство вида

$$\frac{dy}{dz}=\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{{}^sB_i'}{z-b_s-ta_i^0}\right)y. \tag{9}$$

Такие семейства будем использовать как локальные формы связности. Решив соответствующую проблему Римана–Гильберта можно построить систему (9), локально эквивалентную данной системе (1).

2.2. Некоторые сведения о проблеме Римана–Гильберта

В предыдущем разделе было рассмотрено каноническое нормализованное семейство (6). В дальнейшем нам потребуется строить такие семейства систем, имеющих заданные свойства решений в особых точках. Нам будет необходимо построить систему

$$\frac{dy}{dz}=\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{B_i'}{z-a_i^0}\right)y, \tag{10}$$

которая является начальным условием семейства (6), т.е. систему (6) при $t=1$. Более конкретно нас будут интересовать следующие вопросы:

- *Можно ли построить систему (10), которая в некоторых окрестностях особых точек $a_1^0,\dots,a_k^0$ голоморфно эквивалентна заданной исходной системе вида (1), а в точке $z=\infty$ удовлетворяет условию (7)? Можно ли продолжить ее до семейства (6)?*
- *Если это не возможно, то какую дополнительную особую точку $z=a_0$ необходимо ввести, чтобы построить систему?*

Назовем этот вопрос **уточненной проблемой Римана–Гильберта**, так как, в отличии от классической проблемы, здесь, кроме монодромии, фиксируются еще и локальные голоморфные классы системы (10) (в [2] этот вопрос назван “обобщенной проблемой Римана–Гильберта”, однако, мы используем другое название, так как то обычно обозначает иррегулярный вариант проблемы). Приведем некоторые известные факты об этой задаче.

Класс локальной классификации системы мероморфного в окрестности фуксовой особой точки калибровочного преобразования определяется ее матрицей монодромии. Чтобы фиксировать класс голоморфной эквивалентности необходимо также фиксировать и целые части асимптотик решений.

Известные результаты.

1. Уточненная проблема Римана–Гильберта положительно разрешима для почти любого набора матриц монодромии.

2. Уточненная проблема Римана–Гильберта всегда разрешима в слабом смысле, т.е. можно построить систему с заданными условиями и одной дополнительной “ложной” особой точкой. В этой точке вычет диагонализируемый и целочисленный.

3. Существуют оценки N_ν целочисленных элементов вычета системы из предыдущего пункта.

а) Если представление монодромии неприводимо, то $N_\nu=(p-1)(n-2)$, где p — размерность, n — количество особых точек.

б) Если представление монодромии приводимо, то $N_\nu=(p-1)nM$, где M — число, ограничивающее сверху модули вещественных частей асимптотик, по которым требуется построить систему.

Об этом можно прочитать в [2, 7].

2.3. Слияние особых точек

Рассмотрим слияние особых точек системы

$$\frac{dy}{dz}=B(z)y,\qquad B(z)=\sum_{i=1}^{n}\frac{B_i}{z-a_i}, \tag{11}$$

имеющей матрицы-образующие монодромии $G_1,\dots,G_n$ в точках $a_1,\dots,a_n$, соответственно. Набор особых точек $A=\{a_1,\dots,a_n\}$ разбивается на непересекающиеся поднаборы $A_s=\{{}^sa_1,\dots,{}^sa_{n_s}\}$ (возможно, состоящие из одного элемента), составляющие в объединении весь набор особых точек

$$A=A_1\cup\ldots\cup A_m$$

такие, что все точки набора A_s стремятся к точке b_s при $s=1,\dots,m$. Стремление внутри каждого набора предполагается пропорциональным, зависящим от одного параметра.

$$ {}^s a_1 = b_s + t \cdot {}^s a_1^0, \ldots, \quad {}^s a_k = b_s + t \cdot {}^s a_{n_s}^0; \quad t \to 0. $$

В пределе получаются точки $b_1, \ldots, b_m$. Назовем такое слияние **пропорциональным**. Семейство таких систем имеет вид

$$ \frac{dy}{dz} = \sum_{s=1}^{m} \left(\frac{{}^s B_1}{z - b_s - t({}^s a_1 - b_s)} + \ldots \right. \tag{12} $$
$$ \left. \ldots + \frac{{}^s B_{n_s}}{z - b_s - t({}^s a_{n_s} - b_s)} \right) y, $$

где коэффициенты ${}^s B_i$ — функции от t.

2.4. Слияние особых точек как связность в расслоении

Напомним, что основная задача заключается в описании зависимости матриц вычетов изомонодромного семейства систем (12) при изменении t в окрестности нуля. Система (12) (при фиксированном t) определяет логарифмическую связность ∇_t^0 в тривиальном расслоении F_t^0. Получаем семейство (F_t^0, ∇_t^0) тривиальных расслоений со связностями. Построим другое семейство расслоений со связностями (F_t, ∇_t). Для этого рассмотрим набор канонических изомонодромных семейств (9). Для каждого набора особых точек A_s построим свое семейство, зависящее от параметра t, одного для всех семейств.

Для наборов $A_s = \{{}^s a_1\}$, состоящих из одной точки, будем рассматривать семейство, состоящее из одной системы

$$ \frac{dy}{dz} = \frac{{}^s B_1}{z - {}^s a_1} y, $$

постоянное по t. В случае нетривиальных $A_s = \{{}^s a_1, \ldots, {}^s a_{n_s}\}$ строим семейство (9)

$$ \frac{dy}{dz} = \left(\sum_{j=1}^{n_s} \frac{{}^s B'_j}{z - b_s - t \cdot {}^s a_j} \right) y, \qquad {}^s B_\infty = \sum_{j=1}^{n_s} {}^s B'_j. \tag{13} $$

Эти системы имеют те же матрицы монодромии ${}^s G_1, \ldots, {}^s G_{n_s}$ в точках ${}^s a_1, \ldots, {}^s a_{n_s}$, что у исходной системы (11), а в точке $z = \infty$ матрица монодромии будет

$$ {}^s G_\infty = ({}^s G_1 \cdot \ldots \cdot {}^s G_{n_s})^{-1}. $$

Матрица ${}^s B_\infty$ выбирается такой, чтобы вещественные части ее собственных значений удовлетворяли условию (7). Выбрать системы (13) таким образом можно не всегда, для этого необходимо иметь положительное решение соответствующей обратной задачи (см. раздел 2.2). В случае, если этого сделать невозможно, нужно ввести дополнительную ложную особенность ${}^s a_0$. Допустим, что это удается сделать.

Окружим каждую из точек $b_1, \ldots, b_m$ окрестностью. В окрестности U_s точки b_s определим систему (13), голоморфно эквивалентную в окрестности U_s системе (12) при каждом t таком, что $|t| \in (0,1]$, так же сделаем для всех $s = 1, \ldots, m$. Снова отметим, что, если не удается построить такую систему, то можно ввести ложную особенность ${}^s a_0$, и система (13) будет мероморфно эквивалентной системе (12). Обозначим через ω_s^t формы коэффициентов соответствующих систем (13), а через ω форму коэффициентов исходной системы. Тогда набор форм $\omega, \omega_1^t, \ldots, \omega_m^t$, определенных на окрестностях

$$ U = \overline{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{s=1}^{m} \hat{U}_s, \quad U_1, \ldots, U_m, \tag{14} $$

где $\hat{U}_s$ — это некоторое сужение окрестности U_s, образует связность в голоморфном расслоении. Коцикл этого расслоения определяется с помощью выбора фундаментальных матриц $Y_s(z)$ систем $dy = \omega_s y$ и матрицы $Y(z)$, они выбираются одинаково нормированными. Получим семейство (F_t, ∇_t) расслоений со связностью. Заметим, что это семейство расслоений со связностью является голоморфно эквивалентным исходному семейству (F_t^0, ∇_t^0), если дополнительных точек ${}^s a_0$ вводить не потребовалось. Если дополнительные особенности вводились, то расслоение F_t будет по прежнему голоморфно эквивалентным F_t^0, но связность ∇_t станет мероморфно эквивалентной ∇_t^0.

Теперь можно начать с предельного (при $t \to 0$) положения. Рассмотрим голоморфное расслоение F_0 с логарифмической связностью ∇_0, определенное следующими данными. Возьмем набор окрестностей (14), в U рассмотрим форму связности ω (форма коэффициентов исходной системы), а в окрестностях U_s рассматриваем формы связности

$$ \omega_s^0 = \frac{{}^s B_\infty}{z - b_s} dz $$

предельных систем (8). Зафиксируем фундаментальные матрицы решений локальных систем в окрестностях (14). В U зададим фундаментальную матрицу $Y(z)$, а в окрестностях U_s — матрицы

$$ Y_s(z) = (z - b_s)^{{}^s B_\infty}. $$

В случае общего положения расслоение F_0 — тривиальное. В остальных случаях нужно вводить дополнительную особенность $z = a_0$ в самом начале доказательства. Расслоения семейства F_t при t из некоторой окрестности нуля тривиальные, так как множество тривиальных расслоений открыто.

Отметим, что вместо семейства систем (12), о поведении коэффициентов которого мало известно, мы получили семейство тривиальных расслоений со связностями, которые голоморфно эквивалентны системе (12). Расслоение F_t и связность ∇_t, при этом, построены явно с помощью локальных систем, зависимость которых от t известна. В случаях, имеющих нулевую меру, потребовалось введение дополнительных особенностей. Этим построением мы воспользуемся в следующей части работы для получения результатов.

2.5. Теорема Биркгофа–Гротендика

Существует теорема, классифицирующая голоморфные расслоения над сферой (см. [2]).

Теорема 1. *(Биркгоф, Гротендик) Любое голоморфное расслоение F на сфере Римана эквивалентно одному из следующих расслоений*

$$F^K = (U_0 = \mathbb{C}, U_\infty = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}, g_{0\infty} = z^K),$$

$$K = \operatorname{diag}(k_1, \dots, k_p), \quad k_i \in \mathbb{Z},$$

еще пусть $k_i \geqslant k_{i+1}$.

3. Результаты

3.1. Результаты о предельной системе (при $t \to 0$)

Результат этого параграфа — некоторое усиление результатов работы [3].

Теорема 2. *1. В результате пропорционального изомонодромного слияния фуксовых особых точек рождается регулярная особенность.*

2. Результатом такого слияния почти всегда является фуксова особенность.

3. В тех случаях, когда получаемая особенность лишь регулярна, ее ранг Пуанкаре не превышает некоторой константы N.

Доказательство. Опираясь на конструкции, описанные в предыдущих разделах, можно рассмотреть предел соответствующих связностей ∇_t в тривиальных расслоениях F_t. В пределе при $t \to 0$ получаем пару (F, ∇). Если предельное расслоение (F, ∇) тривиально, то из открытости множества тривиальных расслоений следует, что при достаточно малых t расслоения F_t тоже тривиальны. Нетрудно убедиться, что при изменении коцикла тривиального голоморфного расслоения координатное описание изменяется голоморфно по t, а в случае нетривиального предельного расслоения F — мероморфно. Теперь видно, что итоговая система связана с формами связности голоморфным калибровочным преобразованием в случае тривиального F и мероморфным — в случае нетривиального.

Таким образом получаем, что из того, что почти все голоморфные расслоения тривиальны, выводим пункт 2, так как итоговая система получается из логарифмической связности голоморфным калибровочным преобразованием. Если оно нетривиально, то итоговая связность связана мероморфным преобразованием, и полюс, который может появиться у матрицы коэффициентов, равен разности крайних элементов типа расщепления расслоения F плюс один. □

3.2. Степенные разложения решений уравнения Шлезингера

Теорема 3. *Решения уравнения Шлезингера $b_{ij}(a)$ рассматриваются как функции от положения одной особой точки, $a_k = t$, когда t лежит в некоторой окрестности a_l. Возможны два случая,*

1) когда матрица $(G_k G_l)^{-1}$ не имеет жордановых клеток, разлагаются в окрестности точки $t = a_l$ в ряд

$$b_{ij}(t) = P(t, t^{\varphi_{12}}, t^{\varphi_{13}}, \dots, t^{\varphi_{p,p-1}}) =$$

$$= P_0(t) + t^{\varphi_{12}} P_1(t) + \ldots + t^{\varphi_{p,p-1}} P_{p(p-1)}(t)$$

с конечной главной частью по целым степеням функций $t, t^{\varphi_{12}}, t^{\varphi_{13}}, \dots, t^{\varphi_{p,p-1}}$ с $\varphi_{rs} = \frac{1}{2\pi i} \ln \lambda_{rs}$, где λ_{rs} — разность r-го и s-го собственных значений матрицы $(G_k G_l)^{-1}$;

2) когда матрица $(G_k G_l)^{-1}$ содержит жордановы клетки, решение представляется рядом

$$b_{ij}(t) = P(t, t^{\varphi_{12}}, t^{\varphi_{13}}, \dots, t^{\varphi_{p,p-1}}, \ln t),$$

где максимальная степень логарифма равна размеру самой большой жордановой клетки.

План доказательства. Рассмотрим расслоение со связностью, построенное в предыдущем параграфе. Пары (F_t, ∇_t) и (F_t^0, ∇_t^0) эквивалентны как расслоения со связностью. Тогда слияние особых точек системы вида (12) локально (в каждой из окрестностей $U_1, \dots, U_m$), т. е. калибровочно эквивалентно своему каноническому нормализованному слиянию (6), а в окрестности U — эквивалентно исходной системе (11). Его можно представить как

$$U_s: \frac{dy}{dz} = \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\Gamma_s(t,z)t^{B_\infty}B_i t^{-B_\infty}\Gamma_s^{-1}(t,z)}{z-b_s-ta_i^0} + \frac{d\Gamma_s}{dz}\Gamma_s^{-1}\right)y,$$

$$B_i \equiv \text{const}, \quad B_\infty = \sum_{i=1}^{k} B_i.$$

$$\Gamma_s(t,z) = {}^s\Gamma_0(t) + {}^s\Gamma_1(t)(z-b_s-ta_i)+\ldots \qquad (15)$$

$$U: \qquad \frac{dy}{dz} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\Gamma(t,z)B_i\Gamma^{-1}(t,z)}{z-a_i^0} + \frac{d\Gamma}{dz}\Gamma^{-1}\right)y$$

При этом $\Gamma(t,z)$ — мероморфная в окрестности D_0 точки $(t,z)=(0,0)$ функция двух переменных. В случае общего положения (для почти любого набора матриц монодромии) $\Gamma(t,z)$ — голоморфна в D_0.

Из вида разложения (15) в ряд по z матрицы $\Gamma(t,z)$ в окрестности точки $z=b_s+a_i$ следует, что если $\Gamma(t,z)$ голоморфна по z, то вычет деформируемой системы будет сопряжен к вычету локальной формы на матрицу $\Gamma_0(t)$. Отсюда следует вид разложения вычета в ряд по t. В случае, когда $\Gamma(t,z)$ мероморфна по z, нужно действовать также, но вычет деформируемой системы будет иметь более сложный вид, из-за чего в разложении для $b_{ij}(t)$ появятся полюса по t. □

3.3. Применение к шестому уравнению Пенлеве

Известное уравнение Пенлеве 6

$$\frac{d^2w}{dt^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{w}+\frac{1}{w-1}+\frac{1}{w-t}\right)\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 -$$

$$-\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t-1}+\frac{1}{w-t}\right)\frac{dw}{dt}+$$

$$+\frac{w(w-1)(w-t)}{t^2(t-1)^2}\left(\alpha+\beta\frac{t}{w^2}+\gamma\frac{t-1}{(w-1)^2}+\delta\frac{t(t-1)}{(w-t)^2}\right)$$

реализуется как простейший нетривиальный пример уравнения Шлезингера. Рассмотрим систему

$$\frac{dy}{dz} = \left(\frac{B_0}{z}+\frac{B_t}{z-t}+\frac{B_1}{z-1}\right)y,$$

размера 2×2 с матрицами коэффициентов, имеющими нулевые следы

$$\mathrm{tr}B_0 = \mathrm{tr}B_t = \mathrm{tr}B_1 = 0.$$

Это значит, что собственные значения матриц B_0, B_t, B_1, $B_\infty = -(B_0+B_t+B_1)$ — суть числа $(\lambda_0,-\lambda_0)$, $(\lambda_t,-\lambda_t)$, $(\lambda_1,-\lambda_1)$, $(\lambda_\infty,-\lambda_\infty)$, а матрицы монодромии принадлежат $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Также предположим, что $B_\infty = \mathrm{diag}(\lambda_\infty,-\lambda_\infty)$.

Рассмотрим шлезингеровскую изомонодромную деформацию данной системы, зависящую от параметра t. Тогда, как известно было еще Шлезингеру, выражение

$$w(t) = \frac{tb_{12}^0}{(t+1)b_{12}^0+tb_{12}^1+b_{12}^t} \qquad (16)$$

является решением шестого уравнения Пенлеве со следующими константами:

$$\alpha = \frac{(2\lambda_\infty-1)^2}{2}, \beta=-2\lambda_0^2, \gamma = 2\lambda_1^2, \delta = \frac{1}{2}-2\lambda_t^2.$$

Теорема 4. *Все решения уравнения Пенлеве 6 в некоторых окрестностях особых точек $t=0,1,\infty$ разлагаются в сходящиеся степенные и степенно-логарифмические ряды. В случае общего положения (если G_1G_∞ — диагонализируема)*

$$w(t) = P(t,t^\lambda,t^{-\lambda}),$$

где $\lambda = \lambda(\alpha,\beta,\gamma,\delta,t_0,w(t_0),w'(t_0))$ — может быть вычислена приближенно. В случае, когда G_1G_∞ — жорданова клетка

$$w(t) = P(t,\ln t).$$

Доказательство. Эта теорема выводится из теоремы 3 и формулы (16). □

Список литературы

[1] Задачи Арнольда *ФАЗИС. 2000.*

[2] Болибрух А. А. Обратные задачи монодромии в аналитической теории дифференциальных уравнений *М.: МЦНМО. 2009.*

[3] Болибрух А. А. Об изомонодромных слияниях фуксовых особенностей // *Тр. МИАН. 1998. Т. 221. С. 127-142.*

[4] Болибрух А. А. Регулярные особые точки как изомонодромные слияния фуксовых // *УМН. 2002. Т. 56. В. 4. С. 135-136.*

[5] Лаппо-Данилевский И. А. Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений *М.: Гостехтеоретиздат. 1957.*

[6] Glutsyuk A. A. On the monodromy group of confluenting linear equations // *arXiv:math/0304243.*

[7] Вьюгин И. В., Гонцов Р. Р. О дополнительных параметрах в обратных задачах монодромии // *Матем. сб. 2006. Т. 197. В. 12. С. 43-64.*