*УДК 517.977* *ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ*

А.М. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ,[1] Д. МАКИНЕРНИ

А.В. ПОКРОВСКИЙ,

# Слабые резонансы при бифуркации Хопфа в системах управления с неполиномиальными нелинейностями

Предлагаются условия рождения циклов большого периода (*субгармоник*) из состояния равновесия. Если нелинейности, входящие в задачу, гладкие, то в условиях *слабого резонанса* субгармоники, вообще говоря, не существуют. Если нелинейности имеют главную неполиномиальную однородную часть, ситуация меняется и субгармоники существуют.

## 1. Постановка задачи.

**1.1. Бифуркации Хопфа.** Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$L\Big(\frac{d}{dt},\lambda\Big)x = M\Big(\frac{d}{dt},\lambda\Big)f(x,\lambda), \tag{1}$$

описывающее динамику одноконтурной системы управления, состоящей из интегрирующего линейного звена с передаточной функцией $M(\cdot,\lambda)/L(\cdot,\lambda)$, охваченного нелинейной обратной связью $x(\cdot)\ \mapsto\ f\big(x(\cdot),\lambda\big)$. Параметр $\lambda$ вещественный, многочлены $L(\cdot,\lambda)$ и $M(\cdot,\lambda)$ взаимно простые и вещественные, $\ell = \deg L(\cdot,\lambda) > m = \deg M(\cdot,\lambda)$. Нелинейность $f(x,\lambda)$ непрерывна по совокупности переменных и сублинейна по $x$:

$$\lim_{x\to 0}\ \sup_{\lambda}\ \big|f(x,\lambda)x^{-1}\big| = 0. \tag{2}$$

В частности, $f(0,\lambda)\equiv 0$, и уравнение (1) имеет решение $x(t)\equiv 0$ при всех $\lambda$.

Если при некотором значении $\lambda_0$ параметра $\lambda$ пара корней $\sigma(\lambda)\pm w(\lambda)i$ многочлена $L(\cdot,\lambda)$ пересекает мнимую ось, то (при выполнении условий нерезонансности) в окрестности точки $\lambda_0$ возникают малые периодические колебания (циклы) и их период[2] близок к $2\pi/w(\lambda_0)$. Эта ситуация называется *бифуркацией Хопфа*; результаты, касающиеся бифуркации Хопфа (для разнообразных систем), составили содержание многих книг и тысяч статей. Мы используем следующее определение точки бифуркации Хопфа.

[1]Работа выполнена в период пребывания А.М.Красносельского в Институте Нелинейных Наук в национальном университете Ирландии (г. Корк). А.М.Красносельский поддержан грантами Российского Фонда Фундаментальных Исследований №№ 0001-00571 и 00-15-96116.

[2]*Периодом* непостоянной функции мы называем наименьший из возможных периодов.

типа равенства на скорости по $\lambda$ пересечения мнимой оси корнями многочлена $L(\cdot, \lambda)$. При этом на соответствующей бифуркационной диаграмме возникает так называемый *клюв синхронизации*; если вещественные части корней лежат в клюве, то в пространстве состояний возникают инвариантные торы, на которых лежат субгармоники. В остальной части диаграммы субгармоник нет.

Основное содержание настоящей работы составляет следующий факт. Если главная положительно однородная часть нелинейности не имеет полиномиальна ($x^N$ с натуральным $N > 1$), то, вообще говоря, субгармоники существуют. Этот факт будет сформулирован для уравнений теории управления в нуле и на бесконечности и для уравнений с запаздыванием. Видимо, этот факт справедлив и для стандартных систем $z' = A(\lambda)z + f(z, \lambda)$ общего вида, мы ограничимся уравнениями (1) теории управления.

Для доказательства всех сформулированных результатов предложен подход, основанный на методе гармонического баланса и топологических методах.

Аналогичный факт справедлив, если мнимую ось в точке $\lambda_0$ пересекают две пары простых корней, и $w_1(\lambda_0) = kw_2(\lambda_0)$ при натуральном $k > 1$. Тогда утверждение 1 применимо только к первой паре корней. Число $\lambda_0$ — точка бифуркации Хопфа уравнения (1) с частотой $w_1(\lambda_0)$. Вопрос: является ли $\lambda_0$ точкой бифуркации Хопфа с частотой $w_2(\lambda_0)$? Ответ на этот вопрос зависит от величины $k$. При $k > 3$ снова возникает ситуация слабого резонанса, возникает клюв синхронизации и решения длинного периода, вообще говоря, не существуют. Ситуации $k = 2, 3$ называются *сильными резонансами* и требуют отдельного специального исследования. Случай $k = 2$ (резонанс $2 : 1$) исследован в [4] методами нормальных форм. Подробное исследование для уравнений теории управления топологическими методами проведено в [8], для резонанса $2 : 1$ существование субгармоник вполне естественно.

При нерезонансной бифуркации Хопфа “обычно” малые циклы существуют либо только при $\lambda < \lambda_0$, либо только при $\lambda > \lambda_0$ (иногда только при $\lambda = \lambda_0$, например, при $f(x, \lambda) \equiv 0$). Для исследования вопроса, с какой именно стороны от $\lambda_0$ рождаются циклы, необходима информация не только о линейной части, но и о старших нелинейных членах ([10]). При резонансе $2 : 1$ естественной является картина, когда субгармоники рождаются по обе стороны от точки бифуркации. При слабом резонансе $m : n$ вопрос о том, с какой стороны рождаются циклы неотделим от вопроса, является ли $\lambda_0$ точкой бифуркации. Для ответа на него не требуется специальных конструкций, он даётся в качестве “бесплатного приложения” к ответу на вопрос о существовании субгармоник.

Подчеркнем, что нас интересует вопрос о существовании субгармоник “почти фиксированного” периода. Замечание это сделано из-за того, что при слабом резонансе возможны аналоги замеченного В.С.Козякиным ([5], см. также

Введем обозначение $W_1(w,\lambda)=M(wi,\lambda)/L_1(wi,\lambda)$. По предположению, комплекснозначная функция $W_1$ двух переменных определена и непрерывна в точках $w{=}m$, $\lambda{=}\lambda_0$ и $w{=}n$, $\lambda{=}\lambda_0$. Рассмотрим ещё 4 функции переменных $\rho,\varphi$:

$$\begin{aligned}
\Phi_1(\rho,\varphi) &= -\Re W_1(m,\lambda_0)d_{s,m}(\rho,\varphi)-\Im W_1(m,\lambda_0)d_{c,m}(\rho,\varphi),\\
\Phi_2(\rho,\varphi) &= \Im W_1(m,\lambda_0)d_{s,m}(\rho,\varphi)-\Re W_1(m,\lambda_0)d_{c,m}(\rho,\varphi),\\
\Phi_3(\rho,\varphi) &= \rho^{-1}\left(\Re W_1(n,\lambda_0)d_{s,n}(\rho,\varphi)+\Im W_1(n,\lambda_0)d_{c,n}(\rho,\varphi)\right),\\
\Phi_4(\rho,\varphi) &= \rho^{-1}\left(-\Im W_1(n,\lambda_0)d_{s,n}(\rho,\varphi)+\Re W_1(n,\lambda_0)d_{c,n}(\rho,\varphi)\right).
\end{aligned} \tag{6}$$

Теперь мы можем определить основную систему

$$\begin{aligned}
2m^2\Delta_w+\tau_1\Delta_\lambda+\Phi_1(\rho,\varphi)=0, &\qquad \sigma_1\Delta_\lambda+\Phi_2(\rho,\varphi)=0,\\
2n^2\Delta_w+\tau_2\Delta_\lambda+\Phi_3(\rho,\varphi)=0, &\qquad \sigma_2\Delta_\lambda+\Phi_4(\rho,\varphi)=0
\end{aligned} \tag{7}$$

из четырех уравнений с четырьмя неизвестными $\Delta_w,\Delta_\lambda,\rho,\varphi$.

**2.2. Бифуркации Хопфа.** Решение $(\Delta_w^*,\Delta_\lambda^*,\rho^*,\varphi^*)$ системы (7) назовем *простым*, если оно изолировано и имеет ненулевой индекс Кронекера ([9]).

Если $F(\cdot)=x^N$ и $N<n+m-1$, то система (7) не может иметь простого решения! При таких $F(\cdot)$ неизвестное $\varphi$ всегда пропадает и в системе из четырех уравнений остается всего три неизвестных. При однородной нелинейности общего вида ничего такого не происходит! Именно эта "техническая" причина разделяет уравнения с алгебраическими и с неалгебраическими главными частями. Это различие не случайно и от метода не зависит: для таких уравнений ответы на вопрос о существовании субгармоник различны.

Теорема 1. *Пусть многочлен $L(\cdot,\lambda)$ имеет вид (3) и $L_1(ki,\lambda_0)\neq 0$ при целых $k$. Пусть система (7) имеет простое решение $(\Delta_w^*,\Delta_\lambda^*,\rho^*,\varphi^*)$, причем $\rho^*>0$. Тогда для любого достаточно малого $r>0$ уравнение (1) имеет цикл*

$$x(t)=r\sin(wmt)+r\rho^*\cos(wnt+\varphi^*)+o(r) \tag{8}$$

*периода $2\pi/w$, близкого к $2\pi$, при некотором $\lambda$, близком к $\lambda_0$. Период больше $2\pi$, если $\Delta_w^*a(\lambda_0)>0$, и меньше $2\pi$, если $\Delta_w^*a(\lambda_0)<0$. Цикл существует при $\lambda<\lambda_0$, если $\Delta_\lambda^*a(\lambda_0)<0$, при $\lambda>\lambda_0$, если $\Delta_\lambda^*a(\lambda_0)>0$. Справедливы равенства*

$$\lambda=\lambda_0+r^{\alpha-1}\Delta_\lambda^*\frac{a(\lambda_0)}{\pi(n^2-m^2)}+o(r^{\alpha-1}),\qquad w=1-r^{\alpha-1}\Delta_w^*\frac{a(\lambda_0)}{\pi(n^2-m^2)}+o(r^{\alpha-1}).$$

Решение системы (7) может быть изолированным, только если $\sigma_1,\sigma_2\neq 0$. В этом случае неизвестные $\Delta_w^*,\Delta_\lambda^*$, которые входят в основную систему линейным образом, могут быть исключены и система примет вид

$$\Psi_1(\rho,\varphi)=0,\qquad \Psi_2(\rho,\varphi)=0, \tag{9}$$

Точно посчитать функцию $d(\varphi)$ невозможно. Однако, это и не нужно! При исследовании конкретного уравнения достаточно посмотреть (на компьютере!) довольно грубое графическое представление функции $d(\varphi)$. Конечно, при этом желательны некоторые оценки точности...

**2.4. Система с запаздыванием.** В этом разделе предполагается, что нелинейность имеет вид $f(x(t), x(t-\theta), \lambda)$ и справедливо представление

$$f(x, y, \lambda) = F(x, y, \lambda) + o\big(|x|^\alpha + |y|^\alpha\big), \tag{11}$$

слагаемое $F(x, y, \lambda)$ положительно однородно: $F(rx, ry, \lambda) = r^\alpha F(x, y, \lambda),\ r > 0$. Положим $u(t; \rho, \varphi) = \sin(mt) + r\sin(nt + \varphi)$ и рассмотрим функции

$$\begin{aligned}
d_{s,m}(\rho, \varphi) &= \int_0^{2\pi} \sin(mt)\, F\big(u(t; \rho, \varphi), u(t-\theta; \rho, \varphi), \lambda_0\big)\, dt,\\
d_{c,m}(\rho, \varphi) &= \int_0^{2\pi} \cos(mt)\, F\big(u(t; \rho, \varphi), u(t-\theta; \rho, \varphi), \lambda_0\big)\, dt,\\
d_{s,n}(\rho, \varphi) &= \int_0^{2\pi} \sin(nt+\varphi)\, F\big(u(t; \rho, \varphi), u(t-\theta; \rho, \varphi), \lambda_0\big)\, dt,\\
d_{c,n}(\rho, \varphi) &= \int_0^{2\pi} \cos(nt+\varphi)\, F\big(u(t; \rho, \varphi), u(t-\theta; \rho, \varphi), \lambda_0\big)\, dt;
\end{aligned}$$

они зависят от запаздывания $\theta$, могут обладать симметриями типа периодичности и четности. Определим по $d_\gamma$ функции $\Phi_j$ и рассмотрим систему (7).

Теорема 4. *Пусть $L(\cdot, \lambda)$ имеет вид* (3) *и $L_1(ki, \lambda_0) \neq 0$ при целых $k$. Пусть нелинейность $f(x, y, \lambda)$ имеет вид* (11)*, справедливы соотношения:*

$$|F(x_1, y_1, \lambda) - F(x_2, y_2, \lambda)| \le C\big(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|\big), \qquad x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = 1.$$

*Пусть система* (7) *имеет простое решение $(\Delta_w^*, \Delta_\lambda^*, \rho^* > 0, \varphi^*)$. Тогда уравнение $L(p, \lambda)x(t) = M(p, \lambda) f\big(x(t), x(t-\theta), \lambda\big)$, имеет для всех достаточно малых $r > 0$ цикл* (8) *периода $2\pi/w \approx 2\pi$ при некотором $\lambda \approx \lambda_0$.*

Аналогичные теоремы могут быть сформулированы для системы с нелинейностями, содержащими производные и различные запаздывания, например, вида $f\big(x(t), x(t-\theta_1), x'(t), x'(t-\theta_1), \ldots, \lambda)\big)$. В условиях теоремы 4 также справедливы асимптотические представления для $\lambda$ и $w$.

## 3. Выводы

Рассматривается задача о субгармониках, то есть колебаниях вида

$$x(t) = r_1 \sin(wmt) + r_2 \sin(wnt + \varphi) \tag{14}$$

в ситуации слабого резонанса в бифуркации Хопфа. Предлагаются условия существования таких колебаний в одноконтурной системе управления.

В классических хорошо известных случаях нелинейность имеет главные полиномиальные нелинейные члены и субгармоники, вообще говоря, не существуют вне узкого клюва синхронизации.

Если нелинейность имеет НЕполиномиальные главные нелинейные члены, то субгармоники часто существуют. В работе предлагается метод сведения задачи о субгармониках при слабом резонансе в бифуркации Хопфа к исследованию системы двух скалярных уравнений (9) с двумя неизвестными. Такая система может быть исследована с помощью компьютера с достаточной точностью, требуемые свойства системы достаточно робастны.

Метод применим к исследованию различных систем управления, в том числе для исследования систем с запаздыванием, в нуле и на бесконечности.