УДК 517

А.М. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ, д-р физ.-мат наук,
В.В. ЧЕРНОРУЦКИЙ, канд. физ.-мат. наук
(Институт проблем передачи информации РАН, Москва)

БИФУРКАЦИИ ХОПФА ПОРОЖДЕННЫЕ МАЛЫМИ НЕЛИНЕЙНЫМИ ЧЛЕНАМИ [1]

В работе предлагаются условия рождения периодических решений из положения равновесия для автономных уравнений с параметром. Эти условия принципиально отличаются от известных ранее тем, что линейная часть предполагается независимой от параметра и всегда вырожденной, а существование периодических решений определяется поведением малых нелинейностей в окрестности положения равновесия. Для доказательства полученных результатов предложен относительно простой метод сведения исходной вырожденной в разных смыслах задачи к топологически невырожденной, которая может быть исследована классическими методами теории вращения бесконечномерных векторных полей.

1. Постановка задачи

Рассмотрим дифференциальное уравнение [2]

$$L\left(\frac{d}{dt},\lambda\right)x = M\left(\frac{d}{dt},\lambda\right)f(x,\lambda). \tag{1}$$

Здесь $L(p,\lambda)$ и $M(p,\lambda)$ — взаимно простые многочлены с вещественными коэффициентами, степень многочлена $L(p,\lambda)$, больше степени многочлена $M(p,\lambda)$; через $f(x,\lambda)$ обозначена некоторая непрерывная по совокупности переменных нелинейность, не зависящая от времени, зато зависящая от скалярного параметра $\lambda \in \Lambda = (a,b)$.

Предполагается, что $f(0,\lambda) \equiv 0$, т. е. 0 — положение равновесия для уравнения (1). Нас будут интересовать условия существования у уравнения (1) малых периодических решений (заранее неизвестного периода).

Определение 1 ([3]). *Назовем значение λ_0 параметра точкой бифуркации Хопфа или просто, точкой бифуркации для уравнения* (1) *с частотой ω_0, если в любой окрестности $(\lambda_0-\varepsilon,\lambda_0+\varepsilon)$ этой точки найдется такое значение параметра λ, что у уравнения* (1) *при этом λ найдется ненулевое периодическое решение амплитуды меньшей ε и периода, отличающегося от $2\pi/\omega_0$ меньше, чем на ε.*

Иначе говоря, λ_0 — точка бифуркации для уравнения (1) с частотой ω_0, если для сколь угодно близких значений параметра найдутся решения сколь угодно малых амплитуд с периодом, сколь угодно близким к $2\pi/\omega_0$.

В [3] приводится теорема о точках бифуркации для уравнения (1). Предполагается, что многочлен $L(p,\lambda)$ имеет пару комплексно сопряженных корней $\sigma(\lambda) \pm \omega(\lambda)i$, причем $\sigma(\lambda_0) = 0$; числа $k\omega(\lambda_0)i$ при $k = 0,2,3,\dots$ не являются корнями многочлена $L(p,\lambda)$; в каждой окрестности точки λ_0 функция $\sigma(\lambda)$ принимает значения разных знаков. Предполагается также, что нелинейность $f(x,\lambda)$ удовлетворяет условию $f(x,\lambda)x^{-1} \to 0$ при $x \to 0$. Тогда λ_0 — точка бифуркации для уравнения (1) с частотой $\omega(\lambda_0)$.

[1] Работа частично поддержана Российским Фондом Фундаментальных Исследований (гранты №№ 97-01-00692 и 96-15-96048).

[2] Об определении решения такого уравнения см. любой учебник по теории управления, например, [1, 6]. Читатель, не привыкший к подобным уравнениям, может считать, что многочлен $M(p)$ равен 1, т. е. рассматривается обыкновенное квазилинейное уравнение с постоянными коэффициентами.

одной и той же нечетной кратности.

2. *Многочлен $L(pi)$ не имеет корней вида $\pm k\omega_0,\ k = 0, 2, 3, \dots$.*
3. *Выполнены условия (3) – (6), причем*

$$2\beta > \alpha + 1. \tag{7}$$

Пусть функция $a(\lambda)$ при некотором λ_0 обращается в нуль, причем в каждой окрестности точки λ_0 эта функция принимает значения обоих знаков. Тогда λ_0 — точка бифуркации для уравнения (2) с частотой ω_0.

Конечно, если функция $f(x, \lambda)$ достаточно гладкая по переменной x, то естественно предполагать, что величины α и β — целые. К сожалению, "основной" случай $\beta = 2$, $\alpha = 3$ не удовлетворяет условию (7). Приходится предполагать либо, что $\alpha = 3$ и $\beta = 4$, либо, что $\alpha = 5$ и $\beta = 4$. Это минимальные варианты для гладкой нелинейности $f(x, \lambda)$.

Простейшие примеры уравнений, для которых применима теорема 1 — это уравнения

$$x''' + x'' + x' + x = \lambda x^3 + o(x^3, \lambda), \qquad x''' + x'' + x' + x = b(\lambda)x^4 + \lambda x^5 + o(x^5, \lambda)$$

или уравнения

$$x'' + x = \frac{d}{dt}\left(\lambda x^3 + o(x^3, \lambda)\right), \qquad x'' + x = \frac{d}{dt}\left(b(\lambda)x^4 + \lambda x^5 + o(x^5, \lambda)\right).$$

Здесь через $o(x^s, \lambda)$ обозначаются зависящие от λ члены имеющие по x в нуле порядок выше s, через $b(\lambda)$ обозначена произвольная непрерывная функция. Все эти уравнения имеют точку бифуркации $\lambda = 0$.

Отметим, что условие 1 теоремы выполнено, только если хотя бы один из многочленов $L(p)$ и $M(p)$ содержит хотя бы один ненулевой член с нечетным показателем степени (это только необходимое условие). Поэтому теорему 1 нельзя применить к уравнению $x'' + x = f(x, \lambda)$.

Многочлены $L(p)$ и $M(p)$ могут зависеть от параметра так, чтобы при всех значениях λ корни многочлена $L(p)$ вели бы себя как в теореме 1: одна и та же пара чисто мнимых корней, общая для всех λ, и отсутствие кратных ω_0 корней. Как следует из приводимого ниже доказательства заключение теоремы сохраняется.

П Р И Л О Ж Е Н И Е

1. Схема доказательства теоремы 1. Вначале сделаем в изучаемом уравнении (2) замену времени. Предположим, что мы будем искать периодические решения периода $2\pi/\omega$, близкого к $2\pi/\omega_0$. Задача о $2\pi/\omega$-периодических решениях уравнения (2) эквивалентна задаче о 2π-периодических решениях решениях уравнения

$$L\left(\omega\frac{d}{dt}\right)x = M\left(\omega\frac{d}{dt}\right)f(x, \lambda). \tag{П.1}$$

При этом величина ω, входящая в уравнение, априори неизвестна и должна рассматриваться в качестве дополнительной неизвестной.

Отметим, что многочлен $L(\omega p)$ (это многочлен от переменной p) имеет корни $\pm i$ при $\omega = \omega_0$, других корней вида ki с целыми k этот многочлен не имеет не только при $\omega = \omega_0$, но и в некоторой окрестности Ω числа ω_0, пусть многочлен $M(\omega p)$ не имеет корней $\pm i$ при $\omega \in \Omega$.

Мы будем искать 2π-периодические решения уравнения (П.1) в виде

$$x(t) = r\sin t + z(t), \tag{П.2}$$

3. Уравнение $z = B_3(\omega, \xi, z)$. Через E обозначим пространство непрерывных на $[0, 2\pi]$ функций $z(t)$, удовлетворяющих условию периодичности $z(0) = z(2\pi)$ и условиям "ортогональности":

$$\int_0^{2\pi} \sin t\, z(t)\ dt = \int_0^{2\pi} \cos t\, z(t)\ dt = 0.$$

Рассмотрим линейный оператор $A = A(\omega)u$, который ставит в соответствие каждой функции $u(t) \in E$ единственное решение $x(t) \in E$ уравнения $L(\omega p)x(t) = M(\omega p)u(t)$. Существование такого оператора непосредственно следует из несуществования кратных ω_0 корней у многочлена $L(pi)$. Этот оператор определен на всем пространстве E, его можно было бы определить на более широких пространствах, этот оператор преобразует непрерывные функции в непрерывно дифференцируемые, он вполне непрерывен как оператор в E с равномерной нормой, и непрерывен как оператор из $E \subset C$ в C^1. Более того, нормы операторов $A(\omega)$ при разных $\omega \in \Omega$ все равномерно ограничены. Продолжим оператор $A(\omega)$ на все пространство $C_0 \subset C$ непрерывных периодических функций, положив $A(\omega)x = A(\omega)(I - P)x$, где P — инвариантный проектор

$$Px(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(t - s)\, x(s)\, ds$$

на плоскость Π, натянутую на функции $\cos t$, $\sin t$, проектор $I - P$ проектирует пространство C_0 на E. Проектор P переводит все функции $z(t) \in E$ в нуль, плоскость Π остается на месте. Вообще-то проектор P определен на всех локально интегрируемых функциях, мы рассматриваем его на C. Проекторы P и $I - P$ коммутируют с операторами $A(\omega)$.

Таким образом, третье уравнение системы (П.3) будет иметь вид

$$z = A(\omega) f(r \sin t + z(t), \lambda). \tag{П.4}$$

Уравнение (П.4) в дальнейшем будет исследоваться при малых значениях r. При применении леммы 1 окрестность $\tilde{Z}$ — это шар $\|z\| \leq r \subset E$. Очевидно, что оператор $A(\omega)f(r \sin t + z(t), \lambda)$ переводит при достаточно малых r такой шар в себя. Но, если $\|z\|_C \leq r$, то из оценки (4) (без ограничения общности считаем, что $\beta < \alpha$) вытекает, что

$$\|z\|_C \leq c\, r^\beta, \tag{П.5}$$

причем постоянная c не зависит ни от ω, ни от λ. Таким образом, множество Z содержит только функции $z(t)$, удовлетворяющие оценке (П.5), ниже при исследовании скалярных уравнений мы можем полагать, что эта оценка справедлива при всех ω и λ.

4. Линейная составляющая скалярных уравнений. В этом подразделе приводятся уравнения, которые получатся, если уравнение (П.1) "умножить на $\sin t$ или $\cos t$ и проинтегрировать по периоду $[0, 2\pi]$".

Лемма 2. Если функции $x(t) = r \sin t + z(t)$ $(z \in E)$ и $u(t)$ удовлетворяют равенству

$$L\left(\omega \frac{d}{dt}\right) x(t) = M\left(\omega \frac{d}{dt}\right) u(t), \tag{П.6}$$

то справедливы равенства

$$\pi \Re e \frac{L(\omega i)}{M(\omega i)} r = \int_0^{2\pi} \sin t\ u(t)\, dt, \quad \pi \Im m \frac{L(\omega i)}{M(\omega i)} r = \int_0^{2\pi} \cos t\ u(t)\, dt. \tag{П.7}$$

где многочлен $Q_1(\omega)$ не обращаются в нуль при $\omega = \omega_0$, а многочлен $Q_2(\omega)$ либо также не обращается в нуль, либо равен нулю тождественно. Показатель степени K — это кратность корня $\omega_0 i$ многочлена $L(p)$.

Заменим в уравнениях (П.8) и (П.9) левые части равенств (П.10) правыми частями этих равенств. Выразим $(\omega - \omega_0)^K r$ из уравнения (П.9) и подставим в (П.8).

Полученное уравнение имеет вид

$$(\omega - \omega_0)^\gamma Q_2(\omega) \int\limits_0^{2\pi} \cos t f(r \sin t + z(t), \lambda)\, dt = \tag{П.11}$$
$$= Q_1(\omega) \int\limits_0^{2\pi} \sin t f(r \sin t + z(t), \lambda)\, dt.$$

Подставим в равенстве (П.11) вместо функции $f(x, \lambda)$ ее компоненты

$$f(x, \lambda) = a(\lambda) x(t) |x(t)|^{\alpha - 1} + \psi_1(|x|, \lambda) + \psi_2(|x|, \lambda) + \psi_0(x, \lambda).$$

Так как

$$\left| \int\limits_0^{2\pi} g(t) \ \big(\ \psi_2(|r \sin t + z|, \lambda) - \psi_2(|r \sin t|, \lambda) \ \big) \ dt \right| \le c_1 r^{\beta - 1} \|z\|_C \le c_2 r^{2\beta - 1}$$

$(g(t) = \sin t$ или $g(t) = \cos t)$ и

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos t \ \sin t \, |\sin t|^{\alpha - 1} dt = \int\limits_0^{2\pi} \cos t \, \psi_2(|r \sin t|)\, dt = \int\limits_0^{2\pi} \sin t \, \psi_2(|r \sin t|)\, dt = 0,$$

то единственное слагаемое в равенстве (П.11) имеет по r порядок малости r^α: это слагаемое

$$r^\alpha Q_1(\omega) a(\lambda) \int\limits_0^{2\pi} |\sin t|^{\alpha + 1}\, dt. \tag{П.12}$$

Все остальные слагаемые, очевидно, имеют более высокий порядок малости в силу оценки (П.5). Поэтому знак левой части уравнения (П.11) определяется при малых r знаком слагаемого (П.12), т. е. знаком функции $a(\lambda)$. А знак левой части уравнения (П.9) определяется знаком величины $\omega - \omega_0$.

Таким образом, уравнения (П.4), (П.9), (П.11) образуют систему типа (П.3), для которой выполнены все условия леммы 1. Теорема доказана.