УДК 517.977

А.М. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ, д-р физ.-мат. наук
(Институт проблем передачи информации РАН, Москва)

НЕОГРАНИЧЕННЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ЦИКЛОВ В АВТОНОМНЫХ СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ[1]

Предлагаются условия существования последовательностей периодических решений больших амплитуд для автономных уравнений теории управления с запаздыванием. Существование периодических решений определяется поведением ограниченных нелинейностей на бесконечности. Доказательство предлагаемых результатов проведено путем сведения исходной задачи к другой, которая может быть исследована классическими методами теории вращения бесконечномерных векторных полей.

1. Основные результаты

Рассмотрим дифференциальное уравнение[2]

$$L\left(\frac{d}{dt}\right)x = M\left(\frac{d}{dt}\right)f(x(t), x(t-h)). \tag{1}$$

Здесь $L(p)$ и $M(p)$ — взаимно простые многочлены с вещественными коэффициентами, степень многочлена $L(p)$ больше степени многочлена $M(p)$; через $f(x,y) : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ обозначена некоторая равномерно ограниченная непрерывная нелинейность.

Основным результатом работы являются условия существования у уравнения (1) последовательностей периодических решений (заранее неизвестного периода), амплитуды которых (конечные для каждого решения) неограничены в совокупности.

Пусть $L(\pm i) = 0$. Величина

$$\beta \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\omega\to 1}\frac{\Im m\,[L(\omega i)M(-\omega i)]}{\Re e\,[L(\omega i)M(-\omega i)]} \tag{2}$$

может принимать конечное или бесконечное значение, например, числитель или знаменатель дроби в (2) может быть тождественно равным нулю. Введем обозначение

$$\alpha = \operatorname{arctg}\beta, \tag{3}$$

из последующих формулировок ясно, что при $\beta = \infty$ все равно какое значение $+\pi/2$ или $-\pi/2$ имеет число α; для определенности будем считать, что, если $\beta=\infty$, то $\alpha = \pi/2$.

---

[1]Работа частично поддержана Российским Фондом Фундаментальных Исследований (гранты №№ 97-01-00692 и 96-15-96048).

[2]Определение понятия решения такого уравнения содержится в любом учебнике по теории управления, например, [1, 4]. Читатель, не привыкший к подобным уравнениям, может считать, что $M(p)\equiv 1$, т.е. рассматривается обыкновенное квазилинейное уравнение с постоянными коэффициентами. Результаты являются новыми и для этого случая.

Для формулировки основного результата нам понадобится функция

$$\Phi(\xi,\alpha,\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_0^{2\pi} \cos(t+\alpha)\, f(\xi\sin t, \xi\sin(t-\omega h))\, dt. \tag{4}$$

Будем говорить, что функция $f(x,y)$ удовлетворяет правильному условию Липшица по переменной x, если для любых положительных чисел δ и Δ найдется функция $\zeta(u) = \zeta_{\delta,\Delta}(u)$, удовлетворяющая

$$\lim_{r\to+\infty} \zeta(r) = 0, \tag{5}$$

такая что

$$|f(x_1,y) - f(x_2,y)| \le \zeta(r)\, |x_1 - x_2|, \qquad \delta\, r \le |x_1|,\ |x_2|,\ |y| \le \Delta\, r \tag{6}$$

при всех достаточно больших r. Аналогично, будем говорить, что функция $f(x,y)$ удовлетворяет правильному условию Липшица по переменной y, если для любых δ и Δ найдется функция $\zeta(u) = \zeta_{\delta,\Delta}(u)$, удовлетворяющая (5), такая что

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le \zeta(r)\, |y_1 - y_2|, \qquad \delta\, r \le |x|,\ |y_1|,\ |y_2| \le \Delta\, r \tag{7}$$

при всех r.

Будем говорить, что ограниченная функция $f(x,y)$ *правильно ведет себя на бесконечности*, если эта функция может быть представлена в виде суммы двух функций, одна из которых удовлетворяет правильному условию Липшица по переменной x, а другая — по переменной y.

Типичный пример функции $f(x,y)$, правильно ведущей себя на бесконечности, — это функция $f_1(x) + f_2(y)$ с произвольными ограниченными f_1 и f_2.

Т е о р е м а 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1. *Число* 1 *является корнем нечетной кратности K многочлена $L(pi)$.*
2. *Справедливы соотношения $L(ki) \ne 0$ при $k = 0, 2, 3, 4, \ldots$.*
3. *При каждом R выполнены неравенства*

$$\limsup_{\xi\to\infty} \inf_{|\omega-1|\le R\xi^{-1/K}} \Phi(\xi,\alpha,\omega) > 0, \qquad \liminf_{\xi\to\infty} \sup_{|\omega-1|\le R\xi^{-1/K}} \Phi(\xi,\alpha,\omega) < 0, \tag{8}$$

где α — это число (3), *а K — кратность корня i.*

4. *Функция $f(x,y)$ правильно ведет себя на бесконечности.*

Тогда уравнение (1) *имеет бесконечную последовательность x_n периодических решений, амплитуды $\|x_n\|_C$ этих решений стремятся к бесконечности, периоды этих решений стремятся к 2π.*

Доказательство теоремы приведено в Приложении.

Отдельно сформулируем следствие из теоремы 1 для уравнений без запаздывания. Пусть уравнение (1) имеет вид

$$L\left(\frac{d}{dt}\right) x = M\left(\frac{d}{dt}\right) f(x). \tag{9}$$

Положим
$$\Psi(\xi) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_0^{2\pi} \sin t\, f(\xi \sin t)\, dt = 4 \int\limits_0^{\pi/2} \sin t\, f_{odd}(\xi \sin t)\, dt.$$
Эта функция нечетная, она целиком определяется по нечетной части $f_{odd} = (f(x) - f(-x))/2$ функции $f(x)$.

Т е о р е м а 2. *Пусть выполнены следующие условия:*

1. *Число* 1 *является корнем многочленов* $L(pi)$ *и* $\Im m\,[L(pi)M(-pi)]$ *одной и той же нечетной кратности.*

2. *Справедливы соотношения* $L(ki) \neq 0$ *при* $k = 0, 2, 3, 4, \ldots$.

3. *Выполнены неравенства*
$$\limsup_{\xi\to\infty} \Psi(\xi) > 0, \qquad \liminf_{\xi\to\infty} \Psi(\xi) < 0.$$

Тогда уравнение (9) *имеет бесконечную последовательность* x_n *периодических решений, амплитуды* $\|x_n\|_C$ *этих решений стремятся к бесконечности, периоды этих решений стремятся к* 2π.

Из условия 1 теоремы 2 следует, что многочлен $\Im m\,[L(pi)M(-pi)]$ не равен нулю тождественно. В частности, необходимо, чтобы хотя бы один из многочленов $L(p)$ и $M(p)$ не был четным.

В условиях теоремы 2 предел (2) отличен от нуля, поэтому число (3) не равно 0. Так как всегда
$$\int\limits_0^{2\pi} \cos t\, f(\xi \sin t)\, dt = 0,$$
то $\Phi(\xi, \alpha, \omega) = -\sin\alpha\, \Psi(\xi)$. Поэтому условие 3 теоремы 2 влечет условие 3 теоремы 1 и теорема 2 следует из теоремы 1.

Если $\Im m\,[L(pi)M(-pi)] \equiv 0$[3], то $\alpha = 0$ и $\Phi(\xi, \alpha, \omega) \equiv 0$. Поэтому условия теоремы 2 не могут быть выполнены.

2. Замечания

2.1. Возникает естественный вопрос: как вычислять функции $\Phi(\xi, \alpha, \omega)$ и $\Psi(\xi)$, точнее, как оценивать пределы, входящие в условие 3 теорем 1 и 2?

Для многих функций $f(x)$ функция $\Psi(\xi)$ стремиться к нулю на бесконечности. Примерами таких функций являются все четные функции, функции с подлинейной первообразной (например, все периодические и почти периодические функции с нулевым средним, функции стремящиеся к нулю на бесконечности), функции $\sin x^3$ и $\sin x^{1/3}$. Примером функции $f(x)$, приводящей к осциллирующей на бесконечности функции $\Psi(\xi)$, является функция $f_0(x) = \sin(\,\mathrm{sign}\,(x) \ln(1 + |x|))$. Естественно, функции $f_0(x) +$ “четная функция”, $f_0(x) +$ “маленькая функция”, $f_0(x) + a\,\sin x + b\,\sin x^3$ и т.д. также удовлетворяют условию 3 теоремы 2.

[3] Это условие выполнено, если и только если оба многочлена $L(p)$ и $M(p)$ четные.

Для функции $\Phi(\xi, \alpha, \omega)$ содержательные примеры строить в некотором смысле легче (промежутки между нулями не обязательно растут экспоненциально, как для функции $f_0(x)$). Приведем лишь один пример: пусть $h = \pi/2$, $K = 1$ и

$$f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} \sin \sqrt[3]{x^2 + y^2};$$

легко проверить, что эта функция имеет правильное поведение на бесконечности. Функция $\Phi(\xi, \alpha, \omega)$ на бесконечности ведет себя как $\mathrm{const} \cdot \cos\alpha \sin(\xi)^{2/3}$ и удовлетворяет условиям теоремы 1. Выкладки не сложны, но громоздки.

Приведем еще одно достаточное условие справедливости неравенств (8).

Пусть функция $f(x, y)$ удовлетворяет чуть более сильному чем (7) условию Липшица

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq d\left(\min\{|y_1|, |y_2|\}\right) \, |y_1 - y_2|,$$

причем функция $d(u) : [0, \infty) \to (0, \infty)$ монотонно убывает к нулю при $u \to \infty$.

П р е д л о ж е н и е 1. *Пусть* $K = 1$. *Условие* (8) *вытекает из условия*

$$\limsup_{\xi \to \infty} \, \Phi(\xi, \alpha, 1) > 0, \qquad \liminf_{\xi \to \infty} \, \Phi(\xi, \alpha, 1) < 0.$$

Доказательство этого факта совсем просто. В силу условия Липшица

$$|\Phi(\xi, \alpha, \omega) - \Phi(\xi, \alpha, 1)| \leq \mathrm{const} \; \xi \; |\omega - 1| \int_0^{2\pi} d\left(\min\{|\xi \sin t|, |\xi \sin(t - \omega h)|\}\right) \, dt.$$

Так как $\xi|\omega - 1| \leq R$, то необходимо показать, что последний интеграл стремится к нулю при $\xi \to \infty$. Мера тех t, где обе функции $|\xi \sin t|$, $|\xi \sin(t - \omega h)|$ малы, равномерно мала, а интеграл по дополнительному множеству стремится к нулю в силу $d(u) \to 0$ при $u \to \infty$.

2.2. Легко переформулировать теорему 1 для нелинейностей, зависящих от нескольких запаздываний. Аналоги теоремы 1 могут быть сформулированы также для систем с производными и для комбинированных систем и с запаздываниями, и с производными.

Приведем одну теорему в качестве примера. Рассмотрим уравнение

$$L\left(\frac{d}{dt}\right) x = M\left(\frac{d}{dt}\right) f(x(t), x(t - h), x'(t), x'(t - h)). \tag{10}$$

Рассмотрим функцию

$$\Phi_*(\xi, \alpha, \omega) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int_0^{2\pi} \cos(t + \alpha)\, f(\xi \sin t, \xi \sin(t - \omega h), \xi\omega \cos t, \xi\omega \cos(t - \omega h))\, dt, \tag{11}$$

построенную по величине (3).

Будем говорить, что функция нескольких переменных удовлетворяет правильному условию Липшица по одной из переменных, если она удовлетворяет по этой переменной условию Липшица с константой, стремящейся к нулю на бесконечности (как в условиях

(6) и (7)). Будем говорить, что ограниченная функция $f(x,y,u,v)$ правильно ведет себя на бесконечности, если эта функция может быть представлена в виде суммы двух функций одна из которых удовлетворяет правильным условиям Липшица по переменным x, u и v, а другая — по переменным y, u и v.

Т е о р е м а 3. *Пусть выполнены следующие условия:*

1. *Степень многочлена $L(p)$ по крайней мере на 2 больше степени многочлена $M(p)$.*
2. *Корень i многочлена $L(p)$ имеет нечетную кратность K.*
3. *У многочлена $L(p)$ нет корней вида ki при $k = 0, 2, 3, 4, \dots$.*
4. *При всех R выполнены неравенства*

$$\limsup_{\xi\to\infty} \inf_{|\omega-1|\le R\xi^{-1/K}} \Phi_*(\xi,\alpha,\omega) > 0, \qquad \liminf_{\xi\to\infty} \sup_{|\omega-1|\le R\xi^{-1/K}} \Phi_*(\xi,\alpha,\omega) < 0. \tag{12}$$

5. *Функция $f(x,y,u,v)$ правильно ведет себя на бесконечности.*

Тогда уравнение (10) *имеет бесконечную последовательность x_n периодических решений, амплитуды этих решений $\|x_n\|_C$ стремятся к бесконечности, периоды этих решений стремятся к 2π.*

Доказательство этой теоремы мы не приводим, оно полностью аналогично доказательству теоремы 1.

Перепишем теорему 3 в случае простейших многочленов $L(p) = p^2+1$ и $M(p) = 1$. В этом случае $K = 1$, $\Im m[L(\omega i)M(-\omega i)] \equiv 0$, $\beta = 0$, $\alpha = 0$ и теорема 3 имеет следующий вид.

С л е д с т в и е 1. *Пусть функция $f(x,y,u,v)$ правильно ведет себя на бесконечности. Пусть справедливы неравенства* (12) *при $K = 1$, любом R и*

$$\Phi_*(\xi,\omega) \overset{def}{=} \int\limits_0^{2\pi} \cos t\, f(\xi\sin t, \xi\sin(t-\omega h), \xi\omega\cos t, \xi\omega\cos(t-\omega h))\, dt.$$

Тогда уравнение

$$x'' + x = \frac{d}{dt}\big(\, f(x(t), x(t-h), x'(t), x'(t-h))\,\big)$$

имеет бесконечную последовательность x_n периодических решений, амплитуды этих решений стремятся к бесконечности, периоды этих решений стремятся к 2π.

Заметим, что для уравнения $x'' + x = f(x)$ предлагаемыми методами не удалось получить условий существования неограниченных последовательностей периодических решений.

2.3. Все теоремы легко переформулировать для случая, когда многочлен $L(p)$ имеет пару комплексно - сопряженных корней $\pm w_0 i$, отличных от $\pm i$. В этом случае в формулировке теоремы следует изменить лишь предельное значение периода на $2\pi/w_0$ и в формуле (2) предельное значение ω вместо 1 поставить w_0. Формулы для функций $\Phi(\xi,\alpha,\omega)$, $\Psi(\xi)$ не меняются.

Если у многочлена $L(p)$ есть две пары комплексно сопряженных корней, и условия теоремы 1 выполнены для обеих этих пар (в частности, эти корни не кратны один другому), то у уравнения (1) найдутся две последовательности периодических решений с возрастающими амплитудами. Отличаться эти последовательности будут предельными значениями периодов.

П Р И Л О Ж Е Н И Е

Доказательство теоремы 1

1. Вначале сделаем в уравнении (1) замену времени. Предположим, что мы будем искать периодические решения периода $2\pi/\omega$, близкого к 2π. Задача о $2\pi/\omega$-периодических решениях уравнения (1) эквивалентна задаче о 2π-периодических решениях уравнения

$$L\left(\omega\frac{d}{dt}\right)x = M\left(\omega\frac{d}{dt}\right)f(x(t), x(t-\omega h)). \tag{П.1}$$

При этом величина ω, входящая в уравнения, априори неизвестна и должна рассматриваться в качестве дополнительной неизвестной.

Мы будем искать 2π-периодические решения уравнения (П.1) в виде

$$x(t) = \xi\sin t + z(t), \tag{П.2}$$

где $z(t)$ — это 2π-периодическая функция, состоящая из всех гармоник функции $x(t)$, кроме $\sin t$ и $\cos t$. Ниже будет доказано, что при каждом положительном ξ_0 найдутся некоторые числа $\omega \approx 1$ и $\xi > \xi_0$ и функция $z(t)$ такие, что $x(t) = \xi\sin t + z(t)$ является решением уравнения (П.1).

Подчеркнем один важный момент. Каждому циклу автономного уравнения соответствует континуум периодических решений. Мы ищем решение в виде (П.2), хотя могли бы искать его в виде $\xi\sin(t+\phi) + z(t)$. Выбор фазы $\phi = 0$ фиксирует одно решение из континуума периодических решений указанного вида.

2. Мы будем использовать следующую топологическую теорему о разрешимости системы из двух скалярных уравнений и одного уравнения в банаховом пространстве E.

Л е м м а 1. Пусть дана система из трех уравнений

$$B_1(\omega,\xi,z) = 0, \quad B_2(\omega,\xi,z) = 0, \quad z = B_3(\omega,\xi,z) \tag{П.3}$$

со скалярными неизвестными $\omega \in \Omega \subset \mathbb{R}$ и $\xi \in \mathbb{R}$ и неизвестной $z \in E$, причем операторы $B_1, B_2 : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times E \to \mathbb{R}$ непрерывны, а оператор $B_3 : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times E \to E$ вполне непрерывен по совокупности переменных. Пусть оператор B_3 преобразует область определения в ограниченное множество. Пусть найдется криволинейная трапеция $T = \{\xi \in [\xi_*, \xi^*],\ \omega \in [w_1(\xi), w_2(\xi)] \subset \Omega\}$, ограниченная на плоскости $\{\omega, \xi\}$ графиками двух непрерывных функций $w_1(\xi) < w_2(\xi)$ и параллельными отрезками $\xi = \xi_*$, $\omega \in [w_1(\xi_*), w_2(\xi_*)]$ и $\xi = \xi^*$, $\omega \in [w_1(\xi^*), w_2(\xi^*)]$ такая, что $B_1(w_1(\xi),\xi,z)\cdot B_1(w_2(\xi),\xi,z) < 0$ при всех ξ и $z \subset B_3(\Omega,\mathbb{R},E)$, а также $B_2(\omega,\xi_*,z)\cdot B_2(\omega,\xi^*,z) < 0$ при всех соответствующих ω и $z \subset B_3(\Omega,\mathbb{R},E)$. Тогда система уравнений (П.3) *имеет по крайней мере одно решение $\{\omega,\xi\} \in T$, $z \in E$.*

Для доказательства леммы можно воспользоваться теоремой о произведении вращений [2, 3]. Индекс на бесконечности поля $z - B_3(\omega,\xi,z)$ равен единице, вращение двумерного поля на границе криволинейной трапеции T равно ± 1. Поэтому вращение поля

$$\{B_1(\omega,\xi,z),\ B_2(\omega,\xi,z),\ z - B_3(\omega,\xi,z)\}$$

в пространстве $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times E$ на границе множества $T\times\{\|z\|_E=\rho\}$ (при достаточно больших ρ) по модулю равно 1. Следовательно, внутри этого множества есть по крайней мере одно решение системы (П.3).

Мы будем переписывать уравнение (П.1) в виде системы (П.3). Для этого умножим обе части уравнения на $\sin t$ и проинтегрируем по отрезку $[0,2\pi]$, получим одно скалярное равенство. Умножим обе части уравнения на $\cos t$ и проинтегрируем по этому же отрезку, получим еще одно скалярное равенство. Равенство в бесконечномерном пространстве получается следующим образом.

Через E обозначим пространство непрерывных на $[0,2\pi]$ функций $z(t)$, удовлетворяющих условию периодичности $z(0)=z(2\pi)$ и условиям "ортогональности"

$$\int_0^{2\pi}\sin t\ z(t)\ dt = \int_0^{2\pi}\cos t\ z(t)\ dt = 0.$$

Рассмотрим линейный оператор $A=A(\omega)u$, который ставит каждой функции $u(t)\in E$ единственное решение $x(t)\in E$ уравнения $L(\omega p)x(t)=M(\omega p)u(t)$. Существование такого оператора непосредственно следует из условия 2. Этот оператор определен на всем пространстве E, его можно было бы определить на более широких пространствах, этот оператор преобразует непрерывные функции в непрерывно дифференцируемые, он вполне непрерывен как оператор в E с равномерной нормой, и непрерывен как оператор из $E\subset C$ в C^1. Более того, нормы операторов $A(\omega)$ при разных $\omega\in\Omega=[1-w_0,1+w_0]$ ($w_0>0$ достаточно мало, чтобы $M(\omega i)\neq 0$ и чтобы у многочлена $L(\omega p)$ не появилось корней типа ki) все равномерно ограничены, оператор $A(\omega)z$ непрерывен по совокупности переменных $z\in E,\ \omega\in\Omega$. Продолжим оператор $A(\omega)$ на все пространство $C_0\subset C$ непрерывных периодических функций, положив $A(\omega)x=A(\omega)(I-P)x$, где P — инвариантный проектор

$$Px(t)\overset{\mathrm{def}}{=}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos(t-s)\,x(s)\,ds$$

на плоскость Π, натянутую на функции $\cos t,\ \sin t$, проектор $I-P$ проектирует пространство C_0 на E. Проектор P переводит все функции $z(t)\in E$ в нуль, плоскость Π остается на месте. Вообще-то проектор P определен на всех локально интегрируемых функциях, мы рассматриваем его на C. Проекторы P и $I-P$ коммутируют с операторами $A(\omega)$.

Таким образом, третье уравнение системы (П.3) будет иметь вид

$$z = A(\omega)f(\xi\sin t + z, \xi\sin t_{\omega h} + z(t_{\omega h})).$$

Здесь и ниже использовано обозначение $t_\sigma = t-\sigma,\ t\geq\sigma,\ t_\sigma = t-\sigma+2\pi,\ t<\sigma.$

Далее доказательство теоремы 1 сводится к проверке условий леммы 1, т. е. в выборе соответствующих отрезков изменения неизвестных ω и ξ так, чтобы в концах этих отрезков соответствующие функции принимали бы значения разных знаков.

3. Через $g(t)$ ниже обозначена некоторая липшицева функция, впоследствии будут использованы конкретные варианты $g(t) = \sin t$ и $g(t) = \cos t$.

Лемма 2. При каждом $c > 0$ справедливо равенство

(П.4)
$$\lim_{\xi\to\infty} \sup_{\|z\|_{C^1}\le c,\, \sigma\in[0,2\pi]} \left| \int_0^{2\pi} g(t)[f(\xi\sin t + z(t), \xi\sin t_\sigma + z(t_\sigma)) - f(\xi\sin t, \xi\sin t_\sigma)]dt \right| = 0.$$

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что функция $f(x, y)$ удовлетворяет правильному условию Липшица по переменной y.

Выберем $\varepsilon > 0$ и докажем, что supremum в (П.4) не превосходит ε для достаточно больших ξ:

$$\text{(П.5)} \qquad \sup_{\|z\|_{C^1}\le c,\, \sigma\in[0,2\pi]} \left| \int_0^{2\pi} g(t)\,[f(\xi\sin t + z(t), \xi\sin t_\sigma + z(t_\sigma)) - f(\xi\sin t, \xi\sin t_\sigma)]\,dt \right| \le \varepsilon.$$

Зафиксируем некоторое $\sigma \in [0, 2\pi]$. Разобьем интервал $[0, 2\pi]$ на подинтервалы. В первую группу интервалов включим δ-окрестности точек $k\pi/2$ при $k = 0, 1, 2, 3, 4$, а также все точки, образ которых при преобразовании $t \mapsto t_\sigma$ попадает в эти δ-окрестности. Эти интервалы будем обозначать I_j. Их количество зависит от соотношения между числами σ и δ, их суммарная длина не превышает 8δ. Дополнение $[0, 2\pi]\backslash\bigcup I_j$ к множеству $\bigcup I_j$ — это также система из конечного числа интервалов, их мы будем обозначать I'_j.

Интервалы I_j содержат множество $\{t \in [0, 2\pi] : \sin t\cos t\sin t_\sigma\cos t_\sigma = 0\}$, выберем достаточно малое δ так, чтобы

$$\text{(П.6)} \qquad 2\sup|f(x, y)| \int_{\bigcup I_j} |g(t)|\,dt \le 16\,\delta\,\sup|f(x, y)|\,\sup|g(t)| < \varepsilon/2.$$

Число δ считается фиксированным до конца доказательства леммы. Справедлива оценка

$$\text{(П.7)} \qquad \inf_{t\in\bigcup I'_j} \min\{|\sin t|, |\cos t|, |\sin t_\sigma|, |\cos t_\sigma|\} = \delta_0 > 0.$$

Функция $\sin t$ строго монотонна на каждом из промежутков I'_j. Для достаточно больших ξ функция $\xi\sin t + z(t)$ также строго монотонна и $|\xi\cos t + z'(t)| > 1/2\ \xi\delta_0$. Рассмотрим интегралы

$$\mathcal{J}_i = \int_{I'_i} g(t) f(\xi\sin t + z(t), \xi\sin t_\sigma + z(t_\sigma))\,dt.$$

Обозначим концы интервала I'_i через a_i и b_i. Сделаем в интеграле $\mathcal{J}_i$ замену переменных $t = t(\tau) = t(\xi, \tau)$ по формуле $\xi\sin\tau = \xi\sin t + z(t)$:

$$\mathcal{J}_i = \int_{t^{-1}(\xi, a_i)}^{t^{-1}(\xi, b_i)} g(t(\xi, \tau))\,f\left(\,\xi\sin\tau, \xi\sin t_\sigma(\xi, \tau) + z(t_\sigma(\xi, \tau))\,\right) t'_\tau(\xi, \tau)d\tau.$$

Функция $t(\xi,\tau)$ взаимно однозначна, $t(\xi,\tau)\to\tau$ и $t'_\tau(\xi,\tau)\to 1$ равномерно по τ при $\xi\to\infty$. Теперь

$$t^{-1}(\xi,a_i)\to a_i,\quad t^{-1}(\xi,b_i)\to b_i,$$

и $g(t(\xi,\tau))\to g(\tau)$ в силу липшицевости $g(\cdot)$. По определению, $|t_\sigma(\xi,\tau)-\tau_\sigma|\le\ \mathrm{const}\,\xi^{-1}$, поэтому $|\xi\sin t_\sigma(\xi,\tau)+z(t_\sigma(\xi,\tau))-\xi\sin\tau_\sigma|\le\ \mathrm{const}$. В силу условия Липшица (7)

$$\mathcal{J}_i-\int\limits_{a_i}^{b_i} g(\tau)f(\xi\sin\tau,\xi\sin\tau_\sigma)\,d\tau\to 0$$

для всех i. Последнее соотношение вместе с (П.6) доказывает (П.5).

4. В этом подразделе приводятся уравнения, которые получатся, если уравнение (1) “умножить на $\sin t$ или $\cos t$ и проинтегрировать по периоду $[0,2\pi]$”.

Лемма 3. Если функции $x(t)=\xi\sin t+z(t)$ $(z\in E)$ и $u(t)$ удовлетворяют равенству

$$L\left(\omega\frac{d}{dt}\right)x(t)=M\left(\omega\frac{d}{dt}\right)u(t), \tag{П.8}$$

то справедливы равенства

$$\pi\Re e\,\frac{L(\omega i)}{M(\omega i)}\xi=\int\limits_0^{2\pi}\sin t\ u(t)\,dt,\qquad \pi\Im m\,\frac{L(\omega i)}{M(\omega i)}\xi=\int\limits_0^{2\pi}\cos t\ u(t)\,dt. \tag{П.9}$$

Доказательство. Из равенства (П.8) вытекает равенство

$$L\left(\omega\frac{d}{dt}\right)(\xi\sin t)=M\left(\omega\frac{d}{dt}\right)Pu(t),$$

которое можно переписать в виде

$$\pi\Re e\,[L(\omega i)]\xi\sin t+\pi\Im m\,[L(\omega i)]\xi\cos t=(\Re e\,[M(\omega i)]\cos t-\Im m\,[M(\omega i)]\sin t)\int\limits_0^{2\pi}\cos s\,u(s)ds+$$
$$+(\Re e\,[M(\omega i)]\sin t+\Im m\,[M(\omega i)]\cos t)\int\limits_0^{2\pi}\sin s\,u(s)ds.$$

Отсюда

$$\pi\Re e\,[L(\omega i)]\xi=-\Im m\,[M(\omega i)]\int\limits_0^{2\pi}\cos s\ u(s)\,ds+\Re e\,[M(\omega i)]\int\limits_0^{2\pi}\sin s\,u(s)\,ds$$

и

$$\pi\Im m\,[L(\omega i)]\xi=\Re e\,[M(\omega i)]\int\limits_0^{2\pi}\cos s\ u(s)\,ds+\Im m\,[M(\omega i)]\int\limits_0^{2\pi}\sin s\,u(s)\,ds.$$

Умножим первое из этих равенств на $\Re e\,[M(\omega i)]$, второе — на $\Im m\,[M(\omega i)]$ и сложим, полученное равенство совпадает с первым равенством (П.9); умножим первое из этих равенств на $-\Im m\,[M(\omega i)]$, второе — на $\Re e\,[M(\omega i)]$ и сложим, полученное равенство совпадает со вторым равенством (П.9).

5. В этом подразделе выписывается система вида (П.3), эквивалентная задаче о 2π-периодических решениях уравнения (П.1), два первых уравнения этой системы аналогичны равенствам (П.9). Они переписываются в эквивалентом виде, в котором они уже непосредственно удовлетворяют условиям леммы 1.

Итак, рассмотрим систему

$$\text{(П.10)}\qquad \begin{cases} \pi\Re e\,\dfrac{L(\omega i)}{M(\omega i)}\xi = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin t\, f(\xi\sin t + z(t), \xi\sin t_{\omega h} + z(t_{\omega h}))\,dt, \\ \pi\Im m\,\dfrac{L(\omega i)}{M(\omega i)}\xi = \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos t\, f(\xi\sin t + z(t), \xi\sin t_{\omega h} + z(t_{\omega h}))\,dt, \\ z = A(\omega) f(\xi\sin t + z(t), \xi\sin t_{\omega h} + z(t_{\omega h})). \end{cases}$$

В силу леммы 3 и по построению оператора $A(\omega)$ каждому решению $\{\omega, \xi, z\}$ системы (П.10) с вещественными неизвестными $\xi > 0$ и $\omega > 0$ и неизвестной функцией $z(t) \in E$ соответствует $2\pi/\omega$-периодическое решение $x(t) = \xi\sin\omega t + z(\omega t)$ уравнения (1).

Итак, для завершения доказательства теоремы 1 достаточно показать, что найдутся сколь угодно большое число ξ, сколь угодно близкое к 1 число ω и функция $z \in E$, удовлетворяющие (П.10).

Вначале перепишем два первых уравнения системы (П.10) в другом виде. Это удобно делать отдельно для случаев, когда β равно 0 или ∞ и когда $\beta \neq 0$ — конечное число.

Пусть $\beta = 0$. Случай $\beta = \infty$ полностью аналогичен и мы его не будем рассматривать. Итак,

$$\lim_{\omega\to 1} \frac{\Im m\,[L(\omega i)M(-\omega i)]}{\Re e\,[L(\omega i)M(-\omega i)]} = 0.$$

Это означает, что при некотором положительном целом r справедливы формулы

$$\text{(П.11)}\qquad \Im m\,[L(\omega i)M(-\omega i)] = (\omega-1)^{K+r}Q_1(\omega), \quad \Re e\,[L(\omega i)M(-\omega i)] = (\omega-1)^K Q_2(\omega),$$

где многочлен $Q_2(\omega)$ не обращаются в нуль при $\omega = 1$, а многочлен $Q_1(\omega)$ либо также не обращается в нуль, либо равен нулю тождественно. Показатель степени K — это кратность корня i многочлена $L(p)$.

Перепишем два первых уравнения системы (П.10) в виде

$$\text{(П.12)}\qquad \begin{cases} \pi(\omega-1)^K Q_2(\omega)\xi - |M(\omega i)|^2 \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin t\;\, f(\xi\sin t + z(t), \xi\sin t_{\omega h} + z(t_{\omega h}))\,dt = 0, \\ \pi(\omega-1)^{K+r} Q_1(\omega)\xi - |M(\omega i)|^2 \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos t\;\, f(\xi\sin t + z(t), \xi\sin t_{\omega h} + z(t_{\omega h}))\,dt = 0. \end{cases}$$

Выразим величину $(\omega-1)^K\xi$ из первого уравнения (П.12) и подставим результат во второе уравнение. Запишем полученное уравнение в виде

$$
\begin{aligned}
(\text{П.13}) \qquad & (\omega-1)^r\frac{Q_1(\omega)}{Q_2(\omega)}\int\limits_0^{2\pi}\sin t\ f(\xi\sin t+z(t),\xi\sin t_{\omega h}+z(t_{\omega h}))\,dt- \\
& -\int\limits_0^{2\pi}\cos t\ f(\xi\sin t+z(t),\xi\sin t_{\omega h}+z(t_{\omega h}))\,dt=0.
\end{aligned}
$$

В качестве двух первых уравнений системы (П.3) возьмем уравнение (П.13) и первое уравнение из (П.12).

Положим

$$
w_1(\xi)=1-R\xi^{-1/K},\quad w_2(\xi)=1+R\xi^{-1/K}, \tag{П.14}
$$

где число R определяется соотношением

$$
R=4\sup_{\omega\in\Omega}\frac{|M(\omega i)|^2}{|Q_2(\omega)|}\sup_{x,y\in\mathbb{R}}\ |f(x,y)|.
$$

По построению функций $w_j(\xi)$ в силу нечетности K знак левой части первого уравнения из (П.12) при $\omega=w_j(\xi)$ равен $(-1)^j\operatorname{sign}Q_2(1)$.

Знак левой части уравнения (П.13) надо определять при

$$
z\in\bigcup_{\{\omega,\xi\}\in T,\ z\in E}A(\omega)f(\xi\sin t+z(t),\xi\sin t_{\omega h}+z(t_{\omega h})).
$$

Очевидно, что для всех таких z при некотором $c>0$ справедлива оценка $\|z\|_{C^1}\le c$. В силу леммы 2 при больших ξ и ω, близких к 1, знак левой части уравнения (П.13) определится знаком выражения $\Phi(\xi,0,\omega)$. Выберем достаточно большие $\xi_*<\xi^*$, в которых функция $\Phi(\xi,0,\omega)$ принимает значения разных знаков. Это можно сделать равномерно по ω в силу условия 3 теоремы 1. Поэтому будут выполнены все условия леммы 1 и система (П.10) имеет решения со сколь угодно большими ξ. По построению при $\xi\to\infty$ возможные $\omega(\xi)$ стремятся к 1.

Другой случай, когда конечное число $\beta\ne0$, доказывается примерно также. Снова справедливы равенства (П.11), только теперь $r=0$. Снова рассмотрим уравнение (П.13), но теперь $r=0$, число β определяется формулой $\beta=Q_1(1)/Q_2(1)$. В качестве двух первых уравнений системы (П.3) возьмем уравнение (П.13) и первое уравнение из (П.12). При больших ξ и значениях $\omega\in[w_1(\xi),w_2(\xi)]$, причем числа w_j определены равенствами (П.14), левая часть уравнения (П.13) сколь угодно близка к функции $\Phi(\xi,\alpha,\omega)$. Завершающие построения совпадают с рассуждениями предыдущего абзаца.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бесекерский В.А., Попов Е.П.* Теория систем автоматического регулирования. М.: Наука, 1972

2. *Bobylev N.A., Burman M.Yu., Korovin S.K.* Approximation procedures in nonlinear oscillation theory. Berlin, New York: W. de Gruyter, 1994.

3. *Красносельский А.М., Красносельский М.А.* Векторные поля в произведении пространств и приложения к дифференциальным уравнениям // Дифференциальные уравнения, 1997, т. 33, №1, 60–67.

4. *Vidyasagar M.* Nonlinear system analysis. Prentice Hall: Englewood Cliffs, 1993.