УРАВНЕНИЯ С ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯМИ РЕШЕНИЙ

Красносельский А.М.[1] (Москва), Мавен Ж. (Лувен)

Изучаются вырожденные асимптотически линейные уравнения. Предлагаются критерии существования неограниченных последовательностей решений таких уравнений. В случае ограниченности множества решений вычисляется индекс на бесконечности соответствующих векторных полей.

1. Рассмотрим в банаховом пространстве E вполне непрерывное векторное поле $x - T(x)$. Пусть $T(x) = Ax + F(x)$, где A – линейный оператор, а $F(x)$ – ограниченная нелинейность. Пусть 1 – простое собственное значение оператора A, $Ae = e$, $\|e\| = 1$. Тогда существует единственный проектор P на одномерное подпространство $E_1 = \{\alpha e,\ \alpha \in \mathbb{R}\}$, коммутирующий с A. Обозначим через $p(x):\ E \to E_1$ функционал, определенный равенством $Px = p(x)e$. Пусть в E вложено другое банахово пространство $\tilde{E} \subset E$ с более сильной нормой.

Рассмотрим функцию $\Psi(\xi) = p(F(\xi e))$, по ней определим 4 числа

$$\psi_\pm = \liminf_{\xi\to\pm\infty} \Psi(\xi), \quad \psi^\pm = \limsup_{\xi\to\pm\infty} \Psi(\xi).$$

ТЕОРЕМА 1. *Пусть оператор A действует и непрерывен из E в $\tilde{E}$. Пусть нелинейность $F(x)$ также действует из E в $\tilde{E}$ и ограничена в $\tilde{E}$: $\|F(x)\|_{\tilde{E}} \le r$, $x \in E$. Пусть для каждого $c > 0$*

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \sup_{\|h\|_{\tilde{E}} \le c} |p(F(\xi e + h)) - p(F(\xi e))| = 0. \tag{1}$$

Тогда если либо $\psi^+ < 0 < \psi_-$, либо $\psi^- < 0 < \psi_+$, то индекс на бесконечности поля $\Phi(x)$ определен и $|\operatorname{ind}_\infty \Phi| = 1$; если либо $\psi_- > 0$ и $\psi_+ > 0$, либо $\psi^- < 0$ и $\psi^+ < 0$, то индекс на бесконечности определен и $\operatorname{ind}_\infty \Phi = 0$; если выполнено по крайней мере одно из соотношений $\psi_- < 0 < \psi^-$ или $\psi_+ < 0 < \psi^+$, то индекс не определен: существует неограниченная последовательность решений уравнения $x = Tx$.

2. Для уравнений в абстрактных банаховых пространствах с неоднократным вырождением линейной части получить простые аналоги теоремы 1 не удалось. Такие аналоги доказаны для некоторых конкретных краевых задач. Сформулируем одну из возможных теорем.

Рассмотрим 2π-периодическую задачу для уравнения

$$x'' + n^2 x = f(x) + b(t), \tag{2}$$

где n – натуральное число, функция $b(t)$ непрерывна и 2π-периодична, функция $f(x)$ непрерывна и ограничена. Положим

$$\Psi(\xi) = 2\int_0^\pi \sin t f(\xi \sin t)\,dt, \quad \psi_+ = \liminf_{\xi\to+\infty} \Psi(\xi),\ \psi^+ = \limsup_{\xi\to+\infty} \Psi(\xi), \quad \bar{b} = \int_0^{2\pi} e^{nti} b(t)\,dt.$$

ТЕОРЕМА 2. *Если выполнено одно из соотношений $\psi^+ > |\bar{b}| > \psi_+ \ge 0$, $-\psi_+ > |\bar{b}| > -\psi^+ \ge 0$, $\psi^+ > |\bar{b}| > 0 \ge \psi_+$, $-\psi_+ > |\bar{b}| > 0 \ge -\psi^+$, то существует неограниченная последовательность 2π-периодических решений уравнения (2). Если $\psi_+ > |\bar{b}|$ или $-\psi^+ > |\bar{b}|$, то существует по крайней мере одно такое решение.*

[1]А.М.Красносельский частично поддержан грантами 97-01-00692 и 96-15-96048 РФФИ