УДК 517.977

П.-А. Блиман, д-р наук
(Исследовательский институт по информатике и автоматике,
Роконкур, Франция)

А.М. Красносельский, д-р физ.-мат. наук
(Институт проблем передачи информации РАН, Москва)

КРИТЕРИЙ ПО́ПОВА В ЗАДАЧЕ О ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ В СИСТЕМХ УПРАВЛЕНИЯ [1]

Изучаются условия существования вынужденных периодических колебаний в системах управления. Эти условия используют частотные свойства линейных звеньев и секторные оценки нелинейностей; основные неравенства близки к критерию В.М. По́пова для стационарных систем в теории абсолютной устойчивости. Эти условия применимы для систем с меняющимися во времени нелинейностями из некоторого общего класса, который включает в себя стационарные нелинейности как важный частый случай. Отдельно изучаются системы с нелинейностями гистерезисного типа.

[1]Эта работа была выполнена во время визита А.М.Красносельского во Францию и частично поддержана грантами NN 97-01-00692 и 96-15-96048 Российского Фонда Фундаментальных Исследований

1. Введение. Постановка задачи

Рассмотрим систему, динамика которой описывается уравнением

$$L\left(\frac{d}{dt}\right)x = M\left(\frac{d}{dt}\right)\left(\, f(t,x)\,\right) \tag{1}$$

с T-периодической по t нелинейностью $f(t,x):\ f(t+T,x)\equiv f(t,x)$ и вещественными взаимно простыми многочленами

$$L(p) = p^l + a_1p^{l-1} + \ldots + a_l, \quad M(p) = b_0p^m + b_1p^{m-1} + \ldots + b_m,$$

причем $l = \deg\ L(p) > m = \deg\ M(p)$.

Периодические решения таких уравнений могут быть определены как первые компоненты эквивалентных l-мерных систем первого порядка или как решения эквивалентных интегральных уравнений. Мы упоминаем это ввиду возможной недостаточной дифференцируемости функции $f(t,x)$.

Пусть нелинейность $f(t,x)$ удовлетворяет секторной оценке

$$-c + \mu_1|x| \le f(x)\ \mathrm{sign}\ x \le \mu_2|x| + c. \tag{2}$$

В (2) мы полагаем $\mu_1 = -\infty$ для односторонних оценок $f(t,x)\ \mathrm{sign}\ x \le \mu_2|x| + c$ и $\mu_2 = +\infty$ для односторонних оценок $f(t,x)\ \mathrm{sign}\ x \ge \mu_1|x| - c$. Мы будем писать $f(t,x) \in M(\mu_1,\mu_2)$, $-\infty \le \mu_1 < \mu_2 \le +\infty$, если одна из этих оценок верна при всех $t,x \in I\!R$ и некотором фиксированном $c \ge 0$. Через $M(-\infty,+\infty)$ обозначается класс всех непрерывных нелинейностей $f(t,x)$.

Предположим, что справедливы следующие условия.

1) Функция $f(t,x)$ периодична по t с периодом T, непрерывна по совокупности переменных и непрерывно дифференцируема по t для всех x;

2) Первообразная по x функции $f'_t(t,x)$ на бесконечности *субквадратична*:

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{\int\limits_0^x f'_t(t,u)\,du}{x^2} = 0. \tag{3}$$

Если выполнены оба эти условия и $f(t,x) \in M(\mu_1,\mu_2)$, мы будем писать $f(t,x) \in M^*(\mu_1,\mu_2)$. В силу (3) для периодических функций $x(t)$

$$\lim_{\int\limits_0^T x^2(t)\,dt\to\infty} \frac{\int\limits_0^T x'(t)\,f(t,x(t))\,dt}{\int\limits_0^T x^2(t)\,dt} = 0. \tag{4}$$

Приведем несколько примеров.

Если $f(x) \in M(\mu_1, \mu_2)$ и $b(t) \in C^1$, то $f(x) + b(t) \in M^*(\mu_1, \mu_2)$. Если $f(x) \in M(\mu_1, \mu_2)$ и $|g'_t(t,x)|, |g(t,x)| \le \mathrm{const}(|x|^\alpha + 1)$ $(0 \le \alpha < 1)$, то $f(x) + g(t,x) \in M^*(\mu_1 + \varepsilon, \mu_2 - \varepsilon)$ для произвольного $\varepsilon > 0$.

Положим $f(t,x) = x\sin(t+x) + b(t)$, где $b(t) \in C^1$, и $b(t+2\pi) \equiv b(t)$. Прямые вычисления показывают, что $f(t,x) \in M^*(-1,1)$. Более того, если $f(t,x) = x \cdot g(t,x)$, причем g достаточно гладкая и $g'_t(t,x)$ имеет сублинейную первообразную, т.е.

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{1}{x}\int\limits_0^x g'_t(t,u)\,du = 0,$$

то из $|g(t,x)| \le k$ следует $f(t,x) \in M^*(-k,k)$. А $g'_t(t,x)$ имеет сублинейную первообразную, если, например, она почти периодична по x (или периодична по x с любым периодом) и имеет нулевое среднее. Приведем еще родственные примеры $x\sin(x\sin t) \in M(-1,1)$ и $x\sin(x\sin t) \notin M^*(-1,1)$; $x\sin(x + \dfrac{\sin t}{1+x^2}) \in M^*(-1,1)$.

Приведем еще примеры с сильными нелинейностями: $x^3[2+\sin(x^4+t)] \in M^*(\mu,\infty)$ для всех μ; $x + x^3[1+\sin(x^4+t)] \in M^*(1,\infty)$. Вместо показателя степени 4 в этих примерах можно положить $2+\varepsilon$ с любым положительным ε. Функция $|x|^{3-\varepsilon}\sin(x + \dfrac{\sin t}{1+x^2})$ принадлежит классу $M^*(-\infty,+\infty)$.

Классы нелинейностей $M^*(\mu_1,\mu_2)$ обобщают классы $M^{st}(\mu_1,\mu_2)$ стационарных нелинейностей $f(x)$, удовлетворяющих (2) с $c = 0$, рассматриваемые (см., например, [1]) в контексте критерия Пóпова в задачах устойчивости.

Основные результаты ниже формулируются в терминах, очень близких к частотному условию Пóпова. Это условие в теории абсолютной устойчивости (для абсолютной устойчивости или неустойчивости или для диссипативности) обычно формулируется в следующем виде. Пусть $f(x) \in M^{st}(\mu_1,\mu_2)$ и пусть для некоторого $\theta \in I\!\!R$ условие

$$\Re\,\Big(\,(1-\mu_1 W(wi))(1-\mu_2 W(-wi)) + \theta wi W(wi)\,\Big) > 0 \tag{5}$$

выполняется для $w \in [-\infty,+\infty]$. Тогда устойчивость или неустойчивость линейной системы $L(p)x = M(p)\mu x$ для некоторого $\mu \in (\mu_1,\mu_2)$ определяет абсолютную устойчивость или неустойчивость в классе $M^{st}(\mu_1,\mu_2)$. Здесь (5) имеет естественный смысл для бесконечных μ_1,μ_2 или w.

Основное условие формулируемых ниже результатов имеет близкую форму: пусть $f(t,x) \in M^*(\mu_1,\mu_2)$ и пусть условие (5) выполнено для $w = 2\pi n/T$ и $n \in I\!\!N^+ = \{0,1,2,\ldots\}$, тогда система (1) имеет по крайней мере одно T-периодическое решение.

Абсолютная устойчивость в классе $M(\mu_1,\mu_2)$ (при $c = 0$) определяется круговым критерием устойчивости. Справедливы аналогичные результаты для существования вынужденных периодических колебаний: если $f(t,x) \in M(\mu_1,\mu_2)$

для некоторого c, то частотные условия, близкие к круговому критерию ([2]), обеспечивают существование вынужденных колебаний.

Отдельно отметим результаты Гарбера по оценке минимального возможного периода автоколебаний. Если выполнено условие (5) для $w = 0$ и для $w \geq w_0$, то уравнение $L(p)x = M(p)f(x)$ не имеет периодических решений периода $T < 2\pi/w_0$ [3]. Результаты Гарбера продолжают теорию Левинсона (см. [4]), но без всяких условий Липшица на нелинейность.

Существует прямая связь между (5) и методом направляющих функций (см. [5, 6] и приведенную там библиографию). Логика этой связи такова: условие (5) гарантирует существование функции Ляпунова в форме Лурье:

$$V(x) = (Hx, x) + \theta \int_0^x f(t, u)du,$$

эта функция может быть использована в качестве направляющей по крайней мере в диссипативном случае. Для недиссипативного случая возможно построение правильного набора направляющих функций. Подход, предлагаемый в настоящей работе, направляющих функций не использует.

Возможны и иные подходы к доказательству предлагаемых результатов. Например, возможен переход к эквивалентным системам [2], для которых круговой критерий совпадает с (5). Однако, вычисления громоздки, а окончательные результаты содержат дополнительные технические ограничения.

Вместе с многочленами $L(p)$ и $M(p)$ рассмотрим передаточную функцию $W(p) = M(p)/L(p)$ и вещественные многочлены

$$\begin{aligned} I(p) = I(p; L, M) &\stackrel{\text{def}}{=} \Re\,[piM(pi)L(-pi)], \\ \Pi(p) = \Pi(p; L, M) &\stackrel{\text{def}}{=} \Re\,[M(pi)L(-pi)] = \Re\,[M(-pi)L(pi)]. \end{aligned} \tag{6}$$

Эти многочлены содержат только четные степени аргумента, степень $\deg I$ может быть нулевой, только если $I(p) \equiv 0$, и она принимает значения между 2 и $l + m + 1$ в противном случае. Например, если $l = m + 1$, то $\deg I = 2l$. В терминах этих многочленов формулируются все результаты работы.

Многочлен $I(p)$ тождественно равен нулю, если и только если оба многочлена $L(p)$ и $M(p)$ содержат только четные степени аргумента p. Это может быть доказано по индукции.

Ниже мы предполагаем, что, по крайней мере, $I(p) \not\equiv 0$. Это означает, что линейный нормальный в L^2 оператор $M(d/dt)L^{-1}(d/dt)$ с T-периодическими краевыми условиями не может быть самосопряжен.

Формально приводимые теоремы верны и при $I(p) \equiv 0$, но в этом случае результаты близки к круговому критерию, доказательства существенно проще,

[2] Идея такого перехода приведена, например, в [7], с. 355, при исследовании устойчивости

вместо нелинейностей из классов $M^*(\mu_1, \mu_2)$ можно рассмотреть более широкие классы $M(\mu_1, \mu_2)$.

2. Частотные критерии

2.1. Основные теоремы. Предположим вначале, что по крайней мере одна из величин μ_1 или μ_2 конечна. Без ограничения общности можно считать, что $\mu_1 = 0$ и $\mu_2 = k > 0$. В этом случае условие $f(t,x) \in M(0,k)$ имеет вид

$$-c \le f(t,x)\,\mathrm{sign}\,x \le k|x| + c \tag{7}$$

для конечных k и

$$-c \le f(t,x)\,\mathrm{sign}\,x \tag{8}$$

для $k = \infty$. Частотное условие По́пова приобретает вид

$$k^{-1} - \Re\left[(1+\theta wni)W(wni)\right] > 0, \qquad n \in I\!N^+,$$

где $w = 2\pi/T$ — основная частота и $k^{-1} = 0$ для $k = \infty$. Оно может быть переписано в эквивалентной полиномиальной форме:

$$\pi(n,k,\theta) \stackrel{\mathrm{def}}{=} k^{-1}|L(wni)|^2 - \Pi(wn) - \theta I(wn) > 0. \tag{9}$$

Теорема 1. *Пусть $f(t,x) \in M^*(0,k)$ и пусть для некоторого вещественного θ условие (9) выполнено для любого $n \in I\!N^+$ такого, что $M(wni) \neq 0$. Тогда уравнение (1) имеет по крайней мере одно T-периодическое решение.*

Условие (9) гарантирует, что $L(wni) \neq 0$ для $n \in I\!N^+$. Если $k < \infty$ и $M(wni) = 0$ для некоторого n, то условие (9) для этого n выполняется автоматически.

Условия типа (5) или (9) очень удобны для построения функций Ляпунова и направляющих функций: число θ явно участвует в окончательных формулировках. Но если известны коэффициент k, период и передаточная функция и необходимо проверить выполнимость условия (9), то надо отыскать подходящее θ, если это возможно. В следующих двух разделах излагаются подходы к поиску такого θ.

Для случая $k < \infty$ и $\theta = 0$ частотное условие (9) имеет вид

$$k \sup_{n \in I\!N^+,\, M(wni) \neq 0} \Re\, W^{-1}(wni) < 1. \tag{10}$$

Оно обеспечивает существование вынужденных периодических колебаний (заключение теоремы 1) для $f(t,x) \in M(0,k)$ (а не только для $f(t,x) \in M^*(0,k)$) [2].

Теперь перейдем к случаю $\mu_1 = -\infty$ и $\mu_2 = +\infty$. Этот случай изучается только при $M(0) = 0$, взаимная простота многочленов L и M влечет $L(0) \neq 0$. Здесь частотное условие имеет вид

$$\theta I(wn) > 0, \qquad M(wni) \neq 0, \tag{11}$$

модуль величины θ не играет роли.

Теорема 2. *Пусть* $M(0) = 0$ *и либо* $\deg I(p) > 2m$, *либо* $\deg I(p) = 2m$ *и*

$$|f(t,x)| \leq c_0\,(1 + x^2). \tag{12}$$

Пусть $f(t,x) \in M^*(-\infty, +\infty)$ *и пусть* (11) *выполнено при* $n \in I\!N^+$. *Тогда уравнение* (1) *имеет по крайней мере одно* T*-периодическое решение.*

Эта теорема применима для изучения систем с тахометрической обратной связью ([3], с. 94).

Подчеркнем, что при использовании условия (11) мы не использовали никаких секторных оценок нелинейности $f(t,x)$, использовались лишь гладкость и субквадратичность на бесконечности первообразной по x от $f'_t(t,x)$ (см. начало настоящей работы).

Если $\deg I(p) < 2m$ мы не формулируем никаких результатов для систем с нелинейностями из классов $M^*(-\infty, +\infty)$.

2.2. Графический подход. В этом и следующем подразделах предлагаются подходы к проверке условия (9). Исследуется вопрос о выборе такого θ, чтобы частотное условие было выполнено при максимальном возможном k.

Рассмотрим на плоскости $\{x, y\}$ точки

$$Z_n = \{x_n, y_n\}, \quad x_n = \Re\,[W(wni)],\ y_n = -wn\Im\,[W(wni)], \qquad M(wni) \neq 0,$$

$n \in I\!N^+$. Множество $Z = \{Z_n\}$ лежит на кривой

$$\Gamma = \{\Re\,[W(wi)],\ -w\Im\,[W(wi)]\}, \qquad w \in I\!R^+.$$

Эта кривая начинается на оси $y = 0$ и оканчивается на оси $x = 0$, обычно в начале координат, но если $m + 1 = l$, то она может оканчиваться и в некоторой ненулевой точке.

Рассмотрим прямую линию, которая разбивает плоскость так, чтобы множество $\{Z_n\}$ целиком лежало в одной полуплоскости с началом координат. Пусть эта прямая линия пересекает полупрямую $y = 0,\ x > 0$. Абсцисса точки пересечения совпадает с возможным k^{-1}, наклон этой прямой совпадает с θ. Каждая такая прямая дает возможные значения допустимых величин k^{-1} и θ. Для нахождения наилучшего значения k надо проделать следующие построения. Выберем прямую, проходящую через 2 точки множества Z так, чтобы остальные точки этого множества и начало координат попали бы в одну полуплоскость, и пересекающую полупрямую $y = 0,\ x > 0$ как можно ближе к началу координат. Выберем наилучшую такую прямую, т.е. прямую с минимальной абсциссой k_*^{-1} точки пересечения. Если $k < k_*$, то существуют вынужденные периодические колебания.

Графический подход к проверке частотных критериев обычен в теории абсолютной устойчивости.

2.3. Явные формулы. Предположим, что $g_1(n)$ и $g_2(n)$ — это два многочлена на $I\!N^+$, причем $g_2(0)=0$. Введем обозначения

$$N_0=\{n: g_1(n)\le 0\},\ N_{+1}=\{n: g_2(n)\ge 0\},\ N_{-1}=\{n: -g_2(n)\le 0\}.$$

Лемма 1. *Неравенство*

$$g_1(n)+\theta g_2(n)>0, \qquad n\in I\!N^+ \tag{13}$$

выполнено при некотором θ, если и только если либо

$$N_0=\emptyset, \tag{14}$$

либо верны следующие соотношения:

$$N_0\ne\emptyset,\quad \operatorname{sign} g_2(n)=\mathrm{const}=\tau,\ n\in N_0,\quad N_0\bigcap N_\tau=\emptyset, \tag{15}$$

$$s_0\overset{def}{=}\sup_{n\in N_0}\left|\frac{g_1(n)}{g_2(n)}\right|,\ s_\tau\overset{def}{=}\sup_{n\in N_\tau}\left|\frac{g_2(n)}{g_1(n)}\right|<\infty, \tag{16}$$

$$s_0 s_\tau<1. \tag{17}$$

Эта лемма неявно содержит метод вычисления оптимального значения коэффициента k. Пусть $g_1(n,k)=k^{-1}|L(wni)|^2-\Pi(wn)$ и $g_2(n)=-I(wn)$. Если k возрастает, то и $s_0(k)$ и $s_1(k)$ также возрастают. Поэтому для некоторого $k=k_*$ выполнено равенство $s_0(k_*)s_1(k_*)=1$, а это и есть требуемое критическое значение коэффициента k: если $k<k_*$, то в системе существуют вынужденные периодические колебания. Для нахождения k_* снова можно использовать графический подход: нарисовать график $\{x=k, y=s_0(k)s_1(k)\}$, ординате $y=1$ соответствует абсцисса k_*.

2.4. Возможные улучшения. В этом подразделе предложена теорема о существовании вынужденных периодических колебаний для случая, когда частотное условие (9) ни при каком θ не выполняется при заданном k. Оказывается, при выполнении дополнительных условий в этом случае также можно установить существование вынужденных колебаний.

Пусть k_* — это максимальное значение допустимого параметра k в теореме 1 и $k_*=W^{-1}(wni)$. Тогда линейные контрпримеры показывают, что параметр k должен быть строго меньше k_*. Но если критические значения $W^{-1}(wni)$ (они определяют критическую прямую в графическом подходе) имеют ненулевую мнимую часть, то заключение теоремы 1 может быть справедливо и при $k\ge k_*$.

Пусть $\pi(n_0,k,\theta)<0$ и $\pi(n,k,\theta)>0$ для $n\ne n_0$. Рассмотрим числа

$$\tau_1=\frac{|\pi(n_0,k,\theta)|}{|M(wn_0i)|^2},\qquad \tau_2=\inf_{n\ne n_0}\frac{|\pi(n,k,\theta)|}{|M(wni)|^2},$$

пусть $\tau_2 > 0$.

Теорема 3. *Пусть $f(t,x) \in M^*(0,k)$ удовлетворяет условию Липшица*

$$|f(t,x) - f(t,y) + a(x-y)| \leq L|x-y| \tag{18}$$

при некотором $a \in I\!R$. Пусть для некоторого θ

$$\pi(n_0,k,\theta) < 0, \qquad \pi(n,k,\theta) > 0, \;\; n \neq n_0$$

и

$$(\Im W^{-1}(wn_0 i))^2 \tau_2 > \tau_1 L^2. \tag{19}$$

Тогда уравнение (1) *имеет по крайней мере одно T-периодическое решение.*

Ситуация, когда $\pi(n_0,k,\theta) < 0$ и $\pi(n,k,\theta) > 0$ для $n \neq n_0$ может возникать для различных значений θ и n_0. Естественно выбирать оптимальное значение θ так, чтобы отношение τ_1/τ_2 было минимальным. Это оптимальное (или почти оптимальное) θ также может быть найдено с помощью графического подхода. Иногда удается выбирать θ "произвольно большим", это означает, что $\pi(n,k,\theta) = \pm I(wn)$. В ситуациях общего положения величины τ_1 и τ_2 зависят от k, если $\theta = \pm\infty$, то это не так.

Приведем пример. Положим $L(p) = p^3 + 23p^2 + 8p + 27$ и $M(p) = p$. Если $f(t,x) \in M(0,k)$, то круговой критерий устанавливает существование вынужденных периодических колебаний при $k < k_c = 65/7 \approx 9,286$. Если $f(t,x) \in M^*(0,k)$, то теорема 1 устанавливает существование вынужденных периодических колебаний при $k < k_p = 130/7 \approx 18,571$. Наконец, если $f(t,x) \in M^*(0,k)$ и $|f(t,x) - f(t,y) - (k/2)(x-y)| \leq (k/2)|x-y|$, то теорема 3 устанавливает существование вынужденных периодических колебаний при $k < k_* = 2\sqrt{260} \approx 32,249$.

3. Системы с гистерезисом

Выше рассмотрены детерминированные нелинейности $f(t,x)$. Здесь изучаются классы более сложных нелинейностей, эти классы охватывают разнообразные гистерезисные нелинейности.

Рассмотрим систему, динамика которой описывается уравнениями

$$\begin{cases} L\left(\frac{d}{dt}\right)x = M\left(\frac{d}{dt}\right)\big(\, F(\sigma_0, x) + b(t)\,\big), \\ \\ \sigma(t) = \Theta(\sigma_0, x(t)). \end{cases} \tag{20}$$

Здесь σ — это состояние нелинейности, первое уравнение — это обычное уравнение замкнутости системы, второе уравнение описывает динамику состояния σ нелинейного звена. Вход $b(t)$ предполагается T-периодичным и непрерывно дифференцируемым.

Предположим, что нелинейность F *статическая* (т.е. ее свойства не зависят от масштаба времени) и что начальное состояние $\sigma_0 = \sigma(0)$ и вход $x(t)$ на нелинейное звено полностью определяют состояние нелинейности $\sigma(t)$ для $t > 0$. Описанная ситуация обычна для разнообразных гистерезисных нелинейностей (см., например, [8]).

Решением периода T системы (20) является пара T-периодических функций $x(t)$ и $\sigma(t)$ или, что то же, T-периодическая функция $x(t)$ и начальное состояние σ_0 такое, что $\sigma(T) = \sigma_0$.

Мы рассматриваем нашу систему в пространстве $W^{1,1}$ абсолютно непрерывных функций $x(t): \ [0,T] \to I\!R$, имеющих интегрируемую производную. Выбор пространства определяется общими свойствами гистерезисных нелинейностей $F(\sigma_0, x)$, многие гистерезисные нелинейности не обладают свойством непрерывности в C^0, однако действуют из $W^{1,1}$ в C^0.

Мы будем писать $F(\sigma_0, x) \in M_+^*(0,k)$, если для любых периодических $x(t) \in C^1$ и $\sigma(t)$ таких, что $\sigma_0 = \sigma(T)$, выполнена секторная оценка

$$\int\limits_0^T x' F(\sigma_0, x)\, dt \geq 0, \tag{21}$$

и если для каждого входа x и состояния σ

$$-c \leq F(\sigma, x)\,\mathrm{sign}\, x \leq k|x| + c.$$

Система (20) описывает поведение одноконтурной системы, включающей гистерезисную нелинейность и линейное звено с дробно-рациональной передаточной функцией. Для разных классов гистерезиса пространство состояний может быть различным, чаще всего $E_1 = I\!R^N$.

Теорема 4. *Предположим, что множество S всех возможных состояний σ нелинейности является выпуклым компактным подмножеством некоторого банахова пространства E_1. Допустим, что операторы $\Theta(\sigma_0, x(t)) : S \times W^{1,1} \to S$ и $F(\sigma_0, x) : S \times W^{1,1} \to C^0$ непрерывны по совокупности переменных $S \times W^{1,1}$. Пусть $F(\sigma, x) \in M_+^*(0, k)$. Пусть для некоторого $\theta > 0$ условие (9) выполнено для всех $n \in I\!N^+$ таких, что $M(wni) \neq 0$. Тогда система (20) имеет по крайней мере одно T-периодическое решение.*

Основное отличие условий этой теоремы от условий теоремы 1 заключается в положительности числа θ. Это — следствие различия между соотношениями (21) и (4). Случай $\theta = 0$ вновь совпадает с круговым критерием.

Условие (21) отражает ориентацию петель гистерезиса “против часовой стрелки”. Если ориентация этих петель “по часовой стрелке”, то надо предполагать выполнимость (9) с $\theta < 0$.

Критерий По́пова с $\theta > 0$ для задач устойчивости в системах регулирования с гистерезисом изучался в работах В.А.Якубовича (библиографию см., например, в [9]).

П Р И Л О Ж Е Н И Е

1. О п е р а т о р н о е у р а в н е н и е. Обозначим через P_0 ортогональный в $L^2 = L^2(0,T)$ проектор на 1-мерное подпространство Π_0 функций – констант, через P_n — ортогональный в L^2 проектор на 2-мерное подпространство $\Pi_n = \{\alpha \sin nwt + \beta \cos nwt\}$. Рассмотрим оператор

$$Au(t) = \sum_{n=0}^{\infty} |W(wni)| \cdot U_n \, P_n u,$$

где $U_n : \Pi_n \to \Pi_n$ — это изометрический оператор, для $n > 0$ — это поворот, определенный равенством

$$U_n(\xi e_n + \eta g_n) =$$
$$\frac{1}{|W(wni)|} \left(\, (\Im W(wni)\eta + \Re W(wni)\xi) e_n + (-\Im W(wni)\xi + \Re W(wni)\eta) g_n \, \right),$$

где

$$e_0 = \sqrt{1/T}, \quad e_n(t) = \sqrt{2/T} \cos wnt, \;\; g_n(t) = \sqrt{2/T} \sin wnt, \quad n = 1, 2, \dots,$$

а для $n = 0$ — это оператор $U_0 e_0 = [\,\mathrm{sign}\; W(0)\,] e_0$. Оператор A определен, если и только если $L(wni) \neq 0$, в силу предположения $l > m$ оператор A действует в L^2, вполне непрерывен и является интегральным оператором

$$Au(t) = \int_0^T G(t-s) u(s) \, ds.$$

Здесь $G(\cdot)$ — это импульсная характеристика линейного звена с передаточной функцией $W(p)$. Оператор A действует из L^1 в C^0 н непрерывен, он вполне непрерывен как оператор из L^2 в C^0 и из C^0 в $W^{1,1}$ [3]. Все функции из AL^2 абсолютно непрерывны, $AL^2 \subset W^{1,2}$.

Оператор A коммутирует с каждым P_n и с оператором дифференцирования: $(AP_n u)' = A(P_n u)'$. Напомним тождества[4] $(AP_n u, P_n u) = \Re W(wni)\,\|P_n u\|^2$, $((AP_n u)', P_n u) = \Re[wniW(wni)]\,\|P_n u\|^2$ и $\|AP_n u\| = |W(wni)|\,\|P_n u\|$. Основное свойство оператора A следующее: функция $x = Au$ есть единственное T-периодическое решение линейного уравнения $L(p)x(t) = M(p)u(t)$. Это означает, что периодическая задача для (1) эквивалентна уравнению типа Гаммерштейна $x = Af(t,x)$.

2. Принцип Лере – Шаудера. Пусть в банаховом пространстве E действует вполне непрерывный оператор B.

Утверждение 1. *Пусть найдется $r > 0$ такое, что каждое решение $x \in E$ каждого уравнения $x = \xi Bx$ $(0 \le \xi \le 1)$ удовлетворяет оценке $\|x\|_E \le r$. Тогда существует по крайней мере одно решение уравнения $x = Bx$.*

Это утверждение может быть найдено в многочисленных монографиях по применению топологических методов в нелинейном анализе (например, [5, 6]). Оно является следствием теории степени, это утверждение может быть выведено и из принципа Шаудера. Для доказательства теоремы 4 мы будем использовать несущественное обобщение этого утверждения.

Предположим, что дано еще одно банахово пространство E_1, и пусть $S \subset E_1$ — выпуклый компакт. Рассмотрим непрерывный по совокупности переменных оператор $\Theta :\ S \times E \to S$ и вполне непрерывный по совокупности переменных оператор $B :\ S \times E \to E$.

Утверждение 2. *Пусть найдется $r > 0$ такое, что каждое решение $x \in E$ системы $x = \xi B(\sigma, x),\ \sigma = \Theta(\sigma, x)$ с $\sigma \in S$ и $0 \le \xi \le 1$ удовлетворяет оценке $\|x\|_E \le r$. Тогда существует по крайней мере одно решение σ^*, x^* системы $x = B(\sigma, x),\ \sigma = \Theta(\sigma, x)$.*

Это утверждение следует непосредственно из теории степени: степени обоих операторов $x - B(\sigma, x)$ и $\sigma - \Theta(\sigma, x)$ равны 1, степень векторного оператора $\{x - B(\sigma, x), \sigma - \Theta(\sigma, x)\}$ также равна 1. Последний факт следует из теорем о произведении степени ([5, 6]).

3. **Лемма 2.** *Если $\pi(n,k,\theta) > 0$ для $n \in I\!N^+$, то существуют такие $\varepsilon > 0$ и θ_1, что $\pi(n,k,\theta_1) > \varepsilon(n^2+1)|M(wni)|^2$ при $n \in I\!N^+$.*

Из последующего доказательства следует, что θ_1 всегда может быть выбрано

[3]Минимальные улучшающие свойства оператор A имеет, если $l = m + 1$. Вообще, A непрерывно действует из L^1 в C^{l-m-1}, из C^0 в C^{l-m} и т.д.

[4]$(\cdot,\cdot)$ обозначает скалярное произведение в L^2, а $\|\cdot\|$ — соответствующую норму, нормы в других пространствах обозначены особо

так, чтобы $\operatorname{sign}\theta\cdot\theta_1\neq -1$.

Доказательство. Если $\deg\,\pi(n,k,\theta)\geq 2m+2$, то заключение леммы справедливо при $\theta_1=\theta$ и достаточно малом $\varepsilon>0$, более того $\pi(n,k,\theta)\geq \varepsilon(n^{\deg\pi-2m}+1)|M(wni)|^2$. Пусть $\deg\,\pi(n,k,\theta)\leq 2m$. Такое возможно, либо если $\theta\neq 0$, $\deg\,\theta I(wn)=\deg\,[k^{-1}|L(wni)|^2-\Pi(wn)]\geq 2m+2$, либо если $k=\infty$, $\theta=0$, $\deg\Pi(wn)\leq 2m$.

Пусть $\theta\neq 0$. Положим $\theta_1=\theta-\varepsilon_1\operatorname{sign}\,(\theta I(\infty))$, где $\varepsilon_1>0$. Теперь $\pi(n,k,\theta_1)=\pi(n,k,\theta)+\varepsilon_1\theta^2 I(wn)\operatorname{sign}I(\infty)$ и для достаточно малого ε_1 верны неравенства $\pi(n,k,\theta_1)>0$ и $\deg\pi(n,k,\theta_1)\geq 2m+2$.

Пусть $k=\infty$, $\theta=0$, $\deg\Pi(wn)\leq 2m$. Для этого случая $\deg I(wn)\geq 2m+2$, положим $\theta_1=-\varepsilon_1\operatorname{sign}\,(I(\infty))$, где снова $\varepsilon_1>0$. Теперь $\pi(n,k,\theta_1)=\pi(n,\infty,0)+\varepsilon_1(\operatorname{sign}\,I(\infty))I(wn)$. Для малых ε_1 опять $\pi(n,k,\theta_1)>0$ и $\deg\,\pi(n,k,\theta_1)\geq 2m+2$.

4. Доказательство теоремы 1. Условие (9) гарантирует, что $L(wni)\neq 0$ для целых n. Поэтому определен оператор A. В силу непрерывности функции $f(t,x)$ оператор $x(t)\mapsto f(t,x(t))$ действует в C^0 и непрерывен. Следовательно, оператор $Bx(t)=Af(t,x(t))$ действует в C^0 и вполне непрерывен. В силу принципа Лере–Шаудера для доказательства теоремы достаточно доказать соответствующую априорную оценку.

Подчеркнем, что операторы рассматриваются в C^0, но основная часть вычислений проводится в L^2. Мы рассматриваем уравнение в C^0, а не в L^2 из-за возможного быстрого роста функции $f(t,x)$ на бесконечности, если $k=\infty$. В этом случае оператор $x(t)\mapsto f(t,x(t))$ не действует в L^2, но действует в C^0.

Пусть функция $x(t)\in C^0$ является решением уравнения $x=\xi Af(t,x(t))$ и $\xi\in[0,1]$. Функция $f(t,x(t))$ также непрерывна, поэтому $x(t)\in C^1$.

Следуя лемме 2, выберем величины θ_1 и $\varepsilon>0$.

В силу (3) существует $c(\varepsilon)$ такое, что

$$\left|\theta_1\int\limits_0^x f_t'(t,u)\,du\right|\leq\frac{\varepsilon}{3T}x^2+c(\varepsilon).$$

В силу (2) найдется такое $d(\varepsilon)$, что

$$\xi f(t,x)[\xi k^{-1}f(t,x)-x]\leq\frac{\varepsilon}{3T}x^2+d(\varepsilon).$$

Положим

$$V(x)=(\xi f(t,x),\xi k^{-1}f(t,x)-x)-\xi\theta_1(x',f(t,x)).$$

Так как

$$(x',f(t,x))=\int\limits_0^T x'f(t,x)\,dt=\int\limits_0^T\frac{d}{dt}\left(\int\limits_0^x f(t,u)\,du\right)dt-\int\limits_0^T\int\limits_0^x f_t'(t,u)\,du\,dt$$

и для любой периодической функции $x(t)$

$$\int_0^T \frac{d}{dt}\left(\int_0^{x(t)} f(t,u)\,du\right)dt = 0,$$

то величина $V(x)$ допускает оценку сверху

$$|V(x)| \le \frac{2}{3}\varepsilon\|x\|^2 + T(c(\varepsilon)+d(\varepsilon)). \tag{П.1}$$

Теперь преобразуем величину $V(x)$. Так как

$$V(x) = \xi^2 k^{-1}\|f(t,x)\|^2 - \xi(x, f(t,x)) - \xi\theta_1(x', f(t,x)) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \big(\, \xi^2 k^{-1}\|P_n f(t,x)\|^2 - \xi(P_n x, P_n f(t,x)) - \xi\theta_1(P_n x', P_n f(t,x)) \,\big)$$

и $P_n x = \xi A P_n f(t,x)$, то

$$V(x) = \sum_{M(wni)\ne 0} \big(\, k^{-1}|W^{-1}(wni)|^2\|P_n x\|^2 - \xi^2(AP_n f(t,x), f(t,x)) -$$

$$-\xi^2\theta_1([AP_n f(t,x)]', P_n f(t,x)) \,\big) = \sum_{M(wni)\ne 0} \big(\, k^{-1}|W^{-1}(wni)|^2\|P_n x\|^2 -$$

$$-\xi^2\left[\Re W(wni) + \theta_1 \Re\left[iwnW(wni)\right]\right]\|P_n f(t,x)\|^2 \,\big) =$$

$$= \sum_{M(wni)\ne 0} \big(\, k^{-1}|W^{-1}(wni)|^2 - \Re\left[(1+\theta_1 wni)W^{-1}(wni)\right] \big)\ \|P_n x\|^2$$

$$= \sum_{M(wni)\ne 0} \frac{\pi(n,k,\theta_1)}{|M(wni)|^2}\|P_n x\|^2 \ge \sum_{M(wni)\ne 0} \varepsilon(n^2+1)\|P_n x\|^2 = \varepsilon\sum_{n=0}^{\infty}(n^2+1)\|P_n x\|^2.$$

Из последней оценки и (П.1) следует оценка $\|x\|^2 \le r_1$ и, следовательно,

$$\|P_0 x\|^2 + \frac{1}{w^2}\|x'\| \le \sum_{n=0}^{\infty}(n^2+1)\|P_n x\|^2 \le r_2.$$

Так как $\|x\|_C \le |P_0 x| + \|x'\|_{L^1}$, то $\|x\|_C \le r_3\sqrt{r_2}$, где r_3 зависит только от T.

Требуемая априорная оценка доказана.

5. Доказательство теоремы 2. В силу взаимной простоты многочленов $L(p)$ и $M(p)$ без ограничения общности можно предположить, что $L(wni) \ne 0$ для целых n: для некоторого a всегда можно преобразовать исходное уравнение $L(p)x = M(p)f(t,x)$ к виду $(L(p)+aM(p))x = M(p)(f(t,x)+ax)$ так, чтобы многочлен $L(p)+aM(p)$ не имел корней вида wni. При этом $I(p;L,M) \equiv I(p;L+aM,M)$ и $f(t,x)+ax \in M^*(-\infty,+\infty)$ вместе с $f(t,x)$. Уравнение $x = Af(t,x)$ рассматривается либо в L^2, если $\deg\ I = 2m$, либо в C^0, если $\deg I > 2m$.

Пусть $\deg I = 2m$ и пусть нелинейность $f(t,x)$ удовлетворяет оценке (12). Оператор $x(t) \mapsto f(t,x(t))$ действует из L^2 в L^1 и непрерывен. Оператор A действует из L^1 в L^2 и вполне непрерывен. Оператор $Af(t,x)$ вполне непрерывен в L^2. Априорная оценка всех решений $x(t) \in L^2$ уравнений $x = \xi Af(t,x)$ ($\xi \in [0,1]$) может быть получена точно так же, как и в теореме 1: с одной стороны величина $\xi|(x', f(t,x))|$ субквадратична, с другой стороны

$$(x', \xi f(t,x)) = \sum_{M(wni)\neq 0} \frac{I(wn)}{|M(wni)|^2} \|P_n x\|^2.$$

Если $\deg I > 2m$, то аналогично может быть доказана оценка

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n^2+1)\|P_n x\|^2 \leq \text{const},$$

из которой следует требуемая априорная оценка $\|x\|_C \leq$const.

6. Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 3. Снова рассматривается эквивалентное операторное уравнение $x = Af(t,x)$ и к нему применяется утверждение 1 в пространстве C^0. Априорная оценка в условиях теоремы 3 доказывается следующим образом.

Без потери общности предполагается, что $\deg \pi(n,k,\theta) \geq 2m+2$. Иначе следует выбрать новое значение θ, воспользовавшись леммой 2.

Рассмотрим ту же самую величину $V(x)$ ($\theta_1 = \theta$), где x — решение уравнения $x = \xi Af(t,x)$. Снова, аналогично доказательству априорной оценки в условиях теоремы 1, можно доказать оценку

$$\tau_1 \|P_{n_0} x\|^2 \geq \sum_{\substack{M(wni) \neq 0, \\ n \neq n_0}} \tau_2 \|P_n x\|^2 + o(\|x\|^2). \tag{П.2}$$

Рассмотрим величину $V_1 = |\Re\,[wn_0 i W^{-1}(wn_0 i)]\,|\;\|P_{n_0} x\|^2$. Так как

$$V_1 = \xi|((P_{n_0}x)', P_{n_0} f(t,x))| \leq$$

$$\leq |((P_{n_0}x)', f(t,x) - f(t, P_{n_0}x))| + |((P_{n_0}x)', f(t, P_{n_0}x))| + o(\|x\|^2) =$$

$$= |((P_{n_0}x)', f(t,x) - f(t,P_{n_0}x) - a\sum_{n\neq n_0} P_n x)| + |((P_{n_0}x)', f(t,P_{n_0}x))| + o(\|x\|^2) \leq$$

$$\leq \|(P_{n_0}x)'\|\, L\, \|\sum_{n\neq n_0} P_n x\| + o(\|x\|^2) = Lwn_0 \|P_{n_0}x\| \cdot \|\sum_{n\neq n_0} P_n x\| + o(\|x\|^2),$$

и поэтому

$$|\Im\, W^{-1}(wni)|\;\|P_{n_0}x\| \leq L\|\sum_{n\neq n_0} P_n x\| + o(\|x\|),$$

то из (19) в силу (П.2) следует априорная оценка в L^2. Оценка в C^0 следует из оценки в L^2.

7. Доказательство теоремы 4. Доказательство этой теоремы также близко к доказательству теоремы 1; некоторые моменты различны, на них мы и остановимся. Рассмотрим эквивалентное операторное уравнение $x = AF(\sigma_0, x)$, $\sigma_0 = \Theta(\sigma_0, x)\big|_{t=T}$ в пространстве $W^{1,1}$ (вместо C^0). В силу утверждения 2 (вместо утверждения 1) достаточно доказать оценку $\|x\|_{W^{1,1}} \leq$const для всех решений $\{\sigma_0, x\}$ системы

$$x = \xi AF(\sigma_0, x), \qquad \sigma_0 = \Theta(\sigma_0, x)\big|_{t=T}.$$

Эта оценка получается абсолютно аналогично априорной оценке в теореме 1. При использовании леммы 2 следует обратить внимание на то, что $\operatorname{sign}\theta_1 = \operatorname{sign}\theta$. Вместо (3) необходимо использовать (21).

8. Доказательство леммы 1.

Пусть (13) верно при некотором θ. Предположим $N_0 \neq \emptyset$. Тогда, очевидно, $\theta \neq 0$ и $\theta g_2(n) > 0$ на N_0, а (15) выполнено с $\tau = \operatorname{sign}\theta$.

Если $s_0 = \infty$, то для некоторых $n_k \to \infty$, $n_k \in N_0$ верно неравенство $|g_1(n_k)| > k|g_2(n_k)|$ и это противоречит $g_1(n_k) < 0$ и (13). Если $s_\tau = \infty$, то для других $n_k \to \infty$, $n_k \in N_\tau$ выполнено неравенство $|g_2(n_k)| > k|g_1(n_k)|$ и это противоречит $\theta g_2(n_k) < 0$ и (13). Поэтому верно (16).

Неравенство (17) следует из соотношений $|\theta| \cdot |g_2(n)| > |g_1(n)|$, $n \in N_0$ и $|\theta| \cdot |g_2(n)| < |g_1(n)|$, $n \in N_\tau$.

Пусть теперь выполнены соотношения либо (14), либо (15) – (17). Если выполнено (14), то (13) справедливо при $\theta = 0$. Пусть выполнены соотношения (15) – (17). Тогда для достаточно малого $\varepsilon > 0$ неравенство $(\varepsilon + s_0)s_\tau < 1$ следует из (17). Пусть $\operatorname{sign}\theta = \tau$ и $|\theta| = \varepsilon + s_0$. Тогда (13) выполняется для $n \in N_0$, так как оно имеет вид $|\theta|\ |g_2(n)| > |g_1(n)|$ и следует из $s_0|g_2(n)| > |g_1(n)|$; оно выполняется для $n \in N_\tau$, так как в этом случае оно имеет вид $|\theta|\ |g_2(n)| < |g_1(n)|$ и следует из $s_\tau|g_1(n)| > |g_2(n)|$; для остальных значений n неравенство (13) вытекает из положительности обеих функций $g_2(n)$ и $g_1(n)$.

Список литературы

[1] *Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978.

[2] *Красносельский А.М.* Асимптотика нелинейностей и операторные уравнения. М.: Наука, 1992.

[3] *Leonov G.A., Burkin I.M., Shepeljavyi A.I.* Frequency methods in oscillation theory. Kluwer: Basel, 1996.

[4] *Yorke J.* Periods of periodic solutions and the Lipschits constant // Proc. AMS. 1969. V. 22. P. 509–512.

[5] *Bobylev N.A., Burman M.Yu., Korovin S.K.* Approximation procedures in nonlinear oscillation theory. W. de Gruyter: Berlin, New York, 1994.

[6] *Красносельский М.А., Забрейко П.П.* Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука, 1975.

[7] *Vidyasagar M.* Nonlinear systems analysis, Prentice Hall: Englewood Cliffs, 1993.

[8] *Красносельский М.А., Покровский А.В.* Системы с гистерезисом. М.: Наука, 1983.

[9] Справочник по теории автоматического управления. Под ред. А.Красовского, М.: Наука, 1987.