О вынужденных колебаниях в системах с четными функциональными неограниченными характеристиками *

А.М. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ, доктор физ.-мат. наук

13 декабря 2007 г.

В статье предлагаются условия существования вынужденных колебаний и условия существования нелинейного резонанса в системах управления, состоящих из резонансного линейного звена и функционального звена с неограниченной характеристикой специального вида. Для исследования таких (и более общих) систем предложен метод подсчета индекса на бесконечности возникающих векторных полей. Введено понятие асимптотически однородного неограниченного нелинейного оператора. Для вполне непрерывных асимптотически линейных векторных полей, вырожденных в линейном приближении на бесконечности и имеющих неограниченную асимптотически однородную нелинейную часть, указана общая теорема об индексе.

1 Постановка задачи

Рассматривается система, динамика которой описывается уравнением

$$L(\frac{d}{dt}) = M(\frac{d}{dt})[f(x) + g(x) + b(t)]. \tag{1}$$

Здесь $L(p)$ и $M(p)$ — взаимно простые дифференциальные многочлены

$$L(p) = p^l + a_1 p^{l-1} + \ldots + a_l, \quad M(p) = b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \ldots + b_m$$

с постоянными коэффициентами, $l > m$, $b(t)$ — 2π-периодическая локально суммируемая функция. Если числа ki, где $k = 0, \pm 1, \ldots$, не являются корнями многочлена $L(p)$ и нелинейность $f(x) + g(x)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{|x| \to \infty} \frac{f(x) + g(x)}{x} = 0, \tag{2}$$

то такая система всегда имеет по крайней мере одно 2π-периодическое колебание, множество всех таких колебаний равномерно ограничено (например, в C).

*Институт Проблем Передачи Информации РАН, amk@ippi.ac.msk.su. Работа частично поддержана грантом MD4300 Международного Научного Фонда (ISF) и грантом 93-01-00884 Российского Фонда Фундаментальных Исследований.

В настоящей работе рассматривается случай, когда многочлен $L(p)$ имеет пару комплексно сопряженных корней вида ki с целым k. В [1] приведены условия существования вынужденных колебаний и условия возникновения нелинейного резонанса в системах, описывающихся уравнением вида (1), в котором $g(x) \equiv 0$, а нелинейность $f(x)$ удовлетворяет условиям насыщения (см. ниже равенства (3)). Эти условия близки к классическим условиям Ландесмана-Лазера (см., например, [2]). Нелинейность с насыщением может быть заменена на различные гистерезисные нелинейности и функциональные звенья с запаздыванием.

В настоящей работе предполагается, что нелинейность $f(x)$ непрерывная, ограниченная и удовлетворяет условиям насыщения

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = f^+, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = f^-, \tag{3}$$

а непрерывная четная нелинейность $g(x)$ "на бесконечности"неограниченно растет, непрерывно дифференцируема и удовлетворяет следующим ограничениям:

$$|g(x)| \leq c(1+|x|^\alpha), \quad 0 < \alpha < 1, \qquad |g'(x)| \leq c(1+|x|)^{-\beta}, \quad 0 < \beta. \tag{4}$$

Примерами нелинейностей $g(x)$, удовлетворяющих (4), являются функции $|x|^\alpha \sin(|x|^\gamma)$, $\alpha + \gamma < 1$. В этом случае $\beta = 1 - \alpha - \gamma$.

Наряду с (1) рассматриваются уравнения со скалярным параметром

$$L(\frac{d}{dt};\lambda) = M(\frac{d}{dt};\lambda)[f(x;\lambda) + g(x;\lambda) + b(t;\lambda)]. \tag{5}$$

Для систем, которые описываются этими уравнениями, предлагаются условия существования *нелинейного резонанса*.

Число λ_0 называется точкой нелинейного резонанса для уравнения (5), если в любой окрестности точки λ_0 есть 2π-периодические решения сколь угодно большой амплитуды. Точнее говоря, число λ_0 называется точкой нелинейного резонанса для уравнения (5), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое λ_ε, что $|\lambda_\varepsilon - \lambda_0| < \varepsilon$ и у уравнения (5) при $\lambda = \lambda_\varepsilon$ найдется по крайней мере одно 2π-периодическое решение с амплитудой не меньше ε^{-1}. Точки нелинейного резонанса — это асимптотические точки бифуркации (см., например, [3]) в задаче о вынужденных колебаниях.

Для исследования точек нелинейного резонанса применяется топологический *принцип смены индекса*, предложенный М.А. Красносельским в начале 50х годов. Пусть в банаховом пространстве E задано уравнение $x = T_\lambda x$ с вполне непрерывным оператором T_λ. Пусть в каждой окрестности точки λ_0 найдутся значения параметра λ, при которых определен индекс $\mathrm{ind}\,(I - T_\lambda)$ векторного поля $x - T_\lambda x$ на бесконечности (определение приведено в разделе 3, подробнее см. [3]), причем множество значений индекса состоит более чем из одной точки. Тогда λ_0 является асимптотической точкой бифуркации для уравнения $x = T_\lambda x$: в любой окрестности точки λ_0 есть решения уравнения $x = T_\lambda x$ сколь угодно большой нормы.

Важную информацию об асимптотических точках бифуркации асимптотически линейных полей содержит главная на бесконечности линейная часть. Пусть при всех λ выполнено равенство (2). Тогда наличие у многочлена $L(p;\lambda_0)$ корней вида ki при целых k является необходимым условием существования нелинейного резонанса в точке λ_0. Из теорем М.А. Красносельского о собственных значениях нечетной кратности следует, что каждый корень λ_0 уравнения $a_l(\lambda) = 0$, в окрестности которого функция $a_l(\lambda)$ принимает значения обоих знаков, является точкой нелинейного резонанса для (5).

2 Основные результаты о вынужденных колебаниях

Пусть $L(i) = 0$ и $L(ki) \neq 0$ при $k = 0, \pm 2, \pm 3, \ldots$

Теорема 1 *Пусть функция $g(x)$ удовлетворяет условиям (4), причем*

$$\alpha^2 + \alpha < \beta. \tag{6}$$

Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условию (3) и

$$\left| \int_0^{2\pi} e^{it} b(t)\, dt \right| < 2|f^+ - f^-|. \tag{7}$$

Тогда у (1) есть по крайней мере одно 2π-периодическое колебание.

Две следующие теоремы относятся к системам с параметром. Пусть $L(i; \lambda_0) = 0$ и $L(ki; \lambda_0) \neq 0$ при $k = 0, \pm 2, \pm 3, \ldots$

Теорема 2 *Пусть функция $g(x) \equiv g(x; \lambda_0)$ удовлетворяет условиям (4), причем выполнено условие (6). Пусть функция $f(x) \equiv f(x; \lambda_0)$ удовлетворяет условию (3). Пусть в каждой окрестности точки λ_0 найдутся значения параметра λ, при которых $L(i; \lambda) \neq 0$. Пусть*

$$\left| \int_0^{2\pi} e^{it} b(t; \lambda_0)\, dt \right| > 2|f^+ - f^-|. \tag{8}$$

Тогда λ_0 является точкой нелинейного резонанса для системы (5).

Теорема 3 *Пусть $L(i; \lambda) = 0$ при всех значениях параметра λ из некоторой окрестности Λ точки λ_0. Пусть при каждом $\lambda \in \Lambda$ функция $g(x) \equiv g(x; \lambda)$ удовлетворяет условиям (4), причем выполнено условие (6). Пусть при каждом $\lambda \in \Lambda$ выполнены условия насыщения (3):*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x; \lambda) = f^+(\lambda), \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x; \lambda) = f^-(\lambda).$$

Пусть функция

$$\varphi(\lambda) = \left| \int_0^{2\pi} e^{it} b(t; \lambda)\, dt \right| - 2|f^+(\lambda) - f^-(\lambda)| \tag{9}$$

обращается в нуль в точке λ_0 и в каждой окрестности этой точки принимает значения обоих знаков. Тогда λ_0 является точкой нелинейного резонанса для системы (5).

Условия теоремы 3 естественно назвать условиями возникновения резонанса по амплитуде: если амплитуда основной гармоники входного сигнала $b(t; \lambda)$ проходит через критическое значение, то в системе возникает нелинейный резонанс.

Доказательство теорем 1 – 3 вынесено в приложение. Эти теоремы следуют из общего утверждения об индексе на бесконечности асимптотически линейного векторного поля с асимптотически однородной нелинейной частью. Эта теорема (вместе с необходимыми определениями) формулируется в следующем разделе.

3 Абстрактная теорема

Здесь вводится понятие асимптотически однородного неограниченного нелинейного оператора и предлагаются обобщения теорем типа Ландесмана-Лазера для уравнений в абстрактных банаховых пространствах.

Пусть в банаховом пространстве E задано вполне непрерывное векторное поле Φx. Пусть это поле асимптотически линейно: $\Phi x = x - Ax - Bx$, где A — линейный вполне непрерывный оператор, а B — нелинейный (и также вполне непрерывный) оператор, удовлетворяющий условию

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} = 0.$$

Нас будет интересовать индекс $\operatorname{ind}\Phi$ на бесконечности поля Φx.

Определение 1 *([3]) Пусть векторное поле Φx не обращается в нуль при $\|x\| > \rho$, где $\rho > 0$ — некоторое число. Тогда индексом на бесконечности называется вращение поля Φx на сферах $S_r = \{x \in E : \ \|x\| = r\}$ при $r > \rho$.*

Корректность этого определения (независимость вращения от r) следует из невырожденности поля Φx при больших $\|x\|$.

Если 1 — регулярная точка для оператора A, то $\operatorname{ind}\Phi = (-1)^\sigma$, где σ — сумма кратностей всех вещественных собственных значений оператора A, больших чем 1.

Далее предполагается, что 1 — это собственное значение оператора A и что ему отвечает конечномерное подпространство $E_1 = Ker(I - A)$, состоящее из собственных векторов оператора A (присоединенных векторов нет), то есть $E_1 = \{e \in E : \ e = Ae\}$. Через E_2 обозначено инвариантное для оператора A дополнение E_1 до E, через P_1 и P_2 обозначаются соответствующие проекторы.

Предполагается, что нелинейный оператор B допускает оценку

$$\|Bx\| \le c(1 + \|x\|^\alpha), \quad x \in E \tag{10}$$

при некоторых $c > 0$ и $\alpha \in [0, 1)$. Естественно, показатель степени в (10) предполагается выбранным "наилучшим"возможным. Это, в частности, означает, что при $\alpha \neq 0$ оператор B неограниченный (глобально).

Пусть оператор B также имеет главную часть — положительно однородный с показателем однородности 0 ограниченный оператор Q:

$$Q\lambda x = Qx, \quad \lambda > 0, \ x \in E,$$

причем $Cx = Bx - Qx$ удовлетворяет следующему условию малости "на бесконечности": при любом положительном c

$$\lim_{R\to+\infty} \sup_{e_1\in E_1,\ \|e_1\|=1,\ h\in E,\ \|h\|\le cR^\alpha} \|P_1 C(Re_1 + h)\| = 0. \tag{11}$$

Назовем такой неограниченный оператор B *асимптотически однородным (относительно E_1 и α).*

Основным примером ограниченного ($\alpha = 0$) асимптотически однородного оператора B является оператор Гаммерштейна $Bx = A\, f(t, x)$. Пусть A — линейный вполне непрерывный оператор в $L^2 = L^2(G, I\!R^1)$, а непрерывная по совокупности переменных $t \in G$, $x \in I\!R^1$ скалярнозначная функция $f(t, x)$ удовлетворяет условиям Ландесмана-Лазера

$$\lim_{R\to+\infty} f(t, R) = f^+(t), \quad \lim_{R\to-\infty} f(t, R) = f^-(t).$$

Если подпространство функций E_1 удовлетворяет условию

$$\text{(12)} \qquad \operatorname{mes}\{t \in G:\ e(t) = 0\} = 0, \quad e(t) \in E_1,\ e(t) \not\equiv 0,$$

то оператор Гаммерштейна Bx асимптотически однороден. При этом $Qx = Aq(t,x)$, где $q(t,x) = f^+(t)$ при $x \geq 0$ и $q(t,x) = f^-(t)$ при $x < 0$. Этот факт (или его переформулировки) использовался в большинстве работ по уравнениям с нелинейностями типа Ландесмана-Лазера.

Важным примером неограниченного асимптотически однородного оператора Bx также является оператор Гаммерштейна, но с нелинейностью $f(t,x)$ вида $f_{LL}(t,x) + g(x)$, где ограниченное слагаемое $f_{LL}(t,x)$ удовлетворяет условиям Ландесмана-Лазера, а $g(x)$ — четная неограниченная функция. При этом приходится рассматривать линейные операторы A, имеющие собственное подпространства E_1 с функциями, обладающими некоей симметрией. Например, требуемой симметрией обладают функции вида $a\sin(t+\varphi),\ t \in [0, 2\pi]$, функции вида $a\sin kt,\ t \in [0,\pi]$ при четных натуральных k.

Теорема 4 *Пусть неограниченный оператор B асимптотически однороден. Пусть конечномерное непрерывное поле P_1Qe_1 невырождено на сфере*

$$U = \{e_1 \in E_1,\ \|e_1\| = 1\},$$

а оператор Qx непрерывен при $x \in U \subset E$. Тогда определен $\operatorname{ind}\Phi$ *и*

$$\operatorname{ind}\Phi = (-1)^\sigma \gamma(P_1Q; U)$$

где σ — сумма кратностей всех вещественных собственных значений оператора A, больших чем 1.

Эта теорема является существенным обобщением основного результата из [4] в различных направлениях. Она по логике близка к теоремам о вычислении индекса особой точки по следующему за линейным невырожденному приближению. Отметим, что условие (12) является условием непрерывности оператора $x(t) \mapsto q(t, x(t))$ на сфере U в пространстве L^2.

4 Замечания

1. Дифференцируемость $g(x)$ может быть заменена условием Липшица

$$\text{(13)} \qquad |g(x) - g(y)| \leq d(r)|x-y|, \quad x,\, y > r > 0,$$

в котором величина $d(r)$ удовлетворяет условию

$$\text{(14)} \qquad \limsup_{r\to\infty}\ r^\beta d(r) < \infty.$$

2. Вместо оценок (4) могут быть рассмотрены ограничения более общего вида

$$|g(x)| \leq \Theta(|x|), \quad |g'(x)| \leq \Theta_*(|x|)$$

с отличными от степенных функциями $\Theta(u)$ и $\Theta_*(u)$, удовлетворяющими

$$\text{(15)} \qquad \lim_{u\to\infty}\frac{\Theta(u)}{u} = 0, \qquad \lim_{u\to\infty}\Theta_*(u) = 0.$$

Например, теоремы 1 – 3 могут быть сформулированы для функций $\Theta(u) = c\,u^\alpha \log^\gamma u$ и $\Theta_*(u) = c[\log^r u]\,(1+u)^{-\beta}$ или вообще для функций общего вида.

Аналогичное замечание верно и для определения асимптотически однородного оператора, и для формулировки теоремы 4. Вместо оценки (10) надо использовать оценку $\|Bx\| \le \Theta(\|x\|), \quad x \in E$. В определениии (11) при этом надо заменить условие $\|h\| \le cR^\alpha$ на $\|h\| \le c\Theta(R)$.

3. В условиях теоремы 1 для отыскания 2π-периодического решения может быть применен метод гармонического баланса.

4. Заменой переменных теоремы 1 – 3 приводятся к соотвествующим утверждениям о периодических колебаниях произвольного периода T. Теоремы 1 – 3 могут быть с незначительными изменениями (меняются лишь формулы (7), (8) и (9)) сформулированы для случая, когда $L(si) = 0$ при натуральном $s > 1$ (или $L(si;\lambda_0) = 0$ в теоремах 2 и 3).

5. В условиях теоремы 3 допускается, чтобы при разных значениях λ в окрестности точки λ_0 были разными числа α и β. Это следует из приводимого ниже доказательства.

6. Теоремы 1 – 3 могут быть обобщены на уравнения (1) и (5) с нелинейностями более общего вида. В правую часть без изменения формулировок можно добавить непрерывное слагаемое $\varphi(x(t), x(t-h))$ с $\varphi(x,y) \to 0$ при $|x| + |y| \to \infty$. Можно рассмотреть вместо нелинейности с насыщением $f(x)$ нелинейность с запаздыванием специального вида; при этом получатся теоремы, обобщающие результаты из [8].

Если

$$g(x,y) \equiv g(-x,-y),$$
$$|g(x,y)| \le c(1+|x|+|y|)^\alpha$$

и

$$|g(x+\xi, y+\eta) - g(x,y)| \le d(r)(|\xi|+|\eta|), \qquad |x|,|y| > r > 0,$$

причем $d(r) \le c\,r^{-\beta}$ и числа α и β удовлетворяют условию (6), то оператор $x(t) \mapsto g(x(t), x(t-h))$ асимптотически однороден в L^2 с нулевой однородной частью на ∞. Поэтому $g(x)$ можно заменить на нелинейность $g(x(t), x(t-h))$. Формулировки теорем 1 – 3 для такого случая практически не меняются.

7. Если многочлен $L(p)$ содержит только четные степени переменной p, то справедливы более общие аналоги теоремы 2 (см. [9]), доказываемые потенциальными методами. Для уравнений с непотенциальными компонентами (запаздывание, многочлен $L(p)$ общего вида и пр.) могут быть указаны утверждения о необходимости условий типа (7).

8. Естественно, каждую функцию $f(x) + g(x)$ можно представить в виде суммы функций $f(x)$ и $g(x)$, удовлетворяющих (3), (4), не единственным образом. Такая неединственность не оказывает влияния на условия теорем 1 – 3. Например, все условия теорем инвариантны относительно слагаемых–констант.

A Доказательство теорем 1 – 3.

Доказательство проведем по следующей схеме. Сначала перейдем от уравнений вида (1) (или (5)) к эквивалентным операторным уравнениям $x = Tx$ ($x = T_\lambda x$) с вполне непрерывным оператором T. Для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что индекс на бесконечности поля $x - Tx$ отличен от нуля. Для доказательства теорем 2 и 3 применяется принцип смены индекса [3]. В условиях этих теорем индекс на бесконечности полей $x - T_\lambda x$ при значениях параметра из окрестности точки λ_0 принимает по крайней мере два различных значения (0 и ± 1). Все вычисления индекса проводятся с помощью теоремы 4. Для применения этой теоремы надо лишь установить асимптотическую однородность соответствующей нелинейности.

Проведем переход к операторному уравнению для уравнения без параметра. Пусть при некотором γ многочлен $L(p) - \gamma M(p)$ не имеет корней вида ik при целых k. Существование такого γ следует из взаимной простоты многочленов $L(p)$ и $M(p)$. Обозначим через

$$\Gamma u(t) = \int_0^{2\pi} G(t-s)u(s)\,ds$$

линейный интегральный оператор, ставящий в соответствие каждой суммируемой функции $u(t)$ 2π-периодическое решение $x(t) = \Gamma u(t)$ линейного уравнения

$$\left[L(\frac{d}{dt}) - \gamma M(\frac{d}{dt})\right] x(t) = M(\frac{d}{dt})u(t).$$

По поводу определения решения для такого уравнения для негладких $u(t)$ см., например, [6]. Ядро интегрального оператора Γ порождено импульсной характеристикой $G(\cdot)$ линейного звена с передаточной функцией $W_\gamma(p) = M(p)/[L(p) - \gamma M(p)]$. Оператор Γ действует в пространствах $L^2 = L^2(0, 2\pi)$ и $C = C(0, 2\pi)$ и вполне непрерывен, он также действует и вполне непрерывен как оператор из L^2 в C.

Задача о 2π-периодических решениях уравнения (1) эквивалентна операторному уравнению

$$x = \Gamma[-\gamma x + f(x) + g(x) + b(t)]. \tag{16}$$

У оператора $Ax = -\gamma\Gamma x$ число 1 является собственным значением кратности 2. Этому собственному значению соответствует двумерное инвариантное подпространство $E_1 = \{e(t) : e(t) = a\sin t + b\cos t,\ a, b \in I\!R\}$.

Покажем, что оператор $Bx = \Gamma[f(x) + g(x) + b(t)]$ является в условиях (3), (4) асимптотически однородным в пространстве C. Положим $Qx(t) = \Gamma q(t, x(t))$, где

$$q(t,x) = \begin{cases} f^+ + b(t), & x \geq 0, \\ f^- + b(t), & x < 0. \end{cases}$$

Докажем справедливость равенства (11) для оператора $Cx = Bx - Qx$ в пространстве $E = C$. Проектор P_1 опеределяется равенством

$$P_1 x(t) = \frac{\sin t}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin\tau\, x(\tau)\,d\tau + \frac{\cos t}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos\tau\, x(\tau)\,d\tau, \tag{17}$$

это ортопроектор в L^2 на E_1; $AP_1 = P_1$.

Доказательство (11) состоит из двух частей: из равенства

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{e\in E_1,\, \|e\|=1,\, \|h\|\leq cR^\alpha} \|P_1[\Gamma(f(Re+h) + b(t)) - Q(Re+h)]\| = 0 \tag{18}$$

и равенства

$$
(19) \qquad \lim_{R\to\infty} \sup_{e\in E_1,\,\|e\|=1,\,\|h\|\le cR^\alpha} \|P_1[\Gamma g(Re+h)]\| = 0
$$

Равенство (18) доказывается стандартными рассуждениями[1] ([6]):

$$
\|P_1[\Gamma(f(Re+h)+b(t)) - Q(Re+h)]\|_C \le c_1\|f(Re+h)+b(t)-q(t,Re+h)\|_{L^1} =
$$

$$
= c_1\int_0^{2\pi} |f(Re+h)+b(t)-q(t,Re+h)|\,dt \le c_1\int_{\{|h(t)|>R^{\alpha+\varepsilon}\}} \ldots\,dt +
$$

$$
+c_1\int_{\{|Re(t)|\le 2R^{\alpha+\varepsilon}\}} \ldots\,dt + c_1\int_{\{|h(t)|\le R^{\alpha+\varepsilon},\,|Re(t)|>2R^{\alpha+\varepsilon}\}} \ldots\,dt \le
$$

$$
\le c_2\,\mathrm{mes}\{t:\,|h(t)|>R^{\alpha+\varepsilon}\} + c_3\,\mathrm{mes}\{t:\,|e(t)|\le 2R^{\alpha+\varepsilon-1}\} +
$$

$$
+c_1\int_{\{|h(t)|\le R^{\alpha+\varepsilon},\,|Re(t)|>2R^{\alpha+\varepsilon}\}} |f(Re+h)+b(t)-q(t,Re+h)|\,dt \le
$$

$$
\le c_4(R^{-2\varepsilon}+R^{\alpha+\varepsilon-1}) + c_1\int_{\{Re+h>R^{\alpha+\varepsilon}\}} |f(Re+h)-f^+|\,dt +
$$

$$
+c_1\int_{\{Re+h<-R^{\alpha+\varepsilon}\}} |f(Re+h)-f^-|\,dt \to 0.
$$

Малость последних двух интегралов определяется условиями (3).

Для доказательства равенства (19) отметим тождество:

$$
\int_0^{2\pi} \sin(t+\phi_1)g[R\sin(t+\phi_2)]\,dt \equiv 0,
$$

справедливое для любой четной функции $g(x)$ при любых вещественных $\phi_1,\ \phi_2$ и R.

В силу (6) можно выбрать $\alpha_1\in(\alpha,1)$, так, чтобы выполнялись неравенства $1-\alpha_1>\alpha_1\alpha$ и $\alpha_1\beta>\alpha$, где α, β — числа из оценок (4). Положим $R_1=R^{\alpha_1}$. Тогда при больших R

$$
\left|\int_0^{2\pi} \sin(t+\phi_1)g[R\sin(t+\phi_2)+h(t)]\,dt\right| \equiv
$$

$$
\equiv \left|\int_0^{2\pi} \sin(t+\phi_1)\{g[R\sin(t+\phi_2)+h(t)] - g[R\sin(t+\phi_2)]\}\,dt\right| \le
$$

$$
\le \int_{\{|R\sin(t+\phi_2)|\le 2R_1\}} |g[R\sin(t+\phi_2)+h(t)]-g[R\sin(t+\phi_2)]|\,dt +
$$

$$
+\int_{\{|R\sin(t+\phi_2)|>2R_1\}} |g[R\sin(t+\phi_2)+h(t)]-g[R\sin(t+\phi_2)]|\,dt = J_1+J_2
$$

Оценим слагаемые J_1 и J_2 из последней формулы отдельно.

Оценка первого слагаемого следует из соотношений

$$
J_1 \le c_5\,R^{\alpha_1\alpha}\,\mathrm{mes}\,\{|R\sin(t+\phi_2)|\le 2R_1\} \le c_6\,R^{\alpha_1\alpha+\alpha_1-1} \to 0.
$$

[1] В последующих соотношениях $\varepsilon\in(0,1-\alpha)$, c_i — некоторые постоянные

Оценка второго — из соотношений

$$J_2 \le 2\pi \sup_{\xi > R_1} |g'(\xi)| \sup_t |h(t)| \le c_7\, R^{-\alpha_1\beta} R^{\alpha} = c_7\, R^{\alpha-\alpha_1\beta} \to 0.$$

Итак, равенство (11) полностью доказано.

Функция $q(t,x)$ разрывна по переменной x. Однако, оператор $x(t) \mapsto q(t,x(t)) : \ L^2 \to L^2$ непрерывен в тех точках $x(t) \in L^2$, для которых справедливо равенство $\mathrm{mes}\{t : x(t) = 0\} = 0$ (см. [7]). Для ненулевых функций вида $a\sin(t+b)$ это равенство, очевидно, верно. Оператор $x(t) \mapsto \Gamma q(t,x(t))$ на таких функциях непрерывен в C (и из L^2 в C).

Таким образом для поля $x - Ax - Bx$ выполнены все условия теоремы 4. Для ее применения надо вычислить вращение $\gamma(P_1 Q; U)$. Здесь P_1 — проектор (17), а U — единичная окружность в E_1. Такое вычисление легко проводится в явном виде, ограничимся ссылкой на [4]. Если выполнено условие (7), то $|\operatorname{ind}\Phi| = 1$, если выполнено условие (8), то $\operatorname{ind}\Phi = 0$.

Теорема 1 следует из $\operatorname{ind}\Phi \ne 0$. В условиях теоремы 2 в каждой окрестности λ_0 есть значения параметра, при которых главная линейная часть невырождена и $\operatorname{ind}\Phi \ne 0$, и есть значения параметра, при которых главная линейная часть вырождена, применима теорема 4 и $\operatorname{ind}\Phi = 0$. Теорема 2 следует из принципа смены индекса. В условиях теоремы 3 главная линейная часть вырождена при всех значениях параметра, близких к λ_0. Теорема 3 также следует из принципа смены индекса и теоремы 4. ■

B Доказательство теоремы 4.

В начале доказательства сформулируем и докажем одно топологическое утверждение.

Пусть $\Theta(u)$ при $u \ge 0$ — положительная возрастающая скалярная функция, удовлетворяющая (15). Тогда в пространстве $E = E_1 \times E_2$ задано неограниченное множество

$$\Omega = \{x = x_1 + x_2 : \ x_i \in E_i, \ \|x_2\| \le \Theta(\|x_1\|)\} \subset E. \tag{20}$$

Каждое число $r > 0$ определяет подмножество $\Omega_r \subset \Omega$ соотношением

$$\Omega_r = \Omega \bigcap \{\|x_1\| \le r\}. \tag{21}$$

Границей $\partial\Omega_r$ в E области Ω_r является множество

$$\partial\Omega_r = \{\|x_2\| = \Theta(\|x_1\|), \ \|x_1\| \le r\} \bigcup \{\|x_2\| \le \Theta(r), \ \|x_1\| = r\}.$$

Рассмотрим вполне непрерывный оператор $A : \ \Omega_r \to E$ или, что то же, вполне непрерывные операторы $A_i(x_1, x_2) : \Omega_r \to E_i, \ i = 1, 2$. Оператор A порождает вполне непрерывное векторное поле $\Phi x = x - Ax, \quad x \in \Omega_r$. Ниже предполагается, что поле Φx невырождено на $\partial\Omega_r$, т.е. $x \ne Ax$ при $x \in \partial\Omega_r$. В этом случае определено вращение $\gamma(\Phi; \Omega)$ векторного поля Φx на $\partial\Omega$ ([3, 5]).

Предположим, что

$$\begin{array}{ll} x_1 \ne A_1(x_1 + x_2), & \|x_2\| \le \Theta(r), \ \|x_1\| = r, \\ x_2 \ne A_2(x_1 + x_2), & \|x_2\| = \Theta(\|x_1\|), \ \|x_1\| \le r\}. \end{array} \tag{22}$$

При каждом $x_1 \in B_1^r = \{x_1 : \ \|x_1\| \le r\}$ определено вращение γ_2 определенного в E_2 векторного поля $x_2 - A_2(x_1 + x_2)$ на сфере $S_2^\rho = \{\|x_2\| = \rho\}$, $\rho = \Theta(\|x_1\|)$. Величина γ_2 не зависит от выбора x_1. Аналогично, при каждом $x_2 \in B_2^{\Theta(r)} = \{x_2 : \ \|x_2\| \le \Theta(r)\}$ определено вращение γ_1 определенного в E_1 векторного поля $x_1 - A_1(x_1 + x_2)$ на сфере $S_1^r = \{\|x_1\| = r\}$. Величина γ_1 не зависит от выбора x_2.

Лемма 1 *Справедливо равенство* $\gamma(\Phi; \partial\Omega_r) = \gamma_1 \times \gamma_2$.

Доказательство леммы 1. Продолжим поле Φ до цилиндра $\Omega_r^* = B_1^r \times B_2^{\Theta(r)}$ по следующему правилу. На совпадающей части множеств Ω_r и Ω_r^* — множестве Ω_r — поле Φ уже определено. На множестве $\{\|x_1\| < r,\ \Theta(\|x_1\|) < \|x_2\| \le \Theta(r)\}$ положим

$$A(x_1, x_2) = \frac{\|x_2\|}{\Theta(\|x_1\|)} A(x_1 + x_2 \frac{\Theta(\|x_1\|)}{\|x_2\|}), \quad \Phi x = x - Ax.$$

Очевидно, такое поле также вполне непрерывно, на множестве $\Omega_r^* \backslash \Omega_r$ такое поле невырождено. Поэтому вращение $\gamma(\Phi; \partial\Omega_r)$ в пространстве E совпадает с вращением $\gamma(\Phi; \partial\Omega_r^*)$, а вращения поля $x_2 - A_2(x_1, x_2)$ при каждом x_1 на границе сферы $\{\|x_2\| = \Theta(r)\} \subset E_2$ совпадает с γ_2. Рассмотрим невырожденную на $\partial\Omega_r^*$ гомотопию

$$\Pi_\lambda x = x - A_1[x_1 + \lambda x_2] - A_2[\lambda x_1 + x_2], \quad x = x_1 + x_2 \in \partial\Omega_r^*.$$

При $\lambda = 1$ верно равенство $\Pi_\lambda x = \Phi x$, при $\lambda = 0$ — равенство $\Pi_\lambda x = x - A_1(x_1) - A_2(x_2)$. При $\lambda = 0$ вращение поля Π_λ на $\partial\Omega_r^*$ равно $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ в силу теорем о произведении вращений (теорема 22.4 стр. 160 из [3] или теорема 4.9 стр. 79 из [5]). Отсюда следует утверждение леммы 1. ■

Перейдем теперь к непосредственному доказательству теоремы 4.

Мы укажем в пространстве E множество Ω_r, вне которого нет особых точек векторного поля Φx, и для вычисления вращения на границе которого применима лемма 1 с $\Theta(u) = c^*(1+u)^\alpha$.

Это множество имеет вид (21), где Ω — множество (20). Числа c^* и r выбираются следующим образом. Вначале выбирается такое c^*, что вне множества Ω у уравнения $P_2 x = AP_2 x + P_2 B(x_1 + x_2)$ нет решений. Существование такого числа c^* следует из оценки (10) и структуры спектра вполне непрерывного линейного оператора A. Далее, выбирается такое число $\varepsilon > 0$, чтобы $\|P_1 Q e_1\| > \varepsilon$ ($e_1 \not\equiv 0$). По числам c^* и ε выбирается такое R_0, чтобы при всех h ($\|h\| \le 2c^*(1+r)^\alpha$), $e_1 \in U$ и $r \ge R_0$ были выполнены неравенства $\|P_1 C(re_1 + h)\| < \frac{\varepsilon}{3}$ (в силу условия (11)) и

$$\|P_1 Q(re_1 + h) - P_1 Q e_1\| \equiv \|P_1 Q(e_1 + \frac{h}{r}) - P_1 Q e_1\| \le \frac{\varepsilon}{3}$$

(в силу компактности сферы U и непрерывности Q на U). Тогда на множестве Ω_r выполнены все условия леммы 1 и $\gamma(\Phi x; \partial\Omega_r) = \gamma_1 \cdot \gamma_2$. Поэтому из равенств $\gamma_2 = (-1)^\beta$, $P_1 \Phi x = P_1 B x$ и $\gamma_1 = \gamma(P_1 Q; U)$ следует утверждение теоремы 4. ■

Список литературы

[1] Красносельский А.М. О возникновении колебательных режимов больших амплитуд в системах с насыщением, *ДАН СССР*, **318**, 4 (1991) 844-848. Англ. перевод: Large-amplitude oscillations in systems with saturation, *Sov. Phys.-Dokl.*, **32**, 6 (1992) 419-421

[2] Fučik S. *Solvability of Nonlinear Equations and Boundary Value Problems*, Prague, 1980

[3] Красносельский М.А., Забрейко П.П. Геометрические методы нелинейного анализа, М.: Наука, 1975. Англ. перевод: *Geometrical Methods of Nonlinear Analysis*, Springer, 1984

[4] Krasnosel'skii A.M. On bifurcation points of equations with Landesman-Lazer type nonlinearities, *Nonlinear Analysis. Theory, Methods & Applications*, **18**, 12 (1992) 1187-1199

[5] Bobylev N.A., Burman Yu.M., Korovin S.K. *Approximation Procedures in Nonlinear Oscillation Theory*, de Gruyter, Berlin, New-York, 1994

[6] Красносельский А.М. *Асимптотика нелинейностей и операторные уравнения*, М.: Наука, 1992. Англ. перевод: *Asymptotics of Nonlinearities and Operator Equations*, Birkhäuser, Basel, 1995

[7] Красносельский М.А., Покровский А.В. *Системы с гистерезисом*, М.: Наука, 1983. Англ. перевод: *System with Hysteresis*, Springer, 1989

[8] Красносельский А.М. Нелинейный резонанс в системах с запаздыванием, *Автоматика и телемеханика*, 2 (1995) 14-21

[9] Schmitt K., Wang, Z.Q., On bifurcation from infinity for potential operators, *J. Diff. Integral Equations*, **4**, 5 (1991) 933–943