Векторные поля в прямом произведении пространств и приложения к дифференциальным уравнениям *

А.М.Красносельский, М.А.Красносельский

Аннотация

В статье предлагается метод исследования краевых задач, вырожденных в линейном приближении на бесконечности. Он основан на вычислении топологических характеристик вполне непрерывных векторных полей и приводит к новым утверждениям о разрешимости и о существовании непрерывных ветвей решений операторных уравнений. Предложены примеры приложений к конкретным краевым задачам и к общим операторным уравнениям. Введено понятие асимптотически однородного ограниченного нелинейного оператора. Для вполне непрерывных асимптотически линейных векторных полей, вырожденных в линейном приближении на бесконечности и имеющих асимптотически однородную нелинейную часть, указана общая теорема об индексе на бесконечности. Эта теорема обобщает ряд известных утверждений о краевых задачах с нелинейностями, удовлетворяющими условиям Ландесмана-Лазера, и объясняет роль этих условий. Предложен новый тип ограниченных функциональных нелинейностей $g(x)$ таких, что для полей $x - Ax - Ag(x(t))$ удается посчитать их индекс на бесконечности.

Ключевые слова: *непрерывные ветви решений, периодические решения, двухточечная краевая задача, нелинейный резонанс, асимптотически однородный оператор, вращение векторного поля, индекс на бесконечности*

*Институт Проблем Передачи Информации РАН, amk@ippi.ac.msk.su. Результаты получены при поддержке Гранта 93-01-00884 Российского Фонда Фундаментальных Исследований

1 Задача о произведении вращений

Пусть банахово пространство E является прямым произведением

$$E = E_1 \times E_2 = \{x: \{x_1, x_2\},\ x_1 \in E_1,\ x_2 \in E_2\}$$

двух подпространств $E_1,\ E_2 \subset E$. Это значит, что каждый элемент $x \in E$ допускает представление $x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in E_1,\ x_2 \in E_2$. Это представление определяет линейные непрерывные проекторы

$$P_1 x = x_1,\ P_2 x = x_2, \quad x \in E,\ x_1 \in E_1,\ x_2 \in E_2$$

на подпространства $E_1,\ E_2; \quad P_1 + P_2 = I$, где I — тождественный оператор. Норма $\|\cdot\|$ в пространстве E индуцирует нормы $\|\cdot\|_i$ в подпространствах E_i, превращая их в банаховы пространства.

Пусть $\Omega_1,\ \Omega_2$ — ограниченные области в пространствах $E_1,\ E_2$, соответственно. Положим

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = \{x = x_1 + x_2 :\ x_i \in \Omega_i,\ i = 1, 2\} \subset E.$$

Границей $\partial\Omega$ в E области Ω является множество

$$\partial\Omega = (\partial\Omega_1 \times \overline{\Omega}_2) \bigcup (\overline{\Omega}_1 \times \partial\Omega_2).$$

Через $\overline{\Omega},\ \overline{\Omega}_1,\ \overline{\Omega}_2$ обозначаются замыкания множеств $\Omega,\ \Omega_1,\ \Omega_2$.

Рассмотрим вполне непрерывный оператор $A:\ \partial\Omega \to E$ или, что то же, вполне непрерывные операторы $A_i(x_1, x_2):\ \partial\Omega \to E_i,\ i = 1, 2$. Оператор A порождает вполне непрерывное векторное поле

$$\Phi x = x - Ax, \quad x \in \partial\Omega.$$

Ниже предполагается, что поле Φx невырождено на $\partial\Omega$, т.е. $x \neq Ax$ при $x \in \partial\Omega$. В этом случае определено вращение $\gamma(\Phi, \Omega)$ векторного поля Φx на $\partial\Omega$. Вычисление вращения является (см., например, [1, 2, 3]) важной задачей при изучении уравнения $x = Ax$. Оно используется при изучении разрешимости и оценке числа решений, при анализе бифуркаций и нелинейного резонанса, при исследовании различных численных процедур и др.

Предположим, что

$$\begin{array}{ll} x_1 \neq A_1(x_1 + x_2), & x_1 \in \partial\Omega_1,\ x_2 \in \overline{\Omega}_2, \\ x_2 \neq A_2(x_1 + x_2), & x_1 \in \overline{\Omega}_1,\ x_2 \in \partial\Omega_2. \end{array} \tag{1}$$

Тогда при каждом $x_1 \in \overline{\Omega}_1$ определено вращение $\gamma_2(x_1)$ определенного в E_2 векторного поля $I - A_2(x_1 + x_2)$ на $\partial\Omega_2$. Аналогично, при каждом $x_2 \in \overline{\Omega}_2$ определено вращение $\gamma_1(x_2)$ векторного поля $I - A_1(x_1 + x_2)$ на $\partial\Omega_1$.

Наша основная задача — указать условия, при которых верны утверждения:
- вращение $\gamma_2(x_1)$ принимает одинаковое значение γ_2 при всех $x_1 \in \overline{\Omega}_1$;
- вращение $\gamma_1(x_2)$ принимает одинаковое значение γ_1 при всех $x_2 \in \overline{\Omega}_2$;

- справедливо равенство

$$\gamma_1 \cdot \gamma_2 = \gamma(\Phi, \partial\Omega). \tag{2}$$

Будем говорить, что *множества* Ω_1 *и* Ω_2 *согласованы с оператором* A, если верны все эти утверждения. Множества Ω_1 и Ω_2 согласованы с оператором A, например, если оператор A_1 зависит только от переменной x_1 и не зависит от x_2 и оператор A_2 зависит только от переменной x_2 и не зависит от x_1. В этом случае третье утверждение сформулировано в [4], стр. 160 для произвольных областей Ω_1 и Ω_2.

Если области Ω_1 и Ω_2 связны, то два первых утверждения следуют из общих свойств вращения ([5]). Связность множества G здесь и ниже понимается в том смысле, что каждую пару точек $x,\, y \in G$ можно соединить непрерывной кривой, целиком лежащей в G.

Значения операторов $A_1(x_1+x_2)$ при $x \in \partial\Omega \backslash \{x_1 \in \partial\Omega_1,\ x_2 \in \overline{\Omega}_2\}$ и $A_2(x_1+x_2)$ при $x \in \partial\Omega \backslash \{x_1 \in \overline{\Omega}_1,\ x_2 \in \partial\Omega_2\}$ "не играют роли"в следующем смысле. Если два поля $x - Ax$ и $x - Bx$ удовлетворяют (1) и $A_1(x_1+x_2) \equiv P_1B(x_1+x_2)$ при $x_1 \in \partial\Omega_1,\ x_2 \in \overline{\Omega}_2$, $A_2(x_1+x_2) \equiv P_2B(x_1+x_2)$ при $x_1 \in \overline{\Omega}_1,\ x_2 \in \partial\Omega_2$, то эти поля гомотопны на $\partial\Omega$.

2 Теорема о произведении вращений

Ограниченное замкнутое множество G в банаховом пространстве назовем *стягиваемым*, если можно указать непрерывную по совокупности переменных $z \in G,\ \lambda \in [0,1]$ функцию $\Psi(z,\lambda)$ со значениями в G, для которой

$$\Psi(z,0) \equiv z, \ \ \Psi(z,1) \equiv z_*, \quad z \in G,$$

где $z_* \in G$ — некоторая фиксированная точка. Стягиваем каждый шар, замыкание каждой выпуклой или звездной области. Не является стягиваемым кольцо на плоскости. Связность — необходимое условие стягиваемости.

Т е о р е м а 1. *Пусть замыкания* $\overline{\Omega}_1$ *и* $\overline{\Omega}_2$ *двух областей* Ω_1 *и* Ω_2 *стягиваемы. Тогда эти области* Ω_1 *и* Ω_2 *согласованы с оператором* A.

Доказательство теоремы 1. В силу стягиваемости (и, поэтому, связности) множеств $\overline{\Omega}_1$ и $\overline{\Omega}_2$ для доказательства утверждения теоремы достаточно показать, что выполнено равенство (2). По предположению существуют непрерывные функции $\Psi_i(x_i,\lambda) :\ \overline{\Omega}_i \times [0,1] \to \overline{\Omega}_i\ \ (i=1,2)$, для которых справедливы равенства

$$\Psi_i(x_i,0) \equiv x_i, \ \ \Psi_i(x_i,1) \equiv x_i^*, \quad x_i \in \overline{\Omega}_i,\ i=1,2,$$

где $x_i^* \in \overline{\Omega}_i$ — некоторые фиксированные элементы. Продолжим оператор A произвольным образом (вполне непрерывным) на все множество $\overline{\Omega}$. Рассмотрим при $\lambda \in [0,1]$ семейство вполне непрерывных операторов

$$\Gamma_\lambda x = A_1[x_1 + \Psi_2(x_2,\lambda)] + A_2[\Psi_1(x_1,\lambda) + x_2], \quad x = x_1 + x_2 \in \partial\Omega.$$

В силу (1) семейство вполне непрерывных векторных полей $x - \Gamma_\lambda x$ невырождено на $\partial\Omega$. Поэтому вращение на $\partial\Omega$ этих полей определено и одинаково при всех $\lambda \in [0,1]$. При $\lambda = 0$ поле $x - \Gamma_\lambda x$ совпадает с Φx. При $\lambda = 1$ поле $x - \Gamma_\lambda x$ имеет вид

$$x - A_1(x_1 + x_2^*) - A_2(x_1^* + x_2).$$

Это поле не зависит от выбора продолжения оператора A внутрь области. Вращение последнего поля на $\partial\Omega$ совпадает с $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ в силу уже упоминавшейся теоремы из [4]. ∎

3 Обобщение теоремы 1

Пусть теперь оператор A определен на $\overline{\Omega}$, где $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ и пусть множество $\overline{\Omega}_2$ связно в E_2. Пусть при каждом $x_2 \in \overline{\Omega}_2$ вполне непрерывное в E_1 векторное поле $x_1 - A_1(x)$ $(x = x_1 + x_2)$ невырождено на $\partial\Omega_1$ и

$$\gamma_1 = \gamma_1(x_1 - A_1(x), \partial\Omega_1) \neq 0.$$

Обозначим при каждом $x_2 \in \overline{\Omega}_2$ через $G(x_2)$ множество решений уравнения $x_1 = A_1(x)$; очевидно $G(x_2) \neq \emptyset$ — компакт в E_1 при каждом $x_2 \in \overline{\Omega}_2$.

Рассмотрим теперь некоторое определенное на $\partial\Omega_2$ вполне непрерывное невырожденное поле $x_2 - \Psi(x_2) : \partial\Omega_2 \to E_2$.

Т е о р е м а 2. *Пусть замыкания обеих областей Ω_1 и Ω_2 стягиваемы. Пусть существует вполне непрерывный по совокупности переменных оператор $F(x_1, x_2; \lambda)$: $G(x_2) \times \partial\Omega_2 \times [0, 1] \to E_2$, для которого $x_2 \neq F(x_1, x_2; \lambda)$, $\Psi(x_2) = F(x_1, x_2; 0)$ и $A_2(x) = F(x_1, x_2; 1)$. Тогда*

$$\gamma(x - Ax, \partial\Omega) = \gamma_1 \cdot \gamma(x_2 - \Psi(x_2), \partial\Omega_2).$$

Если такой оператор $F(x_1, x_2; \lambda)$ существует при $\overline{\Omega}_1 \times \partial\Omega_2 \times [0, 1]$, то утверждение теоремы 2 является лишь запутанной переформулировкой теоремы 1. Если (в условиях теоремы 2) $\gamma(x_2 - \Psi(x_2), \partial\Omega_2) \neq 0$, то уравнение $x - Ax$ имеет по крайней мере одно решение.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим оператор

$$\tilde{F}(x_1, x_2; \lambda) = \begin{cases} F(x_1, x_2; \lambda), & x_1 \in G(x_2),\ x_2 \in \partial\Omega_2,\ \lambda \in [0, 1]; \\ A_2(x), & x_1 \in \overline{\Omega}_1,\ x_2 \in \partial\Omega_2,\ \lambda = 1; \\ \Psi(x_2), & x_1 \in \overline{\Omega}_1,\ x_2 \in \partial\Omega_2,\ \lambda = 0. \end{cases}$$

Область определения этого оператора замкнута, в силу теоремы 18.3 из [4] существует продолжение оператора $\tilde{F}$ до вполне непрерывного оператора (сохраним за продолжением обозначение $\tilde{F}$), определенного на $\Omega^* = \{x_1 \in \overline{\Omega}_1,\ x_2 \in \partial\Omega_2,\ \lambda \in [0, 1]\}$.

Рассмотрим гомотопию $\Phi(x, \lambda) = \Phi_1(x, \lambda) + \Phi_2(x, \lambda)$ с компонентами

$$\Phi_1(x, \lambda) = x_1 - A_1(x), \quad \Phi_2(x, \lambda) = x_2 - \tilde{F}(x_1, x_2; \lambda).$$

Эта гомотопия, очевидно, невырождена на Ω^*, ее вторая компонента определяет гомотопию полей $x_2 - A_2(x)$ и $x_2 - \Psi(x_2)$ на $\partial\Omega_2$. Утверждение теоремы 2 следует из общих принципов теории вращения, так как $x - \Phi(x, 1) = x - Ax$, а поле $x - \Phi(x, 0)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1. ∎

4 Непрерывные ветви решений

Построения этого раздела проводятся в пространстве $\Lambda \times E$, где $\Lambda = [a, b]$ — это конечный отрезок вещественной оси, а E — некоторое банахово пространство. Справедливы обобщения на более общий случай, когда Λ — это произвольный связный компакт.

Пусть $G \subset E$ — ограниченное множество на границе которого ∂G определен вполне непрерывный оператор $A : \partial G \to E$, не имеющий неподвижных точек. Паре $\{A, G\}$ сопоставим целое число

$$\mu(A, G) = \begin{cases} 0, & \text{если } \operatorname{int} G = \emptyset; \\ \gamma(I - A, \partial[\operatorname{int} G]), & \text{если } \operatorname{int} G \neq \emptyset. \end{cases}$$

Здесь $\gamma(I - A, \partial[\operatorname{int} G])$, как обычно, — вращение вполне непрерывного поля $I - A$ на границе области $\operatorname{int} G$. Если G — ограниченная область, то $\mu(A, G) = \gamma(I - A, \partial G)$.

Пусть при каждом $\lambda \in \Lambda$ определено некоторое множество $\Omega_\lambda \in E$, причем все множества Ω_λ равномерно ограничены: $\Omega_\lambda \in B$, где $B \in E$ — некоторый шар.

Тогда в пространстве $\Lambda \times E$ определено множество

$$\Omega = \{\{\lambda, x\} : \ \lambda \in \Lambda, \ x \in \Omega_\lambda\}.$$

Это множество является графиком множественнозначной функции $\lambda \mapsto \Omega_\lambda$.

Пусть на $\partial\Omega \subset \Lambda \times E$ задан вполне непрерывный оператор $A(\lambda, x) : \Lambda \times E \to E$.

Теорема 3. *Пусть $A(\lambda, x) \neq x$ при $\{\lambda, x\} \in \partial\Omega$. Тогда характеристика $\mu(A, \Omega_\lambda)$ не зависит от $\lambda \in \Lambda$.*

Подчеркнем, что никакая "непрерывность"функции $\lambda \mapsto \Omega_\lambda$ в условиях теоремы 3 не предполагается. Условие $A(\lambda, x) \neq x$ на $\partial\Omega$ (граница берется в $\Lambda \times E$) сильнее условия $x \neq A(\lambda, x)$ на $\partial\Omega_\lambda$ при каждом λ (граница берется в E).

Пусть оператор $A(\lambda, x)$ определен на всем $\overline{\Omega}$ (а не только на $\partial\Omega$). Пусть $A(\lambda, x) \neq x$ на $\partial\Omega$, тогда определена характеристика $\mu = \mu(A, \Omega_\lambda)$; в силу теоремы 3 она не зависит от λ. Пусть $\mu \neq 0$. Тогда при каждом $\lambda \in \Lambda$ непусто множество $G(\lambda) \subset \operatorname{int} \Omega_\lambda$ нулей поля $x - A(\lambda, x)$.

Напомним, что множество $V \subset \Lambda \times E$ называется ([4]) непрерывной ветвью по λ (соединяющей множества $\{a, \Omega_a\}$ и $\{b, \Omega_b\}$), если непусто пересечение V с границей любой области в $\Lambda \times E$, содержащей $\{a, \Omega_a\}$ и не пересекающей $\{b, \Omega_b\}$.

Теорема 4. *Множество $\{\{\lambda, x\} : \ \lambda \in \Lambda, \ x \in G(\lambda)\}$ образует непрерывную ветвь.*

5 Доказательство теорем 3 и 4

Зафиксируем некоторое $\lambda_0 \in \Lambda$.

Лемма 1. *В условиях теоремы 3 существует $\varepsilon = \varepsilon(\lambda_0) > 0$ такое, что при $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon, \ \lambda \in \Lambda$ характеристика $\mu(A, \Omega_\lambda)$ одинакова.*

Теорема 3 следует из леммы 1 в силу компактности отрезка: покроем Λ окрестностями радиуса $\varepsilon(\lambda_0)$, выберем конечное подпокрытие, на всех окрестностях вращение одинаково. Следовательно, оно вообще не зависит от λ.

Доказательство леммы 1. Продолжим оператор $A(\lambda, x)$ с границы $\partial\Omega$ внутрь на все Ω; сохраним за продолжением обозначение $A(\lambda, x)$.

Допустим, что у оператора $A(\lambda_0, x)$ нет неподвижных точек на Ω_{λ_0} ($G(\lambda_0) = \emptyset$). Тогда при некотором $\varepsilon > 0$

$$x \neq A(\lambda, x), \quad |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon, \ \lambda \in \Lambda, x \in \Omega_\lambda.$$

В предположении противного найдутся последовательности $\lambda_n \to \lambda_0$ и $x_n \in \Omega_{\lambda_n}$ такие, что $\|x_n - A(\lambda_n, x_n)\| \to 0$. При этом последовательность $A(\lambda_n, x_n)$ без ограничения общности можно считать сходящейся. Поэтому x_n сходится к некоторому x^* и $A(\lambda_0, x^*) = x^*$.

Утверждение леммы для этого случая очевидно: $\mu(A, \Omega_\lambda) \equiv 0$ в соответствующей окрестности точки λ_0.

Пусть теперь $G(\lambda_0) \neq \emptyset$. Так как $A(\lambda, x) \neq x$ на $\partial\Omega$, то справедливо включение $G(\lambda_0) \subset \operatorname{int}\Omega_{\lambda_0}$. Рассмотрим некоторую окрестность $G_\delta(\lambda_0)$ компакта $G(\lambda_0)$. По предположению при малых $\delta > 0$ $G_\delta(\lambda_0)$ находится на положительном расстоянии от $\partial\Omega$, справедливо включение $G_\delta(\lambda_0) \subset \operatorname{int}\Omega_{\lambda_0}$. На множестве $\operatorname{int}\Omega_{\lambda_0} \backslash G_\delta(\lambda_0)$ оператор $A(\lambda_0, x)$ не имеет неподвижных точек, поэтому при λ близких к λ_0

$$A(\lambda, x) \neq x, \quad x \in \operatorname{int}\Omega_\lambda \backslash G_\delta(\lambda_0).$$

Но при λ близких к λ_0 и достаточно малом δ окрестность $G_\delta(\lambda_0)$ лежит внутри $\operatorname{int}\Omega_\lambda$. По построению $A(\lambda, x) \neq x, \ x \in \partial G_\delta(\lambda_0)$. Поэтому

$$\mu(A, \Omega_\lambda) = \gamma(x - A(\lambda, x), \partial G_\delta(\lambda_0)).$$

Все поля $x - A(\lambda, x)$ имеют на $\partial G_\delta(\lambda_0)$ одинаковое вращение: они гомотопны, их гомотопия задана полями $x - A(\lambda, x)$. ■

Теорема 4 является простым следствием теоремы 3. Рассмотрим произвольную область Π, содержащую $\{a, \Omega_a\}$ и не пересекающуюся с $\{b, \Omega_b\}$. Рассмотрим многозначный оператор $\lambda \mapsto \Omega_\lambda \cap \Pi$ и применим к нему теорему 3. Пусть $\{\{\lambda, x\} : \ \lambda \in \Lambda, \ x \in G(\lambda) \cap \partial\Pi\} = \emptyset$. При $\lambda = a$ характеристика $\mu(A, \Omega_\lambda \cap \Pi)$ ненулевая, а при $\lambda = b$ множество $\Omega_\lambda \cap \Pi$ пусто и $\mu(A, \Omega_\lambda \cap \Pi) = 0$. Полученное противоречие доказывает теорему 4. ■

6 Пример

С помощью теоремы 2 удобно исследовать вырожденные в главных приближениях уравнения. Приведем простой пример.

Рассмотрим задачу о 2π-периодических решениях уравнения

$$x'' = \sin\sqrt{|x|} + b(t). \tag{3}$$

Исследование этой задачи на бесконечности затрудняется вырожденностью линейной части x'' и невыполнением условий типа Ландесмана-Лазера для нелинейности $\sin\sqrt{|x|}$.

Т е о р е м а 5. *Пусть*

$$|\bar{b}| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} b(t)\, dt \right| < 1.$$

Тогда задача (3) *имеет бесконечное число различных* 2π*-периодических решений.*

Рассмотрим пространство $L^2 = L^2([0, 2\pi], R^1)$. Это пространство представим в виде прямого произведения одномерного подпространства E_2 функций констант и его ортогонального дополнения E_1. Задача о 2π-периодических решениях (3) эквивалентна уравнению

$$x = \Gamma\left(x - \sin\sqrt{|x|} - b(t)\right). \tag{4}$$

Здесь

$$\Gamma u(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+1}\int_0^{2\pi}\cos k(t-s)u(s)\,ds \tag{5}$$

— линейный оператор, ставящий в соотвествие сужению на отрезок $[0, 1]$ каждой 2π-периодической суммируемой функции $u(t)$ сужение на этот же отрезок единственного 2π-периодического решения уравнения $-x'' + x = u(t)$. Этот оператор действует из L^2 в C и вполне непрерывен.

Пусть P_i — ортопроекторы на E_i;

$$P_2 x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\,dt, \quad P_1 x = x - P_2 x.$$

Справедливы равенства $\Gamma P_2 = P_2\Gamma = P_2$ и $\Gamma P_1 = P_1\Gamma$; $P_2 b(t) = \bar{b}$.

Уравнение (4) в проекциях на подпространства E_i эквивалентно системе

$$\begin{cases} P_2 x = P_2 x - P_2(\sin\sqrt{|x|}) - \bar{b}, \\ P_1 x = \Gamma P_1 x - \Gamma P_1(\sin\sqrt{|x|} + b(t)). \end{cases} \tag{6}$$

Рассмотрим в L^2 цилиндр $\Omega^n = \Omega_1 \times \Omega_2^n$, где Ω_1 — шар в E_1 некоторого больщого радиуса R с центром в начале координат, а Ω_2^n — отрезок

$$\left[(2n\pi + \frac{\pi}{2})^2, (2n\pi + \frac{3\pi}{2})^2\right].$$

Так как каждое решение системы (6) удовлетворяет оценке

$$\|P_1 x\|_C < r = 1 + \|\Gamma\|_{L^2\to C}\cdot\|(I - \Gamma P_1)^{-1}\|_{E_1\to E_1}\cdot\|1 + |b(t)|\,\|_{L^2},$$

то на $\partial\Omega_1$ поле $P_1 x - \Gamma P_1 x + \Gamma P_1(\sin\sqrt{|x|} + b(t))$ невырождено.

Для малого любого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших значениях n, и $\|h(t)\|_C \le r$ справедливы неравенства

$$-\varepsilon + \frac{\pi}{2} + 2n\pi < \sqrt{|(2n\pi + \frac{\pi}{2})^2 + h(t)|} < 2n\pi + \frac{\pi}{2} + \varepsilon$$

и

$$-\varepsilon + \frac{3\pi}{2} + 2n\pi < \sqrt{|(2n\pi + \frac{3\pi}{2})^2 + h(t)|} < 2n\pi + \frac{3\pi}{2} + \varepsilon,$$

поэтому из $|\bar b| < 1$ следуют при $\bar b < \cos\varepsilon$ неравенства

$$\int_0^{2\pi} \sin\sqrt{|(2n\pi + \frac{\pi}{2})^2 + h(t)|}\,dt + \bar b > 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin\sqrt{|(2n\pi + \frac{3\pi}{2})^2 + h(t)|}\,dt + \bar b < 0.$$

Следовательно, одномерное поле $P_2 \sin\sqrt{|x|} + \bar b$ на $\partial\Omega_2^n$ при $P_1 x$, удовлетворяющих (6), гомотопно полю "$+1$ в левом конце, -1 в правом имеющем вращение -1. В силу теоремы 2 при всех больших натуральных n в цилиндре Ω^n есть по крайней мере одно 2π-периодическое решение уравнения (3). ■

7 Об абстрактных операторных уравнениях, главная линейная часть которых вырождена на бесконечности

В этом разделе предлагаются обобщения теорем типа Ландесмана-Лазера для уравнений в абстрактных банаховых пространствах, они могут быть получены как следствия теоремы 1.

Пусть в банаховом пространстве E задано вполне непрерывное векторное поле Φx. Пусть это поле асимптотически линейно и представимо в виде $\Phi x = x - Ax - Bx$, где A — линейный вполне непрерывный оператор, а B — нелинейный ограниченный (и также вполне непрерывный). Нас будет интересовать индекс $\operatorname{ind}\Phi$ на бесконечности (см. [4]) поля Φx.

Если 1 — регулярная точка для оператора A, то $\operatorname{ind}\Phi = (-1)^\beta$, где β — сумма кратностей всех вещественных собственных значений оператора A, больших 1.

Далее предполагается, что 1 — это собственное значение оператора A и что ему отвечает конечномерное подпространство $E_1 = Ker(I - A)$, состоящее из собственных векторов оператора A (присоединенных векторов нет), то есть $E_1 = \{e \in E : \ e = Ae\}$. Через E_2 обозначено инвариантное для оператора A дополнение E_1 до E, через P_1 и P_2 обозначаются соответствующие проекторы.

Пусть оператор B также имеет главную часть — положительно однородный с показателем однородности 0 оператор L:

$$L\lambda x = Lx, \quad \lambda > 0,\ x \in E;$$

причем $Cx = Bx - Lx$ удовлетворяет следующему условию малости "на бесконечности": при любом положительном c

$$\lim_{R\to+\infty} \sup_{e_1\in E_1,\ \|e_1\|=1,\ h\in E,\ \|h\|<c} \|P_1 C(Re_1 + h)\| = 0. \tag{7}$$

Назовем такой оператор B *асимптотически однородным (относительно E_1)*.

Основным примером асимптотически однородного оператора B является оператор Гаммерштейна $Bx = A\,f(t,x)$. Пусть A — линейный вполне непрерывный оператор в

$L^2 = L^2(G, I\!R^1)$, а непрерывная по совокупности переменных $t \in G$, $x \in I\!R^1$ скалярнозначная функция $f(t,x)$ удовлетворяет условиям Ландесмана-Лазера

$$\lim_{R\to+\infty} f(t,R) = f^+(t), \quad \lim_{R\to-\infty} f(t,R) = f^-(t).$$

Если подпространство функций E_1 удовлетворяет условию

$$\text{(8)} \qquad \operatorname{mes}\{t \in G: \ e(t) = 0\} = 0, \quad e(t) \in E_1, \ e(t) \not\equiv 0,$$

то оператор Гаммерштейна Bx асимптотически однороден. При этом $Lx = Al(t,x)$, где $l(t,x) = f^+(t)$ при $x > 0$, $l(t,x) = f^-(t)$ при $x < 0$ и $l(t,0) = f(t,0)$. Этот факт (или его переформулировки) использовался в большинстве работ по уравнениям с нелинейностями типа Ландесмана-Лазера.

В последующих разделах будут приведены новые примеры асимптотически однородных операторов типа Гаммерштейна, возникающих в нелинейных краевых задачах.

Вернемся к изучению поля Φx.

Т е о р е м а 6. *Пусть конечномерное непрерывное поле P_1Le_1, определенное на сфере $U = \{e_1 \in E_1, \ \|e_1\| = 1\}$, невырождено, а оператор Lx непрерывен при $x \in U \subset E$. Тогда определен* $\operatorname{ind}\Phi$ *и*

$$\operatorname{ind}\Phi = (-1)^\beta \gamma(P_1L, U).$$

Эта теорема является существенным обобщением основного результата из [6]. Она по логике близка к теоремам о вычислении индекса особой точки по следующему за линейным невырожденному приближению. Отметим, что условие (8) является условием непрерывности оператора $l(t, x(t))$ на сфере U в пространстве L^2.

Доказательство. Мы укажем цилиндр в пространстве E, вне которого заведомо нет особых точек векторного поля Φx, и для вычисления вращения на границе которого применима теорема 1. Этот цилиндр является произведением двух шаров B_i, с центрами в начале координат соответствующего пространства E_i. Радиусы шаров выбираются следующим образом. Вначале выбирается такой шар $B_2 = \{\|x_2\| \le c\} \subset E_2$ в пространстве E_2, вне которого у уравнения $P_2x = AP_2x + P_2B(x_1 + x_2)$ нет решений при любом $x_1 \in E_1$. Существование такого числа c следует из ограниченности оператора B, и структуры спектра вполне непрерывного линейного оператора A. Далее, выбирается такое число $\varepsilon > 0$, чтобы $\|P_1Le_1\| > \varepsilon$ $(e_1 \not\equiv 0)$. По числам c и ε выбирается такое R_0, чтобы при всех h $(\|h\| \le c)$, $e_1 \in U$ и $R \ge R_0$ были выполнены неравенства

$$\|P_1C(Re_1 + h)\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

(в силу условия (7)) и

$$\|P_1L(Re_1 + h) - P_1Le_1\| \equiv \|P_1L(e_1 + \frac{h}{R}) - P_1Le_1\| \le \frac{\varepsilon}{3}$$

(в силу компактности сферы U). Тогда на цилиндре $B_2 \times B_1$ $(B_1 = \{\|x_1\| \le R\} \subset E_1)$ выполнены все условия теоремы 1 и

$$\gamma(\Phi x, \partial(B_2 \times B_1)) = \gamma(P_1\Phi, \partial B_1)\, \gamma(P_2\Phi, \partial B_2).$$

Поэтому из равенств $\gamma(P_2\Phi, \partial B_2) = (-1)^\beta$, $P_1\Phi x = P_1Bx$ и $\gamma(P_1\Phi, \partial B_1) = \gamma(P_1L, U)$ следует утверждение теоремы 6. ∎

8 Приложения теоремы 6.

В этом разделе приведены два примера приложения теоремы 6 к теоремам существования. Могут быть сформулированы также теоремы об асимптотических точках бифуркации для задач с параметром, вытекающие из теоремы 6 и принципа смены индекса (см. [4]).

Рассмотрим 2π-периодическую задачу для уравнения

$$x'' + x = g(x) + f(x) + b(t), \quad b(t) \equiv b(2\pi + t). \tag{9}$$

Пусть нелинейность $g(x)$ — это ограниченная четная функция, а (также ограниченная) нелинейность $f(x)$ удовлетворяет условиям Ландесмана-Лазера

$$\lim_{R\to+\infty} f(R) = f^+, \quad \lim_{R\to-\infty} f(R) = f^-. \tag{10}$$

Пусть $g(x)$ удовлетворяет “на бесконечности” следующему условию Липшица

$$|g(x) - g(y)| \le d(r)|x - y|, \quad x,\, y > r > 0, \tag{11}$$

причем

$$\lim_{r\to\infty} d(r) = 0. \tag{12}$$

Примерами ограниченных нелинейностей $g(x)$, удовлетворяющих (11), (12) и не затухающих к нулю на бесконечности, являются, например, функции $\sin|x|^\alpha,\ 0 < \alpha < 1$. Если функция $g(x)$ гладкая при больших x, то условия (11), (12) эквивалентны $g'(x) \to 0,\ x \to \infty$.

Л е м м а 2. *Пусть P_1 — это ортопроектор в $L^2(0, 2\pi)$ на двумерное подпространство E_1 функций вида $a\sin(t + \varphi)$. Тогда оператор $Cx = g(x(t))$ удовлетворяет условию* (7).

Доказательство леммы 2. Сначала отметим "почти тривиальное"тождество

$$\int_0^{2\pi} \sin(t + \varphi_1)\, g(R\sin(t + \varphi_2))\, dt = 0, \tag{13}$$

справедливое при всех $r,\ \varphi_1$ и φ_2. Это тождество следует из равенства

$$\int_0^{\pi} \sin(t + \varphi_1)\, g(R\sin(t + \varphi_2))\, dt = -\int_{\pi}^{2\pi} \sin(t + \varphi_1)\, g(R\sin(t + \varphi_2))\, dt.$$

Пусть $\|h(t)\|_{L^2} \le c,\ |g(x)| \le c_1$. Равенство (7) следует из соотношений

$$\left|\int_0^{2\pi} \sin(t + \varphi_1)\, g(R\sin(t + \varphi_2) + h(t))\, dt\right| =$$

$$= \left|\int_0^{2\pi} \sin(t + \varphi_1)\ \left[g(R\sin(t + \varphi_2) + h(t)) - g(R\sin(t + \varphi_2))\right]\, dt\right| =$$

$$= \left| \int_{\{|h(t)|>\sqrt{R}\}} + \int_{\{|h(t)|\le\sqrt{R},\ |\sin(t+\varphi_2)|\le\frac{2}{\sqrt{R}}\}} + \int_{\{|h(t)|\le\sqrt{R},\ |\sin(t+\varphi_2)|>\frac{2}{\sqrt{R}}\}} \right| \le$$

$$\le 2c_1\frac{c^2}{R} + 2c_1 \operatorname{mes}\{t:\ |\sin(t+\varphi_2)| \le \frac{2}{\sqrt{R}}\} +$$

$$+ \int_{\{|h(t)|\le\sqrt{R},\ |\sin(t+\varphi_2)|>\frac{2}{\sqrt{R}}\}} |g(R\sin(t+\varphi_2)+h(t)) - g(R\sin(t+\varphi_2))|\, dt \le$$

$$\le c_1\frac{c^2}{R} + O(\frac{1}{\sqrt{R}}) + 2\pi\, d(\sqrt{R}) \to 0.$$

■

Лемма 2 позволяет доказывать различные утверждения о 2π-периодической задаче для уравнения (9). Для этого надо перейти от этой задачи к операторному уравнению $x = \Gamma(2x - f(x) - g(x) - b(t))$ (где Γ — это оператор (5)) и применить теорему 6 для вычисления индекса на бесконечности поля $x - \Gamma(2x - f(x) - g(x) - b(t))$. Вычисление вращения соответствующего двумерного поля проведено в [6].

Приведем один конкретный пример (для случая $g(t) \equiv 0$ соответствующее утверждение было приведено в [7]).

Т е о р е м а 7. *Пусть $f(x)$ удовлетворяет условиям* (10), *а четная ограниченная функция $g(x)$ — условиям* (11), (12), *причем*

$$|\int_0^{2\pi} b(t)\, e^{it}\, dt| < 2|f^+ - f^-|.$$

Тогда уравнение (9) *имеет по крайней мере одно 2π-периодическое решение.*

Рассмотрим теперь двухточечную краевую задачу

$$x'' + 4x = g(x) + f(x) + b(t), \quad x(0) = x(\pi) = 0. \tag{14}$$

Т е о р е м а 8. *Пусть $f(x)$ удовлетворяет условиям* (10), *а четная ограниченная функция $g(x)$ — условиям* (11), (12), *причем*

$$\left| \int_0^{\pi} b(t)\, \sin 2t\, dt \right| < |f^+ - f^-|. \tag{15}$$

Тогда задача (14) *имеет по крайней мере одно решение.*

Для доказательства теоремы 8 достаточно установить равенство (7) для оператора $Cx = g(x(t))$ и ортопроектора P_1 на одномерное подпространство E_1 функций вида $a\sin 2t,\ t \in [0,\pi]$ и воспользоваться теоремой 6. Равенство (7) доказывается аналогично лемме 2, оно следует из тождества

$$\int_0^{\pi} \sin 2t\, g(R\sin 2t)\, dt = 0, \tag{16}$$

аналогичного (13), в силу условий (11) и (12).

При применении теоремы 6 необходимо установить неравенство $\gamma(P_1L, U) \neq 0$. В случае одномерного E_1 сфера U состоит из двух точек $\pm e_1$, где $e_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin 2t$, и

$$P_1L(\pm e_1) = \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\pi} b(t)\,\sin 2t\,dt \pm (f^+ - f^-)\right] e_1.$$

Поэтому условие (15) гарантирует неравенство $\gamma(P_1L, U) \neq 0$. ■

Вместо (14) можно рассмотреть задачу

$$x'' + n^2 x = g(x) + f(x) + b(t), \quad x(0) = x(\pi) = 0.$$

с четными натуральными $n \neq 2$. Рассмотреть случай нечетного n и правой части вида "четная + нелинейность Ландесмана-Лазера"не удается: при нечетных n нет аналога тождества (16). Теорема 8 для случая $g(x) \equiv 0$ известна давно (см., например, [8]).

Список литературы

[1] Bobylev N.A., Burman Yu.M., Korovin S.K. *Approximation Procedures in Nonlinear Oscillation Theory*, de Gruyter, Berlin, New-York, 1994

[2] Лере Ж., Шаудер Ю. Топология и функциональные уравнения. *Успехи Математических Наук*, **1**, вып. 3–4 (1946)

[3] Zeidler E. *Beiträge zur Theorie und Praxis freier Randwertaufgaben*, Academie-Verlag, Berlin, 1971

[4] Красносельский М.А., Забрейко П.П. Геометрические методы нелинейного анализа, М.: Наука, 1975

[5] Красносельский М.А. *Топологические методы в теории нелинейных операторных уравнений*, М.: Гостехиздат, 1956

[6] Krasnosel'skii A.M. On bifurcation points of equations with Landesman-Lazer type nonlinearities, *Nonlinear Analysis. Theory, Methods & Applications*, **18**, 12 (1992) 1187-1199

[7] Mawhin J., Willem M. *Critical Point Theory and Hamiltonian Systems*, Springer, Berlin, 1989

[8] Fučik S. *Solvability of Nonlinear Equations and Boundary Value Problems*, Prague, 1980