Блиман П.-А., Сорин М.,

Национальный исследовательский институт по информатике и автоматике, Реконкур, Франция

Владимиров А.А., Красносельский А.М.[1]

Институт проблем передачи информации РАН, Москва, Россия

Вынужденные колебания в системах управления с гистерезисом

1. Предлагается общий подход к исследованию нелинейного резонанса в системах управления, включающих линейное звено и нелинейное звено с гистерезисом. Используется специальное свойство нелинейных звеньев, которым обладают важные классы гистерезисных нелинейностей. Получены условия существования вынужденных периодических колебаний и (для систем с параметром) условия возникновения нелинейного резонанса на бесконечности.

В начале 70х годов были получены первые результаты (E.N.Landesman и A.C.Lazer [1]) о разрешимости уравнений, вырожденных на бесконечности в линейном приближении. Условия разрешимости формулировались в терминах поведения на бесконечности ограниченых нелинейностей. Эта область нелинейного анализа развивалась трудами многих ученых (см., например, S. Fučik [2], J. Mawhin и M. Willem [3]). В основном рассматривались уравнения с оператором суперпозиции $x(t) \mapsto f(t, x(t))$, порожденным функцией f, удовлетворяющей условиям Ландесмана-Лазера

$$\lim_{x\to+\infty} f(t,x) = f^+(t), \quad \lim_{x\to-\infty} f(t,x) = f^-(t).$$

Для таких нелинейностей выполено следующее основное свойство:

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{\|h(t)\|_{E_1}\le c} \|f[t, Re(t) + h(t)] - F(t)\|_{E_2} = 0. \tag{1}$$

[1]Работа частично поддержана грантом MD4000 Международного Научного Фонда (ISF) и грантом 93-01-00884 Российского Фонда Фундаментальных Исследований

Это свойство (при подходящем выборе функций $e(t)$ и $F(t) = F(t; e)$ и пространств E_1 и E_2) играет основную роль при доказательстве различных утверждений для уравнений с нелинейностью $f(t, x)$ и позволяет вычислять топологические характеристики соответствующих векторных полей (индекс на бесконечности). Эти характеристики определяют важные свойства изучаемых систем.

Функции $e(t)$ в формуле (1) определяются главной линейной частью изучаемых уравнений. В приложениях к задаче о T-периодических вынужденных колебаниях равенство (1) важно при $e(t) = const$ и $e(t) = \sin(k\omega t + \varphi)$. Здесь и далее k — некоторое натуральное число, $\omega = 2\pi T^{-1}$ — ведущая частота. Для таких функций $e(t)$ будут сформулированны соответсвующие теоремы. Могут быть рассмотрены и другие функции $e(t)$, необходима лишь справедливость условий типа $mes\{t: \ e(t) = 0\} = 0$ или $mes\{t: \ \dot{e}(t) = 0\} = 0$. Аналоги (1) верны для различных гистерезисных моделей (общая теория построена в [4]). Первые результаты о вынужденных T-периодических колебаниях с гистерезисными нелинейностями типа Ландесмана-Лазера были приведены в [5]. Рассмотренные там *гистероны с насыщением* удовлетворяют естественному аналогу (1) (см. раздел 2 настоящей статьи).

Ниже изучаются резонансные задачи о вынужденных T-периодических колебаниях в системах, динамика которых описывается уравнением $L(p)x = M(p)G(x) + b(t), \ \ p = d/dt$ с нелинейностью G (она может быть гистерезисного или функционального типа, включать запаздывания и производные) удовлетворяющей аналогу (1). Обычными методами (см., например, [2, 6]) удается вычислить индекс на бесконечности соответствующих векторных полей; это приводит к теоремам о существовании вынужденных колебаний и о нелинейном резонансе.

Основная часть статьи состоит в описании конкретных классов моделей гистерезиса, удовлетворяющих равенствам типа (1). Описаны гистероны с насыщением, рассмотрена гистерезисная модель сухого трения, предложенная П.-А. Блиманом и М. Сорином [8]. Далее, рассмотрены обыкновенный упор, неидеальное реле и модели Прейсаха. Для систем управления с такими нелинейностями возможно получение результатов о вынужденных колебаниях. Статья завершается теоремами существования и теоремами о нелинейном резонансе для систем с сухим трением и систем с упором.

В (1) в качестве пространств E_1 и E_2 используются различные пространства функций, определенных на $[0, T]$ (например, L^p, C^k, $W^{k,p}$). Выбор конкретного пространства определяется свойствами рассматриваемой модели гистерезиса. Эквивалентные операторные уравнения обычно имеют две компоненты: уравнение замкнутости системы и уравнение периодичности состояния гистерезиса (по поводу эквивалентных операторных уравнений см. [7]).

2. Начнем с простейшей гистерезисной нелинейности — *гистерона*. Рассмотрим на плоскости $\{x, g\}$ графики двух непрерывных функций $H_1(x)$ и $H_2(x)$ и предположим, что $H_1(x) < H_2(x)$ $(x \in \mathbb{R})$. Пусть множество $\Omega = \{\{x, g\} : x \in \mathbb{R}, H_1(x) \leq g \leq H_2(x)\}$ является объединением континуального семейства непересекающихся графиков непрерывных функций $g_\alpha(x)$, где α — некоторый параметр. Каждая функция $g_\alpha(x)$ предполагается определенной на своем интервале $[\eta^1_\alpha, \eta^2_\alpha]$ ($\eta^1_\alpha < \eta^2_\alpha$ для каждого α), причем $g_\alpha(\eta^1_\alpha) = H_1(\eta^1_\alpha)$, $g_\alpha(\eta^2_\alpha) = H_2(\eta^2_\alpha)$. Это означает, что концы графиков функций $g_\alpha(x)$ лежат на графиках функций $H_1(x)$ и $H_2(x)$.

Выход $\mathcal{H}(g_0)x(t)$ $(t \geq 0)$ (он также является и состоянием гистерона в момент времени t) определен для монотонных при $t \geq t_0$ входах формулой

$$\mathcal{H}(g_0)u(t) = \begin{cases} g_\alpha(u(t)), & \text{если} \quad \eta^1_\alpha \leq u(t) \leq \eta^2_\alpha, \\ H_1(u(t)), & \text{если} \quad u(t) \leq \eta^1_\alpha, \\ H_2(u(t)), & \text{если} \quad \eta^2_\alpha \leq u(t). \end{cases}$$

Значение α выбирается так, что $g_0 = g_\alpha(u(t_0))$. Для кусочно монотонных входов выход конструируется с помощью полугруппового тождества. Кусочно монотонные входы плотны в C^0, оператор $\mathcal{H}(g_0)u(t)$ продолжается на все C^0 по непрерывности. Доказательство корректности этой процедуры см. в [4].

Гистерон $\mathcal{H}(g_0)u(t)$ определен для любого непрерывного входа и для любого допустимого начального состояния $g_0 \in [H_1(x(t_0)), H_2(x(t_0))]$; он непрерывен как оператор из $\mathbb{R} \times C^0$ в C^0.

Введем обозначения

$$u_*(t) = u_*(t, \varphi, k) = \begin{cases} \sin(k\omega t + \varphi), & k \geq 1, \\ 1, & k = 0, \end{cases}$$
$$u_R(t) = u_R(t, \varphi, h, k) = Ru_*(t, \varphi, k) + h(t),$$
$$d_1(R) = H_1(u_R(0, \varphi, h)), \quad d_2(R) = H_2(u_R(0, \varphi, h)).$$

Теорема 1. *Пусть функции $H_1(x)$ и $H_2(x)$ удовлетворяют условиям насыщения*

$$\lim_{x \to \pm\infty} H_1(x) = \lim_{x \to \pm\infty} H_2(x) = g_\pm \tag{2}$$

для некоторых вещественных g_+ и g_-. Тогда

$$\lim_{R \to \infty} \sup_{\|h(t)\|_{L^1} \leq c,\ g_0 \in [d_1(R), d_2(R)]} \|\mathcal{H}(g_0)u_R(t) - f(t)\|_{L^1} = 0 \tag{3}$$

где

$$f(t) = \frac{g_+ + g_-}{2} + \frac{g_+ - g_-}{2} \operatorname{sgn} u_*(t, \varphi, k).$$

Супремум по начальному состоянию g_0 в (3) берется по всем допустимым для входа $Ru_*(t, \varphi, k) + h(t)$ начальным состояниям $g_0 \in [d_1, d_2]$. Доказательство теоремы 1 близко к доказательству аналогичных утверждений для функциональных нелинейностей (см. [2, 6]).

3. В этом разделе рассматривается гистерезисная модель сухого трения (см. [8]). В этой модели состояние $\mathbf{x}$ гистерезисной нелинейности — это n-мерный вектор, вход и выход — скаляры.

Рассмотрим устойчивую квадратную $n \times n$ матрицу $\tilde{A}$ и два n-мерных вектора $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$. Через $(\cdot, \cdot)$ обозначено скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$.

Пусть даны абсолютно непрерывный скалярнозначный вход $u(t)$, $t \geq 0$ и начальное состояние $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Выход $\mathcal{F}(\mathbf{x}_0)u(t)$ определяется следующими формулами. Пусть $\mathbf{x}(t)$ — решение уравнения $\dot{\mathbf{x}} = \tilde{A}\mathbf{x}(t)|\dot{u}(t)| + \dot{u}(t)\,\mathbf{b}$, удовлетворяющее $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$. Тогда $\mathcal{F}(\mathbf{x}_0)u(t) = (\mathbf{c}, \mathbf{x}(t))$.

Т е о р е м а 2. *При $k \geq 1$ справедливо равенство:*

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{\|\mathbf{x}_0\|,\|h(t)\|_{W^{1,1}}\leq c} \|\mathcal{F}(\mathbf{x}_0)(Ru_*(t)+h(t))+(\mathbf{c},\tilde{A}^{-1}\mathbf{b})\ \mathrm{sgn}\ \dot{u}_*(t)\|_{L^1}=0.$$

4. Гистерон (см. раздел 2) называется *обыкновенным упором*, если

$$H_1(x)\equiv -1,\ \ H_2(x)\equiv 1;\quad g_\alpha = x-\alpha,\quad \alpha-1\leq x\leq \alpha+1,\quad \alpha\in\mathbb{R}.$$

Через $\mathcal{S}(g_0)$ обозначен соответствующий гистерезисный оператор. Пространство состояний g упора является интервалом $[-1,1]$.

Т е о р е м а 3. *При $k \geq 1$ справедливо следующее равенство:*

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{\|h(t)\|_{W^{1,1}}\leq c,\ g_0\in[-1,1]} \|\mathcal{S}(g_0)u_R(t)-\mathrm{sgn}\ \dot{u}_*(t)\|_{L^1}=0.$$

5. Обозначим через $\mathcal{R}=\mathcal{R}(\alpha,\beta)$ неидеальное реле с переключениями в положениях α и β. Реле определено для всех непрерывных входов и начальных состояний $r_0\in\{0,1\}$ посредством формул

$$\mathcal{R}(\alpha,\beta)u(t)=\begin{cases} 0, & \text{если}\ \ u(t)\leq\beta;\\ 1, & \text{если}\ \ u(t)\geq\alpha;\\ 0, & \text{если}\ \ u(t)\in(\beta,\alpha)\ \text{и}\ u(\tau)=\beta;\\ 1, & \text{если}\ \ u(t)\in(\beta,\alpha)\ \text{и}\ u(\tau)=\alpha\end{cases}$$

где $\tau=\sup\{s:\ \ s\leq t,\ u(s)=\beta\ \ \text{или}\ \ u(s)=\alpha\}$ — это значение времени последнего переключения. Если это τ не определено (то есть $u(s)\in(\beta,\alpha)$ для всех $s<t$), то $\mathcal{R}(\alpha,\beta)u(t)\equiv r_0$. Так как $\mathcal{R}u(t)=1$ при $u(t)>\alpha$ и $\mathcal{R}u(t)=0$ при $u(t)<\beta$, то верна следующая теорема.

Т е о р е м а 4. *Справедливо следующее равенство:*

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{\alpha,\beta,\|h(t)\|_{L^1}\leq c} \|\mathcal{R}u_R(t)-\frac{1}{2}(1+\mathrm{sgn}\,u_*(t,\varphi,k))\|_{L^1}=0.$$

Неидеальное реле обладает рядом "плохих"свойств, затрудняющих изучение уравнений с реле: пространство состояний невыпукло, $\mathcal{R}$ не действует в C^0, $\mathcal{R}$ разрывен как оператор из C^r в L^p и т.д.

Из теоремы 4 следует ее аналог для модели Прейсаха.

Пусть Ω — ограниченное измеримое множество на плоскости $\{\alpha, \beta\}$. Пусть на Ω задана некоторая весовая функция $\rho(\alpha, \beta)$. Выход из оператора, описывающего модель Прейсаха, задается равенством

$$\mathcal{P}(x)u(t) = \int_\Omega \rho(\alpha, \beta)\, \mathcal{R}(\alpha, \beta)u(t)\, d\alpha\, d\beta.$$

Состояниями x преобразователя Прейсаха могут быть выбраны состояния всех реле $\mathcal{R}(\alpha, \beta)$, то есть характеристические функции подмножеств Ω (возможны и другие пространства состояний, см. [9]).

Теорема 5. Справедливо следующее равенство:

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{\|h(t)\|_{L^1}\le c} \|\mathcal{P}(x_0)u_R(t) - \frac{1}{2}(1 + \operatorname{sgn} u_*(t, \varphi, k)) \int_\Omega \rho(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta\|_{L^1} = 0.$$

6. Рассмотрим систему, динамика которой описывается уравнением

$$L(\frac{d}{dt})x = M(\frac{d}{dt})\,[\mathcal{G}(g_0)x(t) + b(t)] \tag{4}$$

или аналогичным уравнением с параметром

$$L(\frac{d}{dt}; \lambda)x = M(\frac{d}{dt}; \lambda)\,[\mathcal{G}_\lambda(g_0)x(t) + b(t; \lambda)]\,. \tag{5}$$

Здесь L и M — это вещественные взаимно простые многочлены с постоянными коэффициентами:

$$L(p) = p^l + a_1 p^{l-1} + \ldots + a_l, \quad M(p) = b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \ldots + b_m,$$

причем $l > m$. Через $\mathcal{G}$ обозначена одна из гистерезисных нелинейностей, рассмотренных выше.

В случае уравнения (5) предполагается, что коэффициенты многочленов непрерывно зависят от λ и нелинейность непрерывна по совокупности переменных "вход + начальное значение + параметр". Предполагается также, что в этом случае период T — общий для всех значений λ. Последнее ограничение может быть снято заменой времени t.

Если многочлен $L(p)$ не имеет корней вида $\frac{2k\pi i}{T}$ при целых значениях k и $i^2 = -1$, то (см., например, [10, 11]) уравнение (4) с непрерывной нелинейностью $\mathcal{G}$ имеет по крайней мере одно T-периодическое решение и множество всех таких решений *a priori* ограничено.

Пусть множество начальных состояний гистерезиса $\mathcal{G}(g_0)$ является конечномерным пространством $\mathbb{R}^q$ ($q = n$ для $\mathcal{G} = \mathcal{F}$; $q = 1$ для $\mathcal{G} = \mathcal{S}$).

Теорема 6. *Пусть многочлен $L(p)$ имеет пару корней $\pm\frac{2s\pi i}{T}$, где s — натуральное число, и пусть он не имеет других корней такого вида. Пусть $\mathcal{G} = \mathcal{F}$ и*

$$\frac{\pi}{T}\left|\int_0^T b(t)e^{\frac{2s\pi i}{T}t}dt\right| < 2|(\mathbf{c}, \tilde{A}^{-1}\mathbf{b})|.$$

Тогда уравнение (4) имеет по крайней мере одно T-периодическое решение. Пусть $\mathcal{G} = \mathcal{S}$ и

$$\frac{\pi}{T}\left|\int_0^T b(t)e^{\frac{2s\pi i}{T}t}dt\right| < 2.$$

Тогда уравнение (4) имеет по крайней мере одно T-периодическое решение.

7. В этом разделе предложены теоремы о нелинейном резонансе в системах управления с гистерезисными нелинейностями, с сухим трением и с упором. Вначале напомним определение *асимптотической точки бифуркации*, предложенное в начале 50х М.А. Красносельским (см. [10]).

Определение 1. *Пусть дано уравнение $x = F(x; \lambda)$ с вещественным параметром $\lambda \in \Lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ в банаховом пространстве. Значение $\lambda_0 \in \Lambda$ параметра называется асимптотической точкой бифуркации, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\lambda = \lambda(\varepsilon) \in \Lambda \bigcap (\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)$ такое, что уравнение $x = F(x; \lambda)$ имеет по крайней мере одно решение x_λ, удовлетворяющее $\|x_\lambda\| > \varepsilon^{-1}$.*

М.А. Красносельский предложил важный топологический метод анализа асимптотических точек бифуркации — *принцип смены индекса.* С помощью этого принципа доказан ряд теорем о возникновении в системах нелинейного резонанса.

Пусть опять вход $b(t;\lambda)$ в систему (5) T-периодический.

Теорема 7. *Пусть свободный член $a_l(\lambda)$ многочлена $L(p;\lambda)$ равен нулю при $\lambda=\lambda_0$ и принимает значения обоих знаков в каждой окрестности точки λ_0. Пусть гистерезисная нелинейность $\mathcal{G}$ непрерывна из $W^{1,1}$ в C^0 и пусть пространство состояний нелинейности $\mathcal{G}$ является конечномерным линейным пространством. Тогда λ_0 — это асимптотическая точка бифуркации для T-периодической задачи для* (5).

В условиях этой теоремы для $\lambda=\lambda_0$ число 1 является собственным значением нечетной кратности для ведущей (на бесконечности) линейной части задачи и поэтому теорема может быть получена как следствие общих теорем М.А. Красносельского [10].

Ниже мы формулируем теоремы для уравнений с сухим трением и с упором. В условиях этих теорем от параметра зависят только коэффициенты многочленов L и M и вход $b(t)$. Эти теоремы могут быть модифицированы для случая, когда нелинейность также зависит от параметра. Обе последующие теоремы относятся к случаю, когда многочлен $L(p;\lambda_0)$ имеет пару корней вида $\pm\frac{2s\pi i}{T}$ для натурального s и не имеет других корней такого вида. В этом случае при $\lambda=\lambda_0$ главная линейная часть имеет 2-мерное вырождение и задача о нелинейном резонансе не может быть исследована общими методами.

Теорема 8. *Пусть $L(\frac{2s\pi i}{T};\lambda)\equiv 0$ при значениях параметра из некоторой окрестности точки λ_0. Пусть функция*

$$\varphi_s^{\mathcal{F}}(\lambda)=\frac{\pi}{T}\Big|\int_0^T b(t;\lambda)e^{\frac{2s\pi i}{T}t}\,dt\Big|-2|(\mathbf{c},\tilde{A}^{-1}\mathbf{b})|$$

принимает значения обоих знаков в каждой окрестности точки λ_0. Тогда λ_0 является асимптотической точкой бифуркации для T-периодической за-

дачи для (5) *с* $\mathcal{G} = \mathcal{F}$. *Пусть функция*

$$\varphi_s^{\mathcal{S}}(\lambda) = \frac{\pi}{T} \left| \int_0^T b(t;\lambda) e^{\frac{2s\pi i}{T} t}\, dt \right| - 2$$

принимает значения обоих знаков в каждой окрестности точки λ_0. *Тогда* λ_0 *является асимптотической точкой бифуркации для* T*-периодической задачи для* (5) *с* $\mathcal{G} = \mathcal{S}$.

Теорема 9. *Пусть* $L(\frac{2s\pi i}{T};\lambda) \neq 0$ *при* $0 < |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$.

Пусть $\varphi_s^{\mathcal{F}}(\lambda_0) > 0$. *Тогда* λ_0 *является асимптотической точкой бифуркации для* T*-периодической задачи для* (5) *с* $\mathcal{G} = \mathcal{F}$.

Пусть $\varphi_s^{\mathcal{S}}(\lambda_0) > 0$. *Тогда* λ_0 *является асимптотической точкой бифуркации для* T*-периодической задачи для* (5) *с* $\mathcal{G} = \mathcal{S}$.

Список литературы

1. Landesman E.N., Lazer A.C. Nonlinear perturbations of linear elliptic boundary problems at resonance, J. Math. Mech, v. 19, 1970, 609-623
2. Fučik S. Solvability of Nonlinear Equations and Boundary Value Problems, Prague, 1980
3. Mawhin J., Willem M. Critical Point Theory and Hamiltonian Systems, Springer, Berlin, 1989
4. Красносельский М.А., Покровский А.В. Системы с гистерезисом, М.: Наука, 1979
5. Krasnosel'skii A.M. On nonlinear resonance in systems with hysteresis, in "Models of Hysteresis Pitman Res. Notes in Math. Ser, v. 286, Longman Sci & Tech, 1993, 71-76
6. Krasnosel'skii A.M. On bifurcation points of equations with Landesman-Lazer type nonlinearities, Nonlinear Analysis. Theory, Methods & Applications, v. 18, 12, 1992, 1187-1199
7. Красносельский М.А., Покровский А.В. Доклады АН СССР, т. 319, 4, 819-822, 1991
8. Bliman P.-A., Sorine M. A system-theoretic approach of systems with hysteresis. Application to friction modelling and compensation, Proc. of the 2$^{\text{nd}}$ Eur. Cont. Conf., Groningen, The Netherlands, 1993
9. Brokate M., Visintin A. Properties of the Preisach model for hysteresis, Bericht 30, Universität Kaiserslautern, 1988
10. Красносельский М.А., Забрейко П.П. Геометрические методы нелинейного анализа, М.: Наука, 1975
11. Красносельский А.М. Асимптотика нелинейностей и операторные уравнения, М.: Наука, 1992