**Аннотация**

Предлагается метод исследования периодических колебаний в системах с запаздываением и вырожденных в линейном приближении на бесконечности. Рассматривается основной случай двумерного вырождения. Приводятся условия существования вынужденных периодических колебаний. Исследуется явление нелинейного резонанса в задачах с параметром.

# Нелинейный резонанс в системах с запаздыванием

Красносельский А.М. *

13 декабря 2007 г.

## 1 Введение

В работе изучаются системы, динамика которых описывается уравнениями вида

$$L(\frac{d}{dt})x = M(\frac{d}{dt})f[t, x(t), x(t-h)] \tag{1}$$

и аналогичные уравнения с параметром

$$L(\frac{d}{dt};\lambda)x = M(\frac{d}{dt};\lambda)f\{t, x(t), x[t-h(\lambda)];\lambda\}. \tag{2}$$

Здесь $L$ и $M$ — вещественные взаимно простые многочлены с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} L(p) &= p^l + a_1p^{l-1} + \ldots + a_l, \\ M(p) &= b_0p^m + b_1p^{m-1} + \ldots + b_m, \end{aligned} \tag{3}$$

причем $l > m$; нелинейность $f(t, x, y)$ непрерывна по совокупности переменных и удовлетворяет дополнительным ограничениям, приводимых ниже; запаздывание $h$ постоянно. Предполагается, что нелинейность периодична по $t$ с некоторым периодом $T > 0$:

$$f(t+T, x, y) \equiv f(t, x, y), \quad -\infty < t, x, y < \infty.$$

Если изучается уравнение (2), то предполагается, что коэффициенты многочленов (3) непрерывно зывисят от $\lambda$, нелинейность непрерывна по совокупности переменных, запаздывание непрерывно зависит от параметра. Предполагается также, что период $T$ общий для всех значений параметра; это ограничение, вообще говоря, может быть снято заменой времени.

Пусть нелинейность $f(t, x, y)$ ограничена.

Если числа $w_ki$, где

$$w_k = 2k\pi T^{-1}, \quad k = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \tag{4}$$

не являются корнями многочлена $L(p)$, то множество всех $T$-периодических решений уравнения (1) непусто и ограничено (гладкость нелинейности не предполагается, по поводу понятия $T$-периодического решения уравнения типа (1) см., например, [1, 2]). Стандартными методами ([3]) могут быть посчитаны топологические характеристики

*Результаты получены при поддержке Гранта # 93-012-884 Российского Фонда Фундаментальных Исследований

соответствующих векторных полей в функциональных пространствах. Значения этих характеристик дают ответы на различные вопросы о $T$-периодических решениях уравнения (1).

В работе рассматривается случай, когда многочлен $L(p)$ имеет пару комплексно-сопряженных корней $w_s i$ и $-w_s i$, где $s$ — некоторое натуральное число, и не имеет других корней вида $w_k i$ при целых $k$. Ранее ([4]) были изучены системы с двукратным вырождением линейной части без запаздываний, нелинейность в которых удовлетворяла условиям типа Ландесмана-Лазера (системы с насыщением). Впервые теоремы о разрешимости нелинейных уравнений с такими нелинейностями (для других задач) были предложены в [5] (подробнее см. [6]). Для систем с запаздыванием приходится применять более сложные условия и подходы к вычислению топологических характеристик.

# 2 Основное ограничение на нелинейность

Пусть задана некоторая непрерывная функция $F(t,u,v)$, определенная при всех $t$ и $u^2+v^2=1$. Пусть

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{t,\, u^2+v^2=1} |f(t,Ru,Rv)-F(t,u,v)| = 0. \tag{5}$$

Равенство (5) означает существование равномерного предела значений нелинейности $f(t,x,y)$ на бесконечности в направлении лучей, начинающихся в начале координат. Это равенство выполнено, если нелинейность имеет вид

$$f(t,x,y) = F\left(t, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + f_1(t,x,y),$$

причем $f_1(t,x,y)\to 0$ при $|x|+|y|\to\infty$.

При формулировке основных результатов используется комплекснозначная функция

$$\xi(\varphi) = \int_0^T e^{w_s t i} F\left(t, \frac{\sin(w_s t+\varphi)}{n(t,\varphi)}, \frac{\sin(w_s(t-h)+\varphi)}{n(t,\varphi)}\right) dt,$$

$$n(t,\varphi) = \sqrt{\sin^2(w_s t+\varphi)+\sin^2(w_s(t-h)+\varphi)}.$$

Подинтегральное выражение определено всюду при $\varphi\in[0,T]$ при несоизмеримых с $T$ значениях $h$ ($n(t,\varphi)\neq 0$) и всюду, кроме конечного множества точек, при рациональных $h/T$. При $\varphi\in[0,T]$ значения функции $\xi(\varphi)$ определяют кривую $\Theta=\Theta(F,s,T)$ на комплексной плоскости.

В приложении описано важное понятие *порядка точки относительно кривой* (подробнее см. [7]). Все основные результаты работы формулируются в терминах этого понятия.

В дальнейшем порядок начала координат относительно кривой $\Theta$ называется степенью функции $F(t,u,v)$ и обозначается через $\theta$. Степень $\theta$ определена, если функция $\xi(\cdot)$ не обращается в 0, т.е. кривая $\Theta$ не проходит через начало координат.

Если изучаемая система зависит от параметра (т.е. мы изучаем уравнение (2)), то и степень функции $F(t,u,v;\lambda)$ зависит от $\lambda:\ \theta=\theta(\lambda)$. Степень $\theta(\lambda)$ определена при тех значениях параметра, при которых соответствующая функция $\xi(\cdot;\lambda)$ не обращается в 0.

Заметим, что при конкретных функциях $F(t,u,v)$ степень $\theta$ может быть легко посчитана с помощью компьютера. В примерах чаще всего кривая $\Theta$ не имеет самопересечений и либо $\theta=0$ (начало координат не охвачено кривой $\Theta$), либо $\theta=\pm 1$ (наоборот).

# 3 Нелинейный резонанс (определение)

Рассмотрим уравнение (2). Будем говорить, что при некотором значении $\lambda_0$ параметра $\lambda$ в уравнении происходит *нелинейный резонанс*, если при сколь угодно близких к $\lambda_0$ значениях $\lambda$ у уравнения (2) есть решения с произвольно большими амплитудами.

Говоря формально, при $\lambda = \lambda_0$ происходит нелинейный резонанс, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\lambda = \lambda(\varepsilon)$, $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$, что при этом $\lambda$ уравнение (2) имеет по крайней мере одно решение с нормой в $C$, большей чем $\varepsilon^{-1}$.

Понятие нелинейного резонанса близко к введенному в [3] более общему понятию *асимптотических точек бифуркации*. Условия появления нелинейного резонанса в системах с насыщением были приведены в [4]. Более общие результаты, касающиеся асимптотических точек бифуркации в случае двукратного вырождения на бесконечности линейной части для нелинейных операторных уравнений общего вида, содержатся в [9].

# 4 Формулировки основных результатов

**Теорема 1** *Пусть нелинейность $f(t,x,y)$ удовлетворяет основному ограничению* (5), а степень $\theta$ определена и отлична от нуля. Тогда у уравнения (1) есть по крайней мере одно $T$-периодическое решение.

Последующие результаты относятся к условиям появления в системах, описываемых уравнением (2), нелинейного резонанса.

**Теорема 2** *Пусть нелинейность $f(t,x,y;\lambda)$ при $\lambda = \lambda_0$ удовлетворяет основному ограничению*

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{t,\ u^2+v^2=1} |f(t,Ru,Rv;\lambda) - F(t,u,v;\lambda)| = 0; \tag{6}$$

*определена степень $\theta(\lambda_0)$ и $\theta(\lambda_0) \neq \pm 1$. Пусть в любой окрестности точки $\lambda_0$ существуют значения параметра $\lambda$, при которых число $w_s i$ не является корнем многочлена $L(p;\lambda)$. Тогда в точке $\lambda_0$ у уравнения* (2) происходит нелинейный резонанс.

**Теорема 3** *Пусть при значениях параметра $\lambda$ из некоторой окрестности точки $\lambda_0$ выполнены условия:*

*а. Нелинейность $f(t,x,y;\lambda)$ удовлетворяет ограничению* (6);

б. $L(w_s i;\lambda) \equiv 0$. Пусть в каждой окрестности точки $\lambda_0$ степень $\theta(\lambda)$ принимает не менее двух различных значений. Тогда в точке $\lambda_0$ у уравнения (2) происходит нелинейный резонанс.

Условию "в каждой окрестности . . ."теоремы 3 можно дать следующую геометрическую интерпретацию: пусть при $\lambda = \lambda_0$ ось $x = y = 0$ в трехмерном пространстве $\{x,y,\lambda\}$ пересекает поверхность $\lambda = \Theta(\lambda)$.

# 5 Эквивалентное операторное уравнение и принцип смены индекса

Пусть число $\alpha$ выбрано так, что все числа $w_k i$ при целых $k$ не являются корнями многочлена $L(p) - \alpha M(P)$. Задача о $T$-периодических решениях уравнения (1) эквивалентна операторному уравнению

$$x(t) = A_\alpha \{f[t,x(t),S_h x(t)] - \alpha x(t)\}. \tag{7}$$

Здесь $A_\alpha$ — интегральный линейный оператор

$$A_\alpha x(t) = \int_0^T G_\alpha(t,\tau)x(\tau)d\tau,$$

ядро которого $G_\alpha(t,\tau)$ определяется импульсно-частотной характеристикой линейного звена с дробно рациональной передаточной функцией $W_\alpha(p) = M(p)/[L(p) - \alpha M(p)]$. Этот оператор ставит в соответствие каждой суммируемой (на промежутке $[0,T]$) $T$-периодической функции $u(t)$ единственное $T$-периодическое решение уравнения

$$[L(\frac{d}{dt}) - \alpha M(\frac{d}{dt})]x(t) = M(\frac{d}{dt})u(t).$$

Через $S_h$ обозначен оператор

$$S_h x(t) = \begin{cases} x(t-h), & 0 \geq t \geq h, \\ x(t-h+T), & h \geq t \geq T. \end{cases}$$

Оператор $A$ действует в пространстве $L_2 = L_2([0,T])$ и вполне непрерывен, линейный оператор $S_h$ действует в этом пространстве и изометричен, оператор суперпозиции, порожденный непрерывной функцией $f(t,x,y)$ также непрерывен. Поэтому оператор

$$Bx(t) = A_\alpha\left\{f[t,x(t),S_h x(t)] - \alpha x(t)\right\}$$

действует в $L_2$ и вполне непрерывен. Решения операторного уравнения $x = Bx$ или, что то же, неподвижные точки оператора $B$, являются $T$-периодическими решениями уравнения (1).

**Теорема 4** *Вращение $\gamma$ векторного поля ([3]) $x - Bx$ на границе каждой сферы $\{\|x\| = r\}$ достаточно большого радиуса $r$ не зависит от $r$ и с точностью до знака совпадает со степенью $\theta$.*

Доказательство теоремы 4 вынесено в приложение.

если многочлен $L(p)$ не имеет корней вида $w_k i$ при целых $k$, то вращение $\gamma$ поля $x - Bx$ определяется линейной частью $x - \alpha A_\alpha x$ и равно $\pm 1$ ([3]).

Теорема 1 следует из общих топологических принципов и теоремы 4. Теоремы 2 и 3 вытекают из *принципа смены индекса* ([3]). Формулировка этого принципа приведена в приложении.

# 6 Замечания

1. Предположение о непрерывности нелинейности по совокупности переменных может быть ослаблено. Например, если $f(t,x,y) = f(x,y) + b(t)$, то достаточно непрерывности функции $f(x,y)$ и суммируемости входа $b(t)$.

2. Вместо уравнений с нелинейностями вида $f[t,x(t),x(t-h)]$ могут быть рассмотрены уравнения с нелинейностями более общего вида $f[t,x(t),x(t-h_1),\ldots,x(t-h_n)]$ со многими запаздываниями. Общие формулировки при этом сохраняются, следует заменить лишь основное ограничение на нелинейность и явную формулу для кривой $\Theta$, определяющей степень $\theta$.

3. Аналогичные теоремы могут быть получены для точек нелинейного резонанса, для случая вырождения более высокой чем 2 кратности (когда многочлен $L(p;\lambda)$ при некотором $\lambda$ имеет более двух корней вида $w_k$ при целых $k$). Формулировки при этом резко усложняются.

4. Результаты этой работы являются новыми уже для уравнения

$$x'' + ax = f[t, x(t), x(t-h)].$$

### П.1. Доказательство теоремы 4

Приведем схему доказательства теоремы 4. В этой схеме важную роль играет следующее утверждение.

**Теорема 5** *При любом $c > 0$ и $\varphi \in [0, 2\pi]$ справедливо равенство*

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{g(t)\in L_2;\ \|g\|\le c} \|z_1(t,\varphi;R,h) - z_2(t;\varphi)\|_{L_1} = 0. \tag{8}$$

*Здесь*

$$z_1(t;\varphi;R,g) = f\left[t, u_R(t), S_h u_R(t)\right],$$

*где*

$$u_R(t) = Ru(t) + g(t), \quad u(t) = \sin(w_s t + \varphi),$$

*и*

$$z_2(t;\varphi) = F\left(t, \frac{u(t)}{n(t,\varphi)}, \frac{S_h u(t)}{n(t,\varphi)}\right),$$

*а обозначение $n(t,\varphi)$ определено в разделе 2.*

Доказательство теоремы 4 повторяет доказательство основного результата из [9]. При этом теорема 5 является аналогом леммы 1.

Вначале уравнение $x = Bx$ в $L_2$ разбивается в систему равенств двух проекций: $Px = PBx$ и $Qx = QBx$. Здесь $P$ и $Q$ — ортогональные проекторы соответственно на двумерное подпространство $E_0$ функций вида $a\sin w_s t + b\cos w_s t$ и ортогональное к $E_0$ дополнение $E_0^{\perp}$.

Из уравнения $Qx = QBx$ после несложных преобразований вытекает оценка $\|Qx\|_{L_2} \le const$. Эта оценка означает, что все особые точки векторного поля $x - Bx$ лежат в цилиндре $\{\|Qx\| \le c\} \subset L_2$. Из $\|Px\| \to \infty$ в силу теоремы 5 и предположения о том, что кривая $\Theta$, задаваемая функцией $\xi(\cdot)$, не проходит через начало координат, следует неравенство $\|Px - PBx\| \ne 0$. Поэтому нормы всех неподвижных точек $x^*$ оператора $B$ допускают априорную оценку $\|x^*\| \le const$. Слндовательно, вращение векторного поля $x - Bx$ на сферах $\|x\| = r$ больших радиусов $r$ совпадает с вращением этого поля на поверхности ограниченных цилиндров $\{\|Qx\| \le c,\ \|Px\| \le r\}$. Для вычисления вращения на поверхности этого цилиндра применяется теорема о произведении вращения ([9, 10]). Из этой теоремы следует, что вращение поля $x - Bx$ на поверхности цилиндра с точностью до знака совпадает с вращением предельного поля $Pz_2(t,\varphi)$ на окружности $\sin(w_s t + \varphi)$ ($\varphi \in [0, T]$) в плоскости $E_0$, которое совпадает со степенью $\theta$.

### П.2. Доказательство теоремы 5

Рассмотрим множества

$$\Omega_1(R) = \{t: \ t \in [0,T], \ |u(t)| \le 2\sqrt{R^{-1}}\},$$

$$\Omega_2(R) = \{t: \ t \in [0,T], \ |S_h u(t)| \le 2\sqrt{R^{-1}}\},$$

$$\Omega_3(R) = \{t: \ t \in [0,T], \ |g(t)| \ge \sqrt{R}\},$$

$$\Omega_4(R) = \{t: \ t \in [0,T], \ |S_h g(t)| \ge \sqrt{R}\},$$

$$\Omega(R) = \Omega_1(R) \cup \Omega_2(R) \cup \Omega_3(R) \cup \Omega_4(R).$$

При $t \in [0,T] \backslash \Omega(R)$ выполнены неравенства $|u_R|, \ |S_h u_R| \ge \sqrt{R}$.

Так как

$$\|z_1 - z_2\|_{L_1} = \int\limits_0^T |z_1(t,\varphi;R,g) - z_2(t;\varphi)|dt =$$

$$= \int\limits_{\Omega(R)} |z_1(t,\varphi;R,g) - z_2(t;\varphi)|dt +$$

$$+ \int\limits_{[0,T]\backslash\Omega(R)} |z_1(t,\varphi;R,g) - z_2(t;\varphi)|dt \le$$

$$\le const \cdot \mathrm{mes}\,\Omega(R) + \int\limits_{[0,T]\backslash\Omega(R)} |z_1(t,\varphi;R,g) - z_2(t;\varphi)|dt,$$

то для доказательства теоремы достаточно доказать стремление к нулю при $R \to \infty$ обоих слагаемых последнего выражения.

Первое слагаемое стремится к нулю так как $\mathrm{mes}\,\Omega_i(R) \to 0$ при $i = 1,2$ в силу явных формул для функции $u(t)$ и $\mathrm{mes}\,\Omega_i(R) \to 0$ при $i = 3,4$ в силу неравенства Чебышева.

Для оценки второго слагаемого воспользуемся очевидным неравенством

$$\int\limits_{[0,T]\backslash\Omega(R)} |z_1(t,\varphi;R,g) - z_2(t;\varphi)|dt \le$$

$$\le \int\limits_{[0,T]\backslash\Omega(R)} \left[|z_1(t,\varphi;R,g) - z_3(t)| + |z_3(t) - z_2(t;\varphi)|\right] dt,$$

где

$$z_3(t) = z_3(t,\varphi;R,g) = F\left(t, \frac{u_R(t)}{n_R(t,\varphi;g)}, \frac{S_h u_R(t)}{n_R(t,\varphi;g)}\right),$$

$$n_R(t,\varphi;g) = \sqrt{[u_R(t)]^2 + [S_h u_R(t)]^2}$$

Но при $t \in [0,T] \backslash \Omega(R)$ из основного ограничения на нелинейность и $|u_R|, \ |S_h u_R| \ge \sqrt{R}$ вытекает соотношение

$$|z_1(t,\varphi;R,g) - z_3(t,\varphi;R,g)| \to 0$$

равномерно при $R \to \infty$, а равенство

$$\int\limits_0^T \left[|z_3(t,\varphi;R,g) - z_2(t;\varphi)|\right] dt \ \to \ 0$$

следует из общих теорем о непрерывности нелинейного оператора суперпозиции ([3]).

### П.3. Порядок точки относительно кривой

Рассмотрим произвольную локально простую ориентированную кривую $\Gamma$ на плоскости (см. Рис. 1).

Она разбивает плоскость в объединение некоторого количества областей. В примере на Рис. 1 таких областей четыре. Одна из этих областей (обозначаемая $G_0$) неограничена. Поставим в соответствие каждой области $G$ целое число $k(G)$ по следующему правилу.

Положим $k(G_0) = 0$. Далее, рассмотрим ориентированную кривую $\Pi$, которая начинается в $G_0$, пересекает кривую $\Gamma$ в некоторых точках (которые не являются точками самопересечения кривой $\Gamma$), пересекает некоторые из областей и оканчивается в некоторой области $G_i$. Мы будем задавать числа $k(G_i)$ по индукции, двигаясь вдоль кривой $\Pi$. В начальной области $G_0$ положим $k = 0$. Если $\Pi$ пересекает $\Gamma$ и ориентация на $\Gamma$ в точке пересечения "слева направо тогда следующая область имеет $k = k$(следующей области) равное $k$(предыдущей области)$+1$, если ориентация на $\Gamma$ в точке пересечения — "справа налево то следующая область имеет $k = k$(следующей области) равное $k$(предыдущей области)$-1$. Таким образом, используя различные кривые $\Pi$, можно определить число $k$ для каждой области. Можно доказать (см. [7]), что это определение корректно ($k(G$ не зависит от выбора кривых $\Pi$).

Порядок $k_M(\Gamma)$ точки $M$ относительно кривой $\Gamma$ определен для каждой $M \notin \Gamma$ и равен $k(G)$, где $G \ni M$.

Если кривая $\Gamma$ являлась образом единичной окружности $\partial B(0,1)$ при действии некоторого локально взаимно однозначного отображения $\Phi : \partial B(0,1) \to \mathbb{R}^2$, тогда $\mathbf{deg}(\Phi, \partial B(0,1), 0) = k(G)$ ($G$ содержит начало координат). Здесь $\mathbf{deg}(\Phi, \partial B(0,1), 0)$ — степень отображения $\Phi$ единичного шара $B(0,1)$ относительно начала координат (по поводу теории степени см., например, [8]).

### П.4. Принцип смены индекса ([3])

Пусть в банаховом пространстве $E$ задан оператор зависящий от параметра $\mathcal{A}_\lambda x$ ($x \in E$) и вполне непрерывный по совокупности переменных.

Число $\lambda_0$ называется асимптотической точкой бифуркации уравнения $x = \mathcal{A}_\lambda x$, если каждому $\varepsilon > 0$ отвечает такое $\lambda$ $(|\lambda_0 - \lambda| < \varepsilon)$, при котором это уравнение имеет по крайней мере одно решение с нормой, большей чем $\varepsilon^{-1}$.

Пусть при некоторых значениях $\lambda$ уравнение $x = \mathcal{A}_\lambda x$ не имеет решений на сферах $\|x\| = r$ достаточно больших радиусов $r$. Тогда определено вращение векторного поля $x - \mathcal{A}_\lambda x$ на всех таких сферах и это вращение не зависит от радиуса $r$. Это общее вращение называется *индексом на бесконечности* поля $x - \mathcal{A}_\lambda x$ и обозначается $\mathrm{ind}(\lambda)$.

Если при $\lambda_n \to \lambda_0,\ n \to \infty$ индексы $\mathrm{ind}(\lambda_n)$ совпадают, то обозначим через $\mathrm{ind}(\lambda_0|\lambda_n)$ число $\mathrm{ind}(\lambda_n)$.

*Принцип смены индекса.* Если найдутся такие две последовательности $\lambda_{n,1} \to \lambda_0,\ \lambda_{n,2} \to \lambda_0,\ n \to \infty$, что

$$\mathrm{ind}(\lambda_0|\lambda_{n,1}) \neq \mathrm{ind}(\lambda_0|\lambda_{n,2}),$$

то $\lambda_0$ — асимптотическая точка бифуркации уравнения $x = \mathcal{A}_\lambda x$.

В принципе смены индекса допускается совпадение всех элементов одной из последовательностей с $\lambda_0$. Если при всех меньших $\lambda_0$ и близких к $\lambda_0$ значениях $\lambda$ индекс одинаков, то обзначим его через $\mathrm{ind}(\lambda_0 - 0)$. Если при всех больших $\lambda_0$ и близких к $\lambda_0$ значениях $\lambda$ индекс одинаков, то обзначим его через $\mathrm{ind}(\lambda_0 + 0)$.

Если среди трех чисел $\mathrm{ind}(\lambda_0 - 0)$, $\mathrm{ind}(\lambda_0)$ и $\mathrm{ind}(\lambda_0 + 0)$ есть по крайней мере два различных, то $\lambda_0$ — асимптотическая точка бифуркации уравнения $x = \mathcal{A}_\lambda x$.

## Список литературы


[1] Воронов А.А. *Введение в динамику сложных управляемых систем*, М.: Наука, 1985

[2] Красносельский А.М. *Асимптотика нелинейностей и операторные уравнения*, М.: Наука, 1992

[3] Красносельский М.А. *Топологичесие методы в теории нелинейных операторных уравнений*, М.: Гостехиздат, 1956

[4] Красносельский А.М. О возникновении колебательных режимов больших амплитуд в системах с насыщением, *Доклады АН СССР*, **318**, #4 (1991) 844–848

[5] Landesman E.N., Lazer A.C. Nonlinear perturbations of linear elliptic boundary problems at resonance, *J. Math. Mech*, **19**, (1970) 609-623

[6] Fučik S. *Solvability of nonlinear equations and boundary value problems*, Prague, 1980

[7] Красносельский М.А. *Векторные поля на плоскости*, М.: Физматгиз, 1963

[8] Ниренберг Л. *Лекции по нелинейному функциональному анализу*, М.: Мир, 1977

[9] Krasnosel'skii A.M. On bifurcation points of equations with Landesman-Lazer type nonlinearities, *Nonlinear Analysis. Theory, Methods & Applications*, **18**, #12 (1992) 1187-1199

[10] Красносельский М.А., Забпейко П.П. *Геометрические методы нелинейного анализа*, М.: Наука, 1975

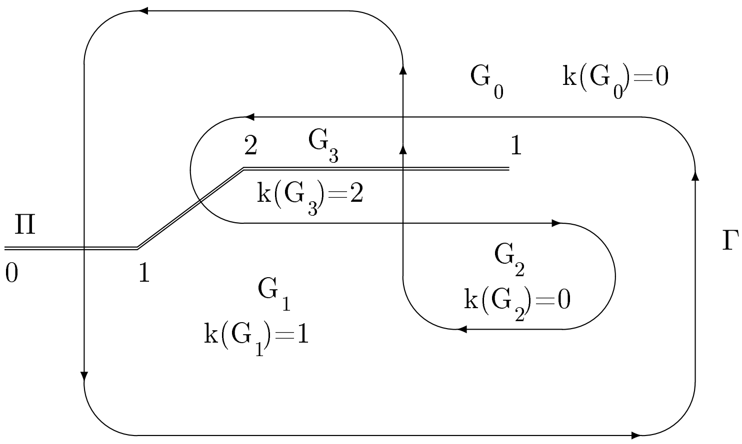


Рис. 1

УДК 62-50 Реферат

Красносельский А.М.

**Нелинейный резонанс в системах с запаздыванием**

Предлагается метод исследования задач о периодических решениях квазилинейных уравнений с запаздываением, вырожденных на бесконечности в линейном приближении. Рассматривается основной случай двумерного вырождения. В системах, описываемых такими уравнениями, приводятся условия существования вынужденных периодических колебаний, их неединственности, исследуется явление нелинейного резонанса в задачах с параметром.

Krasnosel'skii A.M.

**Nonlinear resonance in systems with delays**

A method is introduced for analysis of problems on periodic solutions of equations degenerated in linear at infinity. The most importent case of two-dimensional degeneration is considered. In systems describing by such equations conditions are presented of existence of forced periodic oscillations and of their multiplicity, for problems with a parameter the nonlinear resonance phenomenon is studied.