Аннотация

Изучается устойчивость состояния равновесия систем с конечным числом состояний. Анализ таких систем важен в связи с использованием цифровых устройств и сетей ЭВМ для реализации распараллеленных алгоритмов. Рассинхронизация работы отдельных блоков приводит к моделям, аналогичным процедурам с неполными коррекциями, предложенным в [1] (см. также [2, 3]). Рассмотренные асинхронные итерации обобщают классические процедуры Гаусса-Зейделя и другие периодические групповые параллельные процедуры, изученные в [4, 5]. В предлагаемых и изучаемых итерационных схемах для перехода к новой итерации должны быть известны лишь некоторые из компонент невязки. Используется терминология и некоторые постановки из книги [4]. В этой же книге предложена интерпретация результатов в терминах теории конечных автоматов, приведены интересные примеры, указана обширная библиография. Предложенный в [4] метрический подход к изучению систем с конечным числом состояний приводит к условиям сходимости неполных коррекций в булевских системах и позволяет провести сравнительный анализ скорости сходимости.

Дискретные асинхронные итерации

Красносельский А.М.,* Сорин М.

13 декабря 2007 г.

* Эта работа частично выполнена во время визита А.М.Красносельского во Францию и поддержана Грантами MD4000 Международного Научного Фонда и 93-01-00884 Российского Фонда Фундаментальных Исследований

1. Обозначения и определения

Пусть $E = \{0,1\}^n$ — пространство всех последовательностей длины n из 0 и 1. Такие последовательности называют булевскими векторами или просто векторами. Через $\emptyset$ обозначим вектор $\{0,0,\dots,0\}$, через $\mathbf{I}$ — вектор $\{1,1,\dots,1\}$, через $(x)_i$ обозначена i-ая компонента вектора x, $(x)_i \in \{0,1\}$. Рассмотрим три следующие операции в E:

$x + y$ — булевская покомпонентная сумма, $1 + 1 = 1$;

$x \cdot y$ — покомпонентное произведение;

$\bar{x}$ — покомпонентное отрицание, $x \cdot \bar{x} = \emptyset,\ x + \bar{x} = \mathbf{I}$

а также отношение порядка $\le$ ($x \le y$ означает $x \cdot y = x$).

Пусть $(a_{ij}) = A$ — это квадратная матрица размера $n \times n$, $a_{ij} \in \{0,1\}$. Определена обычная операция $Ax \in E$ умножения матрицы на вектор, в которой используется булевское сложение. Если $x \le y$, то $Ax \le Ay$.

Рассмотрим прямое произведение $X = \prod_{i=1}^n X_i$, составленное из n конечных множеств X_i. На X определена булевская метрика $|x - y| \in E$. Вектор $|x - y|$ имеет компоненты

$$(|x-y|)_i = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad (x)_i = (y)_i \text{ в } X_i, \\ 1, & \text{если} \quad (x)_i \ne (y)_i \text{ в } X_i \end{cases} \qquad i = 1,\dots,n.$$

Рассмотрим отображение (оператор) F, действующее в X. для обозначения компонент вектора $F(x)$ используются обозначения $(F(x))_i = f_i(x) = f_i((x)_1,\dots,(x)_n)$. Отображению F сопоставим его матрицу инцидентности $B = B(F) = (b_{ij})$, где

$$\begin{array}{ll} b_{ij} = 0, & \text{если функция } \ \theta \mapsto f_i(\dots,(x)_{i-1},\theta,(x)_{i+1},\dots) \\ & \ \text{постоянна на } X_i \text{ для всех } (x)_k \in X_k,\ k \ne i, \\ b_{ij} = 1 & \text{в других случаях.} \end{array}$$

Выполнено следующее условие Липшица (см. [4]):

$$|F(x) - F(y)| \le B|x - y|, \quad x, y \in X. \tag{1}$$

Матрица инцидентности — минимальная матрица, при которой справедливо неравенство (1).

Для каждой матрицы B определен ее булевский спектральный радиус.

Если $Bu = \emptyset$ для некоторого $u \neq \emptyset$, то 0 называется собственным значением матрицы B; если $Bu = u$ для некоторого $u \neq \emptyset$, то 1 называется собственным значением B. Спектральный радиус $\rho(B)$ полагается равным 1, если 1 — собственное значение B, иначе $\rho(B) = 0$.

Утверждение 1 ([4], стр.48). *Следующие три предложения эквивалентны:* $\rho(B) = 0$; $B^p \equiv 0$ *для некоторого* $p \leq n$; *существует такая перестановка* P, *что* $P^t BP$ *строго нижнетреугольная (все единицы стоят под главной диагональю).*

Отображение F называется сжатием, если $\rho(B(F)) = 0$.

Утверждение 2 ([4], стр.58-59). *Пусть* F *является сжатием. Тогда существует такое* $\xi \in X$, *что* $\xi = F^p(x)$ *для всех* $x \in X$ *(значение* p *определено в силу утверждения* 1*). Это* ξ *является единственной неподвижной точкой отображения* F. *При каждом* $x^0 \in X$ *итерации* $x^{r+1} = F(x^r)$ *стабилизируются в* ξ *(то есть* $x^r = \xi$ *при* $r = p, p+1, \ldots$*).*

Отображением Гаусса-Зейделя $G = G(F)$ называют отображение с компонентами

$$(G(x))_1 = f_1((x)_1, \ldots, (x)_n),$$
$$(G(x))_i = f_i((G(x))_1, \ldots, (G(x))_{i-1}, (x)_i, \ldots, (x)_n),$$
$$i = 2, \ldots, n.$$

Утверждение 3 ([4], теорема 3, стр.65-66). *Если отображение* F *является сжатием, то отображение Гаусса-Зейделя* G *также является сжатием. Итерации* $x^{r+1} = G(x^r)$ *стабилизируются в единственной неподвижной точке* ξ *отображения* F *не более чем через* p *шагов (*p *определяется по* F *в силу утверждения* 2*).*

Утверждение 3 показывает, что последовательные приближения отображения Гаусса-Зейделя в естественном смысле лучше приближают положение равновесия чем последовательные приближения отображения F (конечно, при выполнении условий утверждения 3).

2. Основной результат

Рассмотрим два элемента $x, y \in X$. Для каждого $\lambda \in E$ обозначим через $\bar{\lambda}x \oplus \lambda y$ элемент z с компонентами $(z)_i = (x)_i$, если $(\lambda)_i = 0$, и $(z)_i = (y)_i$, если $(\lambda)_i = 1$. Это обозначение естественно при $X_i = \{0, 1\}$ и $X = E = \{0, 1\}^n$, в этом случае

$\bar\lambda x \oplus \lambda y = \bar\lambda \cdot x + \lambda \cdot y$.

Отметим простые свойства операции $\oplus$:

(i). $\quad \bar\lambda x \oplus \lambda x = x$;

(ii). $\quad |(\bar\lambda x \oplus \lambda y) - (\bar\lambda v \oplus \lambda w)| = \bar\lambda \cdot |x - v| + \lambda \cdot |y - w|$.

Свойства (i) и (ii) полностью определяют рассмотренную операцию: если некоторое отображение $z(x, y) : \ X \times X \to X$ удовлетворяет условиям $z(x, x) = x$ и $|z(x, y) - z(v, w)| = \bar\lambda \cdot |x - v| + \lambda \cdot |y - w|$ при некотором $\lambda \in E$, то $z(x, y) = \bar\lambda x \oplus \lambda y$.

Операция $\oplus$ может быть определена и другими характеристиками. Например, если отображение $z(x, y) : \ X \times X \to X$ удовлетворяет условию $|z(x, y) - x| \cdot |z(x, y) - y| = \emptyset$, то $z(x, y) = \bar\lambda x \oplus \lambda y$ при некотором $\lambda \in E$.

Построим по некоторому x^0 последовательность

$$x^{r+1} = \bar\lambda^r x^r \oplus \lambda^r F(x^r). \tag{2}$$

Здесь λ^r — некоторые векторы из E.

Итерации (2) предложены в [1] для операторов F, действующих в функциональных пространствах. Здесь изучаются булевские аналоги.

Если

$$\begin{array}{llll} \lambda^0 = \{1, 0, 0, \ldots\}, & \lambda^1 = \{0, 1, 0, \ldots\}, & \ . \ \ . \ \ . \ \ , & \lambda^{n-1} = \{\ldots, 0, 0, 1\}, \\ \lambda^n = \lambda^0, & \lambda^{n+1} = \lambda^1, & \text{etc.} & \end{array}$$

то приближения (2) при $r = 0, n, 2n, \ldots$ совпадают с приближениями Гаусса-Зейделя $x^0, \ G(x^0), G^2(x^0) \ldots$

Теорема 1. *Пусть $\rho(B) = 0$ и $B^p = 0$. Рассмотрим последовательность $\lambda^j \in E$, удовлетворяющую при всех натуральных k условию*

$$\sum_{j \ge k} \lambda^j = \mathbf{I}. \tag{3}$$

Тогда определена последовательность натуральных чисел

$$d_0 = 0, \ d_k = \inf\{d : \sum_{j = d_{k-1}}^{d-1} \lambda^j = \mathbf{I}\},$$

при всех $r \ge d_p$ справедливо равенство $x^r = \xi$, при каждом натуральном k верна оценка $|\xi - x^{d_k}| \le B^k \mathbf{I}$.

Доказательство теоремы 1 вынесено в приложение. Теорема 1 обобщает утверждение 3 и его групповые параллельные аналоги ([4]).

Рассмотрим некоторое множество $Y \subset X$. Пусть $F(Y) \subset Y$ и пусть существует множество $\Lambda \subset E$ такое, что при каждом $\lambda^r \in \Lambda$ выполнено соотношение $\bar{\lambda}^r x \oplus \lambda^r F(x) \in Y,\ x \in Y$. Переформулируем теорему 1 для этого случая.

Пусть

$$|F(x) - F(y)| \le B|x - y|, \quad x, y \in Y,$$

где B — некоторая булевская матрица, и $B^p = 0$. Матрица B в последнем неравенстве не обязательно является матрицей инцидентности $B(F)$; более того, если множество Y — правильная часть множества X, то может оказаться, что B меньше $B(F)$. Рассмотрим такую последовательность $\lambda^j \subset \Lambda$, что при всех натуральных k верно равенство (3). Тогда верно заключение теоремы 1.

Укажем еще одно обобщение теоремы 1.

Пусть X — произвольное конечное множество (без структуры прямого произведения). Определим расстояние $d(x, y)$, где $x, y \in X$, $d(x, y) \in E = \{0, 1\}^n$ при некотором n. Пусть $d(x, y) = \emptyset$, если и только если $x = y$.

Наличие на X структуры прямого произведения означает, что расстояние обладает свойствами

$$\left.\begin{array}{l} d(x,y) = \{0,\ldots\} \\ d(x,z) = \{1,\ldots\} \end{array}\right\} \Rightarrow d(y,z) = \{1,\ldots\},$$

$$\left.\begin{array}{l} d(x,y) = \{0,\ldots\} \\ d(x,z) = \{0,\ldots\} \end{array}\right\} \Rightarrow d(y,z) = \{0,\ldots\}.$$

Если $d(x, y)$ обладает этими свойствами (по всем компонентам), то на X можно установить структуру прямого произведения.

Пусть задан оператор $F:\ X \to X$ и

$$d(Fx, Fy) \le B\, d(x, y), \quad x, y \in X$$

для некоторой булевской матрицы B.

Если $\rho(B) = 0$, то F имеет единственную неподвижную точку ξ, при каждом x^0 последовательность $x^{r+1} = Fx^r$ стабилизируется в ξ.

Предположим, что при каждом $\lambda \in \Lambda \subset E$ определен оператор $(x, y) \mapsto x \oplus_\lambda y \in X$, то есть каждому $\lambda \in \Lambda$ соответствует определенная на некотором множестве $D(\lambda) \subset X \times X$ бинарная операция $x \oplus_\lambda y$.

Пусть

$(i)^*$ $x \oplus_\lambda x = x, \quad x \in X$

и

$(ii)^*$ $d(x \oplus_\lambda y, v \oplus_\lambda w) \le \bar{\lambda} \cdot d(x, v) + \lambda \cdot d(y, w), \quad (x, y),\ (v, w) \in D(\lambda)$.

Предположим далее, что последовательность $x^{r+1} = x^r \oplus_{\lambda^r} Fx^r$ определена (то есть при всех r верно $(x^r, Fx^r) \in D(\lambda^r)$). Аналогично теореме 1 доказывается, что и в этом случае для x^r справедливы заключения теоремы 1.

3. Быстрота стабилизации

Проводится сравнение скорости сходимости итераций (2) со скоростью сходимости приближений $x^{r+1} = F(x^r)$.

Пусть ξ — некоторая неподвижная точка отображения F (не предполагаются выполнеными условия теоремы 1, F может иметь более одного положения равновесия). Рассмотрим инвариантное для F множество $N \subset E$. Конечно, в этом случае $F^r(x) \in N$ при $x \in N$.

Оператор $F:\ E \to E$ назовем ξ-*монотонным*, если $|F(x) - \xi| \le |F(y) - \xi|$ при $|x - \xi| \le |y - \xi|$; ξ-*нерастягивающим*, если $|F(x) - \xi| \le |x - \xi|$ при всех $x \in N$.

Пару операторов G и F назовем ξ-*упорядоченными* ($G \ll F$), если $|G(x) - \xi| \le |F(x) - \xi|$ при каждом $x \in N$.

Как показано в [4], если отображение F является ξ-монотонным и ξ-нерастягивающим, то в естественном смысле итерации $G^r(x)$ приближают ξ лучше чем итерации $F^r(x)$, где G — отображение Гаусса-Зейделя. Теорема 2 утверждает, что итерации (2) также лучше чем $F^r(x)$. Рассмотрим следующие отображения:

$$g_\lambda(x) = \bar{\lambda} x \oplus \lambda F(x), \tag{4}$$

$$G_i = g_{\lambda_i^{m_i-1}} \circ g_{\lambda_i^{m_i-2}} \circ \ldots \circ g_{\lambda_i^0},$$

и, наконец,

$$\mathcal{G}_k = G_k \circ G_{k-1} \circ \ldots \circ G_1.$$

Теорема 2. *Пусть $\xi = F(\xi)$. Пусть отображение F является ξ-монотонным и ξ-нерастягивающим. Пусть*

$$\prod_{j=d_k}^{d_{k+1}-1} \bar{\lambda}_i^j = \emptyset, \quad i = 1, \ldots, k. \tag{5}$$

Тогда

1. *Отображения G_i также ξ-монотонные;*
2. *Если $F(x) = \xi$, то $G_i(x) = \xi$;*
3. $G_i \ll F$*;*
4. $\mathcal{G}_k \ll F^k, \quad k = 1, 2, \ldots$*;*
5. *Если $|F^p(x) - \xi| = \emptyset$, то $|\mathcal{G}_p(x) - \xi| = \emptyset$.*

Теорема 2 означает, что последовательность $\mathcal{G}_k(x)$ стабилизируется в положении равновесия отображения F быстрее последовательности $F^k(x)$. Доказательство теоремы 2 приведено в приложении.

4. Асинхронные вычисления

Пусть в $E = \{0,1\}^n$ задан некоторый оператор $F: \ E \to E$ и некоторое начальное состояние $x^0 \in E$. Рассматривается задача вычисления новых состояний $x^{r+1} = F(x^r), \quad r = 0, 1, 2, \ldots$ посредством двух процессоров, соединенных с центральной памятью.

Предполагается, что $E = E_1 \times E_2 \quad (E_1 = \{0,1\}^{n_1},\ E_2 = \{0,1\}^{n_2},\ \ n_1 + n_2 = n)$, поэтому каждый $x \in E$ имеет вид $\{x_1, x_2\}$, где $x_1 \in E_1,\ \ x_2 \in E_2$. Введем обозначения

$$\emptyset_i = \{0, \ldots, 0\} \in E_i; \quad \mathbf{I}_i = \{1, \ldots, 1\} \in E_i; \quad i = 1, 2,$$
$$F(x) = F(x_1, x_2) = \{f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)\}.$$

Процессор номер $i \ \ (i = 1, 2)$ вычисляет новое значение x_i, пересылает это новое значение x_i в центральную память и читает значения остальной части вектора x. Предполагается, что процессоры работают без синхронизации.

Состояние системы может быть описано вектором в пространстве $\tilde{E} = \{0,1\}^{2n}$ ($2n=$ (количество процессоров) $\times \ n$), то есть двумя векторами $\{x_{i1}, x_{i2}\} \ \ (i = 1, 2)$

из E. Эти векторы — состояния, известные i-му процессору. Состояние центральной памяти совпадает с диагональным вектором $\{x_{11}, x_{22}\}$.

Динамика системы может быть описана равенством

$$w^{r+1} = \bar{\lambda}^r \cdot w^r + \lambda^r \cdot \mathcal{F}(w^r), \quad w^r \in \tilde{E}.$$

Здесь $w = \{x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}\}$, $x_{si} \in E_i$ (s — номер процессора, i — номер E_i),

$$\mathcal{F}(w) = \{f_1(x_{11}, x_{12}), f_2(x_{21}, x_{22}), f_1(x_{11}, x_{12}), f_2(x_{21}, x_{22})\},$$

$$\begin{array}{ll} \lambda^r = \{\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \emptyset_1, \emptyset_2\}, & \text{если шаг } r \text{ — результат работы компьютера 1,} \\ \lambda^r = \{\emptyset_1, \emptyset_2, \mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2\}, & \text{если шаг } r \text{ — результат работы компьютера 2.} \end{array}$$

Пусть матрица инцидентности $B = B(F)$ имеет вид

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}.$$

В этом разделе все матрицы с индексами i и s имеют размеры $n_i \times n_s$ (в частности, матрицы 0_{is}, состоящие из нулей).

Матрица инцидентности $\mathcal{B}$ отображения $\mathcal{F}$ имеет вид

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0_{11} & 0_{12} \\ 0_{21} & 0_{22} & B_{21} & B_{22} \\ B_{11} & B_{12} & 0_{11} & 0_{12} \\ 0_{21} & 0_{22} & B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}.$$

Теорема 3. *Если $\rho(B) = 0$, то $\rho(\mathcal{B}) = 0$, если $B^p = 0$, то $\mathcal{B}^p = 0$.*

Аналогичный результат может быть сформулирован для произвольного количества процессоров.

Утверждение теоремы 3 вытекает из соотношений

$$\mathcal{B}\mathbf{I}' = \{B\mathbf{I}, B\mathbf{I}\}, \quad \mathcal{B}^k\mathbf{I}' = \{B^k\mathbf{I}, B^k\mathbf{I}\},$$

где $\mathbf{I}' = \{1, \dots, 1\} \in \tilde{E}$, так как $A\mathbf{I}' = \{\emptyset, \emptyset\}$ эквивалентно $A = 0$.

5. Покомпонентное решение

Приближения (2) хорошо описывают специальный подход к построению неподвижных точек — *метод покомпонентного решения.* (см. [5]).

Ищется решение векторного уравнения

$$x = Fx, \;\; x \in X = \prod_{i=1}^{m} X_i, \;\; X_i = \prod_{j=1}^{m_i} X_{ij}; \;\; n = \sum_i m_i.$$

Это уравнение можно записать в виде системы из m уравнений

$$x_i = f_i(x_1, \ldots, x_m), \quad x_i \in X_i \tag{6}$$

меньшей размерности.

Пусть матрица инцидентности $B(F)$ имеет нулевой спектральный радиус. Тогда каждое уравнение (6) имеет единственное решение

$$x_i^* = x_i^*(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m)$$

. Через F^* обозначается оператор $\{x_1, \ldots, x_m\} \mapsto \{x_1^*, \ldots, x_m^*\}$. Если

$$B(F) = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \ldots & B_{1m} \\ B_{21} & B_{22} & \ldots & B_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B_{m1} & B_{m2} & \ldots & B_{mm} \end{bmatrix},$$

то

$$B(F^*) = \begin{bmatrix} 0_{11} & A_1 B_{12} & \ldots & A_1 B_{1m} \\ A_2 B_{21} & 0_{22} & \ldots & A_2 B_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_m B_{m1} & A_m B_{m2} & \ldots & 0_{mm} \end{bmatrix},$$

где $A_j = I_{jj} + B_{jj} + B_{jj}^2 + \ldots$

Если $\rho(B(F)) = 0$, то $\rho(B(F^*)) = 0$. Этот факт следует из двойственного утверждения: если $\rho(B(F^*)) = 1$, то $\rho(B(F)) = 1$. Последнее утверждение может быть проверено непосредственными вычислениями: если $B(F^*)x = x$ для некоторого ненулевого x, то для этого же x выполнено равенство $B(F)x = x$.

В условиях теоремы 1 последовательность $x^{r+1} = F^* x^r$ при каждом x^0 стабилизируется в единственной неподвижной точке ξ оператора F^*. Эта точка ξ также является единственной неподвижной точкой для F ([5]).

Матрица инцидентности $B(F^*)$ имеет, вообще говоря, больше нулей чем матрица $B(F)$ в следующем естественном смысле. Пусть

$$D = \begin{bmatrix} 0_{11} & B_{12} & \ldots & B_{1m} \\ B_{21} & 0_{22} & \ldots & B_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B_{m1} & B_{m2} & \ldots & 0_{mm} \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} B_{11} & 0_{12} & \ldots & 0_{1m} \\ 0_{21} & B_{22} & \ldots & 0_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0_{m1} & 0_{m2} & \ldots & B_{mm} \end{bmatrix}.$$

В этих обозначениях $B(F) = D+K,\ B(F^*) = (I+K+K^2+\ldots)D$. Если $(D+K)^p = 0$, то каждое произведение p матриц D или K в произвольном порядке является нулевой матрицей. Но $[B(F^*)]^p = [(I+K+K^2+\ldots)D]^p$ — это сумма различных произведений, содержащих более чем p матриц D или K каждое. Значит, из $[B(F)]^p = 0$ вытекает равенство $[B(F^*)]^p = 0$. Во многих случаях выполнено неравенство

$$p(F) = \min_p\{[B(F)]^p = 0\} \ > \ \min_p\{[B(F^*)]^p = 0\} = p(F^*).$$

Например, пусть $B(F) = diag[B_1, \ldots, B_n]$ — блочно диагональная матрица и все булевские матрицы B_i имеют нулевой спектральный радиус. Тогда

$$p(F) = \max_i \ \min_{p_i} \{[B_i]^{p_i} = 0\};$$

$p(F) > 1$ (если $F \neq const$) и $p(F^*) = 1$. Невырожденные примеры (когда $p(F^*) < p(F)$) столь же просты.

Так как вычисление x_i^* процессором номер i требует конечного числа обычных последовательных приближений, то естественна следующая схема нахождения ξ мультипроцессорной вычислительной системой. Процессор i итерирует $x_i^{r+1} = f_i(x_1, \ldots, x_i^r, \ldots, x_m)$ до тех пор, пока $x_i^{r+1} = x_i^r$. Затем он связывается с центральной памятью, кладет новое значение x_i в некоторый общий буфер и читает остальную часть вектора x. Эта схема является частным случаем асинхронных итераций, рассмотренных в предыдущих разделах. Она реализует асинхронное вычисление ξ с "малым"количеством обращений процессоров с центральной памятью.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим последовательность

$$z^{r+1} = \bar{\lambda}^r \cdot z^r + \lambda^r \cdot Bz^r, \ \ z^0 = \mathbf{I}.$$

Докажем справедливость неравенств

$$|\xi - x^r| \leq z^r, \quad r = 0, 1, \ldots, \tag{7}$$

$$Bz^r \leq z^{r+1} \leq z^r \quad r = 0, 1, \ldots \tag{8}$$

и

$$z^{d_{k+1}} \leq Bz^{d_k} \quad k = 0, 1, \ldots, p-1. \tag{9}$$

Неравенство (8) означает, что

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
z^0 & \geq & z^1 & \geq & z^2 & \geq & \dots & \geq & z^r & \geq & z^{r+1} & \geq & \dots \\
 & & \rotatebox{90}{$\leq$} & & \rotatebox{90}{$\leq$} & & & & \rotatebox{90}{$\leq$} & & \rotatebox{90}{$\leq$} & & \\
 & & Bz^0 & \geq & Bz^1 & \geq & \dots & \geq & Bz^{r-1} & \geq & Bz^r & \geq & \dots
\end{array}$$

Из (7-9) вытекает утверждение теоремы 1, так как $|\xi - x^{d_p}| \leq z^{d_p} \leq B^p\mathbf{I} = \emptyset$.

Оценку (7) докажем по индукции. При $r = 0$ оценка (7) имеет вид $|\xi - x^0| \leq z^0$ и выполняется, так как $z^0 = \mathbf{I}$. Если (7) верно при $r = m$, то

$$\begin{gathered}
|\xi - x^{m+1}| = |\xi - (\bar{\lambda}^m x^m \oplus \lambda^m F(x^m))| = \\
= |(\bar{\lambda}^m \xi \oplus \lambda^m \xi) - (\bar{\lambda}^m x^m \oplus \lambda^m F(x^m))| = \\
= \bar{\lambda}^m \cdot |\xi - x^m| + \lambda^m \cdot |\xi - F(x^m)| = \\
= \bar{\lambda}^m \cdot |\xi - x^m| + \lambda^m \cdot |F(\xi) - F(x^m)| \leq \\
\leq \bar{\lambda}^m \cdot |\xi - x^m| + \lambda^m \cdot B|\xi - x^m| \leq \bar{\lambda}^m \cdot z^m + \lambda^m \cdot Bz^m = z^{m+1}.
\end{gathered}$$

Поэтому предположение индукции выполнено при $r = m + 1$.

Оценку (8) также докажем по индукции. Неравенство $z^1 \leq z^0$ следует из $z^0 = \mathbf{I}$. Так как $\bar{\lambda}^0 \cdot z^0 + \lambda^0 \cdot Bz^0 = z^1$, то

$$Bz^0 = B\mathbf{I} = \bar{\lambda}^0 \cdot B\mathbf{I} + \lambda^0 \cdot B\mathbf{I} \leq \bar{\lambda}^0 \cdot \mathbf{I} + \lambda^0 \cdot B\mathbf{I} = z^1.$$

При $r = 0$ неравенство (8) доказано. Предположим, что оно верно при $r = m$ и докажем его при $r = m + 1$. Соотношения $Bz^m \leq z^{m+1} \leq z^m$ влекут $Bz^{m+1} \leq Bz^m \leq z^{m+1}$. Поэтому

$$\begin{gathered}
Bz^{m+1} = \bar{\lambda}^{m+1} \cdot Bz^{m+1} + \lambda^{m+1} \cdot Bz^{m+1} \leq \\
\leq \bar{\lambda}^{m+1} \cdot z^{m+1} + \lambda^{m+1} \cdot Bz^{m+1} = \\
= z^{m+2} \leq \bar{\lambda}^{m+1} \cdot z^{m+1} + \lambda^{m+1} \cdot z^{m+1} = z^{m+1}.
\end{gathered}$$

Для доказательства (9) отметим вначале очевидные соотношения

$$\begin{array}{ll}
z^{d_k+1} & = \bar{\lambda}^{d_k} \cdot z^{d_k} + \lambda^{d_k} \cdot Bz^{d_k} \leq \bar{\lambda}^{d_k} \cdot z^{d_k} + Bz^{d_k}, \\
z^{d_k+2} & = \bar{\lambda}^{d_k+1} \cdot z^{d_k+1} + \lambda^{d_k+1} \cdot Bz^{d_k+1} \leq \\
 & \leq \bar{\lambda}^{d_k+1} \cdot (\bar{\lambda}^{d_k} \cdot z^{d_k} + Bz^{d_k}) + \lambda^{d_k+1} \cdot Bz^{d_k+1} \leq \\
 & \leq \bar{\lambda}^{d_k+1} \cdot \bar{\lambda}^{d_k} \cdot z^{d_k} + \bar{\lambda}^{d_k+1} \cdot Bz^{d_k} + \lambda^{d_k+1} Bz^{d_k} = \\
 & = \bar{\lambda}^{d_k+1} \cdot \bar{\lambda}^{d_k} \cdot z^{d_k} + Bz^{d_k}, \\
 & \dots \\
z^{d_k+m} & \leq \bar{\lambda}^{d_k+m-1} \cdot \bar{\lambda}^{d_k+m-2} \cdot \ldots \bar{\lambda}^{d_k+1} \cdot \bar{\lambda}^{d_k} \cdot z^{d_k} + Bz^{d_k}.
\end{array}$$

Из этих соотношений и равенства нулю покомпонентного произведения $\prod_{j=d_k}^{d_{k+1}-1} \bar{\lambda}^j$ вытекает необходимое неравенство

$$z^{d_{k+1}} \leq \prod_{j=d_k}^{d_{k+1}-1} \bar{\lambda}^j \cdot z^{d_k} + Bz^{d_k} = Bz^{d_k}.$$

Доказательство теоремы 2. Пусть $|x - \xi| \le |y - \xi|$. Тогда $|Fx - \xi| \le |Fy - \xi|$ в силу ξ-монотонности F. Поэтому

$$\begin{gathered}|g_\lambda(x) - \xi| = |(\bar\lambda x \oplus \lambda Fx) - (\bar\lambda\xi \oplus \lambda\xi)| = \bar\lambda \cdot |x - \xi| + \lambda|Fx - \xi| \le \\ \le \bar\lambda \cdot |y - \xi| + \lambda|Fy - \xi| = |(\bar\lambda y \oplus \lambda Fy) - (\bar\lambda\xi \oplus \lambda\xi)| = |g_\lambda(y) - \xi|.\end{gathered}$$

Из этих соотношений вытекает, что для всех $\lambda \in E$ отображение $g_\lambda(x)$ ξ-монотонное. Поэтому первое утверждение теоремы 2 следует из определения операторов G_i.

Пусть $F(x) = \xi$. Из равенств

$$|g_\lambda(x) - \xi| = |(\bar\lambda x \oplus \lambda F(x)) - \xi| = |(\bar\lambda x \oplus \lambda\xi) - \xi| = \bar\lambda \cdot |x - \xi|,$$

следует $|g_\lambda(x) - \xi| \le |x - \xi|$. Так как последнее неравенство по определению ξ-монотонности влечет $|F(g_\lambda(x)) - \xi| \le |F(x) - \xi| = \emptyset$, то $F(g_\lambda(x)) = \xi$. Отсюда и из определения операторов G_i следует второе утверждение теоремы 2.

Пусть $x \in N$. Тогда

$$|g_\lambda(x) - \xi| = |(\bar\lambda x \oplus \lambda F(x)) - \xi| = \bar\lambda \cdot |x - \xi| + \lambda \cdot |F(x) - \xi| \le |x - \xi|.$$

Поэтому для каждого $\lambda \in E$ отображение $g_\lambda(x)$ является ξ-нерастягивающим.

Из определения (4) вытекает неравенство

$$|g_{\lambda_i^0}(x) - \xi| \le \bar\lambda_i^0 \cdot |x - \xi| + |F(x) - \xi|. \tag{10}$$

Пусть $\lambda,\ \lambda^* \in E,\ \ x \in N$ и

$$|y - \xi| \le \bar\lambda^* \cdot |x - \xi| + |F(x) - \xi|. \tag{11}$$

Неравенство (11) влечет $|y - \xi| \le |x - \xi|$. Поэтому $|F(y) - \xi| \le |F(x) - \xi|$ и из соотношений

$$\begin{gathered}|g_\lambda(y) - \xi| = \bar\lambda \cdot |y - \xi| + \lambda \cdot |F(y) - \xi| \le \\ \le \bar\lambda^* \cdot \bar\lambda \cdot |x - \xi| + \bar\lambda \cdot |F(x) - \xi| + \\ + \lambda \cdot |F(x) - \xi| \le \bar\lambda^* \cdot \bar\lambda \cdot |x - \xi| + |F(x) - \xi|.\end{gathered}$$

следует неравенство $|g_\lambda(y) - \xi| \le \bar\lambda^* \cdot \bar\lambda \cdot |x - \xi| + |F(x) - \xi|$, из которого в силу (10) по индукции вытекает оценка

$$|G_i(x) - \xi| \le \prod_{j=d_k}^{d_{k+1}-1} \bar\lambda_i^j |x - \xi| + |F(x) - \xi|.$$

Третье утверждение теоремы 2 справедливо в силу предположения (5).

Четвертое утверждение теоремы 2 — соотношение $\mathcal{G}_k \ll F^k$ проведем по индукции. Для $k = 1$ утверждение леммы следует из (11). Пусть $|\mathcal{G}_i(x) - \xi| \leq |F^i(x) - \xi|$. Введем обозначения $y = \mathcal{G}_i(x), \quad z = F^i(x) \in N$. Так как $|y - \xi| \leq |z - \xi|$ и $z \in N$, то $|G_{i+1}(z) - \xi| \leq |f(z) - \xi|$ следует из (11) и ξ-монотонностьG_i влечет $|G_{i+1}(y) - \xi| \leq |G_{i+1}(z) - \xi|$. Неравенство

$$|\mathcal{G}_{i+1}(x) - \xi| \leq |F^{i+1}(x) - \xi|$$

следует из двух предыдущих неравенств.

Пятое утверждение теоремы 2 немедленно следует из четвертого.

Список литературы

[1] Красносельский А.М., Красносельский М.А., Кузнецов Н.А. Нелинейные системы с неполными коррекциями и их устойчивость, Доклады АН СССР, т.318, #2, 291-294, 1991

[2] Клепцын А.Ф., Козякин В.С., Красносельский М.А., Кузнецов Н.А. О влиянии малой рассинхронизации на устойчивость сложных систем, Автоматика и телемеханика, 1983, #7, 44-51; 1984, #3, 42-47; 1984, #8, 63-67

[3] Асарин Е.А., Козякин В.С., Красносельский М.А., Кузнецов Н.А. Анализ устойчивости рассинхронизованных дискретных систем, М.: Наука, 1992

[4] Robert F. *Discrete Iterations. A Metric Study*, Springer, 1986

[5] Bertsekas D.P., Tsitsiklis J.N. *Parallel and distributed computations. Numerical Methods*, Prentice Hall, 1989