Об индексе Пуанкаре в задачах управления и оптимизации

Бобылев Н.А., Дементьева А.М., Красносельский А.М.

Аннотация

Предлагается новая схема вычисления степени отображения и, в частности, индекса Пуанкаре.

1 Введение

Понятие топологического индекса и индекса Пуанкаре становится эффективным инструментом исследования ряда задач теории управления, вариационного исчисления, теории устойчивости, теории экстремальных задач. Приведем три примера.

Рассмотрим динамическую систему, описываемую уравнением

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

и предположим, что эта система имеет изолированное состояние равновесия x_0. Обозначим через $\gamma(\varepsilon)$ степень отображения

$$\Phi(x) = \frac{f(x)}{\|f(x)\|}$$

сферы $S(\varepsilon, x_0) = \{x : \|x - x_0\| = \varepsilon\}$ в единичную сферу $S \subset \mathbb{R}^n$. При достаточно малых ε характеристика $\gamma(\varepsilon)$ не зависит от ε. Это общее значение величины $\gamma(\varepsilon)$ называется *индексом Пуанкаре состояния равновесия* системы (1) и обозначается через $\mathrm{ind}(x_0)$. В случае, когда x_0 — асимптотически устойчивое состояние равновесия, справедливо равенство $\mathrm{ind}(x_0) = (-1)^n$. Таким образом, последнее равенство является необходимым условием асимптотической устойчивости. В условиях слабой вырожденности системы в окрестности состояния равновесия x_0 это равенство является и достаточным условием асимптотической устойчивости.

В качестве второго примера рассмотрим задачу об отыскании T-периодических режимов в системе автоматического регулирования

$$L(\frac{d}{dt})x = M(\frac{d}{dt})f(t,x), \tag{2}$$

где, как обычно,

$$L(p) = p^l + a_1 p^{l-1} + \ldots + a_l,$$
$$M(p) = b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \ldots + b_m$$

— взаимно простые многочлены с вещественными коэффициентами, $l > m$, а нелинейность $f(t,x)$ периодична по t с периодом T. Пусть числа $\frac{2k\pi i}{T}$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$ не являются корнями многочлена $L(p)$. Предположим, далее, что система (2) имеет изолированный

T-периодический режим $x_* = x_*(t)$. Тогда определен его индекс Пуанкаре $\mathrm{ind}(x_*)$ по отношению к вполне непрерывному векторному полю

$$\Psi(x) = x(t) - \int_0^T H(t-s)f[s, x(s)]ds,$$

где $H(t)$ — импульсная характеристика линейного звена с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{M(p)}{L(p)}.$$

Если $\mathrm{ind}(x_*) \neq 0$, то для отыскания периодического режима $x_*(t)$ применим метод гармонического баланса: при достаточно больших k (k — число гармоник в процедуре) уравнения гармонического баланса разрешимы и их решения сходятся при $k \to \infty$ к отыскиваемому периодическому режиму $x_*(t)$ (см. [1]).

Наконец, в качестве третьего примера рассмотрим задачу классического вариационного исчисления:

$$f(u) = \int_\Omega F(x, u, \nabla u)dx \longrightarrow \min, \quad u(x)\bigg|_{d\Omega} = 0.$$

Пусть $u_* = u_*(x)$ — экстремаль функционала $f(u)$. Классическая теорема Якоби позволяет провести анализ на минимум этой экстремали, если известна информация о спектре второй вариации $\nabla^2 f(u_*)$. А именно, если спектр положителен, то U_* реализует локальный минимум, а если у оператора $\nabla^2 f(u_*)$ есть хотя бы одна отрицательная точка спектра, то u_* не является точкой минимума.

Теорема Якоби не применима, если экстемаль u_* вырождена, т.е. спектр оператора $\nabla^2 f(u_*)$ неотрицателен и содержит ноль. Оказывается, что в вырожденных ситуациях полный анализ экстремали u_* можно провести, используя понятие индекса Пуанкаре этой экстремали по отношению к градиентному полю $\nabla f(u)$: для того, чтобы экстремаль была точкой минимума функционала $f(u)$ необходимо и достаточно, чтобы индекс Пуанкаре $\mathrm{ind}(u_*)$ этой экстремали был равен 1.

Вычисление топологического индекса в описанной вырожденной ситуации сводится к построению некоторой последовательности вещественных чисел: номер и знак 1-го ненулевого члена этой последовательности определяет значение $\mathrm{ind}(u_*)$ ([2]).

2 Классические схемы введения степени отображения

Пусть $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ — n-мерные ориентированные гладкие многообразия без края, причем $\mathcal{M}$ компактно, а $\mathcal{N}$ связно. Через $T\mathcal{M}_x$ и $T\mathcal{N}_y$ ниже обозначаются n-мерные касательные пространства к многообразиям $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ соответственно. Пусть, далее, $f: \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ — гладкое отображение многообразия $\mathcal{M}$ в $\mathcal{N}$. Точка $x \in \mathcal{M}$ называется *регулярной точкой* отображения f, если линейное отображение $f'_x : T\mathcal{M}_x \to T\mathcal{N}_{f(x)}$ является изоморфизмом. Нерегулярные точки называются *критическими точками* отображения f. Если $C \subset \mathcal{M}$ — это множество критических точек отображения , то множество $f(C) \subset \mathcal{N}$ называется *множеством критических значений* этого отображения. Дополнение $\mathcal{N} \setminus f(C)$ к множеству критических значений называется *множеством регулярных значений* отображения f. В силу теоремы Сарда (см., например, [10, 8]) n-мерная лебегова мера множества критических значений гладкого отображения f равна нулю. Отсюда следует, в частности, что множество регулярных значений отображения f непусто.

Одна из наиболее распространенных схем введения степени отображения основана на следующей конструкции. Пусть $y \in \mathcal{N}$ — регулярное значение отображения f и $x \in$

$f^{-1}(y)$. Определим число $\mathrm{sign} f'_x$ равным 1, если линейный изоморфизм $f'_x : T\mathcal{M}_x \to T\mathcal{N}_y$ сохраняет ориентацию, и равным -1, если этот изоморфизм меняет ориентацию. Положим

$$\deg(f;y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \mathrm{sign} f'_x. \tag{3}$$

Поскольку y — регулярное значение отображения f, то в силу теоремы о неявной функции полный прообраз $f^{-1}(y)$ точки y состоит из изолированных точек. А так как $\mathcal{M}$ компактно, то количество точек в прообразе $f^{-1}(y)$ конечно. Поэтому правая часть в (3) определена корректно. Оказывается, что число $\deg(f;y)$, определенное формулой (3), не зависит от выбора регулярного значения y отображения f. Это общее значение называется *степенью отображения* $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ и обозначается $\deg f$.

Второй (также весьма распространенный) подход к введению понятия степени отображения связан с интегрированием дифференциальных форм на гладких многообразиях. Приведем схему этого подхода.

Пусть ω^n — дифференциальная форма, определенная на многообразии $\mathcal{N}$. Отображение $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ естественным образом индуцирует дифференциальную n-форму $\omega^n \circ f$, определенную на многообразии $\mathcal{M}$. Эта форма определяется по следующему правилу: если $x \in \mathcal{M}$, $y = f(x) \in \mathcal{N}$, $h \in T\mathcal{M}_x$, $f'_x \circ h \in T\mathcal{N}_y$, то

$$(\omega^n \circ f)(x) \circ h = \omega^n(y) \circ (f'_x \circ h). \tag{4}$$

Если $U \subset \mathcal{M}$, $V \subset \mathcal{N}$ и $f : U \to V$ — сохраняющий ориентацию диффеоморфизм, то

$$\int_U \omega^n \circ f = \int_V \omega^n.$$

Если $f : U \to V$ меняет ориентацию, то

$$\int_U \omega^n \circ f = -\int_V \omega^n.$$

Эти формулы — аналоги классических формул о замене переменных в кратном интеграле. С помощью функции $\mathrm{sign} f'_x$, введенной выше, эти формулы можно объединить в одну:

$$\int_U \omega^n \circ f = \mathrm{sign} f'_x \int_V \omega^n, \tag{5}$$

где x — любая точка окрестности U.

Дифференциальную n-форму ω^n, определенную на многообразии $\mathcal{M}$, называют *допустимой* для точки $y \in \mathcal{N}$, если носитель $\mathrm{supp}\,\omega^n$ формы ω^n лежит в некоторой окрестности $V \subset \mathcal{N}$, гомеоморфной n-мерному шару, и

$$\int_{\mathcal{N}} \omega^n = 1. \tag{6}$$

Пусть ω^n — допустимая для точки $y \in \mathcal{N}$ n-форма. Положим

$$\deg(f;y) = \int_{\mathcal{M}} \omega^n \circ f. \tag{7}$$

Можно показать, что число $\deg(f;y)$ не зависит от выбора допустимой для y формы ω^n. Поэтому характеристика $\deg(f;y)$ определена корректно. Эта характеристика непрерывно зависит от точки y и локально постоянна. Действительно, если $y_0 \in \mathcal{N}$ — некоторая точка многообразия $\mathcal{N}$ и ω^n — форма, допустимая для точки y_0, то эта форма будет допустимой и для каждой точки $y_1 \in \mathcal{N}$, достаточно близкой к y_0. Поэтому

$$\deg(f;y_0) = \deg(f;y_1) = \int_{\mathcal{M}} \omega^n \circ f.$$

Поскольку многообразие $\mathcal{N}$ связно, то $\deg(f;y)$ — константа на $\mathcal{N}$. Эту константу называют *степенью отображения* $f:\ \mathcal{M}\to\mathcal{N}$.

Описанные выше две конструкции определяют одну и ту же характеристику. Действительно, пусть $y\in\mathcal{N}$ — регулярное значение отображения $f:\ \mathcal{M}\to\mathcal{N}$. Рассмотрим полный прообраз точки $y:\ \ f^{-1}(y)=\{x_1,\ldots,x_k\}$. Так как производные $f'_{x_i}:\ T\mathcal{M}_{x_i}\to T\mathcal{N}_y\ \ (i=1,\ldots,k)$ — это изоморфизмы касательных пространств $T\mathcal{M}_{x_i}$ на $T\mathcal{N}_y$, то в силу теоремы о неявной функции найдутся такие попарно непересекающиеся окрестности $U_i\subset\mathcal{M}$ точек x_i, что сужения отображения f на U_i являются диффеоморфизмами U_i на $V_i=f(U_i)\ \ (i=1,\ldots,k)$. Положим

$$V=\bigcap_{i=1}^{k}V_i.$$

Пусть ω^n — допустимая для точки y форма с носителем, лежащим в V. Тогда в силу (5) и (6)

$$\int_{\mathcal{M}}\omega^n\circ f=\sum_{i=1}^{k}\ \int_{U_i}\omega^n\circ f=\sum_{i=1}^{k}\operatorname{sign}f'_{x_i}\int_{V_i}\omega^n=$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\operatorname{sign}f'_{x_i}\int_{\mathcal{N}}\omega^n=\sum_{i=1}^{k}\operatorname{sign}f'_{x_i}.$$

Остается сослаться на формулы (3) и (7).

Ниже мы опишем схему введения понятия степени отображения, которая является промежуточной между описанными выше.

3 Основные теоремы

Пусть m — целое число и $0\le m<n$. Рассмотрим какое-либо m-мерное связное замкнутое гладкое ориентированное многообразие $\mathcal{N}^m$, лежащее в множестве регулярных значений отображения $f:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$. Рассмотрим, далее, полный прообраз $f^{-1}(\mathcal{N}^m)$ многообразия $\mathcal{N}^m$. Поскольку $\mathcal{N}^m$ лежит в множестве регулярных значений отображения f, то множество $f^{-1}(\mathcal{N}^m)\subset\mathcal{M}$ является компактным гладким замкнутым многообразием. Обозначим его через $\mathcal{M}^m$.

Пусть, далее, $\mathcal{M}^m_1,\ldots,\mathcal{M}^m_k$ — связные компоненты многообразия $\mathcal{M}^m$. Сужение отображения f на каждое многообразие $\mathcal{M}^m_i\ \ (i=1,...,k)$ является диффеоморфизмом $\mathcal{M}^m_i$ на $\mathcal{N}^m$.

Зафиксируем произвольную точку $y\in\mathcal{N}^m$, пусть $x_1,\ldots,x_k\in\mathcal{M}$ — ее прообразы. Очевидно, $x_i\in\mathcal{M}^m_i$, а количество прообразов не зависит от y и равно числу k связных компонент $\mathcal{M}^m_i$ многообразия $\mathcal{M}^m$. Выберем, далее, ориентацию каждой компоненты $\mathcal{M}^m_i$ таким образом, чтобы диффеоморфизм $f:\ \mathcal{M}^m_i\to\mathcal{N}^m$ сохранял ориентацию, если изоморфизм $f'_{x_i}:\ T\mathcal{M}_{x_i}\to T\mathcal{N}_y$ сохраняет ориентацию, и менял бы ориентацию, если меняет ориентацию изоморфизм $f'_{x_i}:\ \ T\mathcal{M}_{x_i}\to T\mathcal{N}_y$. Введенная таким образом ориентация каждой связной компоненты многообразия $\mathcal{M}^m$ порождает ориентацию всего многообразия $\mathcal{M}^m$.

Обозначим через $f_{\mathcal{M}^m} : \mathcal{M}^m \to \mathcal{N}^m$ сужение на $\mathcal{M}^m$ отображения $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$.

Теорема 1 *Пусть множество $\mathcal{N}^m$ односвязно. Справедливо равенство*

$$deg\, f = deg\, f_{\mathcal{M}^m}. \tag{8}$$

Доказательство теоремы вынесено в приложение.

Многообразие $\mathcal{N}^m$ назовем *стягиваемым в точку*, если существует непрерывное семейство гладких многообразий $\mathcal{N}^m_\lambda$ $(0 \le \lambda \le 1)$ такое, что $\mathcal{N}^m_0 = \mathcal{N}^m$, $\mathcal{N}^m_1 = y_0$ $(y_0 \in \mathcal{N})$ и при $\lambda \in [0,1)$ многообразия $\mathcal{N}^m_\lambda$ диффеоморфны друг другу.

Теорема 2 *Пусть множество $\mathcal{N}^m$ стягиваемо в некоторую точку y_0 в множестве регулярных значений отображения f. Справедливо равенство (8).*

Доказательство этой теоремы также приведено в приложении.

Теоремы 1 и 2 могут трактоваться как индуктивное определение степени отображения.

4 Пример (понижение размерности)

Пусть на единичной сфере S в трехмерном пространстве $\{x_1, x_2, x_3\}$ задано векторное поле $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3\}$. Пусть множество нулей скалярнозначной функции $A_3(x,y,z)$ пересекается с сферой S по связной гладкой кривой Γ без самопересечений и разбивает сферу на два подмножества

$$M_+ = \{u :\ u \in S,\ A_3(u) > 0\}, \quad M_- = \{u :\ u \in S,\ A_3(u) < 0\}.$$

Пусть множество M_+ расположено в "верхней"полусфере сферы S. Через P обозначим ортогональный проектор на плоскость $\{x, y, 0\}$; через $P^{-1}\{x,y\}$ $(x^2 + y^2 < 1)$ — точку верхней полусферы, лежащую над точкой $\{x, y, 0\}$.

В этом примере вместо степени отображения мы будем использовать эквивалентное понятие *вращения векторного поля* ([5]).

Утверждение 1 *Вращение трехмерного поля $\mathcal{A}$ на сфере S равно вращению плоского поля $\left\{A_1(x,y,P^{-1}\{x,y\}), A_2(x,y,P^{-1}\{x,y\})\right\}$ на кривой $P\Gamma$.*

Это утверждение следует из теоремы 2, оно может быть обобщено в различных направлениях.

5 Библиографический комментарий

Классическая схема введения понятия степени отображения, основанная на процедуре симплициального разбиения, восходит к работам Брауера [4] и Кронекера [6]. Модификации этой схемы, базирующиеся на понятиях кубизации и клеточного разбиения многообразия, можно найти в [3, 5]. Аксиоматическое построение теории степени отображения предлагал Е.Цайдлер [12]. Основные конструкции, связанные с процедурой введения степени, основанной на понятии регулярного значения отображения, принадлежат М.Нагумо [9]. Эта схема введения степени отображения блестяще применена Дж.Милнором [7]. Подход к понятию степени, связанный с интегрированием дифференциальных форм возходит к Э.Хайнсу ([11]).

Доказательство теоремы 1. Доказательству теоремы 1 предпошлем вспомогательное утверждение.

Утверждение 2 *Пусть $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ — гладкие замкнутые многообразия одинаковой размерности, причем $\mathcal{M}$ компактно и связно, а $\mathcal{N}$ односвязно. Тогда каждый локальный диффеоморфизм f многообразия $\mathcal{M}$ на $\mathcal{N}$ является глобальным диффеоморфизмом.*

Доказательство этого утверждения проведем от противного. Предположим, что утверждение леммы не верно. Тогда найдутся две не совпадающие точки $x_0,\ x_1 \in\mathcal{M}$ для которых $f(x_0) = f(x_1)$. Так как $\mathcal{M}$ связно, то найдется простая гладкая кривая $x(t)$ $(0 \le t \le 1)$, лежащая в $\mathcal{M}$ для которой $x(0) = x_0,\ x(1) = x_1$. Не ограничивая общности можно считать, что при $t \in (0, 1)$ верно соотношение $x(t) \ne y_0$, где $y_0 = f(x_0)$. Рассмотрим образ $y(t) = f(x(t))$ кривой $x(t)$. Кривая $y(t) \in\mathcal{N}$ — гомеоморфный образ окружности. Полный прообраз кривой $y(t)$ является объединением конечного числа простых дуг (гомеоморфных образов отрезка) и простых замкнутых кривых (гомеоморфных образов окружности). Один из элементов полного прообраза — кривая $x(t)$ $(0 \le t \le 1)$.

Поскольку многообразие $\mathcal{N}$ односвязно, то кривую $y(t)$ можно стянуть в $\mathcal{N}$ в точку, т.е. существует однопараметрическое семейство $y_\lambda(t)$ $(0 \le t \le 1,\ 0 \le \lambda \le 1)$ непрерывно зависящих от параметра $\lambda \in [0, 1]$ лежащих в $\mathcal{N}$ гомеоморфных образов окружности, для которого $y_0(t) = y(t),\ y_1(t) \equiv y_1 \ \ (0 \le t \le 1)$. Элемент полного прообраза кривой $y_\lambda(t)$, непрерывный по λ и переходящий при $\lambda = 0$ в кривую $x(t)$, обозначим через $x_\lambda(t)$. Параметризацию выберем такой, чтобы

$$y_\lambda(0) = y_\lambda(1). \tag{9}$$

Так как $f(x_1(t)) = y_1$, то при некоторых $\lambda \in [0, 1]$ точки $x_\lambda(0)$ и $x_\lambda(1)$ близки и различны. Поскольку f — локальный диффеоморфизм, то при этих λ

$$f(x_\lambda(0)) \ne f(x_\lambda(1)).$$

Но $f(x_\lambda(0)) = y_\lambda(0),\ f(x_\lambda(1)) = y_\lambda(1)$. Это противоречит равенству (9). Лемма доказана.

Теорема 1 теперь доказывается просто. Так как степень диффеоморфизма равна либо $+1$, либо -1 в зависимости от того сохраняет или нет диффеоморфизм ориентацию, то в силу свойства аддитивности степени

$$\deg f_{\mathcal{M}^m} = \sum_{i=1}^{k} \deg f_{\mathcal{M}_i^m} = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{sign} f'_{x_i} = \deg f.$$

Равенство (8) является в определенном смысле интерполирующим между (3) и (7).

Доказательство теоремы 2. Обозначим через $\mathcal{M}_\lambda^m$ полный прообраз многообразия $\mathcal{N}_\lambda^m$. Определим аналогично ориентации многообразия $\mathcal{M}^m$ ориентации многообразий $\mathcal{M}_\lambda^m$ при $0 < \lambda \le 1$. Степень $\deg f$ отображений $f : \mathcal{M}_\lambda^m \to \mathcal{N}_\lambda^m \ \ (0 < \lambda \le 1)$ — это непрерывная функция параметра λ. Так как эта функция определена на связном множестве $(0, 1]$ и принимает целочисленные значения, то она постоянна, т.е. не зависит от λ. При малых λ отображение каждой связной компоненты $\mathcal{M}_{\lambda,i}^m$ многообразия $\mathcal{M}_\lambda^m$ является диффеоморфизмом.

Дальнейшие рассуждения совпадают с построениями, проведенными при доказательстве теоремы 1.

Список литературы

[1] Бобылев Н.А., Красносельский А.М., Красносельский М.А. Устойчивость периодических колебаний и возможность их построения методом гармонического баланса, *Автоматика и Телемеханика*, 5 (1989) 179-181

[2] Бобылев Н.А., Красносельский М.А. Нормальные деформации в вариационных задачах, *ДАН СССР*, **307**, #4 (1989) 785-788

[3] Болтянский В.Г. *Об основных понятиях алгебраической топологии*, в сб. лекций II летней мат. школы, Кацивели, 1964, Киев, Наукова Думка, 1965

[4] Brouwer L.E.J. Uber Abbilidung von Mannigfaltigkeiten, *Math. Ann.* **71** (1912) 97-115

[5] Красносельский М.А. *Топологичесие методы в теории нелинейных операторных уравнений*, М.: Гостехиздат, 1956

[6] Kronecker L. Uber Systeme von Funktionen mehrer Variabeln, *Monatsberichte Akad. Wiss. Berlin*, (1968) 159-193; 688-698

[7] Milnor J. *Topology from the differentiable viewpoint*, Charlottesville, The Univ. Press of Virginia, 1965

[8] Милнор Дж., Уоллес А. *Дифференциальная топология. Начальный курс.* М.: Мир, 1972

[9] Nagumo M. Degree of mapping in linear local convex topological spaces, *Amer. J. of Math.*, **73**, #3 (1951) 497-511

[10] Sard A. The measure of the critical points of differentiable maps, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **48** (1942) 883-890

[11] Schwartz J. *Nonlinear functional analysis*, Cordon & Breach, N.Y., 1969

[12] Zeidler E. *Beiträge zur Theorie und Praxis freier Randwertaufgaben*, Academie-Verlag, Berlin, 1971

УДК 62-50 Реферат

Бобылев Н.А., Дементьева А.М., Красносельский А.М.

Об индексе Пуанкаре в задачах управления и оптимизации

Предлагается новая схема вычисления степени отображения и, в частности, индекса Пуанкаре. Приводятся примеры применения топологического индекса и индекса Пуанкаре в задачах теории управления, вариационного исчисления, теории устойчивости, теории экстремальных задач.

Bobylev N.A., Dement'eva A.M., Krasnosel'skii A.M.

On Poincaré index in control and optimization problems

The new scheme is presented of mapping degree calculation particularly of Poincaré index. The examples are given of topological index and Poincaré index application to problems of control theory, stability theory, theory of optimization.