Об интегрируемости m-значных динамик при помощи однопорожденных m-значных групп

А. А. Гайфуллин, П. В. Ягодовский

В настоящей заметке доказывается достаточный признак интегрируемости многозначной динамики при помощи многозначной группы. Интегрируемость многозначной динамики понимается в смысле [1].

Пусть S – конечное множество, $(S)^m$ – его m-я симметрическая степень; *m-значной динамикой с дискретным временем на множестве S* называется отображение $T\colon S\to(S)^m$. *Графом динамики T* называется граф с ориентированными ребрами на множестве вершин S такой, что из вершины s в вершину s' ведет столько ребер, какова кратность вхождения вершины s' в мультимножество $T(s)$. Из каждой вершины этого графа выходит ровно m ребер, а число ребер, входящих в вершину s, равно числу прообразов элемента s при динамике T с учетом кратностей. Для каждого натурального числа k динамика T задает естественным образом *кратную* ей km-значную динамику на том же множестве S.

Говорят, что множество A несет на себе структуру *m-значной группы*, если заданы *единица* $e\in A$ и *умножение* $\mu\colon A\times A\to(A)^m$, удовлетворяющие естественным обобщениям аксиом ассоциативной группы. (Подробнее см. [1]–[3]. Понятие m-значной группы было введено В. М. Бухштабером в начале 1990-х годов.) В частности, для каждого элемента $a\in A$ должен существовать хотя бы один *обратный* ему элемент b, т.е. такой, что $e\in\mu(a,b)$ и $e\in\mu(b,a)$. Говорят, что многозначная группа *порождена элементом a_1*, если в степенях элемента a_1 встречаются все элементы группы; такие группы называются *однопорожденными*. Образующий a_1 называется *эрмитовым*, если он является обратным самому себе. Для любой (обычной) группы G и ее подгруппы H на множестве двойных смежных классов $H\backslash G/H$ существует структура многозначной *бикосетной* группы с умножением $\mu(Hg_1H,Hg_2H)=[Hg_1hg_2H,\ h\in H]$.

Действием m-значной группы A на множестве S называется отображение $\nu\colon A\times S\to(S)^m$ такое, что мультимножества $\nu(a_1,\nu(a_2,s))$ и $\nu(\mu(a_1,a_2),s)$ совпадают для любых $a_1,a_2\in A$, $s\in S$ и $\nu(e,s)=[s,s,\dots,s]$. Согласно [1], динамика T на множестве S называется *интегрируемой при помощи однопорожденной многозначной группы A с образующим a_1*, если существует действие ν группы A на S такое, что мультимножества $T(s)$ и $\nu(a_1,s)$ совпадают для любого $s\in S$.

В [4] для широкого класса многозначных динамик, а именно, для динамик, задаваемых однородными графами (см. ниже), было доказано, что некоторые кратные им динамики интегрируемы, и поставлена задача о характеризации динамик, интегрируемых без перехода к кратным. В настоящей статье мы решаем эту задачу, доказывая достаточный признак интегрируемости многозначных динамик, который, в частности, обеспечивает интегрируемость всех динамик, задаваемых однородными графами. Доказательство основано на конструкции, являющейся обобщением конструкции работы [4].

Теорема 1 (достаточный признак интегрируемости). *Пусть m-значная динамика T на множестве S такова, что каждый элемент $s\in S$ имеет с учетом кратностей ровно m прообразов. Тогда динамика T интегрируема при помощи некоторой бикосетной однопорожденной m-значной группы.*

Доказательство. Рассмотрим граф динамики T; пусть E – множество его ребер. Для каждой вершины s обозначим через $E_{s,-}$ множество ребер, выходящих из вершины s, и через $E_{s,+}$ множество ребер, входящих в вершину s. Тогда $|E_{s,-}|=|E_{s,+}|=m$. Пусть γ – множество из m элементов, H – какая-либо транзитивная группа перестановок его элементов. Для каждой вершины s выберем произвольным образом картирующие биекции $\psi_{s,\pm}\colon\gamma\to E_{s,\pm}$. Биекции $\psi_{s,-}$ позволяют определить действие группы H на множестве E: если $\varepsilon \in E_{s,-}$, то $h(\varepsilon) = \psi_{s,-}(h(\psi_{s,-}^{-1}(\varepsilon)))$. Таким образом, можно считать группу H подгруппой группы перестановок множества E. Отображение, ставящее в соответствие каждому ребру его начало, задает отождествление $E/H = S$. Положим $t(\varepsilon) = \psi_{s,-}(\psi_{s,+}^{-1}(\varepsilon))$, если $\varepsilon \in E_{s,+}$. Тогда t – перестановка множества E. Обозначим через G подгруппу группы перестановок множества E, порожденную подгруппой H и перестановкой t. Многозначная бикосетная группа $A = H\backslash G/H$ естественно действует на множестве $S = E/H$, причем динамика, задаваемая ее образующим HtH, кратна динамике T с коэффициентом $\frac{|H|}{m}$. Группа A будет интегрировать динамику T, например, если в качестве H взять группу $\mathbb{Z}_m$, действующую на множестве γ циклическими перестановками. Теорема 1 доказана.

Пусть Γ – обобщенный однородный граф, т.е. граф с неориентированными (возможно, кратными) ребрами и ориентированными (возможно, кратными) петлями, все вершины которого имеют степень m. Определим на множестве его вершин динамику T, переводящую вершину в мультимножество ее соседей. Граф этой динамики может быть получен из Γ заменой каждого ребра на пару ребер, имеющих противоположные ориентации. Определим картирующие биекции так, чтобы перестановка t меняла местами ребра каждой такой пары, а петли оставляла неподвижными. Тогда $t^2 = 1$.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Естественная многозначная динамика на множестве вершин обобщенного однородного графа интегрируема при помощи некоторой бикосетной однопорожденной многозначной группы с эрмитовым образующим.*

Интегрируемость динамики, кратной динамике T, в случае, когда Γ – симметрический граф без петель и кратных ребер, была доказана в серии работ [5], [2], [3]. Интегрирующая группа имела вид $H_\Gamma\backslash G_\Gamma/H_\Gamma$, где G_Γ – группа автоморфизмов графа Γ, действующая транзитивно на его вершинах и его ребрах, $H_\Gamma \subset G_\Gamma$ – стабилизатор некоторой вершины. Конструкция из [5], [2], [3] и конструкция из настоящей заметки приводят, вообще говоря, к различным многозначным группам, поскольку введение картирующих биекций нарушает симметрию графа. Подчеркнем, что построенная в доказательстве теоремы 1 группа A зависит не только от выбора группы H, но и от выбора картирующих биекций. Например, для полного графа на 4 вершинах при $H = \mathbb{Z}_3$ существует ровно 3 принципиально различных способа выбора картирующих биекций. В результате мы получаем трехзначные группы, интегрирующие соответствующую динамику, порядков 2, 12 и 38. Первая из этих групп может быть построена и с помощью конструкции из работ [5], [2], [3].

В завершение авторы хотят выразить свою глубокую благодарность профессору В. М. Бухштаберу за помощь и поддержку в работе.

Список литературы

[**1**] V. Buchstaber, *Mosc. Math. J.*, **6**:1 (2006), 57–84. [**2**] П. В. Ягодовский, *Записки науч. сем. ПОМИ*, **292** (2002), 161–174. [**3**] П. В. Ягодовский, *Записки науч. сем. ПОМИ*, **325** (2005), 225–242. [**4**] В. М. Бухштабер, А. А. Гайфуллин, *УМН*, **61**:3 (2006), 171–172. [**5**] П. В. Ягодовский, *УМН*, **57**:1 (2002), 143–144.

А. А. Гайфуллин (A. A. Gaifullin)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: gaifull@mccme.ru

Представлено В. М. Бухштабером
Принято редколлегией
17.11.2006

П. В. Ягодовский (P. V. Yagodovskii)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
Финансовая академия при Правительстве РФ
E-mail: korcsak@list.ru