О перечислении особых точек на аффинной гиперповерхности

А.В. Селиверстов

Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН
e-mail: slvstv@iitp.ru

Поиск особой точки на аффинной гиперповерхности, заданной многочленом f степени d от n переменных с рациональными коэффициентами, сводится к решению системы уравнений, выражающих обращение в нуль многочлена f и его градиента grad f. Общим методом решения служит вычисление базиса Грёбнера соответствующего идеала. Вычисления можно выполнить, скажем, с помощью Singular (http://www.singular.uni-kl.de). Гиперповерхность f=0 особая, если равен нулю дискриминант [1], то есть многочлен от коэффициентов f. (Особые гиперповерхности степени d соответствуют гиперплоскостям, касающимся многообразия Веронезе, то есть точкам двойственного многообразия.) Однако с ростом числа переменных n такие вычисления становятся очень трудными, что делает актуальным поиск других методов.

Теорема. Дан неприводимый многочлен f с рациональными коэффициентами, причём гиперповерхность f=0 либо гладкая, либо имеет конечное число особых точек. Тогда за полиномиальное время строится такое многообразие F, что число его неприводимых компонент на одну больше числа особых точек гиперповерхности. Более того, если все особые точки рациональные, то F определено над полем рациональных чисел. Степень F ограничена полиномом от d.

Точками F служат тройки (x, v, a), где x – точка аффинного пространства, v – вектор, a – число, удовлетворяющие условиям f(x)=0 и grad f=av. Если точка x гладкая, то каждому ненулевому a соответствует единственный вектор v. Если точка x особая, то a=0 и вектор v любой.

Разность степеней F и большой неприводимой компоненты F служит оценкой сверху числа особых точек. Так перечисление особых точек сводится к локальному вычислению. Применим к F алгоритм вычисления неприводимых компонент [2].

Следствие. В условиях Теоремы рациональные особые точки на гиперповерхности f=0 вычислимы за полиномиальное от степени d время.

Поиск особой точки на плоской кривой сводится к разложению на неприводимые множители многочлена от двух переменных. Если коэффициенты f и особые точки рациональные, то такое разложение выполнимо за полиномиальное время [3, 4, 5]. В случае большого числа переменных n проверкой гладкости может служит построение изоморфизма с гиперповерхностью, полученной небольшой деформацией.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 13-04-40196-Н).

ЛИТЕРАТУРА

1. Gelfand I.M., Kapranov M.M., Zelevinsky A.V. Discriminants, resultants, and multidimensional determinants. Birkhäuser Boston Inc., 1994.
2. Чистов А.Л. Алгоритм полиномиальной сложности для разложения многочленов и нахождение компонент многообразия в субэкспоненциальное время // Записки научных семинаров ЛОМИ. 1984. Т. 137. С. 124–188.
3. Lenstra A.K., Lenstra H.W., Lovász L. Factoring polynomials with rational coefficients // Mathematische Annalen. 1982. V. 261, N 4. P. 515–534.
4. Ивашов Д.С. Об алгоритме факторизации полиномов многих переменных // Вестник ТГУ. 2012. Т. 17, N 2. С. 591–597.
5. Чистов А.Л. Оценка степени системы уравнений, задающей многообразие приводимых многочленов // Алгебра и анализ. 2012. Т. 24, N 3, С. 199–222. Исправление // Алгебра и анализ. 2013. Т. 25, N 2. С. 279.