ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том XVIII 1982 Вып. 2

УДК 621.391.1:512.9

АЛГЕБРА ИНВАРИАНТНЫХ СВОЙСТВ ДВОИЧНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Вьюгин В. В.

Изучаются свойства бесконечных двоичных последовательностей инвариантные относительно алгоритмической эквивалентности последовательностей. При этом отождествляются любые два свойства, различающиеся на множестве, некоторая естественная мера которого равна 0. Показано, что класс всех вычислимых и класс всех случайных последовательностей нельзя разделить такими свойствами на нетривиальные подклассы. Основные технические результаты работы связаны с изучением инвариантных свойств, которыми могут обладать невычислимые последовательности алгоритмически не эквивалентные никаким случайным последовательностям.

§ 1. Основные определения

В этой работе мы по возможности будем придерживаться обозначений и терминологии, принятых в [1, 2]. Эти же работы рекомендуются читателю в качестве основных предварительных источников.

1.1. Основные множества. Основные множества, с которыми мы будем иметь дело, это множество N всех натуральных чисел, множество Q всех рациональных чисел, множество R^+ всех неотрицательных действительных чисел, множество Ω всех бесконечных последовательностей, состоящих из 0 и 1, и множество Ω^* всех конечных двоичных последовательностей, причем пустая последовательность Λ также принадлежит Ω^*. Символом $l(x)$ обозначаем длину последовательности x (количество членов x), x_i обозначает i-й член последовательности x, $(x)_n=x_1x_2\ldots x_n$. Последовательность y продолжает последовательность x (обозначение $x\subset y$), если $l(x)\leqslant l(y)$ и $x_i=y_i$ при $1\leqslant i\leqslant l(x)$. Последовательности x и y согласованы, если $x\subset y$ или $y\subset x$. В дальнейшем будут рассматриваться только двоичные последовательности.

Множество Ω будет рассматриваться как топологическое пространство с базой, состоящей из всевозможных интервалов $\Gamma_x=\{\omega\in\Omega\,|\,x\subset\omega\}$, где $x\in\Omega^*$. Топологическое пространство Ω компактно.

Основные сведения по теории рекурсивных функций содержатся в [1]. Бесконечная последовательность α называется вычислимой, если функция $g(n)=\alpha_n$ рекурсивна.

1.2. Рекурсивно-перечислимые полумеры. Понятие рекурсивно-перечислимой полумеры (полувычислимой меры на $\Omega^*\cup\Omega$) впервые рассматривалось в [2].

Функция P, определенная на Ω^* и принимающая неотрицательные действительные значения, называется полумерой, если она удовлетворяет условиям

$$P(\Lambda)\leqslant 1,$$
$$P(x)\geqslant P(x0)+P(x1)$$

для всех x. Здесь xi обозначает последовательность, полученную из x добавлением еще одного члена i. Полумера P называется мерой, если $P(x)=$

$=P(x0)+P(x1)$ для всех x. Меру P можно рассматривать на σ-алгебре борелевских подмножеств Ω, если определить $P(\Gamma_x)=P(x)$ и далее распространить P обычным образом. В алгоритмической теории информации рассматриваются рекурсивно-перечислимые (далее р.п.) полумеры. Произвольная функция g из Ω^* в R^+ называется рекурсивно-перечислимой, если $\{(r, x)\,|\,r<g(x),\ r\in Q,\ x\in\Omega^*\}$ является р.п. множеством. Заметим, что если р.п. полумера P является мерой и $P(\Lambda)=1$ (т. е. P нормирована), то множество $\{(r, x)\,|\,r>P(x)\}$ является р.п. так же, как и множество [1] $\{(r, x)\,|\,r<P(x)\}$. Используя перечислимость каждого из этих множеств, нетрудно указать алгоритм, позволяющий вычислять значения $P(x)$ с любой степенью точности. Р. п. мера также будет называться вычислимой. Самый известный пример вычислимой меры — равномерная мера Лебега $L(x)=2^{-l(x)}$, соответствующая последовательности независимых испытаний с равной вероятностью исходов 0 и 1.

Алгоритмическим оператором называется р.п. множество пар $A\subseteq\Omega^*\times\Omega^*$, удовлетворяющее условию: если (x, y), $(x', y')\in A$ и x согласовано с x', то y согласовано с y'. Для произвольной последовательности $\alpha\in\Omega^*\cup\Omega$ и любых (x, y), $(x', y')\in A$, из условий $x\subset\alpha$ и $x'\subset\alpha$ следует, что y согласовано с y'. Исходя из этого свойства, в качестве значения $A(\alpha)$ берется последовательность, полученная объединением всех таких y, что $(x, y)\in A$ и $x\subset\alpha$.

Легко видеть, что для любых вычислимой меры Φ и алгоритмического оператора A функция $P(x)=\Phi(\bigcup\limits_{x\subset A(z)}\Gamma_z)$ является р.п. полумерой. В дальнейшем мы будем использовать следующие два утверждения из [2, 3].

Теорема 1.1 [2]. *Для любой р.п. полумеры P такой, что $P(\Lambda)=1$, существует такой алгоритмический оператор A, что $P(x)=L(\bigcup\limits_{x\subset A(z)}\Gamma_z)$ для всех x.*

Теорема 1.2 [2, 3]. *Существует такая р.п. полумера M, что для любой р.п. полумеры P найдется такая константа C, что неравенство $CM(x)\geqslant P(x)$ выполнено для всех x.*

В дальнейшем $f(x)\preccurlyeq g(x)$ будет обозначать тот факт, что существует такая константа C, что неравенство $f(x)\leqslant Cg(x)$ выполнено для всех x. Пишем $f(x)\asymp g(x)$, если $f(x)\preccurlyeq g(x)$ и $g(x)\preccurlyeq f(x)$.

Фиксируем одну из полумер M, удовлетворяющих условию теоремы 1.2. M называется универсальной р.п. полумерой [3]. $M(x)\geqslant P(x)$ для любой р.п. полумеры P.

Для технических целей нам будет удобно с произвольной полумерой P связывать максимальную не превосходящую ее меру $\overline{P}$, которая, как нетрудно показать, связана с P соотношением

$$\overline{P}(x)=\inf_n \sum_{x\subset y,\ l(y)=n} P(y). \tag{1.1}$$

Легко видеть, что $\overline{P}=P$, если P — мера. Множество B называется существенно сингулярным, если $\overline{M}(B)=0$. Из $M(x)\geqslant P(x)$ следует, что $\overline{M}(x)\geqslant\overline{P}(x)$ для любой р.п. полумеры P. Поэтому если B — существенно сингулярно, то $\overline{P}(B)=0$ для любой р.п. полумеры P, т. е. мера $\overline{P}$ абсолютно непрерывна относительно меры $\overline{M}$.

[1] Так как $r>P(x)$ тогда и только тогда, когда

$$1-r<\sum_{l(y)=l(x),\,y\neq x} P(y).$$

Произвольный алгоритмический оператор A применим к последовательности $\omega\in\Omega$, если $A(\omega)\in\Omega$. В дальнейшем мы обычно будем рассматривать ограничение оператора A на множество $\{\omega\,|\,A(\omega)\in\Omega\}$. При таком понимании A из теоремы 1.1 нетрудно получить, что для любой р.п. полумеры P, $P(\Lambda)=1$, найдется такой алгоритмический оператор A, что

(1.2) $\overline{P}(X)=L(A^{-1}(X))$ для любого борелевского $X\subseteq\Omega$.

1.3. Пренебрежимые множества. Существование последовательностей с некоторыми свойствами можно доказывать различными неконструктивными методами. Свойства могут быть при этом довольно экзотическими. Например, в теории степеней неразрешимости [4] доказывается существование последовательностей, обладающих следующим свойством неделимости информации: по определению такая последовательность α невычислима и по любой невычислимой β, полученной в виде $\beta=F(\alpha)$, где F — некоторый алгоритмический оператор, можно восстановить α, т. е. $\alpha=G(\beta)$ для некоторого алгоритмического оператора G. Это свойство может интерпретироваться как то, что информация, заключающаяся в α, бесконечна и эквивалентна, с точностью до конечных описаний перекодирующих алгоритмов, любой алгоритмически выделенной из нее бесконечной части.

С другой стороны, на практике мы часто имеем дело с достаточно длинными кусками последовательностей, полученных в реальных физических процессах. Примеры таких процессов — серия бросаний симметричной монеты со сторонами 0 и 1, алгоритм, вырабатывающий неограниченную вычислимую последовательность, а также комбинации подобных процессов.

Для того чтобы оценить, соответствуют ли последовательности со свойствами, подобными свойству неделимости, каким-либо реальным природным последовательностям, в настоящей работе вводится понятие пренебрежимого множества. Множество $A\subseteq\Omega$ называется недостижимым, если $F(\omega)\notin A$ при $\omega\notin A$ для любого алгоритмического оператора F. Множество B называется пренебрежимым, если оно является подмножеством недостижимого множества A, равномерная мера L которого равна 0. Так как $F^{-1}(A)\subseteq A$ для любого алгоритмического оператора F, из (1.1) следует, что $\overline{P}(A)=0$ для любой р. п. полумеры P. В частности, $\overline{M}(A)=0$, откуда $\overline{M}(B)=0$. Верно и обратное, т. е. если $\overline{M}(B)=0$, то B пренебрежимо. Действительно, из $\overline{M}(B)=0$ и $\overline{M}(x)\geqslant\overline{P}(x)$, где P — произвольная р. п. полумера, следует, что $L(F^{-1}(B))=0$ для любого алгоритмического оператора F. Поэтому B является подмножеством недостижимого множества $\cup F^{-1}(B)$ меры L, равной 0, т. е. B пренебрежимо. Таким образом, класс пренебрежимых множеств совпадает с классом существенно сингулярных множеств.

Возможна следующая интерпретация пренебрежимых множеств. Пусть некоторое записанное в каком-либо формальном языке свойство Ф определяет пренебрежимое множество последовательностей B. По определению, $B\subseteq A$, где A недостижимо и $L(A)=0$. Так как $\overline{M}(A)=0$, то $P(A)=0$ для любой вычислимой меры P. Отсюда можно утверждать, что вероятность получения последовательности из A в случайном процессе с «простым» (вычислимым) распределением вероятностей равна 0. Никакую последовательность из A нельзя также получить как результат алгоритмического преобразования последовательности, лежащей вне A. Так как $B\subseteq A$, можно утверждать, что никакая последовательность, имеющая свойство Ф, не может быть получена ни в каком процессе, сводящемся к комбинации детерминированных и случайных процессов с вычислимыми распределениями вероятностей. Возможно, однако, что неконструктивными методами можно доказать существование таких последовательностей. Реальные фор-

мальные языки имеют не более чем счетные множества символов, поэтому в каждом таком языке можно определить не более чем счетное число пренебрежимых множеств. Можно доказать, что свойство неделимости информации определяет пренебрежимое множество последовательностей.

Читатель может соглашаться или не соглашаться с приведенной интерпретацией. Математические результаты § 2 и 3 не зависят от нее. Для того чтобы это подчеркнуть, в математических рассуждениях мы употребляем термин «существенно сингулярное множество», а в неформальных комментариях к ним — термин «пренебрежимое множество».

Впервые подобные вопросы рассматривались в [5].

Простейшим примером существенно сингулярного множества является множество, состоящее из одной невычислимой последовательности. Действительно, пусть $\bar{M}(\{\alpha\})>0$. Тогда найдется рациональное $r>0$ такое, что $M((\alpha)_n)>r$ для всех n. Легко видеть, что среди всех x таких, что $M(x)>r$, имеется только конечное число попарно несогласованных. Поэтому можно выбрать такое k, что из $(\alpha)_k\subset x$ и $M(x)>r$ следует, что $x\subset\alpha$. Отсюда следует, что α можно вычислять, перечисляя все такие x, что $(\alpha)_k\subset x$ и $M(x)>r$.

Для читателя, знакомого с понятием вероятностной машины [6—8], заметим, что существенная сингулярность множества B эквивалентна тому, что с помощью вероятностной машины неразрешима задача получения последовательности из B. В частности, существенная сингулярность множества $\{\alpha\}$ для невычислимой α составляет содержание известной теоремы де Леу, Мура, Шеннона и Шапиро о том, что вероятностная машина не может выработать невычислимую последовательность [8].

1.4. Алгебра инвариантных свойств. Последовательность α алгоритмически сводится к последовательности β, если $\alpha=F(\beta)$ для некоторого алгоритмического оператора F. Последовательности α и β алгоритмически эквивалентны, если α сводится к β и β сводится к α; обозначается это $\alpha\equiv\beta$.

Множество A называется (алгоритмически) инвариантным, если из $\alpha\in A$ и $\beta\equiv\alpha$ следует, что $\beta\in A$ для любых α и β.

Пусть I — класс всех инвариантных борелевских подмножеств Ω. Множество I является полной булевой алгеброй относительно теоретико-множественных операций пересечения, объединения и дополнения.

Множества A и B из I назовем эквивалентными, если множество $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ существенно сингулярно. Легко видеть, что перечисленные выше теоретико-множественные операции согласованы с этим отношением эквивалентности. Буквой $\mathfrak{L}$ обозначим фактор-алгебру алгебры I по введенному отношению эквивалентности.

Свойство бесконечных последовательностей, сохраняющееся при переходе к эквивалентным последовательностям, является по существу свойством массивов информации, определяемых этими последовательностями. Каждое такое свойство определяет инвариантное множество последовательностей, им обладающих. В рамках приведенной в разделе 1.3 интерпретации, если два сформулированных в некотором формальном языке подобных свойства отличаются только на пренебрежимое множество, то эти свойства неразличимы на «природных» последовательностях. Ненулевые элементы $\mathfrak{L}$ соответствуют инвариантным свойствам «природных» последовательностей.

Пусть элемент $\mathbf{a}$ алгебры $\mathfrak{L}$ представляет собой класс всех множеств из I, эквивалентных A. В этом случае пишем $\mathbf{a}=[A]$. Пусть $\bar{B}=\{\alpha\mid \exists\omega(\omega\in B\&\omega\equiv\alpha)\}$. Будем говорить, что элемент $\mathbf{b}=[\bar{B}]$ порождается последовательностями из множества B.

Для любых $A\in\mathbf{a}$ и $A'\in\mathbf{a}$ имеем $\bar{M}((A\setminus A')\cup(A'\setminus A))=0$, так что $\bar{P}((A\setminus A')\cup(A'\setminus A))=0$ для любой р. п. полумеры P. Поэтому для любой

р. п. полумеры P можно определить $\overline{P}(\mathbf{a})=\overline{P}(A)$, где A — произвольный элемент $\mathbf{a}$.

Простейшие элементы $\mathfrak{L}$ — это нулевой элемент $\mathbf{0}=[\emptyset]$, представляющий собой класс всех существенно сингулярных множеств, и единичный элемент $\mathbf{1}=[\Omega]$.

§ 2. Элементы $\mathfrak{L}$, порожденные полными последовательностями

2.1. Определение и свойства полных последовательностей. Последовательность $\omega\in\Omega$ называется полной, если $M((\omega)_n)\asymp P((\omega)_n)$ для некоторой вычислимой меры P. Понятие полной последовательности натуральных чисел введено в [3]. Из результатов [9] следует, что $M((\omega)_n)\asymp P((\omega)_n)$ тогда и только тогда, когда ω случайна в смысле Мартин-Лефа относительно вычислимой меры P (о случайных последовательностях см. [10—12])[2].

Приводим без доказательства некоторые важные свойства полных последовательностей, полученные в [2, 3].

Теорема 2.1 [2,3]. 1. *Любая вычислимая нормированная мера множества всех полных последовательностей равна* 1.

2. *Множество всех полных последовательностей замкнуто относительно применения любого всюду применимого алгоритмического оператора F (т. е. такого, что $F(\omega)\in\Omega$ для любой $\omega\in\Omega$).*

Эта теорема показывает, что в случайных процессах с вычислимыми распределениями вероятностей могут быть получены только полные последовательности и, более того, только полные последовательности могут быть получены в любых комбинациях таких случайных и всюду применимых алгоритмических процессов.

Легко видеть, что любая вычислимая последовательность полна. Для доказательства надо рассмотреть вычислимую меру

$$P(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x\subset\omega,\\ 0, & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Тогда $P((\omega)_n)=1\geqslant M((\omega)_n)\gtrsim P((\omega)_n)$, т. е. $M((\omega)_n)\asymp P((\omega)_n)$.

Последовательность ω случайна по мере Лебега тогда и только тогда, когда $M((\omega)_n)\asymp 2^{-n}$.

Теорема 2.2 [2]. *Каждая полная последовательность вычислима или эквивалентна последовательности, случайной по мере Лебега L.*

В работах [2, 3] величина $\mathrm{KM}(x)=[-\log_2 M(x)]$ рассматривается в качестве сложности (энтропии) конечной последовательности[3] x. Если ω случайна по мере Лебега, то $\mathrm{KM}((\omega)_n)$ с точностью до аддитивной константы совпадает с n. Это значит, что информация, заключающаяся в ω, закодирована оптимальным образом. Если ω вычислима, то ω эквивалентна конечной последовательности. Из всего этого следует, что теорема 2.2 может интерпретироваться так, что любая полная последовательность допускает оптимальное уплотнение. Последовательности, эквивалентные полным, будем называть стандартными.

2.2. Естественные элементы $\mathfrak{L}$. Пусть C — множество всех вычислимых последовательностей, $\mathbf{c}=[C]$. Легко видеть, что $\overline{M}(\mathbf{c})>0$. Так как все элементы C алгоритмически эквивалентны, $\mathbf{c}$ не может быть разложен в объединение двух непересекающихся ненулевых элементов $\mathfrak{L}$, т. е. $\mathbf{c}$ является атомом алгебры $\mathfrak{L}$.

---

[2] В дальнейшем такую ω также будем называть случайной по мере P.

[3] Здесь $[\chi]$ обозначает целую часть действительного числа χ.

Пусть R — множество всех невычислимых полных последовательностей, $\mathbf{r}=[R]$. По теореме 2.1, $P(\mathbf{r})=1$ для любой вычислимой нормированной меры P.

В следующей теореме полностью описаны все элементы $\mathfrak{L}$, порожденные стандартными последовательностями. Эту теорему нетрудно получить в качестве следствия из сформулированных без доказательства результатов работы [5].

Теорема 2.3 $\mathbf{r}$ — *атом* $\mathfrak{L}$. *Таким образом, любой элемент* $\mathfrak{L}$, *порожденный стандартными последовательностями, совпадает с* $\mathbf{0}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{r}$ *или* $\mathbf{c}\cup\mathbf{r}$.

Предварительно докажем одну лемму и следствие из нее. Пусть P — произвольная р. п. полумера. Так как $\bar{P}$ абсолютно непрерывна относительно меры $\bar{M}$, по теореме Радона — Никодима [13] существует однозначно-определенная с точностью до множества $\bar{M}$-меры 0 функция $(d\bar{P}/d\bar{M})(\omega)$ — производная Радона — Никодима меры $\bar{P}$ по мере $\bar{M}$, для которой $\bar{P}(X)=\int\limits_X \frac{d\bar{P}}{d\bar{M}}(\omega)\,d\bar{M}(\omega)$ для любого X. Кроме того, для $\bar{M}$-почти всех ω будет $(d\bar{P}/d\bar{M})(\omega)=\lim\limits_n \bar{P}((\omega)_n)/\bar{M}((\omega)_n)$.

Лемма 2.1. *Пусть* $B\subseteq\Omega$ *и для любой* $\omega\in B$ *выполнено* $(d\bar{P}/d\bar{M})(\omega)\neq 0$. *Тогда если* $\bar{P}(B)=0$, *то* B *существенно сингулярно.*

Доказательство. Из соотношения $0=\bar{P}(B)=\int\limits_B \frac{d\bar{P}}{d\bar{M}}(\omega)\,d\bar{M}(\omega)$ и того, что $(d\bar{P}/d\bar{M})(\omega)\neq 0$ при $\omega\in B$, легко следует, что $\bar{M}(B)=0$.

Следствие 2.1. *Пусть* P — *некоторая вычислимая мера, а множество* B *состоит из случайных по мере* P *последовательностей. Тогда если* $P(B)=0$, *то* B *существенно сингулярно.*

Доказательство. Для любой $\omega\in B$ существует $C>0$ такое, что $P((\omega)_n)/\bar{M}((\omega)_n)\geqslant P((\omega)_n)/M((\omega_n)\geqslant C$ для всех n. Отсюда $(dP/d\bar{M})(\omega)\neq 0$ для $\bar{M}$-почти всех $\omega\in B$. По лемме 2.1 $\bar{M}(B)=0$, что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 2.3. Допустим, что $\mathbf{r}=\mathbf{a}\cup\mathbf{b}$, где $\mathbf{a}\cap\mathbf{b}=\mathbf{0}$ и $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$, $\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$. Пусть $\bar{R}=A\cup B$, где $A\in\mathbf{a}$ и $B\in\mathbf{b}$, причем можно считать, что $A\cap B=\emptyset$. Пусть R' — множество всех случайных по мере Лебега L последовательностей, $A'=A\cap R'$, $B'=B\cap R'$. Из $\bar{M}(A)>0$ и $\bar{M}(B)>0$ следует, что $L(\bigcup\limits_\sigma F^{-1}(A))>0$ и $L(\bigcup\limits_F F^{-1}(B))>0$, где объединение берется по всем алгоритмическим операторам. Из теоремы 2.2 следует, что $\bigcup\limits_F F^{-1}(A')=\bigcup\limits_F F^{-1}(A)$ и $\bigcup\limits_F F^{-1}(B')=\bigcup\limits_F F^{-1}(B)$, поэтому $\bar{M}(A')>0$ и $\bar{M}(B')>0$. Отсюда по следствию 2.1 получаем, что $L(A')>0$ и $L(B')>0$. Отметим еще одно свойство этих множеств. Каждое из них вместе с любой последовательностью содержит все последовательности, ей эквивалентные, в том числе и все, отличающиеся от нее в конечном числе знаков. С помощью закона 0 или 1 А. Н. Колмогорова [14] покажем, что эти свойства противоречивы. Нам будет удобно использовать формулировку этого закона из [15].

Пусть $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин в некотором вероятностном пространстве с распределением P. Для произвольного n с последовательностью $f_n, f_{n+1}, \ldots$ связывается наименьшая σ-алгебра, относительно которой все эти случайные величины измеримы. Пересечение всех таких σ-алгебр называется остаточной σ-алгеброй последовательности $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$. Закон 0 или 1 утверждает, что для любого множества X, лежащего в остаточной σ-алгебре последовательности $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$, будет $P(X)=0$ или $P(X)=1$.

Для применения этого закона к вероятностному пространству Ω с рас-

пределением L рассмотрим независимые случайные величины $f_i(\omega)=\omega_i$ при $i=1, 2, \ldots$. Из свойства инвариантности множеств A' и B' относительно изменения в конечном числе знаков следует, что каждое из них лежит в остаточной σ-алгебре последовательности $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$. Поэтому мера L каждого из них равна 0 или 1, что противоречит тому, что $A' \cap B' = \phi$ и $L(A')>0$, $L(B')>0$. Полученное противоречие доказывает, что $\mathbf{r}$ — атом.

Легко видеть, что $\mathbf{r}$ — единственный атом, равномерная мера L которого равна 1.

Существует одна интересная интерпретация теоремы 2.3. Специалистам по теории информации известно, что информация в наиболее плотной своей кодировке неотличима от случайного шума, а поэтому единственной ее инвариантной характеристикой является ее количество — конечное или бесконечное. Теорема 2.3 хорошо согласуется с этим фактом.

Из теоремы 2.1 следует, что с помощью вероятностных процессов и всюду применимых алгоритмических операторов можно получать только стандартные последовательности. Поэтому из теоремы 2.3 следует, что если при определении пренебрежимого множества ограничиться только всюду применимыми алгоритмическими операторами, то аналогичным образом определенная алгебра состояла бы только из четырех элементов: нулевого, единичного и двух элементов, порожденных вычислимыми и случайными последовательностями соответственно. Однако использование не всюду применимых операторов существенно усложняет ситуацию. Свойства нестандартных последовательностей будут изучаться в следующем параграфе.

§ 3. Элементы $\mathfrak{L}$, порожденные нестандартными последовательностями

Результаты этого параграфа основаны на том, что множество всех нестандартных последовательностей не является существенно сингулярным. Впервые это было доказано в работе автора [16].

Нестандартная последовательность — это последовательность, не эквивалентная никакой полной последовательности. Поэтому такая последовательность не допускает оптимального кодирования. Любая вычислимая мера множества всех нестандартных последовательностей равна 0, и нестандартную последовательность нельзя получить в качестве значения всюду применимого алгоритмического оператора на полной последовательности. Это значит, что для получения нестандартных последовательностей существенно необходимы не всюду применимые алгоритмические операторы.

В этом параграфе будут построены бесконечная последовательность атомов и безатомные элементы, порожденные нестандартными последовательностями.

3.1. Сети и потоки. Каждая из конструируемых в этом параграфе полумер будет определяться стандартным образом по некоторому бесконечному графу с размеченными ребрами. Приведем соответствующие определения.

Путем на Ω^* называется любая пара (x, y), где $x, y \in \Omega^*$ и $x \subset y$, причем $x \neq y$. Если $\sigma=(x, y)$, вводим обозначения $\sigma^н=x$, $\sigma^к=y$. Число $l(\sigma)=l(\sigma^к)-l(\sigma^н)$ называется длиной пути σ. Далее $W=\{\sigma \mid l(\sigma)=1\}$.

Рекурсивная функция q, определенная на $\Omega^* \times \Omega^*$, принимающая неотрицательные рациональные значения и удовлетворяющая условию

$$\sum_{\sigma:\sigma^н=x} q(\sigma) \leqslant 1 \tag{3.1}$$

для любого $x \in \Omega^*$, будет называться сетью.

Пусть q — произвольная сеть; q-потоком называется наименьшая полумера P, удовлетворяющая неравенству $P \geqslant R$, где функция R определяется условиями:

$$R(\Lambda)=1,$$
$$R(y)=\sum_{\sigma:\sigma^{к}=y} q(\sigma)R(\sigma^{н}) \quad \text{при} \quad y\neq\Lambda. \tag{3.2}$$

Легко видеть, что R — общерекурсивная функция. Заметим, что P связана с R следующим образом. Конечное множество $D\subseteq\Omega^*$ называется сечением над $x\in\Omega^*$, если все элементы D попарно несогласованы и $x\subset z$ при $z\in D$. Пусть π_x — множество всех сечений над x. Нетрудно доказать, что

$$P(x)=\sup_{D\in\pi_x}\sum_{z\in D} R(z). \tag{3.3}$$

Из этого соотношения следует, что P — р.п. полумера.

С сетью q нам будет удобно связывать ассоциированное множество $G^q=\{\sigma\,|\,l(\sigma)\geqslant 2 \text{ и } q(\sigma)>0\}$.

Сеть q называется элементарной, если $q(\sigma)={}^1/_2$ для почти всех (т. е. для всех, кроме конечного числа) $\sigma\in W$. Из условия (3.1) следует, что G^q конечно для элементарной сети q. Для произвольной сети q сеть q^n определяется так: $q^n(\sigma)=q(\sigma)$, если $l(\sigma^k)\leqslant n$, и для остальных σ $q^n(\sigma)={}^1/_2$, если $\sigma\in W$, и $q^n(\sigma)=0$ при $l(\sigma)\geqslant 2$.

Пусть N_{fin} — множество всех элементарных сетей.

3.2. Общая часть конструкции. Нам будет удобно выделить общую техническую часть из конструкций § 3. Мы укажем конструкцию сети, зависящую от произвольного рекурсивного отношения $B(i, q, \sigma)$, где $i\in N$, $q\in N_{\text{fin}}$ и σ — путь. Конструкция также зависит от общерекурсивной функции ρ из N в N. В разделе 3.3 можно взять $\rho(n)=2^{2n+2}$, в разделе 3.4 $\rho(n)=(n+2)^2$.

Фиксируем общерекурсивную функцию p из N в N такую, что для любого n множество $\{i\,|\,p(i)=n\}$ бесконечно и $p(i+1)\neq p(i)$ для всех i. Если G — множество путей, то

$$G(i)=\{\sigma\in G\,|\,p(l(\sigma^{н}))=p(l(\sigma^{к}))=i\}. \tag{3.4}$$

Пусть q — элементарная сеть, G — ассоциировано с q, $i\in N$. Определим

$$w(i, q)=\min\{n\,|\,p(n)=i\&\forall j\forall\sigma(j<i\&\sigma\in G(j)\to n>l(\sigma^{к}))\}.$$

Для произвольной сети q положим $w(i, q)=\sup w(i, q^n)$.

С отношением B связывается функция [4]

$$\beta(q, x)=\min\{\sigma\,|\,\sigma^{н}=x\&p(l(\sigma^{к}))=p(l(x))\&B(p(l(x)), q, \sigma)\}.$$

Легко видеть, что β имеет рекурсивный график.

С произвольной сетью q нам будет удобно связывать ассоциированную функцию $s^q(x)=1-q(x, x0)-q(x, x1)$.

Индукцией по n определим последовательность элементарных сетей q^n.

Полагаем $q^0(\sigma)={}^1/_2$ при $l(\sigma)=1$ и $q^0(\sigma)=0$ при $l(\sigma)\geqslant 2$.

Пусть сеть q^{n-1} уже определена, G^{n-1} — ассоциированное с q^{n-1} множество, s^{n-1} — ассоциированная с q^{n-1} функция и $l(\sigma^{к})<n$ при $\sigma\in G^{n-1}$. Предварительно определим множество G^n и функцию s^n. Их определение распадается на два случая.

[4] Здесь и далее используется лексикографическое упорядочение множеств Ω^* и $\Omega^*\times\Omega^*$.

Случай 1. $w(p(n), q^{n-1})=n$. В этом случае полагаем $s^n(y)=1/\rho(n)$, если $l(y)=n$, и $s^n(y)=s^{n-1}(y)$ в противном случае. Полагаем $G^n=G^{n-1}$.

Случай 2. $w(p(n), q^{n-1})<n$. Пусть

$$C_n=\{x \mid w(p(n),\ q^{n-1})\leqslant l(x)<n \& 0<s^{n-1}(x)<1 \& \\ \& l(\beta^{\kappa}(q^{n-1}, x))=n \& \forall \sigma(\sigma^{н}=x \to \sigma \notin G^{n-1})\}.$$

Для каждого $x \in C_n$ определим $s^n(\beta^{\kappa}(q^{n-1}, x))=0$ и определим $s^n(y)=s^{n-1}(x)/[1-s^{n-1}(x)]$ для остальных y таких, что $x \subset y$ и $l(y)=n$. Полагаем $s^n(y)=s^{n-1}(y)$ для всех остальных y;

$$G^n=G^{n-1} \cup \{\beta(q^{n-1}, x) \mid x \in C_n\}.$$

После разбора случаев определим

$$q^n(\sigma)=\begin{cases} 1/2(1-s^n(\sigma^{н})) & \text{при } l(\sigma)=1, \\ s^n(\sigma^{н}) & \text{при } \sigma \in G^n, \\ 0 \text{ для остальных } \sigma. \end{cases}$$

Определим $q=\lim\limits_n q^n$. Из эффективности конструкции следует, что q — общерекурсивная функция. Нетрудно проверить, что функция q удовлетворяет условию (3.1). Пусть множество G и функция s ассоциированы с сетью q. Легко видеть, что $G=\bigcup\limits_n G^n$ и $s=\lim\limits_n s^n$.

Лемма 3.1. *$G(i)$ конечно и $w(i, q)<\infty$ для любого i.*

Доказательство. Заметим, что если $G(j)$ конечно для каждого $j<i$, то $w(i, q)<\infty$. Поэтому достаточно доказать, что $G(i)$ конечно для любого i. Допустим противное. Пусть i — наименьшее, для которого $G(i)$ бесконечно. Так как $G(j)$ конечно при $j<i$, то $w(i, q)<\infty$. Определим

$$K(x)=\begin{cases} 1/s((x)_m), & \text{если } s((x)_m) \neq 0 \text{ и } l(x) \geqslant w(i, q), \text{ где} \\ & m=\max(\{l(\sigma^{\kappa}) \mid \sigma \in G(i) \& \sigma^{н} \subset x \& l(\sigma^{\kappa}) \leqslant \\ & \leqslant l(x)\} \cup \{w(i, q)\}), \\ \rho(w(i, q)), & \text{если } l(x)<w(i, q), \\ 0 & \text{для остальных } x. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что K — всюду определенная функция из Ω^* в N, удовлетворяющая условию: для любых x и y таких, что $x \subset y$, будет $K(x) \geqslant K(y)$, причем если $K(x)>K(y)$, то $K(x)>K(z)$ для каждого z, для которого $x \subset z$ и $l(z)=l(y)$.

Определим при $\omega \in \Omega$

$$\overline{K}(\omega)=\min\{n \mid \forall i(i \geqslant n \to K((\omega)_i)=K((\omega)_n))\}.$$

Легко видеть, что $\overline{K}$ определена на всем Ω и непрерывна. Так как Ω — компакт, функция $\overline{K}$ ограничена некоторым числом m. Тогда при $l(x) \geqslant m$ будет $\overline{K}(x)=K((x)_m)$.

Из конструкции легко видеть, что если существует путь $\sigma \in G(i)$ такой, что $l(\sigma^{\kappa})=n$, то найдется хотя бы одно $x \in C_n$ из случая 2, для которого $K(y)<K((y)_{n-1})$ для всех y таких, что $x \subset y$ и $l(y)=n$. Тогда существование такого m противоречит бесконечности $G(i)$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Последовательность $\alpha \in \Omega$ называется *i-продолжением* последовательности $x \in \Omega^*$, если $x \subset \alpha$ и $B(i, q^{n-1}, \sigma)$, где $n=l(\sigma^{\kappa})$, выполнено для почти всех σ таких, что $\sigma^{н}=x$ и $\sigma^{\kappa} \subset \alpha$. Последовательность $\alpha \in \Omega$ будем называть *i-отброшенной*, если $s((\alpha)_n)=1$ для некоторого n такого, что $p(n)=i$. Заметим, что если $\sigma \in G(i)$, то $B(i, q^{n-1}, \sigma)$ выполнено, $n=l(\sigma^{\kappa})$.

Лемма 3.2. *Пусть для любого фрагмента* $(\omega)_n$ *последовательности* $\omega\in\Omega$ *найдется* i*-продолжение. Тогда либо* ω *будет* i*-отброшена, либо найдется путь* $\sigma\in G(i)$ *такой, что* $\sigma^к\subset\omega$.

Доказательство. Пусть ω не i-отброшена. По лемме 3.1 существует максимальное m такое, что $p(m)=i$ и $s((\omega)_m)>0$. Так как $(\omega)_m$ имеет i-продолжение и $s((\omega)_m)<1$, то по случаю 2 конструкции будет построен путь $((\omega)_m, y)\in G(i)$. По конструкции будет $s(y)=0$ и $s(z)\neq 0$ при $(\omega)_m\subset z$, $l(z)=l(y)$, $z\neq y$. Отсюда по выбору m $y\subset\omega$. Лемма доказана.

3.3. Атомы $\mathfrak{L}$. В этом разделе будет построена бесконечная последовательность атомов $\mathfrak{L}$, отличных от **c** и **r**. Напомним, что ненулевой элемент **a** алгебры $\mathfrak{L}$ называется атомом, если не существует разложения $\mathbf{a}=\mathbf{b}\cup\mathbf{e}$, где $\mathbf{b}\cap\mathbf{e}=\mathbf{0}$ и $\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$, $\mathbf{e}\neq\mathbf{0}$. Множество последовательностей, порождающее атом, не может быть разделено на две непренебрежимые части никаким инвариантным свойством.

Теорема 3.1. *Множество всех атомов* $\mathfrak{L}$ *счетно.*

Доказательство. Нетрудно показать, что множество всех атомов алгебры $\mathfrak{L}$ не более чем счетно. Для каждого атома **a** находим такое множество $D_{\mathbf{a}}$, представляющееся в виде объединения конечного числа интервалов, что $\overline{M}((A\setminus D_{\mathbf{a}})\cup(D_{\mathbf{a}}\setminus A))<{}^1/_4\overline{M}(\mathbf{a})$ для любого $A\in\mathbf{a}$. Если **a** и **b** — различные атомы и $A\in\mathbf{a}$, $B\in\mathbf{b}$, то $\overline{M}(A\cap B)=0$, поэтому $D_{\mathbf{a}}\neq D_{\mathbf{b}}$. Отсюда следует, что множество всех атомов инъективно вкладывается в счетное множество всех конечных объединений интервалов и поэтому само не более чем счетно.

После этого, для того чтобы доказать утверждение теоремы, достаточно построить бесконечную последовательность атомов. С этой целью будет построена бесконечная последовательность р.п. полумер $P_1, P_2, \ldots, P_m, \ldots$, по которой будет определена последовательность попарно различных атомов $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \ldots, \mathbf{d}_m, \ldots$

Фиксируем некоторую взаимно-однозначную и эффективную нумерацию множества $\{(x_1, x_2, x_3)\,|\,x_i\in N$ при $1\leqslant i\leqslant 3$ и $x_2\neq x_3\}$. Пусть $\langle x_1, x_2, x_3\rangle$ обозначает номер тройки (x_1, x_2, x_3) в этой нумерации, ψ, τ, η — общерекурсивные функции, обладающие свойством $\psi(\langle x_1, x_2, x_3\rangle)=x_1$, $\tau(\langle x_1, x_2, x_3\rangle)=x_2$, $\eta(\langle x_1, x_2, x_3\rangle)=x_3$.

При $x, y\in\Omega^*$ и $n\in N$ по определению

$$x\sim_n y\leftrightarrow l(x)=l(y)\,\&\,\forall i(n\leqslant i\to x_i=y_i);$$

для любых путей σ, σ_1 определим

$$\sigma\sim_n\sigma_1\leftrightarrow\sigma^н\sim_n\sigma_1{}^н\,\&\,\sigma^к\sim_n\sigma_1{}^к.$$

Нам потребуется вспомогательное отношение $\Phi(i, q, x, y)$, где $i\in N$, q — сеть, $x, y\in\Omega^*$. Предварительно с каждым алгоритмическим оператором A свяжем монотонную (по отношению $\subset$) функцию

$$\hat{A}(x)=\max\{u\,|\,\exists z(z\subset x\,\&\,(z, u)\in A\,\&\,l(u)\leqslant l(x))\}.$$

Нетрудно показать, что

$$\hat{A}(x)\subset\hat{A}(x') \quad \text{при } x\subset x',$$
$$\hat{A}(\omega)=A(\omega), \quad \text{если } A(\omega)\in\Omega.$$

Пусть $\{A_i\}$ — вычислимая последовательность всех алгоритмических операторов (такая последовательность легко может быть построена с помощью теоремы об универсальном р.п. множестве [17]). Полагаем $F_i=\hat{A}_i$.

После этого определим

$$\Phi(i, q, x, y)\leftrightarrow l(x)=l(y)\,\&\,\exists j\exists u(j<i\,\&\,u\sim_w x\,\&\,u \text{ согласовано с } F_{\psi(i)}(y)), \text{ где } w=w(j, q^{l(x)}). \tag{3.5}$$

Мы будем писать $x\sim z$ вместо $x\sim_w z$, где $w=w(p(l(x)), q^{l(x)})$, причем дальше всегда будет ясно, о какой сети q идет речь. Аналогично $\sigma\sim_w\sigma'$ сокращается до $\sigma\sim\sigma'$, где $w=w(p(l(\sigma^н)), q^{l(\sigma^н)})$.

Мы определим эффективную последовательность эффективных операций $\{\mathfrak{A}_m\}$. Операция $\mathfrak{A}_m$ выделяет из произвольной сети q сеть q_m с ассоциированным множеством G_m, для которой $\tau(p(l(\sigma^н)))=m$ для любого $\sigma\in G_m$, и если $q_m(\sigma)\neq 1/2$, то $\tau(p(l(\sigma^н)))=m$ или $\eta(p(l(\sigma^н)))=m$.

Укажем соотношения для определения сети q_m. Пусть G — ассоциированное с q множество, а s — ассоциированная с q функция. Предварительно определим

$$(3.6)\qquad s_m^0(x)=\begin{cases}\sum\limits_{z\sim x} s(z), & \text{если } \tau(p(l(x)))=m,\\ 1, & \text{если } \eta(p(l(x)))=m \text{ и } \exists\sigma_1(\sigma_1\in G(p(l(x)))\ \&\\ & \&\ \Phi(l(x)), q, x, \sigma_1^к)),\\ 0 & \text{в противном случае}\end{cases}$$

и пусть $s_m(x)=\min\{1, s_m^0(x)\}$.

После этого определим

$$(3.7)\qquad G_m=\{\sigma\mid\tau(p(l(\sigma^н)))=m\&s_m^0(\sigma^н)\leqslant 1\&\exists\sigma'(\sigma'\in G\&\sigma'\sim\sigma)\},$$

$$(3.8)\qquad q_m(\sigma)=\begin{cases}1/2(1-s_m(\sigma^н)) & \text{при } \sigma\in W,\\ \sum\limits_{\sigma'\sim\sigma,\ \sigma'\in G} q(\sigma') & \text{при } \sigma\in G_m,\\ 0 & \text{для остальных } \sigma.\end{cases}$$

Так как $\sum\limits_{\sigma^н=x,\sigma\in G} q(\sigma)\leqslant s(x)$, то $\sum\limits_{\sigma^н=x,\sigma\in G_m} q_m(\sigma)\leqslant\sum\limits_{z\sim x} s(z)=s_m(x)$.

Отсюда следует, что функция q_m удовлетворяет условию (3.1).

Теперь мы в состоянии определить рекурсивное отношение B, необходимое для применения общей схемы раздела 3.2:

$$(3.9)\qquad B(i,q,\sigma)\leftrightarrow Q_{\tau(i)}(\sigma^к)\neq 0\&\sum\{Q_{\eta(i)}(z)\mid\Phi(i,q,z,\sigma^к)\}\leqslant 2^{-(\overline{\overline{\sigma}}^н+3)},$$

где для произвольного m буквой Q_m обозначен $\mathfrak{A}_m(q)$-поток [5].

Далее в пределах этого раздела q будет обозначать сеть, определенную по схеме раздела 3.2 для данного B; G — ассоциированное с q множество, s — ассоциированная с q функция.

Определим $q_m=\mathfrak{A}_m(q)$ для произвольного m. Пусть множество G_m и функция s_m — ассоциированы с q_m, R_m обозначает функцию, определенную по q_m соотношениями (3.2), P_m обозначает q_m-поток.

Из конструкции легко видеть, что если $\sigma, \sigma'\in G_m$ и $\sigma\sim\sigma'$, то $q_m(\sigma)=q_m(\sigma')$.

Полумера P называется непрерывной, если $\overline{P}(\{\omega\})=0$ для любой $\omega\in\Omega$. Для того чтобы доказать, что P_m непрерывна для любого m, предварительно укажем одно достаточное условие непрерывности потока.

Число n разделяет множество путей D, если для любого пути $\sigma\in D$ будет $l(\sigma^н)\geqslant n$ или $l(\sigma^к)<n$.

Лемма 3.3. *r-поток непрерывен, если G^r разделяется бесконечным множеством чисел, а $r(\sigma)=r(\sigma_1)$ при $\sigma^н=\sigma_1^н$ и $\sigma, \sigma_1\in W$.*

---

[5] $\overline{\overline{x}}$ обозначает номер $x\in\Omega^*$ при лексикографическом упорядочении всех элементов множества Ω^*.

Доказательство. Пусть P обозначает r-поток и n разделяет G^r. Тогда $P(x)=R(x)=r((x)_{n-1}, x)R((x)_{n-1})\leqslant r((x)_{n-1}, x)P((x)_{n-1})$ для любого x, $l(x)=n$. Из условия (3.1) и из условия леммы следует, что $r((x)_{n-1}, x)\leqslant 1/2$. Отсюда $P((\omega)_n)\leqslant 1/2 P((\omega)_{n-1})$. Так как имеется бесконечно много таких n, то $\lim\limits_n P((\omega)_n)=0$, т. е. полумера P непрерывна.

Для применения этой леммы к полумере P_m достаточно заметить, что для любого i число $w(i, q)$ разделяет G_m.

Лемма 3.4. *$P_m(y)=0$ тогда и только тогда, когда $q_m(\sigma)=0$ для некоторого σ такого, что $\sigma^{\text{к}}\subset y$ и $\sigma\in W$.*

Доказательство необходимости очевидно. Для доказательства достаточности предположим, что $q_m((y)_n, (y)_{n+1})=0$ для некоторого $n<l(y)$ и тем не менее $P_m(y)\neq 0$. Из определения q_m следует, что $s_m((y)_n)=1$. Из $P_m(y)\neq 0$ следует, что должен существовать путь $(x, z)\in G_m$ такой, что $x\subset(y)_n$ и $(y)_{n+1}\subset z$. Будем считать, что (x, z) — самый короткий такой путь. По определению G_m существует путь (x', z') такой, что $(x', z')\sim(x, z)$ и $(x', z')\in G$. Значение $s_m((z)_n)=1$ определено по первой или по второй строке (3.6). Заметим, что по конструкции в этом случае существует путь $(u, v)\in G$ такой, что $l(v)=n$. Из существования в G пути (x', z') следует, что для любого пути $(u', v')\in G$, для которого $w\leqslant l(v')\leqslant l(z)$, где $w=w(p(l(x)), q^{l(x)})$, имеем $p(l(v'))\geqslant p(l(x))$ и $w(p(l(v')), q^{l(v')})\geqslant w$. В частности, $w(p(n), q^n)\geqslant w$. Поэтому из $z'\sim_w z$ следует, что $(z')_n\sim(z)_n$. Отсюда, если $s_m((z)_n)=1$ определено по первой строке (3.6), то $s_m((z')_n)=1$ также будет определено по первой строке (3.6). Пусть $s_m((z)_n)=1$ определено по второй строке (3.6). Так как $i=p(n)\geqslant p(l(x))$ и $\eta(i)=m$, $\tau(p(l(x)))=m$, из свойства нумерации $\langle x_1, x_2, x_3\rangle$ следует, что $i>p(l(x))$. Поэтому из (3.5) и $(z')_n\sim_w(z)_n$ следует, что $s_m((z')_n)=1$ также будет определено по второй строке (3.6).

Путь (x', z') — самый короткий среди путей $(u, v)\in G$ таких, что $u\subset(z')_n$ и $(z')_{n+1}\subset v$. Поэтому в $G^{l(z)-1}$ нет пути (u, v) с таким свойством. Отсюда и из того, что $q_m((z')_n, (z')_{n+1})=0$, следует, что $Q_m(z')=0$, где Q_m есть $\mathfrak{A}_m(q^{l(z)-1})$-поток из определения (3.9). Это равенство противоречит тому, что $(x', z')\in G$, так как для того чтобы этот путь попал в G, необходимо, чтобы $Q_m(z')\neq 0$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Носителем полумеры P будем называть множество

$$E=\{\omega\in\Omega\,|\,\forall n(P((\omega)_n)\neq 0)\}.$$

Легко видеть, что E замкнуто в Ω и $\overline{P}(E)=\overline{P}(\Omega)$.

Из леммы 3.4 следует, что отношение $P_m(y)=0$ рекурсивно и носителем P_m является множество $E_m=\Omega\setminus\bigcup\limits_{s_m(z)=1}\Gamma_z$.

Лемма 3.5. *$\overline{P}_m(1)>0$ для любого m.*

Доказательство. Оценим снизу величину $\overline{P}_m(\Omega)$. Пусть $S_n=\sum\limits_{l(u)=n}R_m(u)-\sum\limits_{\sigma\in G_m, l(\sigma^{\text{к}})=n}q_m(\sigma)R_m(\sigma^{\text{н}})$. Выберем произвольное $n\in N$.

Легко видеть, что имеет место соотношение

$$\sum_{l(u)=n+1}R_m(u)=\sum_{l(u)=n}(1-s_m(u))R_m(u)+\sum_{\sigma\in G_m, l(\sigma^{\text{к}})=n+1}q_m(\sigma)R_m(\sigma^{\text{н}}). \tag{3.10}$$

Если $\tau(p(n))\neq m$ и $\eta(p(n))\neq m$, то $s_m(u)=0$ при $l(u)=n$ и не существует ни одного пути $\sigma\in G_m$, для которого $l(\sigma^{\text{к}})=n$. Поэтому $S_{n+1}\geqslant S_n$.

Пусть $\tau(p(n))=m$. Предварительно рассмотрим случай, когда $w(p(n), q^{n-1})<n$. Пусть

$$P(\sigma, u) \leftrightarrow l(\sigma^{\text{к}})=l(u)\,\&\,u\nsim\sigma^{\text{к}}\,\&\,\exists z(z\subset u\,\&\,z\sim\sigma^{\text{н}}).$$

Тогда из определения s_m и s имеют место соотношения

$$\sum_{l(u)=n} s_m(u)R_m(u)\leqslant \sum_{l(u)=n}\Big(\sum_{z\sim u} s(z)\Big)R_m(u)=$$

$$=\sum_{l(u)=n}\Big(\sum_{\sigma:P(\sigma,u)} s(\sigma^{\text{н}})/[1-s(\sigma^{\text{н}})]\Big)R_m(u)=$$

$$=\sum_{\sigma\in G,\, l(\sigma^{\text{к}})=n}\Big(s(\sigma^{\text{н}})/[1-s(\sigma^{\text{н}})]\sum_{u:P(\sigma,u)} R_m(u)\Big)\leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\sigma\in G,\, l(\sigma^{\text{к}})=n}\Big(s(\sigma^{\text{н}})\sum_{z\sim\sigma^{\text{н}}} R_m(z)\Big)=$$

$$=\sum_{\sigma\in G_m,\, l(\sigma^{\text{к}})=n}\Big(R_m(\sigma^{\text{н}})\sum_{\sigma_1\sim\sigma,\sigma_1\in G} s(\sigma_1{}^{\text{н}})\Big)=$$

$$=\sum_{\sigma\in G_m,\, l(\sigma^{\text{к}})=n} q_m(\sigma)R_m(\sigma^{\text{н}}),$$

так как для любого $\sigma\in G$ такого, что $l(\sigma^{\text{к}})=n$, и любого $z\sim\sigma^{\text{н}}$ имеем $\sum_{z\subset u,\, l(u)=n,\, u\nsim\sigma^{\text{к}}} R_m(u)\leqslant R_m(z)-s(\sigma^{\text{н}})R_m(z)$. В этих преобразованиях также использовалось равенство $q_m(\sigma)=\sum_{\sigma_1\in G,\,\sigma_1\sim\sigma} s(\sigma_1{}^{\text{н}})$ при $\sigma\in G_m$, которое следует из того, что $q(\sigma)=s(\sigma^{\text{н}})$ при $\sigma\in G$, и из (3.8).

Объединяя полученную оценку с (3.10), получим $S_{n+1}\geqslant S_n$.

Пусть $w(p(n), q^{n-1})=n$. Тогда $\sum_{l(u)=n} s_m(u)R_m(u)\leqslant 2^n/\rho(n)$, так как $s_m(u)=2^n/\rho(n)$ при $l(u)=n$. Объединяя это неравенство с (3.10), получим $S_{n+1}\geqslant S_n-2^n/\rho(n)$.

Пусть $\eta(p(n))=m$. Тогда $\sum_{l(u)=n} s_m(u)\,R_m(u)=\Sigma\{R_m(u)\,|\,l(u)=n\,\&\,\exists\sigma(\sigma\in G\,\&\,\Phi(p(n), q^{n-1}, u, \sigma^{\text{к}}))\}\leqslant \sum_{\sigma\in G,\, l(\sigma^{\text{к}})=n} 2^{-(\bar{\bar{\sigma}}^{\text{н}}+3)}$. Объединяя эту оценку (3.10), получим $S_{n+1}\geqslant S_n-\sum_{\sigma\in G,\, l(\sigma^{k})=n} 2^{-(\bar{\bar{\sigma}}^{\text{н}}+3)}$.

Заметим, что из конструкции раздела 3.2 следует, что соответствие $\sigma\to\sigma^{\text{н}}$ при $\sigma\in G$ инъективно. Отсюда, из полученных оценок и из $S_0=1$ следует, что

$$S_n\geqslant 1-\sum_{i=1}^{\infty}2^i/\rho(i)-\sum_{\sigma\in G}2^{-(\bar{\bar{\sigma}}^{\text{н}}+3)}\geqslant 1/2$$

для всех[6] n. Так как $P_m\geqslant R_m$, получим $\bar{P}_m(\Omega)=\inf_n \sum_{l(u)=n} P_m(u)\geqslant \inf_n S_n\geqslant 1/2$. Лемма доказана.

[6] Напомним, что $\rho(i)=2^{2i+2}$.

Лемма 3.6. *При $k\neq m$ для любого t имеем $F_t(E_k)\cap E_m=\emptyset$.*

Доказательство. Допустим, что существует $\omega\in E_k$, для которой $F_t(\omega)\in E_m$. Положим $i=\langle t, k, m\rangle$. Так как P_m непрерывна и $w(i, q)<\infty$, то $\lim\limits_n \Sigma\{P_m(z)\,|\,\Phi(i, q^{n-1}, z, (\omega)_n)\}=0$. Кроме того, $P_k((\omega)_n)\neq 0$ для всех n. Отсюда легко видеть, что для любого n последовательность $(\omega)_n$ имеет i-продолжение (в качестве такого i-продолжения подходит ω). По лемме 3.2 существует путь $\sigma\in G(i)$ такой, что $\sigma^{\text{к}}\subset\omega$. Тогда $\Phi(i, q^{n-1}, (F_t(\omega))_n, \sigma^{\text{к}})$ выполнено и по определению $q_m((F_t(\omega))_n, (F_t(\omega))_{n+1})=0$, где $n=l(\sigma^{\text{к}})$, откуда следует, что $F_t(\omega)\notin E_m$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Следующая лемма даст нам возможность применить закон 0 или 1 к мере $\bar{P}_m$. Пусть $w(i)=w(i, q)$ и $f_i(\omega)=\omega_i$ для любого i.

Лемма 3.7. *Пусть m — произвольное и $\tau(i)=m$. Тогда при $n>w(i)$ случайная величина f_n не зависит от совокупности случайных величин $\{f_j\,|\,j\leqslant w(i)\}$ в вероятностном пространстве $(\Omega, \bar{P}_m)$.*

Доказательство. Пусть $y\sim_{w(i)}z$. Из леммы 3.1 следует, что при $l(x)\geqslant w(i)$ в определении по первой строке (3.6) значения $s_m(x)$ может быть лишь $w(p(l(x)), q^{l(x)})\geqslant w(i)$, при определении во второй строке (3.6) может быть лишь $p(l(x))\geqslant i$. Во втором случае $\tau(i)=\eta(p(l(x)))=m$, откуда по свойству нумерации $\langle x_1, x_2, x_3\rangle$ будет $p(l(x))>i$. Отсюда и из (3.7) следует, что для любого пути $\sigma\in G_m\cup W$ такого, что $(y)_{w(i)}\subset\sigma^{\text{н}}\subset y\subset\sigma^{\text{к}}$, существует путь $\sigma'\in G_m\cup W$ такой, что $\sigma'^{\text{н}}\subset z\subset\sigma'^{\text{к}}$, $\sigma'\sim_{w(i)}\sigma$ и $q_m(\sigma)=q_m(\sigma')$.

По свойству $w(i)$ при $l(v)\geqslant w(i)$ формулу (3.2) можно переписать в виде

$$R_m(v)=\sum_{l(\sigma^{\text{н}})\geqslant w(i),\,\sigma^{\text{к}}=v} q_m(\sigma)R_m(\sigma^{\text{н}}).$$

Отсюда, используя результат предыдущего рассуждения, легко получить соотношение

$$R_m(v)/R_m((y_{w(i)}))=R_m(v')/R_m((z)_{w(i)}) \tag{3.11}$$

для любых v и v' таких, что $(y)_{w(i)}\subset v\subset y$, $(z)_{w(i)}\subset v'\subset z$ и $l(v)=l(v')$. Из соотношения (3.3), а также из соотношения (3.11) легко получить соотношение

$$P_m(y)/P_m((y)_{w(i)})=P_m(z)/P_m((z)_{w(i)}) \tag{3.12}$$

для любых y и z таких, что $y\sim_{w(i)}z$. Отсюда и из соотношения, связывающего P_m и $\bar{P}_m$, легко получить соотношение

$$\bar{P}_m(y)/\bar{P}_m((y)_{w(i)})=\bar{P}_m(z)/\bar{P}_m((z)_{w(i)})$$

для любых y и z таких, что $y\sim_{w(i)}z$. Поэтому условная вероятность $\bar{P}_m(y_{w(i)+1}, \ldots, y_{l(y)}\,|\,x)$ не зависит от выбора начального фрагмента x последовательности y при $l(x)=w(i)$ и $l(y)>w(i)$. В частности, случайная величина $f_j(w)=w_j$ не зависит от совокупности случайных величин $f_s(\omega)=\omega_s$ при $s\leqslant w(i)<j$.

Следствие 3.1. *Для произвольного m для любого $A\subseteq\Omega$, содержащего вместе с каждой последовательностью все последовательности, отличающиеся от нее в конечном числе знаков, будет $\bar{P}_m(A)=0$ или $\bar{P}_m(A)=\bar{P}_m(\Omega)$, в частности, для любого $\mathbf{a}\in\Omega$ будет $\bar{P}_m(\mathbf{a})=0$ или $\bar{P}_m(\mathbf{a})=\bar{P}_m(\mathbf{1})$.*

Доказательство. Пусть $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ — все элементы множества $\{w(i)\,|\,\tau(i)=m\}$, взятые в возрастающем порядке. Для применения закона 0 или 1 рассмотрим случайные величины $f_{n_1}, f_{n_2}, \ldots, f_{n_k}, \ldots$.

Множество A, удовлетворяющее условию следствия, лежит в σ-алгеб-

ре, порожденной множеством независимых случайных величин f_{n_k}, $f_{n_{k+1}}\ldots$ для любого k, а поэтому лежит в остаточной σ-алгебре всей последовательности $f_{n_1}, f_{n_2}, \ldots, f_{n_k}, \ldots$. По закону 0 или 1 будет $\bar{P}_m(A)=0$ или $\bar{P}_m(A)=\bar{P}_m(\Omega)$. Следствие доказано.

Пусть $\mathbf{a}\in\mathfrak{A}$ и P — р.п. полумера. По определению, элемент $i_P(\mathbf{a})$ порождается множеством $\{\omega\in A \mid (d\bar{P}/d\bar{M})(\omega)\neq 0\}$, где $d\bar{P}/d\bar{M}$ — производная Радона — Никодима меры $\bar{P}$ по мере $\bar{M}$, A — произвольное множество такое, что $\mathbf{a}=[A]$. Легко видеть, что $i_P(\mathbf{a})$ не зависит от выбора множества A. В новых обозначениях следствие 2.1 можно переписать в следующей форме.

Следствие 3.2 (из леммы 2.1). *Если* $\mathbf{c}\subseteq i_P(\mathbf{a})$ *и* $\bar{M}(\mathbf{c})>0$, то $\bar{P}(\mathbf{c})>0$.

Завершим доказательство теоремы 3.1. Пусть $\mathbf{s}_m=[\bar{E}_m]$. По лемме 3.5, $\bar{P}_m(\mathbf{s}_m)>0$, поэтому $\mathbf{s}_m\neq\mathbf{0}$. По лемме 3.6, при $k\neq m$ любые $\alpha\in\bar{E}_k$ и $\beta\in\bar{E}_m$ не сводимы друг к другу, поэтому $\mathbf{s}_k\cap\mathbf{s}_m=\mathbf{0}$. Определим

$$\mathbf{d}_m=i_{P_m}(\mathbf{s}_m)=i_{P_m}(\mathbf{1}).$$

Из определения $\bar{P}(i_P(\mathbf{a}))=\bar{P}(\mathbf{a})$ для любых $\mathbf{a}$ и р.п. полумеры P. Поэтому $\mathbf{d}_m\neq\mathbf{0}$. Из $\mathbf{d}_m\subseteq\mathbf{s}_m$ следует, что $\mathbf{d}_k\cap\mathbf{d}_m=\mathbf{0}$ при $k\neq m$. Допустим, что $\mathbf{d}_m=\mathbf{a}\cup\mathbf{b}$, где $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$, $\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$ и $\mathbf{a}\cap\mathbf{b}=\mathbf{0}$. По следствию 3.2, $\bar{P}_m(\mathbf{a})>0$ и $\bar{P}_m(\mathbf{b})>0$, что противоречит следствию 3.1. Полученное противоречие показывает, что $\mathbf{d}_m$ является атомом для любого m. На этом доказательство теоремы 3.1 завершается.

3.4. Безатомные элементы $\mathfrak{A}$. Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m, \ldots$ — все атомы алгебры $\mathfrak{A}$. В этом разделе будет показано, что $\mathbf{d}=\mathbf{1}\setminus\bigcup_{i=1}^{\infty}\mathbf{a}_i\neq\mathbf{0}$. Для любого ненулевого элемента $\mathbf{x}\subseteq\mathbf{d}$ будет существовать разложение $\mathbf{x}=\mathbf{x}_1\cup\mathbf{x}_2$, где $\mathbf{x}_1\cap\mathbf{x}_2=\mathbf{0}$ и $\mathbf{x}_1\neq\mathbf{0}$, $\mathbf{x}_2\neq\mathbf{0}$.

Теорема 3.2. *Имеем* $\mathbf{1}\setminus\bigcup_{i=1}^{\infty}\mathbf{a}_i\neq\mathbf{0}$.

Доказательство. Мы построим ненулевой элемент $\mathbf{e}$, в котором не содержится ни одного атома. Операция $\mathfrak{D}$ будет по произвольной сети q с ассоциированным множеством G определять сеть q':

$$q'(\sigma)=\begin{cases}0, \text{ если } \exists\sigma_1\,(l(\sigma_1^{\kappa})=l(\sigma^{\mathrm{H}})\,\&\,\sigma_1\in G(p(l(\sigma^{\mathrm{H}})))\,\&\,\sigma^{\mathrm{H}} \text{ согласовано с } F_{p(l(\sigma^{\mathrm{H}}))}(\sigma_1^{\kappa})) \text{ и } \sigma\in W,\\ q(\sigma) \text{ в противном случае.}\end{cases}$$

Для применения общей схемы определим

$$B(i,\ q,\ \sigma)\leftrightarrow Q(\sigma^{\kappa})\neq 0\ \&\ \sigma^{\kappa} \text{ не согласовано с } F_i(\sigma^{\kappa})\,\&$$
$$\&\,\Sigma\{Q(z)\mid z \text{ согласовано с } F_i(\sigma^{\kappa})\,\&\,l(z)=l(\sigma^{\kappa})\}\leqslant 2^{-\overline{\overline{\sigma}}^{\mathrm{H}+3)}},$$

где буквой Q обозначен $\mathfrak{D}(q)$-поток.

Пусть сеть q определена по общей схеме раздела 3.2, множество G и функция s ассоциированы с q. Определим $q'=\mathfrak{D}(q)$. Пусть P обозначает q'-поток.

Аналогично тому, как это делалось в разделе 3.3, нетрудно показать, что P — непрерывная р.п. полумера, $\bar{P}\neq 0$ при $\rho(n)=(n+2)^2$, и носителем P является множество $E=\Omega\setminus\bigcup_{s'(z)=1}\Gamma_z$, где s' — ассоциированная с q' функция.

Покажем, что любые две последовательности из E не сводятся друг к другу. Пусть ω, $\omega'\in E$ и $\omega\neq\omega'$. Допустим, что $\omega'=F_i(\omega)$ для некоторого i.

Тогда по лемме 3.2 существует путь $\sigma \in G(i)$ такой, что $\sigma^{\kappa} \subset \omega$. По конструкции σ^{κ} не согласовано с $F_i(\sigma^{\kappa})$. Поэтому по определению, $q'((\omega')_t, (\omega')_{t+1})=0$, где $t=l(\sigma^{\kappa})$. Отсюда $\omega' \notin E$. Полученное противоречие показывает, что ω' не сводится к ω.

Определим $\mathbf{e}=[\bar{E}]$ и $\mathbf{f}=i_P(\mathbf{e})$. Пусть $\mathbf{x} \subseteq \mathbf{f}$ и $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Выберем $X \in \mathbf{x}$ и положим $X'=X \cap E$. Легко видеть, что $\bar{M}(X')>0$. По лемме 2.1 $\bar{P}(X')>0$. Так как $X' \subseteq E$, любые две последовательности из X' не сводимы друг к другу. Представим каким-либо образом $X'=X_1 \cup X_2$, где $X_1 \cap X_2=\emptyset$ и $\bar{P}(X_1)>0$, $\bar{P}(X_2)>0$. Пусть $\mathbf{x}_1=[\bar{X}_1]$ и $\mathbf{x}_2=[\bar{X}_2]$. Тогда $\mathbf{x}_1 \cap \mathbf{x}_2=\mathbf{0}$, $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$ и $\mathbf{x}=\mathbf{x}_1 \cup \mathbf{x}_2$. Следовательно, $\mathbf{f}$ не включает в себя ни одного атома. Поэтому $\mathbf{1}/\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbf{a}_i \neq \mathbf{0}$. На этом описание доказательства теоремы завершается.

Из теорем 3.1 и 3.2 вытекает

Следствие 3.3. $\mathbf{1}=\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbf{a}_i \cup \mathbf{d}$, *где* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m, \ldots$ — *все атомы алгебры* $\mathfrak{L}$, $\mathbf{d}$ — *максимальный элемент, не содержащий ни одного атома, причем* $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$.

3.5. Сводимость атомов. Мы введем отношение сводимости на множестве всех атомов $\mathfrak{L}$, аналогичное сводимости по Ю. Т. Медведеву [1], которое позволит различать определенные уже атомы и выделить из множества всех атомов естественные атомы $\mathbf{c}$ и $\mathbf{r}$.

Для любых двух атомов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ алгебры $\mathfrak{L}$ будем считать, что $\mathbf{a}$ сводится к $\mathbf{b}$, если для некоторого множества B, порождающего атом $\mathbf{b}$, и некоторого алгоритмического оператора F множество $F(B)$ порождает $\mathbf{a}$. Это эквивалентно тому, что для любых двух множеств A и B, порождающих $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ соответственно, $\bar{M}$-почти каждая последовательность из A алгоритмически сводится к некоторой последовательности из B, а к $\bar{M}$-почти каждой последовательности из B алгоритмически сводится некоторая последовательность из A.

Ввиду того что при $k \neq m$ никакие две последовательности $\alpha \in E_k$ и $\beta \in E_m$ алгоритмически не сводимы друг к другу, все атомы $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \ldots$ попарно несравнимы относительно введенной сводимости. Легко видеть, что атом $\mathbf{c}$ всех вычислимых последовательностей является наименьшим относительно этой сводимости, а атом $\mathbf{r}$ всех случайных последовательностей является наибольшим элементом. Таким образом, атомы $\mathbf{c}$ и $\mathbf{r}$ отличаются от каждого из атомов $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \ldots$. Отсюда, в частности, следует, что каждый из атомов $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \ldots$ порождается нестандартными последовательностями.

Введем операцию, которая позволит по известным атомам строить новые атомы. Пару бесконечных или конечных последовательностей равной длины α и β будем кодировать последовательностью (α, β), для которой $(\alpha, \beta)_{2i}=\alpha_i$ и $(\alpha, \beta)_{2i+1}=\beta_i$. Используя это кодирование, образуем по произвольным двум элементам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ новый элемент $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, который порождается множеством $A \times B=\{(\alpha, \beta) \mid \alpha \in A, \beta \in B\}$, где A и B — какие-нибудь множества, порождающие $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ соответственно. Легко видеть, что элемент $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ не зависит от выбора множеств A и B.

Если P и Q — произвольные р.п. полумеры, то $P \times Q$ будет обозначать наименьшую полумеру R, для которой $R(x, y)=P(x)Q(y)$ при $l(x)=l(y)$. Нетрудно доказать, что такая полумера существует и она рекурсивно-перечислима. Из (1.1)

$$\overline{P \times Q}(x, y)=\lim_n \sum_{l(\alpha)=l(\beta)=n, x \subset \alpha, y \subset \beta} P(\alpha)Q(\beta)=$$

$$= \lim_n \Big(\sum_{l(\alpha)=n, x\subset\alpha} P(\alpha) \sum_{l(\beta)=n, y\subset\beta} Q(\beta) \Big) =$$

$$= \lim_n \sum P(\alpha) \lim_n \sum Q(\beta) = \bar{P}(x)\bar{Q}(y).$$

Отсюда $\overline{P\times Q} = \bar{P}\times\bar{Q}$. Из определения[7] $\bar{P}(i_P(\mathbf{a})) = \bar{P}(\mathbf{a})$, поэтому $\bar{M}\times\bar{M}(i_{M\times M}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})) = \bar{M}\times\bar{M}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$. Отсюда $i_{M\times M}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) \neq 0$, если $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$ и $\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$.

Теорема 3.3. *Если* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *— атомы, то* $i_{M\times M}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$ *также атом.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{a}=[A]$ и $\mathbf{b}=[B]$. Допустим, что $A\times B = X\cup Y$, так что $\bar{X}\cap\bar{Y}=\phi$. Напомним, что $\bar{Z}=\{\omega \mid \exists\alpha(\alpha\in Z \& \alpha\equiv\omega)\}$. Так как $\bar{M}\times\bar{M}(A\times B)>0$, то $\bar{M}\times\bar{M}(X)>0$ или $\bar{M}\times\bar{M}(Y)>0$. Пусть имеет место второе из этих неравенств. Для произвольных $Z\subseteq\Omega$ и $\omega\in\Omega$

$$Z_\omega = \{\alpha \mid (\omega, \alpha)\in Z\}.$$

Тогда для любой $\omega\in A$

$$\begin{aligned} &X_\omega\cup Y_\omega = B, \\ &\bar{X}_\omega\cap\bar{Y}_\omega = \phi. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Из (3.13) и из того что $\mathbf{b}$ — атом, следует, что для любой $\omega\in A$ $\bar{M}(Y_\omega)=0$ или $\bar{M}(Y_\omega)=\bar{M}(B)$. Пусть $C_1=\{\omega\in A \mid \bar{M}(Y_\omega)=0\}$ и $C_2 = \{\omega\in A) \mid \bar{M}(Y_\omega)=\bar{M}(B)\}$.

Тогда $C_1\cup C_2 = A$. Покажем, что $\bar{C}_1\cap\bar{C}_2=\phi$. Допустим, что для некоторых $\omega\in C_1$ и $\omega'\in C_2$ $\omega\equiv\omega'$. Тогда если $\alpha\in Y_\omega$, то $(\omega, \alpha)\in Y$. Имеем $\omega'\in A$. Отсюда $(\omega', \alpha)\in A\times B$. Из $\bar{X}\cap\bar{Y}=\phi$, $(\omega, \alpha)\in Y$ и $(\omega', \alpha)\equiv(\omega, \alpha)$ следует, что $(\omega', \alpha)\in Y$, т. е. $\alpha\in Y_{\omega'}$. Аналогично показываем, что из $\alpha\in Y_{\omega'}$ следует, что $\alpha\in Y_\omega$. Значит, $Y_\omega = Y_{\omega'}$. Получаем противоречие с тем, что $\omega\in C_1$ и $\omega'\in C_2$. Следовательно, $\bar{C}_1\cap\bar{C}_2=\phi$.

По теореме Фубини [13] имеем

$$\bar{M}\times\bar{M}(Y) = \int_\Omega \bar{M}(Y_\omega)\, d\bar{M}(\omega) = \int_{C_2} \bar{M}(Y_\omega)\, d\bar{M}(\omega) = \bar{M}(B)\bar{M}(C_2). \tag{3.14}$$

Поэтому из $\bar{M}\times\bar{M}(Y)>0$ следует, что $\bar{M}(C_2)>0$. Отсюда и из того, что $\mathbf{a}$ — атом, следует, что $\bar{M}(C_2)=\bar{M}(A)$. Отсюда и из (3.14) следует, что $\bar{M}\times\bar{M}(Y)=\bar{M}\times\bar{M}(A\times B)$ и $\bar{M}\times\bar{M}(X)=0$. Таким образом, мы доказали, что для любого $X\subseteq A\times B$ такого, что $(A\times B)\setminus X\cap\bar{X}=\phi$, имеем $\bar{M}\times\bar{M}(X)=0$ или $\bar{M}\times\bar{M}(X)=\bar{M}\times\bar{M}(A\times B)$. Если $i_{M\times M}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$ не является атомом, то найдутся два множества X_1 и X_2 такие, что $\bar{X}_1\cap\bar{X}_2=\phi$, $X_1, X_2\subseteq A\times B$, $\bar{M}(X_1)>0$, $\bar{M}(X_2)>0$ и $(d(\bar{M}\times\bar{M})/d\bar{M})(\omega)\neq 0$ при $\omega\in X_1\cup X_2$. По лемме 2.1, $\bar{M}\times\bar{M}(X_1)>0$ и $\bar{M}\times\bar{M}(X_2)>0$. Существование таких множеств X_1 и X_2 противоречит только что доказанному свойству множества $A\times B$. Следовательно, $i_{M\times M}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$ является атомом алгебры $\mathfrak{L}$. Теорема доказана.

Используя теорему Фубини, как в доказательстве теоремы 3.3, нетрудно доказать, что произвольные атомы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ сводятся к атому $i_{M\times M}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$ относительно сводимости атомов. Отсюда и из того, что $\mathbf{d}_i$ и $\mathbf{d}_j$ при $i\neq j$ не сводятся друг к другу, следует, что $i_{M\times M}(\mathbf{d}_i\times\mathbf{d}_j)$ при $i\neq j$ отличается от каждого из атомов $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \ldots, \mathbf{d}_m, \ldots$. Автору неизвестно, будет ли $i_{M\times M}(\mathbf{d}_i\times\mathbf{d}_j)\neq\mathbf{r}$. Однако легко дополнить определение отношения B из раздела 3.3 так, что при $k\neq i$ и $k\neq j$ любая последовательность $\alpha\in E_k$ алгоритмически не будет сводиться к любой паре (β, γ), где $\beta\in E_i$ и $\gamma\in E_j$. Отсюда следует, что для указанных k, i и j модифицированный атом $\mathbf{d}_k$ не

[7] Определение $i_p(\mathbf{a})$ см. в конце доказательства теоремы 3.1.

будет сводиться к атому $i_{M\times M}(\mathbf{d}_i\times\mathbf{d}_j)$. Таким образом, $i_{M\times M}(\mathbf{d}_i\times\mathbf{d}_j)$ для модифицированных атомов $\mathbf{d}_i$ и $\mathbf{d}_j$ отличен от **c** и **r**. В частности, этот атом порождается нестандартными последовательностями.

В заключение отметим, что вопрос о естественной интерпретации атомов $\mathfrak{L}$, отличных от **c** и **r**, остается открытым.

Автор глубоко благодарен А. Н. Колмогорову за обсуждение результатов и ценные замечания, а также В. А. Успенскому, А. Л. Семенову, А. К. Звонкину, В. А. Крупскому и В. Вовку за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Роджерс Х.* Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М: Мир, 1972.
2. *Звонкин А. К., Левин Л. А.* Сложность конечных объектов и обоснование понятий информации и случайности с помощью теории алгоритмов.— Успехи матем. наук, 1970, т. 25, № 6, с. 85—127.
3. *Левин Л. А.* О принципе сохранения информации в интуиционистской математике.— Докл. АН СССР, 1976, т. 227, № 6, с. 1293—1296.
4. *Шенфилд Дж.* Степени неразрешимости. М.: Наука, 1977.
5. *Левин Л. А.* Законы сохранения (невозрастания) информации и вопросы обоснования теории вероятностей.— Пробл. передачи информ., 1974, т. 10, № 3, с. 30—35.
6. *Агафонов В. М.* Сложность алгоритмов и вычислений. Ч. 2. Новосибирск: НГУ, 1975.
7. *Барздинь Я. М.* О вычислимости на вероятностной машине.— Докл. АН СССР, 1969, т. 189, № 4, с. 699—702.
8. *Де Леу, К., Мур З. Ф., Шеннон К. Э., Шапиро Н.* Вычислимость на вероятностных машинах.— В кн.: Автоматы (сб. перев.). М.: Изд-во иностр. лит., 1956, с. 242—278.
9. *Левин Л. А.* О понятии случайной последовательности.— Докл. АН СССР, 1973, т. 212, № 3, с. 548—550.
10. *Колмогоров А. Н.* Три подхода к определению понятия количества информации.— Пробл. передачи информ., 1965, т. 1, № 1, с. 3—11.
11. *Колмогоров А. Н.* К логическим основам теории вероятностей и теории информации.— Пробл. передачи информ., 1969, т. 5, № 3, с. 3—7.
12. *Martin-Löf P.* The Definition of Random Sequences.— Inform. and Control, 1966, v. 9, № 6, p. 602—619.
13. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
14. *Колмогоров А. Н.* Основные понятия теории вероятностей. М.: Наука, 1974.
15. *Ламперти Дж.* Вероятность. М.: Наука, 1973.
16. *Вьюгин В. В.* Об инвариантных по Тьюрингу множествах.— Докл. АН СССР, 1976, т. 229, № 4, с. 790—793.
17. *Успенский В. А.* Лекции о вычислимых функциях. М: Физматгиз, 1960.

Поступила в редакцию
21.I.1981