ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Май—июнь 2014. Том 21, № 3. С. 82–86

УДК 519.852.2

МНОГОГРАННИКИ И СВЯЗНЫЕ ПОДГРАФЫ *)

А. В. Селиверстов

Аннотация. Дано описание рёбер релаксационных многогранников для булева квадратичного программирования. Установлено соответствие между инцидентными целой вершине рёбрами такого многогранника и связными подграфами полного графа.

Ключевые слова: комбинаторная оптимизация, полиэдральный конус, многогранник, подграф.

Различные задачи для передачи информации [6] и биоинформатики [2, 4, 13] сводятся к оптимизации функционала на множестве связных подграфов данного графа. Это объясняет интерес к описанию связных подграфов, удобному для обработки данных методами линейного программирования. С другой стороны, такое описание позволяет использовать методы перечисления связных графов [3] для изучения многогранников, связанных с трудными задачами оптимизации квадратичных функционалов на множестве вершин многомерного куба [1, 8]. Близкие задачи описания многогранников рассмотрены в [9–11].

Точки обозначаются через $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$, $\mathbf{x}^{(k)}$; верхний индекс означает номер точки. Координаты обозначаются курсивом с нижними индексами, соответствующими осям координат. У точки $\mathbf{1}$ каждая координата равна 1.

Пусть граф имеет n вершин. Рассмотрим прямую сумму пространств $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^N$, где $N = \frac{1}{2}n(n-1)$. Координаты в $\mathbb{R}^n$ обозначим через x_i, в $\mathbb{R}^N$ — через x_{ij}, где $i < j$. Координаты в $\mathbb{R}^n$ соответствуют вершинам графа, в $\mathbb{R}^N$ — рёбрам графа. Полиэдральный конус Λ_n размерности $\frac{1}{2}n(n+1)$ задан системой $\frac{3}{2}(n^2 - n)$ неравенств трёх типов: $x_i \geqslant x_{ij}$, $x_j \geqslant x_{ij}$ и $x_{ij} \geqslant 0$.

Точке $\mathbf{x} \in \Lambda_n$ соответствует подграф $G(\mathbf{x})$ полного графа K_n с n вершинами: если $x_i > 0$, то вершина i принадлежит $G(\mathbf{x})$; если $x_{ij} > 0$, то вершины i и j смежны в $G(\mathbf{x})$. Легко видеть корректность определения

*)Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 13–04–40196–Н).

для точек из конуса Λ_n: если ребро принадлежит подграфу, то и вершины этого ребра тоже принадлежат подграфу.

Для $n \leqslant 15$ количество связных подграфов графа K_n приведены в последовательности A167939 Онлайн-энциклопедии целочисленных последовательностей http://oeis.org.

Утверждение 1. *Между связными подграфами полного графа K_n и крайними лучами конуса Λ_n существует взаимно однозначное соответствие. Более того, если точка $\mathbf{x}$ принадлежит крайнему лучу, то её ненулевые координаты равны между собой.*

Доказательство. Если подграф $G(\mathbf{x})$ несвязный, то точка $\mathbf{x}$ равна сумме точек $\mathbf{x}^{(k)} \in \Lambda_n$, для которых $G(\mathbf{x}^{(k)})$ служат компонентами связности в $G(\mathbf{x})$; при этом координата точки $\mathbf{x}^{(k)}$ равна либо соответствующей координате точки $\mathbf{x}$, либо нулю. Такая точка $\mathbf{x}$ не порождает крайнего луча конуса Λ_n. Следовательно, крайнему лучу соответствует единственный связный подграф.

Пусть точка $\mathbf{x}$ принадлежит крайнему лучу конуса Λ_n. Обозначим через H компоненту связности остовного подграфа $G(\mathbf{x})$, в котором для всех индексов $i < j$ вершины i и j смежные, если $x_{ij} = \max\limits_{\ell} x_\ell$. Обозначим через $\mathbf{y}$ $\{0,1\}$-точку конуса Λ_n такую, что $G(\mathbf{y}) = H$. Предположим, что H — собственный подграф. Тогда $\mathbf{x} - \varepsilon\mathbf{y} \in \Lambda_n$ для малого положительного числа ε, при этом $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ линейно независимые. Точка $\mathbf{x}$, равная сумме линейно независимых точек конуса, не принадлежит крайнему лучу конуса; противоречие. Следовательно, $G(\mathbf{x}) = H$. Это возможно, только если ненулевые координаты $\mathbf{x}$ равны между собой.

Каждому подграфу соответствует точка конуса Λ_n, ненулевые координаты которой равны 1. Если ненулевые координаты точки $\mathbf{x} \in \Lambda_n$ равны между собой и граф $G(\mathbf{x})$ связный, то точка $\mathbf{x}$ принадлежит крайнему лучу конуса Λ_n. Действительно, если $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{y} + \beta\mathbf{z}$, где $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \Lambda_n$, то обе точки $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$ принадлежат одному лучу. Следовательно, этот луч — крайний. Утверждение 1 доказано.

Для графа H с n вершинами точки $\mathbf{x} \in \Lambda_n$, для которых $G(\mathbf{x}) \subseteq H$, составляют грань конуса Λ_n. Это позволяет рассматривать подграфы произвольного графа.

Утверждение 1 позволяет описать некоторые рёбра релаксационного многогранника L_n для задачи булева квадратичного программирования [14]. Этот многогранник имеет $2n^2 - 2n$ фасет и получается из конуса Λ_n добавлением новых неравенств вида $x_i + x_j - x_{ij} \leqslant 1$.

Каждая координата вершины многогранника L_n принадлежит множеству $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ [14]. Для целых вершин все координаты однозначно определяются координатами проекции на $\mathbb{R}^n$. Напротив, если каждая координата проекции на $\mathbb{R}^n$ равна $\frac{1}{2}$, то остальные координаты могут независимо принимать любое из двух значений $\{0, \frac{1}{2}\}$.

Группа симметрий n-мерного куба вкладывается в группу автоморфизмов решётки граней L_n и транзитивно действует на множестве целых вершин L_n. Поэтому вершина $\mathbf{0}$ не отличается от других целых вершин. Таким образом, утверждение 1 позволяет описать смежность целых вершин с остальными. Отметим некоторые частные случаи.

Утверждение 2. *Если нецелая вершина* $\mathbf{v}$ *релаксационного многогранника* L_n *имеет нулевую проекцию на* $\mathbb{R}^N$*, то хотя бы три координаты проекции* $\mathbf{v}$ *на* $\mathbb{R}^n$ *не равны нулю и вершина* $\mathbf{v}$ *не смежна с* $\mathbf{0}$.

Доказательство. Обозначим через I множество индексов i, для которых $v_i = \frac{1}{2}$. Поскольку все v_{ij} равны 0, из неравенств для L_n следует, что никакая координата $\mathbf{v}$ не равна 1. Стало быть, мощность $|I|$ не меньше 1. Обозначим через $\mathbf{e}_i$ целую вершину многогранника, у которой i-я координата равна 1, а остальные равны нулю. Тогда $\mathbf{v} = \frac{1}{2}\sum\limits_{i\in I}\mathbf{e}_i$. Если $|I| = 1$, то $\mathbf{v}$ принадлежит отрезку, соединяющему вершины $\mathbf{0}$ и $\mathbf{e}_j$ для некоторого индекса j, и не является вершиной. Если $|I| = 2$, то $\mathbf{v}$ принадлежит отрезку, соединяющему вершины $\mathbf{e}_j$ и $\mathbf{e}_k$ для некоторых индексов j и k, и $\mathbf{v}$ не является вершиной. Следовательно, мощность $|I| \geqslant 3$. Тогда точка $\mathbf{x} = \frac{1}{|I|}\sum\limits_{i\in I}\mathbf{e}_i$ является внутренней точкой отрезка, соединяющего вершины $\mathbf{0}$ и $\mathbf{v}$. Но точка $\mathbf{x}$ принадлежит выпуклой оболочке вершин $\mathbf{e}_i$. Тем самым отрезок, соединяющий $\mathbf{0}$ и $\mathbf{v}$, не является ребром. Утверждение 2 доказано.

Утверждение 3. *Дана вершина* $\mathbf{v}$ *многогранника* L_n*, которая имеет нулевую проекцию на* $\mathbb{R}^N$*, и каждая координата проекции на* $\mathbb{R}^n$ *равна* $\frac{1}{2}$*. Вершины* $\mathbf{v}$ *и* $\mathbf{1}$ *не смежны в* L_n.

Доказательство. По утверждению 2 $n \geqslant 3$. Обозначим через $\mathbf{c}_i$ целую вершину, у которой все координаты проекции на $\mathbb{R}^n$ кроме i-й равны 1, а i-я равна нулю. Тогда внутренняя точка отрезка, соединяющего $\mathbf{v}$ и $\mathbf{1}$, $\frac{2}{n}\mathbf{v} + \frac{n-2}{n}\mathbf{1} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\mathbf{c}_i$ принадлежит выпуклой оболочке вершин $\mathbf{c}_i$. Следовательно, отрезок, соединяющий вершины $\mathbf{1}$ и $\mathbf{v}$, не является ребром. Утверждение 3 доказано.

Число целых вершин у L_n равно 2^n. Общее число $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$-точек в многограннике L_n равно $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!k!}2^{n-k+\frac{k(k-1)}{2}}$. Из них $2^{n-1}(2^n-1)$ точек являются серединами отрезков, соединяющих целые вершины, а значит, не являются вершинами L_n.

Вычисления программой lrs 4.3 (http://cgm.cs.mcgill.ca), реализующей алгоритм из [12], показали, что при $n \leqslant 6$ все $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$-точки в L_n являются либо вершинами, либо серединами рёбер, соединяющих целые вершины. Результаты вычислений представлены в таблице.

n	2	3	4	5	6
Число вершин в L_n	4	12	104	1760	48896
Число рёбер, инцидентных вершине $\mathbf{0}$	3	10	64	973	31743

Вершины булева квадратичного многогранника BQP_n суть все целые вершины многогранника L_n. Для нескольких серий фасет многогранников BQP_n получено явное описание [14]. Однако при больших n задача распознавания опорных гиперплоскостей к BQP_n остаётся алгоритмически трудной [5, 9]. Отметим, что BQP_n содержит грани с большим числом вершин, любые две из которых соединены ребром [7].

Из утверждений 2 и 3 следует, что в релаксационном многограннике L_3 каждой нецелой вершине $\mathbf{v}$ соответствует единственная нетривиальная фасета Φ многогранника BQP_3 так, что $\mathbf{v}$ смежна целой вершине тогда и только тогда, когда она принадлежит фасете Φ. Однако многогранник BQP_6 имеет 116764 фасеты [8], но у L_6 лишь 48832 вершины не являются вершинами BQP_6. При больших n отсечения каждой из этих вершин L_n недостаточно для определения BQP_n.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Арутюнов А. В.** Две задачи теории квадратичных отображений // Функцион. анализ и его прил. — 2012. — Т. 46, №3. — С. 81–84.
Arutyunov A. V. Two problems of the theory of quadratic maps // Funct. Anal. Appl. — 2012. — Vol. 46, N 3. — P. 225–227.
2. **Владимиров А. А.** Паросочетания без пересечений // Пробл. передачи информ. — 2013. — Т. 49, №1. — С. 61–65.
Vladimirov A. A. Non-crossing matchings // Probl. Inf. Transmission. — 2013. — Vol. 49, N 1. — P. 54–57.
3. **Воблый В. А.** Об одной формуле для числа помеченных связных графов // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2012. — Т. 19, №4. — С. 48–59.
4. **Горбунов К. Ю., Любецкий В. А.** Дерево, ближайшее в среднем к данному набору деревьев // Пробл. передачи информ. — 2011. — Т. 47, №3. — С. 64–79.
Gorbunov K. Yu., Lyubetsky V. A. The tree nearest on average to a given set of trees // Probl. Inf. Transmission. — 2011. — Vol. 47, N 3. — P. 274–288.

5. **Горбунов К. Ю., Селиверстов А. В., Любецкий В. А.** Взаимное расположение параллельных гиперплоскостей, квадрик и вершин многомерного куба // Пробл. передачи информ. — 2012. — Т. 48, № 2. — С. 113–120.
Gorbunov K. Yu., Seliverstov A. V., Lyubetsky V. A. Geometric relationship between parallel hyperplanes, quadrics, and vertices of a hypercube // Prob. Inf. Transmission. — 2012. — Vol. 48, N 2. — P. 185–192.
6. **Ерзин А. И., Плотников Р. В., Шамардин Ю. В.** О некоторых полиномиально разрешимых случаях и приближённых алгоритмах для задачи построения оптимального коммуникационного дерева // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2013. — Т. 20, № 1. — С. 12–27.
Erzin A. I., Plotnikov R. V., Shamardin Yu. V. On some polynomially solvable cases and approximate algorithms in the optimal communication tree construction problem // J. Appl. Industr. Math. — 2013. — Vol. 7, N 2. — P. 142–152.
7. **Максименко А. Н.** k-Смежностные грани булева квадратичного многогранника // Фундамент. и прикл. математика. — 2013. — Т. 18, № 2. — С. 95–103.
8. **Селиверстов А. В.** О мономах квадратичных форм // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2013. — Т. 20, № 3. — С. 65–70.
Seliverstov A. V. Monomials in quadratic forms // J. Appl. Industr. Math. — 2013. — Vol. 7, N 3. — P. 431–434.
9. **Стецюк П. И., Золотых Н. Ю.** Бинарный квадратичный многогранник и его аппроксимации // Журн. обчисл. та прикл. математики. — 2010. — № 2. — С. 139–149.
10. **Шлык В. А.** О вершинах главного многогранника Гомори // Докл. НАН Беларуси. — 2011. — Т. 55, № 5. — С. 14–17.
11. **Шлык В. А.** Опорные вершины главного многогранника Гомори // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1. Физика. Математика. Информатика. — 2012. — № 1. — С. 49–54.
12. **Avis D., Fukuda K.** A pivoting algorithm for convex hulls and vertex enumeration of arrangements and polyhedra // Discrete Comput. Geom. — 1992. — Vol. 8, N 1. — P. 295–313.
13. **Conrad J. M., Gomes C. P., van Hoeve W.-J., Sabharwal A., Suter J. F.** Wildlife corridors as a connected subgraph problem // J. Environ. Econ. Manage. — 2012. — Vol. 63, N 1. — P. 1–18.
14. **Padberg M.** The boolean quadric polytope: some characteristics, facets and relatives // Math. Program. — 1989. — Vol. 45, N 1–3. — P. 139–172.

Селиверстов Александр Владиславович,
e-mail: slvstv@iitp.ru

Статья поступила
22 августа 2013 г.

Переработанный вариант —
17 февраля 2014 г.