

УДК 517.938

О НЕСВЯЗНЫХ НЕОГРАНИЧЕННЫХ МНОЖЕСТВАХ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

© 2008 г. А. М. Красносельский, Д. И. Рачинский

Представлено академиком Н.А. Кузнецовым 15.04.2008 г.

Поступило 17.04.2008 г.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В сообщении изучаются необычные бифуркации на бесконечности периодических решений квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Исследуется существование и геометрическая структура множеств больших по норме (некоторого функционального пространства X) решений уравнений, состоящих при всех значениях параметра $\lambda \in \mathbb{R}$ из линейной части и ограниченной нелинейности. На бесконечности подобные задачи обычно рассматриваются для случая, когда нелинейности обладают свойством насыщения. Возникающие в этом случае нелинейные операторы обладают свойством асимптотической однородности нулевого порядка. Большие по норме X решения образуют в $X \times \mathbb{R}$ конечное число (в ситуации общего положения – две, возможно и большее число [1]) непрерывных неограниченных ветвей, уходящих на бесконечность при приближении параметра к бифуркационному значению λ_0 , являющемуся точкой вырождения линейной части уравнения. Расположение неограниченных непрерывных ветвей в $X \times \mathbb{R}$ относительно точки λ_0 может быть различным: ветвь может располагаться с одной стороны от гиперплоскости $\{\lambda = \lambda_0\}$ (только при $\lambda > \lambda_0$ или только при $\lambda < \lambda_0$), либо осциллировать с обеих ее сторон, уходя на бесконечность; ветви могут располагаться с одной стороны от этой гиперплоскости или с разных сторон.

В настоящем сообщении изучаются квазилинейные уравнения с осциллирующими нелинейностями, имеющими различные верхний и нижний пределы на бесконечности. При значениях параметра из окрестности точки бифуркации множества решений уравнений с осциллирующими нелинейностями могут состоять из уходящей в бесконечность последовательности ограничен-

ных изолированных компонент, названных циклическими ветвями. Для квазилинейного обыкновенного дифференциального уравнения с ограниченной правой частью, не удовлетворяющей условиям насыщения, предлагаются критерии возникновения последовательностей циклических ветвей вынужденных периодических колебаний.

ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Предлагаемые ниже результаты используют понятие компактных непрерывных ветвей. Пусть в банаховом пространстве Y заданы два непересекающихся компактных (компактность включает замкнутость) множества D_1 и D_2 .

Определение 1. Компактное множество Ξ называется непрерывной ветвью, соединяющей множества D_1 и D_2 , если граница любого открытого множества $D: D \supset D_1, D \cap D_2 = \emptyset$ имеет непустое пересечение с Ξ .

Определение 2. Локально-компактное множество Ξ называется непрерывной неограниченной ветвью, если граница любого открытого ограниченного множества, содержащего достаточно большой шар $\|y\| \leq \rho$, имеет непустое пересечение с Ξ .

Эти определения и их некомпактные аналоги были предложены М.А. Красносельским в [2]. Они применялись для описания общих свойств множеств решений операторных уравнений. Типичный пример непрерывной ветви – это непрерывная кривая, один конец которой лежит в D_1 , другой в D_2 . Непрерывные ветви называют также связными ветвями, хотя из определений связность не вытекает. Используя лемму Цорна и упорядоченность множеств по вложению, можно показать, что компактное множество Ξ – это непрерывная ветвь, соединяющая множества D_1 и D_2 , если и только если Ξ содержит связное замкнутое подмножество, имеющее непустое пересечение с D_1 и с D_2 .

Непрерывные ветви естественно возникают при описании множеств решений операторных уравнений со скалярным параметром. Такие множества (и в конечномерных, и в бесконечномер-

ных пространствах) могут быть устроены произвольно сложно. Однако в естественных ситуациях они обладают свойствами замкнутости, компактности и образуют непрерывные ветви.

Пример. Пусть B – замкнутый шар в банаховом пространстве X , оператор $T: X \times [0, 1] \rightarrow X$ вполне непрерывен. Пусть $x \neq T(x; \xi)$ на границе ∂B шара B при каждом $\xi \in [0, 1]$ и, следовательно, при всех ξ вращение векторного поля $x - T(x; \xi)$ на сфере ∂B определено и имеет одно и то же значение γ . Если $\gamma \neq 0$, то при каждом ξ непусто множество $H(\xi) \subset B$ неподвижных точек оператора T ; множество $\{(x, \xi): x \in H(\xi), \xi \in [0, 1]\}$ является непрерывной ветвью, соединяющей множества $(H(0), 0)$ и $(H(1), 1)$ в пространстве $X \times \mathbb{R}$ пар (x, ξ) .

Определение 1 допускает следующую эквивалентную формулировку.

Определение 3. Компактное множество Ξ назовем непрерывной ветвью, соединяющей множества D_1 и D_2 , если в любой его ε -окрестности лежит непрерывная кривая, один конец которой лежит в D_1 , другой в D_2 .

Определение 3 приведено для обоснования естественности следующего определения циклической ветви; для локально-компактных ветвей Ξ определение 2 можно перефразировать в терминах, близких к определению 3.

Определение 4. Компактное множество Ξ назовем циклической ветвью, если в любой его достаточно малой ε -окрестности лежит нестягиваемая в этой окрестности простая замкнутая кривая (гомеоморфный образ окружности).

Основной пример циклической ветви – простая замкнутая кривая. Циклическая ветвь возникает, если две точки $y_1, y_2 \in \Xi$ можно соединить двумя в естественном смысле различными непрерывными ветвями: в ε -окрестности одной ветви будет лежать одна непрерывная кривая, соединяющая точки y_1 и y_2 , в ε -окрестности другой ветви будет лежать другая такая кривая, в совокупности они составят нестягиваемую замкнутую кривую.

Предположим, что в рассмотренном выше примере $\gamma = 0$, причем при $\xi = 0$ и $\xi = 1$ оператор T не имеет в B неподвижных точек. Пусть при некотором $\xi_0 \in (0, 1)$ на границе шара $B_1 \subset B$ определено вращение $\gamma_1 \neq 0$ поля $x - T(x; \xi_0)$. Тогда множество $\{(x, \xi): x = T(x; \xi)\}$ является циклической ветвью в $X \times [0, 1]$.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим уравнение

$$\mathcal{L}(p; \lambda)x = f(t, x; \lambda), \quad p = \frac{d}{dt}, \quad (1)$$

$$\lambda \in \Lambda = [\lambda_0 - 1, \lambda_0 + 1].$$

Здесь \mathcal{L} – вещественный многочлен от переменной p с коэффициентами, зависящими от λ ; нелинейность f непрерывна по совокупности переменных, равномерно ограничена и периодична по t с общим для всех λ периодом 2π . Если у многочлена $L(p) = \mathcal{L}(p; \lambda_0)$ нет корней вида ki при целых k , то множества P_λ всех 2π -периодических решений уравнения (1) равномерно ограничены при $|\lambda - \lambda_0| \leq \varepsilon$, если $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Если у многочлена L есть корни вида ki , то множество $\mathfrak{F}_\varepsilon = \bigcup_{|\lambda - \lambda_0| \leq \varepsilon} P_\lambda$ может быть неограниченным при любом ε .

Ниже приводятся условия неограниченности множества \mathfrak{F}_ε и изучается его геометрия. Предполагается, что $\mathcal{L}(p; \lambda) = L(p) + (\lambda - \lambda_0)M(p; \lambda)$, степени l и m многочленов L и M связаны соотношением $l > m$, коэффициенты M непрерывны по λ . Предполагается также, что $L(\pm i) = 0$ и $L(ki) \neq 0$ при $k \neq \pm 1, k \in \mathbb{Z}$. Близкий случай $L(\pm ni) = 0$ для натурального $n > 1$ не рассматривается.

Во всех формулируемых ниже результатах предполагается, что функция f имеет вид $b(t; \lambda) + f(x; \lambda)$. При описании геометрической структуры неограниченных множеств 2π -периодических решений используется вспомогательная функция

$$F(r) = \int_0^{2\pi} \sin t f(r \sin t; \lambda_0) dt.$$

Основное условие возникновения последовательностей изолированных множеств решений при бифуркации на бесконечности – это строгое неравенство

$$F^* = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} F(r) > F_* = \underline{\lim}_{r \rightarrow \infty} F(r). \quad (2)$$

Существование неограниченных последовательностей решений задачи о вынужденных периодических колебаниях для уравнений с нелинейностями, удовлетворяющими условию (2), изучалось ранее в [3].

Если линейная часть уравнения вырождена при каждом λ (т.е. $\mathcal{L}(p; \lambda) = (p^2 + 1)M(p; \lambda)$ для некоторого многочлена M), то решения образуют неограниченные непрерывные ветви в $L^2 \times \mathbb{R}$, а их проекции на ось λ заполняют невырожденные промежутки. Условие (2) исключает из рассмотрения нелинейности, удовлетворяющие условию насыщения $f(x) \rightarrow \pm \bar{f} \neq 0, x \rightarrow \pm \infty$, и многие близкие к ним. В случае общего положения у задачи с насыщением множество решений либо ограничено, либо состоит из неограниченных непрерывных ветвей.

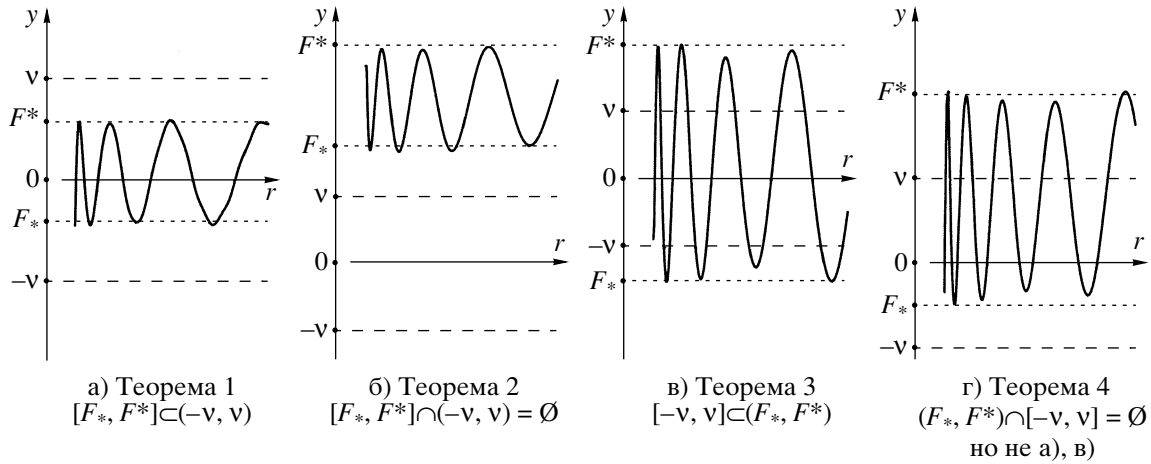


Рис. 1. Расположение кривой $y = F(r)$ относительно полосы $|y| < v$.

Будем считать, что

$$\bar{b} = \int_0^{2\pi} e^{ti} b(t; \lambda_0) dt \neq 0; \quad \text{Im} \mu \neq 0,$$

где

$$\mu = M(i; \lambda_0), \quad v = \left| \frac{\bar{b}\mu}{\text{Im}\mu} \right|.$$

Теорема 1. Пусть $\max\{|F_*|, |F^*|\} < v$.

Тогда множество 2π -периодических решений уравнения 1 не ограничено и состоит из двух различных неограниченных непрерывных ветвей в пространстве $L^2 \times \Lambda$.

Теорема 2. Пусть $F_*F^* > 0$ и $\min\{|F_*|, |F^*|\} > v$.

Тогда множество 2π -периодических решений уравнения (1) ограничено в C^1 .

Теорема 3. Пусть $F_*F^* < 0$ и $\min\{|F_*|, |F^*|\} > v$.

Тогда множество 2π -периодических решений уравнения (1) не ограничено в $L^2 \times \Lambda$ и содержит бесконечную последовательность ограниченных циклических ветвей.

Теорема 4. Пусть $\min\{|F_*|, |F^*|\} < v < \{|F_*|, |F^*|\}$.

Тогда множество 2π -периодических решений уравнения 1 не ограничено в $L^2 \times \Lambda$ и содержит бесконечную последовательность ограниченных циклических ветвей.

Условия теорем 1–4 отличаются расположением графика функции $y = F(r)$ при больших r относительно полосы $|y| < v$. Возможные варианты этого расположения приведены на рис. 1. В условиях теорем 3 и 4 неограниченных непрерывных ветвей нет; различие в геометрической структуре возникающих циклических ветвей решений боль-

ших амплитуд в $L^2 \times \Lambda$ обсуждается в следующем разделе.

СИСТЕМА РАЗВЕТВЛЕНИЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Представим пространство L^2 в виде прямой суммы плоскости Π функций вида $r \cos(t - \varphi)$ и бесконечномерного ортогонального дополнения Π^\perp . Решения уравнения (1) будем искать в виде $x(t) = r \cos(t - \varphi) + h(t)$, где $h \in \Pi^\perp, r \geq 0$. В силу сделанных предположений относительно \mathcal{L} и ограниченности функции f все возможные h равномерно ограничены. Большой может быть только величина r .

Ортогональные проекции уравнения (1) на Π и Π^\perp приводят к двум связанным уравнениям, двумерному и бесконечномерному. Если величина r достаточно велика, то главные компоненты уравнения на плоскости Π не содержат компоненту h решения x . После простых преобразований они приобретают вид

$$\frac{|\bar{b}\mu|}{\text{Im}\mu} \sin(\varphi - \arg(\bar{b}\mu)) = F(r), \tag{3}$$

$$(\lambda - \lambda_0)r = \frac{|\bar{b}|}{\pi \text{Im}\mu} \sin(\varphi - \psi), \quad \psi = \arg(\bar{b}).$$

Первое уравнение системы (3) не содержит переменной λ , переменные φ и r в нем разделены. Это уравнение определяет существование решений, форму циклических ветвей в пространстве $L^2 \times \Lambda$ и расположение их проекций на плоскости Π . Второе уравнение задает значения параметра λ при движении вдоль циклической ветви, определяемой первым уравнением.

Первое уравнение системы (3) разрешимо при тех значениях r , при которых график функции F принадлежит полосе $[-v, v]$. Промежутки Δ таких

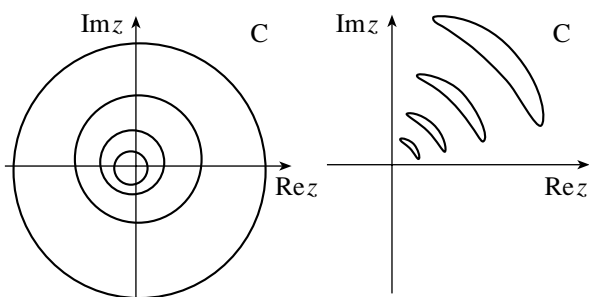


Рис. 2. Проекция циклических ветвей на плоскость $z = re^{i\varphi}$.

значений r могут быть двух типов: первого, когда этот график пересекает полосу (начинается с одной ее стороны и кончается на другой), и второго, когда оба конца графика лежат на одной стороне полосы. В условиях теоремы 3 промежутков первого типа счетное число, промежутков второго типа может и не быть. В условиях теоремы 4 все промежутки Δ только второго типа, их счетное число.

Циклические ветви в условиях теорем 3 и 4 имеют существенно различные проекции на плоскость Π , комплексифицированную соотношением $z = re^{i\varphi}$. Каждому промежутку Δ (достаточно больших значений r) первого типа соответствует циклическая ветвь первого типа, ее проекция на плоскость Π лежит в кольце $\{z: |z| \in \Delta\}$; вообще говоря, эта проекция один раз (возможно, не монотонно) обходит вокруг начала координат. На рис. 2 слева схематично изображены проекции таких ветвей. Промежуткам Δ второго типа соответствуют циклические ветви второго типа, их проекции на плоскость Π близки к замкнутым кривым, не охватывающим начало координат, как схематично показано на рис. 2 справа.

ПРИ КАКИХ λ СУЩЕСТВУЮТ ЦИКЛИЧЕСКИЕ ВЕТВИ

Теоремы 3 и 4 могут быть дополнены утверждениями о расположении промежутков значений параметра λ , при которых существуют циклические ветви. Эти промежутки определяются вторым уравнением системы (3).

Пусть Δ – это один из промежутков значений r , на котором график функции F находится внутри полосы $(-v, v)$. Проекция соответствующей циклической ветви решений первого уравнения системы (3) на плоскость Π расположена в множестве $S = \{z = re^{i\varphi}: \varphi \in \Phi, r \in \Delta\}$, где Φ – некоторый промежуток. В зависимости от того, принимает ли функция $\sin(\varphi - \psi)$ при $\varphi \in \Phi$ значения обоих знаков или сохраняет знак, в силу второго уравне-

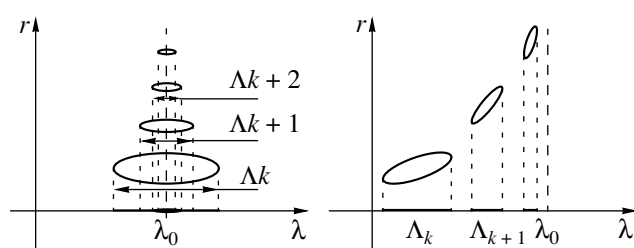


Рис. 3. Расположение проекций циклических ветвей на плоскости (r, λ) .

ния системы (3) соответствующий циклической ветви интервал значений λ накрывает или не накрывает точку λ_0 . На рис. 3 такие интервалы выделены утолщениями оси λ .

В условиях теоремы 3 циклическим ветвям первого типа (с проекциями, охватывающими начало координат, для них $S = \{|z| \in \Delta\}$) соответствуют промежутки Λ_k значений λ , содержащие λ_0 . При любом N найдется такое $\varepsilon_N > 0$, что при $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon_N$ уравнение 1 имеет по крайней мере N решений периода 2π . Вообще говоря, при каждом $\lambda \neq \lambda_0$ количество таких решений конечно, при $\lambda = \lambda_0$ счетно; проекции циклических ветвей располагаются на плоскости (λ, r) , как показано на рис.3 слева (этот рисунок является схемой и не имеет масштаба).

В условиях теоремы 4 также могут быть промежутки значений параметра, которые покрывают точку λ_0 . Но естественной является и другая ситуация. Пусть множества S , в которых лежат проекции циклических ветвей второго типа, располагаются целиком в одной из полуплоскостей $\sin(\varphi - \psi) > 0$ или $\sin(\varphi - \psi) < 0$. Тогда возможные значения λ принадлежат объединению счетной последовательности непересекающихся промежутков Λ_n , расположенных с одной стороны от точки λ_0 . Если предполагать (см. замечание 1), что нелинейность F осциллирует экспоненциально медленно, то интервалы Λ_n экспоненциально быстро (по n) стремятся к λ_0 . Решения периода 2π больших амплитуд существуют только при $\lambda \in \Lambda_n$, вообще говоря, по два при каждом λ ; при $n \rightarrow \infty$ нормы решений неограниченно экспоненциально возрастают. Схема расположения циклических ветвей в условиях теоремы 4 на плоскости (λ, r) показана на рис. 3 справа.

ЗАМЕЧАНИЯ

Какие ограниченные нелинейности удовлетворяют условию (2). Вначале приведем примеры функций f , для которых

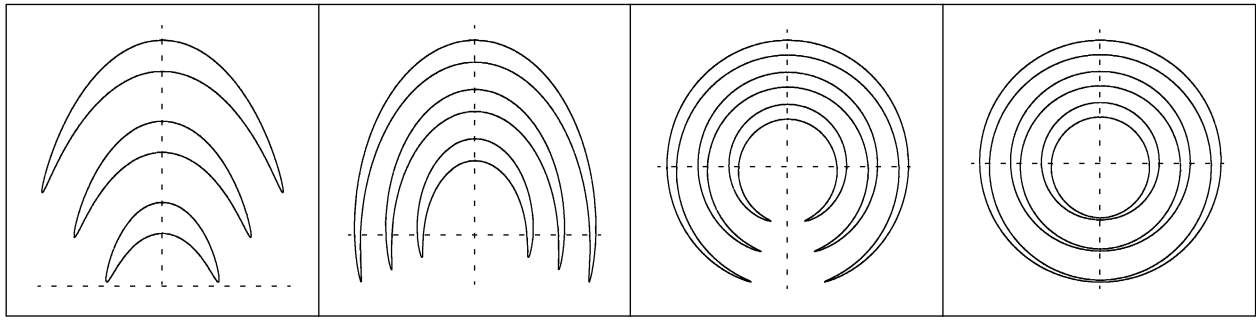


Рис. 4. Изменение характера циклических ветвей при изменении $|\bar{b}|$.

условие (2) не выполняется, т.е. верно противоположное (2) соотношение $F^* = F_*$.

Если выполнены условия насыщения $f(x) \rightarrow f^\pm$ при $x \rightarrow \pm\infty$, то $F^* = F_* = 2(f^+ - f^-)$. Для нечетных функций f , удовлетворяющих условию

$$\frac{1}{x} \int_0^x f(u) du \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty, \quad (4)$$

верно равенство $F^* = F_* = 0$; в частности, оно верно, если $f(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$. Также $F^* = F_* = 0$ для функций $\sin x^3, \sin \sqrt[3]{x}$; если f четная, то $F \equiv 0$.

Если $F^* = F_*$ для каких-то функций, то $F^* = F_*$ для их линейных комбинаций. Поэтому (2) не выполнено для суммы четных функций, нечетных функций, удовлетворяющих (4), и функций, удовлетворяющих условиям насыщения.

Условие (2) выполняется для нечетной функции $\sin(\log x), x > 1$. Соответственно оно выполняется для суммы такой функции и функций, ему не удовлетворяющих. Чтобы условие (2) выполнялось, необходимо слагаемое с экспоненциально растущей на бесконечности последовательностью нулей.

2. Структурные бифуркации. При изменении величины $|\bar{b}|$ условия одной из теорем могут переходить в условия другой. Пусть, например, $F_*F^* > 0$. Если $|\bar{b}|$ и ν малы, то выполнены условия теоремы 2 и множество периодических решений ограничено. При возрастании $|\bar{b}|$ полоса $(-\nu, \nu)$ расширяется, после критического значения $|\bar{b}| = \min\{|F_*|, |F^*|\} \cdot \left| \frac{\text{Im}\mu}{\mu} \right|$ оказываются выполненными условия теоремы 4 и возникает последовательность циклических ветвей второго типа. Когда $|\bar{b}|$ преодолевает следующее критическое

значение $|\bar{b}| = \text{Im}\max\{|F_*|, |F^*|\} \cdot \left| \frac{\text{Im}\mu}{\mu} \right|$, эта последовательность превращается в две неограниченные непрерывные ветви, существующие в условиях теоремы 1.

На рис. 4 показана трансформация проекции на плоскость r, φ бесконечной последовательности циклических ветвей для случая $F_*F^* < 0$ при убывании $|\bar{b}|$ и переходе от условий теоремы 4 к условиям теоремы 3. Циклические ветви второго типа переходят в циклические ветви первого типа, когда $|\bar{b}|$ преодолевает критическое значение $|\bar{b}| = \text{Im}\min\{|F_*|, |F^*|\} \cdot \left| \frac{\text{Im}\mu}{\mu} \right|$.

3. Об условиях теорем 1–4. Условия теорем 1–4 (см. рис. 1) охватывают все возможные варианты взаимного расположения чисел $\pm\nu$ и F^*, F_* за исключением случаев совпадения по крайней мере одного из чисел $\pm\nu$ с F^* или с F_* . Как исследовать этот вырожденный случай, авторы пока не знают.

Справедливы аналоги теорем 1–4 для уравнений с неограниченными нелинейностями, удовлетворяющими условию

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \max_{\lambda \in \Lambda} |x^{-1} f(x; \lambda)| = 0.$$

4. Неавтономные нелинейности. Возможные обобщения теорем 1–4 для уравнений с неавтономной нелинейностью f кажутся чересчур громоздкими. Уже для случая нелинейностей вида $b(t) + f(x; \lambda) + \sin(t + \theta)f_1(x; \lambda)$ возникают сложные бифуркационные картины. Уравнение разветвления, не содержащее λ , имеет вид, близкий к $\nu \sin(\varphi - \psi_0) = F(r) + F_1(r) \sin(2\varphi - \psi_1)$, где функция F_1 определяется четной частью нелинейности f , в то время как функция F по определению зависит только от нечетной части f . Поэтому возможны ситуации, аналогичные возникающим в

условиях теорем 1–4, но могут быть и другие, например четыре неограниченные непрерывные ветви или сосуществование двух неограниченных ветвей и последовательности циклических ветвей.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов №№ 06-01-00256 и 06-01-72552) и Science Foundation Ireland.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красносельский А.М., Рачинский Д.И. // Функцион. анализ и его прил. 2005. Т. 39. № 3. С. 37–53.
2. Красносельский М.А. // Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, М.: Гостехтефиздат, 1956.
3. *Krasnosel'skii A.M., Mawhin J.* // Math. Comput. Modelling. 2000. V. 32. P. 1445–1455.