ҚАРАҒАНДЫ УНИВЕРСИТЕТІНІҢ
ХАБАРШЫСЫ
ВЕСТНИК
КАРАГАНДИНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

ISSN 0142-0843

МАТЕМАТИКА сериясы
№ 1(77)/2015
Серия МАТЕМАТИКА

Қаңтар–ақпан–наурыз
30 наурыз 2015 ж.

1996 жылдан бастап шығады
Жылына 4 рет шығады

Январь–февраль–март
30 марта 2015 г.

Издается с 1996 года
Выходит 4 раза в год

Собственник РГП **Карагандинский государственный университет имени академика Е.А.Букетова**

Адрес редакции: 100028, г. Караганда, ул. Университетская, 28
Тел.: 77-03-69 (внутр. 1026); факс: (7212) 77-03-84.
E-mail: vestnick_kargu@ksu.kz. Сайт: vestnik.ksu.kz

Редакторы *Ж.Т.Нұрмұханова*
Техн. редактор *Д.Н.Муртазина*

Издательство Карагандинского государственного университета
им. Е.А.Букетова
100012, г. Караганда,
ул. Гоголя, 38,
тел.: (7212) 51-38-20
e-mail: izd_kargu@mail.ru

Басуға 28.03.2015 ж. қол қойылды.
Пішімі 60×84 1/8.
Офсеттік қағазы.
Көлемі 10,0 б.т.
Таралымы 300 дана.
Бағасы келісім бойынша.
Тапсырыс № 196.

Подписано в печать 28.03.2015 г.
Формат 60×84 1/8.
Бумага офсетная.
Объем 10,0 п.л. Тираж 300 экз.
Цена договорная. Заказ № 196.

Отпечатано в типографии
издательства КарГУ
им. Е.А.Букетова

Зарегистрирован Министерством культуры и информации Республики Казахстан.
Регистрационное свидетельство № 13104–Ж от 23.10.2012 г.

М А З М Ұ Н Ы

МАТЕМАТИКА

С О Д Е Р Ж А Н И Е

МАТЕМАТИКА

ӘОЖ 519.682.2

Д.Б.Әлібиев, М.А.Сексембаева

Е.А.Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті
(E-mail: dalibiev@mail.ru)

Жай сандарды табу жолын С++ тілінде оңтайландыру

Мақалада уақыт немесе компьютер жадын аз қолданылуы жағынан тиімді болатын жай сандарды іздеу алгоритмін, мысалы, $N = 2$*1010 дейінгі жай сандарды табу, қарастыру жолдары келтірілген. Сонымен қатар Эратосфен алгоритмі, Миллер-Рабин тесті мен *BPSW* алгоритмі қарастырылып, әр алгоритмнің орындалу уақыты мен диапазонына қатысты кестелер мен графиктер салыстырмалы түрде бейнеленген.

Кілт сөздер: жай сандар, есептеуді оңтайландыру, алгоритм, Эратосфен алгоритмі, Миллер-Рабин тесті, BPSW алгоритмі, С++ тілі.

Жаңа жай сандарды зерттеу және табу көптеген математиктер буынының басты мәселесі болып келеді. Есептеу техникасының дамуымен бұл мәселе жаңа екпін алмай, сонымен қатар криптографияда практикалық қолданысқа ие болды. Жай сандар криптографияның, статистика мен басқа да есептеу салаларының бөлігі бола отырып, физика, химия, биология мен инженерлік істерде, фольклорда да қолданыс тапты [1–4].

Мақалада уақыт немесе компьютер жадын аз қолданылуы жағынан тиімді болатын жай сандарды табу алгоритмі қарастырылады, мысалы, $N = 2 \cdot 10^{10}$ дейінгі жай сандарды табу. Сонымен қатар қарастырылған әр алгоритмнің орындалу уақыты мен диапазонына қатысты кестелер мен графикалар бейнеленген. N үлкен мәнге ие болғанда жай санды табу қиындығын түсіну үшін біз қарапайым Решето Эратосфен алгоритмін шолудан бастайық [5]. Оны С++ бағдарламалау тілінде орындаймыз:

```
#include <iostream>
#include <iomanip>
#include <algorithm>
#include <ctime>
typedef unsigned long long ULL;
 ULL get_next(const bool *s, const ULL N, const ULL current)
{   // бірінші элементті іздейміз == false, s + current_idx + 1 адресінен бастап массив соңына дейін.
   const bool* pointer = std::find(s + current + 1, s + N, false);
   // егер мұндай элементтер таппасақ, 0 қайтарамыз, немесе көрсеткіш пен массив арасындағы
//айырымды көрсетеміз
   return (pointer == s + N) ? 0 : pointer - s;
}
 int main()
{  const ULL max = 2000000;
   bool *checked = new bool [max];
   checked[0] = checked[1] = true;
```

```
  for (size_t i = 2; i<max; i++)
           checked[i] = false;
  ULL i;
  ULL current = 2;
  time_t now = clock();
   for (i = current; i < max && i; i = get_next(checked, max, current), current = i)
  {  for (ULL j = i * i; j < max; j += i)
 checked[j] = true;
 }
 std::cout << "Time: " << std::fixed << std::setprecision(3) << static_cast<double>(clock() - now) / CLOCKS_PER_SEC << std::endl;
  delete [] checked;
  std::cin.get();
  return 0;
}
```

Бұл алгоритмнің орындалу жылдамдығын тестілейік. Жедел жадыда массивтер жиынын құрайтын болсақ, жоғары шек $N = 2*10^8$ тең. Сонымен қатар нәтижені консолға шығаратын жағдай мен консолда көрсетпеген жағдайда жылдамдық әр түрлі болады. Сәйкесінше көрсеткіштер 1-кестеде және график түрінде 1, 2-суреттерде бейнеленген.

1 - к е с т е

Решето Эратосфен алгоритмін қолданғандағы нәтиже

Жоғары шек, N	Орындалу уақыты, с	
	Нәтижені көрсетпеген кезде	Нәтижені көрсеткен кезде
$2\cdot10^4$	0,002	2,543
$2\cdot10^5$	0,028	20,246
$2\cdot10^6$	0,164	192,682
$2\cdot10^7$	2,117	2018,341
$2\cdot10^8$	21,079	Өлшенбеді

1-сурет. Решето Эратосфен алгоритмін қолданғандағы бағдарламаның орындалу уақыты

2-сурет. Решето Эратосфен алгоритмі көмегімен жай сандарды консолға шығарғанда өтетін уақыт

Көріп отырғанымыздай, қолданылған алгоритм $N <= 2*10^7$ болғанда тиімді және де осы диапазондағы көп деген есептер шешімінде қолдану үшін ұсынуға болады.

$N = 2\cdot 10^{10}$ болғандағы нәтижелерді алу үшін бізге файл қажет, себебі жедел жады жеткіліксіз болып отыр. Сонымен қатар біз std::find қолдана алмаймыз.

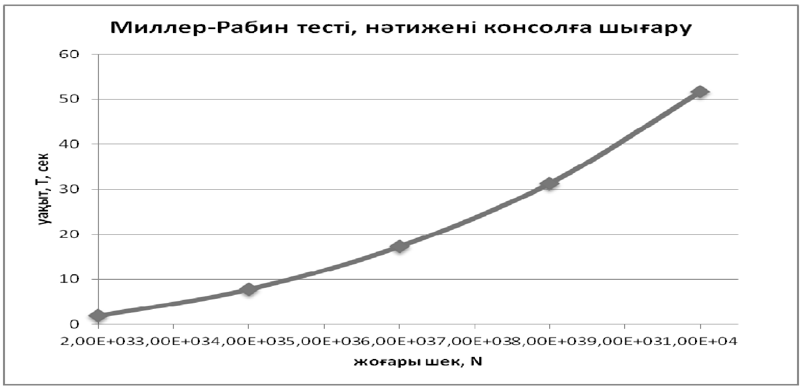
N үлкен мәнде болғанда бұл әдістің кемшілігі — жай сандар қалатындай басқа сандарды алып тастау үшін файлға бірнеше рет жүгінуінде. $N = 2\cdot 10^{10}$ болғанда бағдарламаның орындалу уақыты 10^4 секундтан асып кетеді. Егерде мақсатымыз — деректерді қамтитын файлды алу болса, онда бағдарламаның орындалу уақыты жүз есе баяулай түседі.

N үлкен мәнде болғанда жай сандар файлын бірден құратын алгоритмді қолдану қажет. Миллер-Рабин тестіне жүгінейік.

```
#include <iostream>
#include <iomanip>
#include <cmath>
#include <ctime>
 typedef unsigned long long ULL;
 ULL s,t,k;
ULL p[3]={2,7,61};
 ULL mulmod(ULL x,ULL y,ULL n)
{   ULL res=0;
   while(y)
   {   if(y&1) res=(res+x)%n;
      x=(x+x)%n;
      y>>=1;
   }
   return res;
}
 ULL powmod(ULL x,ULL y,ULL n)
{  ULL res=1;
   while(y)
   {
      if(y&1) res=mulmod(res,x,n);
      x=mulmod(x,x,n);
      y>>=1;
}
   return res;
}
bool miller(ULL s,ULL t,ULL a, ULL n)
{   ULL x=powmod(a,t,n);
if(x==1 || x==n-1)  return true;
for(ULL j=1;j<s;++j)
{   x=mulmod(x,x,n);
if(x==1)    return false;
```

```
if(x==n-1)  return true;
}
return false;
}
 bool del(ULL n)
{   ULL temp=(ULL) sqrt(1.*n);
for(ULL i=2;i<=temp;++i)
if(n%i==0)
return false;
return true;
}
 bool check(ULL n)
{   if(n<=1)    return false;
if(n==2)    return true;
if(n<=100)  return del(n);
t=n-1;
while(!(t&1))
{   ++s;
t>>=1;
}
bool ok=true;
for(ULL j=0;j<3 && ok;++j)
ok=miller(s,t,p[j], n);
return ok;
}
 int main()
{   time_t now = clock();
for (ULL n = 2; n<10000; n++)
if (check(n))
std::cout<<n<<"\n";
std::cout << "Time: " << std::fixed << std::setprecision(3) << static_cast<double>(clock() - now) /
CLOCKS_PER_SEC << std::endl;
std::cin.get();
 return 0;}
```

Бұл тест нәтижені бірден құруға мүмкіндік береді. Алдыңғы шешіммен салыстырғандағы артықшылығы — біз жедел жады көлемімен шектелмеуімізде. Бірақ Миллер-Рабин тесті (3-сур.) бұл жерде Решето алгоритмінен баяу орындалады.



3-сурет. Миллер-Рабин тесті

Осы алгоритмді қиындатайық. BPSW алгоритміне көшейік, мұнда Миллер-Рабин тесті негізгі бөлім болып табылады.

BPSW — бұл үш тестінің комбинациясы: аз көлемді тривиалды бөлгіштікке тексеру, Миллер-Рабин тесті, Лукас-Селфриджднің қуатты тесті.

```
#include <iostream>
#include <iomanip>
#include <cmath>
#include <ctime>
typedef long long LL;
const int trivial_limit = 50;
LL p[1000];
LL gcd (LL a, LL b)
{return a ? gcd (b%a, a) : b;
}
LL powmod (LL a, LL b, LL m)
{LL res = 1;
while (b)
if (b & 1)
res = (res * 1ll * a) % m,  --b;
else
a = (a * 1ll * a) % m,  b >>= 1;
return res;
}
bool miller_rabin (LL n)
{LL b = 2;
for (LL g; (g = gcd (n, b)) != 1; ++b)
if (n > g)
return false;
LL p=0, q=n-1;
while ((q & 1) == 0)
++p,  q >>= 1;
LL rem = powmod (b, q, n);
if (rem == 1 || rem == n-1)
return true;
for (LL i=1; i<p; ++i) {
rem = (rem * 1ll * rem) % n;
if (rem == n-1)  return true;
}
return false;
}
LL jacobi (LL a, LL b)
{if (a == 0)  return 0;
if (a == 1)  return 1;
if (a < 0)
if ((b & 2) == 0)
return jacobi (-a, b);
else
return - jacobi (-a, b);
LL a1=a,  e=0;
while ((a1 & 1) == 0)
a1 >>= 1,  ++e;
LL s;
if ((e & 1) == 0 || (b & 7) == 1 || (b & 7) == 7)
s = 1;
else
s = -1;
if ((b & 3) == 3 && (a1 & 3) == 3)
s = -s;
if (a1 == 1)
return s;
return s * jacobi (b % a1, a1);
}
bool bpsw (LL n)
{if ((LL)sqrt(n+0.0) * (LL)sqrt(n+0.0) == n)  return false;
```

```
LL dd=5;
for (;;)
{LL g = gcd (n, abs(dd));
if (1<g && g<n)  return false;
if (jacobi (dd, n) == -1)  break;
dd = dd<0 ? -dd+2 : -dd-2;
}
LL p=1,  q=(p*p-dd)/4;
LL d=n+1,  s=0;
while ((d & 1) == 0)
++s,  d>>=1;
LL u=1, v=p, u2m=1, v2m=p, qm=q, qm2=q*2, qkd=q;
for (LL mask=2; mask<=d; mask<<=1)
{u2m = (u2m * v2m) % n;
v2m = (v2m * v2m) % n;
while (v2m < qm2)   v2m += n;
v2m -= qm2;
qm = (qm * qm) % n;
qm2 = qm * 2;
if (d & mask) {
LL t1 = (u2m * v) % n,  t2 = (v2m * u) % n,
t3 = (v2m * v) % n,  t4 = (((u2m * u) % n) * dd) % n;
u = t1 + t2;
if (u & 1)  u += n;
u = (u >> 1) % n;
v = t3 + t4;
if (v & 1)  v += n;
v = (v >> 1) % n;
qkd = (qkd * qm) % n;
}
}
if (u==0 || v==0)  return true;
LL qkd2 = qkd*2;
for (int r=1; r<s; ++r)
{v = (v * v) % n - qkd2;
if (v < 0)  v += n;
if (v < 0)  v += n;
if (v >= n)  v -= n;
if (v >= n)  v -= n;
if (v == 0)  return true;
if (r < s-1) {
qkd = (qkd * 1ll * qkd) % n;
qkd2 = qkd * 2;
}
}
return false;
}
bool prime (LL n)
{for (LL i=0; i<trivial_limit && p[i]<n; ++i)
if (n % p[i] == 0)
return false;
if (p[trivial_limit-1]*p[trivial_limit-1] >= n)
return true;
if (!miller_rabin (n))
return false;
return bpsw (n);
}
```

```
void prime_init()
{for (LL i=2, j=0; j<trivial_limit; ++i)
{bool pr = true;
for (LL k=2; k*k<=i; ++k)
if (i % k == 0)
pr = false;
if (pr)
p[j++] = i;
}
}
int main()
{   prime_init();
LL top;
std::cin >> top; //жоғары шекті көрсету
std::cin.sync();
time_t now = clock();
for (LL n = 2; n<top; n++)
 if (prime(n))
 std::cout<<n<<"\n";
std::cout << "Time: " << std::fixed << std::setprecision(3) << static_cast<double>(clock() - now) / CLOCKS_PER_SEC << std::endl;
std::cin.get();
   return 0;}
```

Сәйкесінше, деректер 2-кестеде жиналған және 4, 5-суреттерде график түрінде бейнеленген.

2 - к е с т е

BPSW алгоритмін қолданғандағы нәтиже

Жоғары шек, N	Орындалу уақыты, с	
	Нәтижені көрсетпеген кезде	Нәтижені көрсеткен кезде
$2{\cdot}10^4$	0,006	2,286
$2{\cdot}10^5$	0,235	18,126
$2{\cdot}10^6$	2,571	197,5
$2{\cdot}10^7$	26,319	2013,221
$2{\cdot}10^8$	265,436	Өлшенбеді

4-сурет. BPSW алгоритмі көмегімен жай сандарды іздеу

5-сурет. BPSW алгоритмін қолданып жай сандарды консолға шығару

Егер алынған нәтижелерді 1-кестенің берілгенімен салыстырсақ, онда нәтижені алу уақыты бірдей деуге болады. Сонымен қатар *BPSW* алгоритмінде кемшіліктер жоқ, себебі көп жадыны қажет етпейді. Осылайша, BPSW алгоритмін қолдана отырып, біз $N = 2 \cdot 10^{10}$ дейінгі жай сандар файлын аламыз.

Сонымен, $N = 2 \cdot 1010$ дейінгі жай сандарды анықтап, оның файлын алу үшін BPSW алгоритмі қолданылды. Барлық түсініктемелер мен зерттеу нәтижелері кесте және графика түрінде айқындалып көрсетілген.

Орындалған есептеулер мен бағдарламалаулар келесідей сипаттамадағы компьютерде жүргізілді: Операциялық жүйе: Windows 7 кәсіби; Процессор: Intel(R) Core(TM) i7 3,3 GHz; жедел жады: 8 Гб.

Әдебиеттер тізімі

1 *Крэндалл Р., Померанс К.* Простые числа. Криптографические и вычислительные аспекты. — М., 2011. — 666 с.
2 *Жельников В.* Криптография от папируса до компьютера. — М., 1997. — 336 с.
3 *Василенко О.Н.* Теоретико-числовые алгоритмы в криптографии. — М.: МЦНМО, 2003. — 326 с.
4 [ЭР]. Режим доступа: http://e-maxx.ru/algo/bpsw — тест BPSW на простоту чисел.
5 [ЭР]. Режим доступа: http://e-maxx.ru/algo/prime_sieve_linear — Решето Эратосфена с линейным временем работы.

Д.Б.Алибиев, М.А.Сексембаева

Оптимизация поиска простых чисел на С++

В статье рассмотрены пути оптимизации поиска простых чисел с помощью алгоритма Решето Эратосфена, теста Миллера-Рабина и с помощью алгоритма *BPSW*. Приведены результаты программ при поиске простых чисел, например, максимум при $N = 2*1010$. Также данные программы на С++ оптимизированы по времени или по использованию памяти компьютера. Результаты нашли отображение в таблицах и в виде графика для каждого рассмотренного алгоритма.

D.B.Alibiyev, M.A.Seksembayeva

Optimization finding prime numbers in C++

In this article discusses ways to optimize for finding prime numbers using the Sieve of Eratosthenes algorithm, Miller-Rabin test and using an algorithm *BPSW*. In the work shows the results of the programs, where searching for prime numbers, such as a maximum for $N = 2*1010$. Also in the work shows programs in C ++ optimized by time or by use memory. The results were reflected in the tables and as a graph for each of the considered algorithm.

References

1 Crandall R., Pomerance K. *Primes. Cryptographic and computational aspects*, Moscow, 2011, 666 p.
2 Zhelnikov V. *Cryptography from papyrus to the compute*, Moscow, 1997, 336 p.
3 Vasilenko O.N. *Number-theoretic algorithms in cryptography*, Moscow: MCCME, 2003, 326 p.
4 http://e-maxx.ru/algo/bpsw - test BPSW the simplicity of numbers
5 http://e-maxx.ru/algo/prime_sieve_linear -Sieve of Eratosthenes with linear time work

ӘОЖ 517.518

Д.Б.Әлібиев, А.Б.Сейтімбетова

Е.А.Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті
(E-mail dalibiev@mail.ru)

Интеллектуалды білім беру ресурстарын өңдеу үшін Web 2.0 технологиясын қолдану мүмкіндіктерін зерттеу

Мақалада постиндустриялық экономикаға мамандарды даярлау кезінде туындайтын дәстүрлі білім беру бағдарламаларының мәселелері сарапталды. Аталған мәселенің көбі Web 2.0. қолдану арқылы шешімін табатыны көрсетілді. Инновациялық білім беру бағдарламаларын дайындау үшін Web 2.0 құралдарын қолданудың отандық және шетелдік тәжірибесі зерттелді, білім беруде Web 2.0 құралдары, сервистері мен технологиясы қарастырылды. Интеллектуалды білім беру ресурстарын өңдеуге арналған Web 2.0 технологиясының мүмкіндіктері бағаланды.

Кілт сөздер: Web 2.0, білім жүйесі, жаңа технологиялар, білім беру бағдарламалары.

Нақты қоғамдағы білім беру мазмұнының қалыптасуы, білім беру технологиялары мен білім беруді ұйымдастырудың негізгі принциптері оның әлеуметтік-экономикалық құрылысына тән ерекшеліктерімен анықталады.

Мамандарды даярлау қоғамдық игілік іс ретінде қарастырылып, өндірістік жүйеден тыс, VII ғасырда негізі қаланған Ян Амос Коменскийдің авторитарлық сыныптық-сағаттық жүйесіндегі технократиялық тәсілдеме негізінде іске асады. Ол жаппай білім беруге және номенклатурасы баяу өзгеретін бұйымдардың жаппай өндірісінің қажеттіліктеріне бағытталған. Өз заманында бұл білім берудегі революциялық үлкен қадам болды [1].

Постиндустриялық қоғамда тауарларды жаппай өндіру мен баяу өзгеретін номенклатурадан ерекшелігі – өндірістің басқа түрі басымдылық танытады, атап айтқанда, тұтынушылардың жеке тапсырыстары бойынша қызмет көрсету және тауарларды шығару. Бұл жаңа антропоцентрлік тәсілдеме негізіндегі «нарықпен басқарылатын» индустрияның пайда болуына әкелді.

Жаңа индустрияның негізгі ұйымдастырушы формасы зауыт немесе фабрика емес (шоғырландырылған өндіріс), керісінше, шашыраңқы орналасқан өндіріс: корпорациялар, өнеркәсіп кластерлері, трансұлттық холдингтер; экономиканың жаһандануы жүреді. Жаңа әлеуметтік-экономикалық құрылыста жоғары «өмір сапасы» қамтамасыздандырылады, өндірістің біріншілік факторы — интеллектуалды капитал болады.

Өткен ғасырдың 60-жылдарының ортасында білім беруге деген жаңа талаптарды дәстүрлі сыныптық-сағатттық жүйе негізінде жүзеге асыру мүмкін болмады. Білім берудің сыныптық-сағаттық жүйесі қатты сынға ұшырады. Оған дәлел ретінде Мичиган университетінің (АҚШ) профессоры Д. Сангердің сөзінен үзіндіні келтіруге болады: «Біз жаппай білім берудегі ұлы эксперименттің аяқталуына жақындап қалдық. Ян Амос Коменскийдің сыныптық-сағаттық жүйесі сәтсіз болып шықты, ол сауатсыздықтың жоғары деңгейін көрсететін, оқымаған жұмыскерлер буынын жасап шығарды, жүйе әрі қарай оқуға деген талпынысты жойып жібереді. Аталған жүйе саны аз, таңдаулы топты (элитаны) даярлауға бағытталып, мүмкіндігі шектеулі енжар бейбақтарды қалыптастырады».

Постиндустриялық қоғамда оның әлеуметтік-экономикалық сипаттамасына сай білім беру жаппай тапсырыскерлерге бағытталған, тұлғалық бағдарланған және өзін-өзі басқара алатын болды. Сөйтіп, ол қоғамдық игіліктен білім беру қызметіне қарай өзгерді. Постиндустриялық қоғамда білім берудің тиімділігі мен кепілді сапасына деген талаптар өсуде.

Дүние жүзінде жоғары кәсіптік білім берудің жаңа жүйесіне ауысу XX ғасырдың 60 жылдарында басталды. Алайда ол дамыған және дамып келе жатқан елдерде толығымен аяқталған жоқ.

Жоғарыда айтылғандардың негізінде жоғары кәсіптік білім беру жүйесінің негізгі талаптарын қарастырып көрейік. Оларды заманауи ақпараттық-білім беру ортаны қалыптастырғанда және жоо-ның білім беру ресурстарын дайындағанда ескерген жөн: жаппай білім беру, тапсырыскерге бағытталушылық, білім беру мазмұнының ауысымы, тұлғалық бағытталған білім беру ресурстары, педагогтар мен студенттер еңбегінің жоғары өнімділігін қамтамасыз ету, біліктілікке бағытталған білім беру бағдарламасына ауысу, білім беру технологияларының ауысымы, білім берудің интернализациялануы.

Қазіргі таңда постиндустриялық экономика мен әлеуметтік ортаның талаптарын жүзеге асыруды қамтамасыз ететін кәсіби білім беру жүйесін қалыптастыратын үрдістер қарқынды жүруде.

Білім беруге деген жаңа талаптарды *smart*-білім беру жүйесінде интеллектуалды электронды білім беру ресурстарын қолдану арқылы іске асыруға болады.

Аталған талаптарға сай жауаптар Web 2.0 интеллектуалды (адаптивті) білім беру ресурстарын жасау барысында алынуы мүмкін

Web 2.0 саласында блогтар, Wiki, бетбелгілер, Torrent және пирингтік желілер, RSS, Ajax, Форумдар және тағы сол сияқты (аталғандар Web 2.0 қолданатын құралдардың ең кіші бөлігі ғана) кең танымал құралдар біріккен. Web 2.0-де аталған құралдар кешенді түрде пайдаланылады, сөйтіп олардың мүмкіндіктері күрт кеңейе түседі (эмерджентті эффект) және ол үшін оқытушыларға білім беру бағдарламаларын жобалау үшін, ал студенттерге үйдегідей білім беру ортасын жасау үшін компьютерде арнайы бағдарламаларды орналастырудың қажеті жоқ. Барлығы кәдімгі Интернет-браузер шеңберінде жүзеге асады, ал білім беру бағдарламасының контентін оқытушылар мен студенттер жасап, желі ресурсында сақтайды [2].

Web 2.0 негізінде білім бері бағдарламаларын жасаудың шетелдік, отандық және өзіміздің тәжірибенің нәтижелерін зерттей келе, олардың жоғары тиімділігін көрсетеді және төмендегідей мүмкіндіктерге қол жеткізеді:

– студенттің оқу материалын меңгеру міндетін шешіп қана қоймай, оларға білімді өз бетімен алуға, таным мен әрекет ету тәсілдерін қалыптастыруға мүмкіндік беретін икемді тұлғалық бағытталған білім беру бағдарламаларын жасау;
– студенттер үрдістің пассивті қатысушысы емес, керісінше, оның толыққанды қатысушысы және авторы, студенттер білім алуды өздері жоспарлай алу;
– оқу және педагогикалық еңбектің жоғары өнімділігін қамтамасыз ету, студент пен педагогтың ортақ еңбегінің тиімділігі мен сапасын ынталандыру;
– жаңа білім беру контентін жедел түрде өзгерту, дамыту және дайындау.

Web 2.0 негізіндегі білім беру базалары Австралияда, АҚШ-та кең ауқымда қолданылады, ол жақта аталған бағдарламалар революцияшыл деп бағаланады. Сонымен бірге кейбір елдердің бірқатар жоо-да, корпоративті университеттерде және мамандардың біліктілігін жоғарылату институттарында қолданысқа ие. Аталған ұйымдардың барлығы Web 2.0-ні қолданатын білім беру жүйесіне көшу әлдеқайда өнімді және нәтижелі, сонымен қоса қызықты болатынын атап өтті. Бірқатар елдердің ғылыми-қоғамдық жұртшылығында Web 2.0-ні қолдану шынайы инновациялық білім беруді жүзеге асыруға мүмкіндік береді, ал дәстүрлі білім беру енді беделді емес деген пікір қалыптаса бастады.

Web 2.0-дің ықпалымен білім берудегі компьютерлік технологияларды қолдануды білдіретін *E-Learning* термині қосымша 2.0. идентификаторын алып, бұдан былай E-Learning 2.0 — Web 2.0 технологиясы негізіндегі электронды оқу болып табылады.

Web 2.0 технологиясын қолдану білім беру саласында бұрын-соңды болмаған үлкен өзгерістерге әкеледі. E-Learning 2.0 оқыту объектінің әрекет ету еркіндігі үшін, студентті қызықтыратын саланың мамандары бірлестігінде және өз курстастары арасында тығыз қарым-қатынаста болып, білімді өз бетімен меңгеру және жинақтау үшін кең мүмкіндіктер береді. Мұндай ынтымақтастық үшін ешқандай географиялық шектеулер болмайды, ал оқу бірлестіктерін құру оңай және ол көп уақыт алмайды.

Оқу үрдісінің орталығында студенттердің өзара және оқытушылар арасындағы Web 2.0 құралдарының негізінде: блогтар, Wiki, ортақ бетбелгілер, әлеуметтік желілер мен виртуалды әлем арқылы әрекет етуі жатады. E-Learning 2.0 саласында білім белгілі бір тақырып бойынша әңгімелесу және оқу контентін өз бетімен жасап, оны талқылау үрдісі барысында бірлесе отырып қалыптасады.

Сонымен, білім беру үрдісінде Web 2.0 мүмкіндіктерін қолдану оқытудың жаңа парадигмасына сай келеді және инновациялық білім беру бағдарламаларын жасауда кең перспективаларға ие.

Web 0.0 1995 жылы бүкіл әлемге танымал болды, классикалық Web 1.0 1990 жылдардың соңында шарықтау шегіне жетті, ал Web 2.0-ге деген қызығушылық қазіргі таңда байқалуда, болашақта Web 3.0 пайда болады деген болжам бар. Ол дегеніміз сауал бойынша қызмет көрсететін онлайн-қосымшалардың жаңа буыны деп түсінген жөн. Сонымен, өзіміз байқағанымыздай, бес жылдық оралым нақты ұсталып отыр, яғни келесі онжылдықтың ортасында Web 4.0 пайда болады деп болжауға әбден болады. Ең дұрысы ол бағдарламалық агенттердің арқасында қол жеткізуге болатын біріккен орта түріндегі семантикалық желі болуы мүмкін. Олар қажетті мағлұматтарды таңдау, спамнан тазарту және түрлі кертартпалы амал-тәсілдерді орындау бойынша көптеген интеллектуалды қызметтерді атқарады.

Мақалада постиндустриялық экономикаға қажетті мамандарды даярлау кезінде туындайтын дәстүрлі білім беру бағдарламаларының мәселелері сарапталды. Аталған мәселелердің көбісі Web 2.0-ді қолдану арқылы шешімін таба алатындығы көрсетілді. Инновациялық білім беру бағдарламаларын жасау үшін Web 2.0 құралдарын қолданудың отандық және шетелдік тәжірибесі, білім берудегі Web 2.0-дің құралдары, сервистері мен технологиялары зерттелді. Ғылыми-білім беру саласында менеджмент магистрлері үшін «Заманауи жоғары кәсіби білім берудің дамуындағы негізгі дүниежүзілік тенденциялар» курсы бойынша интеллектуалды білім беру ресурсын тәжірибе жүзінде іске асыру үлгісі қарастырылды.

Web 2.0 терминінің негізін салушы 2005 жылы 30 қыркүйекте «TimO'Reilly — WhatIsWeb 2.0» мақаласын жазған TimO'Reilly болып табылады [3]. O'Рейлидің берген анықтамасы бойынша, Web 2.0 — неғұрлым көп адам қолданған сайын соғұрлым толығырақ болатын желілік өзара әрекет ету жолымен жүзеге асатын жүйелерді жобалау әдістемесі.

Web 2.0-дің ерекшелігі — пайдаланушыларды ақпараттық материалды толықтыру және көп рет тексеруге қатыстыратын принцип.

Web 2.0 термині өз негізінде ұжымшылдық, кооперация, ашықтық, қолжетімділік, интерактивтілік принциптерін қолданатын түрлі Интернет-сервистерді біріктіреді. Пайдаланушылардың өздері Web 2.0 құралдарын қолдана отырып, контент жасайды да, контент бірлесіп жасау мен ұжымдық шығармашылықтың ортақ нәтижесі болып табылады.

Web 2.0 Интернеттегі эволюцияның жаңа кезеңі деуге болады, мұнда Интернеттің негізінде сайттар емес, адамдар, олардың білімдері мен өзара әрекеттері, әлеуметтік құбылыстар жиыны (әлеуметтік желілер сияқты) мен желі ресурстарын жасау мен қолданудың жаңа әдістері жатады.

Web 2.0 үшін негізгі құрамдас бөлік — қолданыстағы қарапайым құралдар мен бірлескен-әлеуметтік өзара әрекет. Web 2.0-нің қызығушылық танытатын нәтижелерінің бірі – ұжымдық сана. Мысал ретінде сатып алушылардың әрекетіне Amazon пайдаланушыларының түсіндірмелері мен рейтингтерінің әсерін келтіруге болады. Егер аталған идеяны контенттің басқа түрлеріне тарататын болса, онда пайдаланушылар мен эксперттер арасындағы ақпараттық әсердің әлеуеті экспоненциалды түрде өсетіні сөзсіз. Web арқылы бір-бірімен белсенді түрде байланысатын адамдар саны көбейген сайын бұл көрсеткіш те жоғарылай түсетінін атап өту аса маңызды.

Web 2.0 қосымшаларды құру жағына қарай өзгерісті білдіреді. Веб-бағдарламаны сервис ретінде көрсететін жаппай компьютерлік платформа болып келеді. Алдағы жылдарда жергілікті компьютерлерге құруға арналған бағдарламаларды сатып алу жағдайы сирей түседі. Оның орнына барлық дерлік софт-вебтің көмегімен сервис түрінде қамтамасыз етеді және аталған қосымшалар басқа қосымшалардың құрамдас бөлігі ретінде қолданылуы мүмкін. Ең сәтті мысал ретінде Google Maps-тың машаптарын (*mash-ups*) келтіруге болады.

Заманауи дүниежүзілік өрмектің түпнегізін өзгерту оның пайдаланушыларының әрекетінің де өзгерісіне әкеледі. Бүгін Интернетте ауқымды құжаттарды оқудың орнына түрлі форматтағы және түрлі қайнар көзден алынған ақпараттың кішігірім нысанымен жұмыс істегенді қалайды: блогтарда посттарды оқиды, YouTube-те бейнебаяндарды көреді, әлеуметтік желілерде пікірталастырады.

Аталған нысандардың барлығын өз посттарын, Wiki-ресурстардағы мақалаларды, аудио- және бейнетаспаларды қосып, өз мақсаттары үшін біріктіруге болады. Сөйтіп, Web-желіде ақпаратты тасымалдау және тұтынуға арналған платформадан контент үнемі жасалып, өзгеріске ұшырайтын ортаға айналады.

Егер Web 2.0-дің концептуалды негізгі идеясы адамдардың өзара әрекетін, өз ойын білдіру мен ұжымдық шығармашылықты оңайлату болса, техникалық негізі Web 2.0 құралдары — Web-қосымшалар жұмысының жаңа технологиялары мен сервистері.

Қазіргі таңда оқытушыға, оқу бағдарламасына, қолданылатын технологияларға қойылатын талаптар өзгеріп жатыр. Білім беру динамикалық, желілік және электронды болуда. Заманауи студент Интернет, әлеуметтік желілер, блогтар, сандық аудио- және бейнеконтент әлемінде өмір сүреді. Бұл оған, бір жағынан, ең үздік әлемдік оқыту ресурстарына қол жеткізуге, ал екіншіден – кез келген уақытта және кез келген жерде оқытушымен байланыс жасауға мүмкіндік береді. Заманауи оқытушының міндеті — студентке бекітілген оқыту жоспарына сай білім берумен қатар оны ақпаратпен жұмыс жасау дағдысымен, әріптестермен өзара тиімді әрекет ету, соның ішінде Интернет арқылы және үнемі өз бетімен даму және оқу шеберлігімен қамтамасыз ету. Заманауи технологиялар оқытушыға ақпаратпен шапшаң әрі тиімді жұмыс жасауға, өз жұмысын жоспарлау, студенттер мен әріптестермен байланыста болуға, оқу және ғылыми іс-әрекеттің мүмкіндіктерін кеңейтеді.

Студенттер Web 2.0 мүмкіндіктерін біріктіріп, оқытушының дербес орталықтарын жасайды. Ондай орталықтардың түптік түйіні — блог немесе Wiki болып табылады, ал қосымша сілтемелерге, ерекше топшаларға (подкаста) және маңызды ресурстарға сілтемелері бар жалпы пайдалануға арналған бетбелгілер сервисіне жазылу барлық қажетті толықтыруларды қалыптастырады. Сонымен қоса аталған құралдардың көмегімен студенттерде оқуда және зерттеу жұмыстарында қол жеткізген табыстардың дербес портфолиосын жасауға болады, ол портфолионы электронды түрде өз курстастары мен оқытушылары бірлестігіне талқылау мен пікірталастыру үшін бере алады.

Web 2.0 құралдары студенттердің өздеріне оқу контентін алу және жасау үшін жаңа мүмкіндіктерді ашады, білім беру траекториясын бақылау орталығын оқытушы мен әкімшіліктен студентке ауыстырады. Қазіргі таңда көптеген студенттер үшін сервистерімен жұмыс атқару — қарым-қатынас жасау мен көңіл көтеру үшін Web 2.0 амал-тәсілдерін қолданудың жалғасы болғандықтан, мұндай оқыту ортасына саналы түрде қосылу олардан өзін-өзі ұйымдастыру бойынша белгілі бір күш салуды қажет етеді. Бұл жайт оқытушыларға да қатысты, олар оқыту үрдісін ұйымдастыруда басты инициативаның бір бөлігі студенттердің қолына көшетін жағдайда бейімделуі тиіс.

Корпоративті және академиялық оқыту үрдістерінде Web 2.0 мүмкіндіктерін жүзеге асыру басқа кез келген оқыту құралдарын енгізуден гөрі әлдеқайда арзанға түседі. Өйткені көптеген тегін веб-сервистер бар, мекеме өзінде орналастыратын немесе хостинг жағдайында қолданатын ашық коды бар сәйкес шешімдер бар. Мысалы: білім беру ортасында блог құру үшін қарапайым және танымал ерікті сервис — GoogleBlogger. Wordpress ашық коды бар бағдарламалық құрал да кең танымал. Ол блогтан өзге міндеттерді қолдануда мүмкіндіктерін кеңейтетін икемдеулерді болдырып, PHP және MySQL бар кез келген серверде жұмыс атқарады. Windows және Linux платформаларында блогтарды құру үшін UserLandSoftware компаниясының Manila және Six Apart компаниясының Movable Type жүйелері дайын коммерциялық шешім болып табылады.

Wiki-дің тегін хостинг мүмкіндігін Wikispaces пен pbwiki.com ұсынады, соңғысы ресурс білім беру қажеттіліктері үшін жасаудың арнайы опцияларға ие. Socialtext компаниясы вики-ресурстарды ұйымдастыру үшін коммерциялық бағдарламалық қамсыздандыру мен хостингтің қызмет көрсетуін таратады. Сонымен қатар ашық коды бар вики үшін шешімнің бірнеше нұсқалары бар, солардың ішінде ең танымалы — MediaWiki, өйткені ол платформада Википедия құрылған. TWiki-де ашық кодты жүйе болып табылады.

Оқыту мақсаты үшін ерекше топшаның (подкаста) тегін хостингін Apple iTunesU сервисі ұсынады.

Web 2.0 құралдарын қолдану көмегімен студенттер тобының ортақ жоба үстінде жұмыс жасау мысалын қарастырайық:

Пайдалы веб-парақшаларды іздеу, del.icio.us немесе Memori.ru сияқты ортақ бетбелгілер құралдарын пайдаланып, тэгтер мен комментарийлерді қалдыру. Осы амал-тәсілдерді пайдаланып, топ кез келген компьютерден ашуға болатын толық мәтіндік іздестіру үшін қолжетімді парақшаларды алады және топтың кез келген мүшесі үшін сілтемелер ашық.

Топ қатысушыларының ойын білдіретін көпшіліктік блог жасау (Blogger сияқты амалды қолдану арқылы). Блог топ қатысушыларының әрқайсысын кері байланыс пен сұрақтар қоюға түрткі болады.

Ортақ ресурс болатын ескертпелерді wiki-де жазу немесе көшіру. Оны топтың әр мүшесі редакциялай алады.

Wiki-дегі ортақ бет белгілер мен блогтағы өзгерістерді қадағалау үшін RSS-ридерді (мысалы, Bloglines) пайдалану.

Келтірілген мысалда топ бірлесіп оқу, зерттеу және т.б. міндеттер бойынша әрекет ету мақсатында Web 2.0 құралдарын пайдаланады. Аталған құралдар көптеген мәселені шешіп, тиімділікті жоғарылатады. Мысалы, ол құралдардың көмегінсіз ақпаратты пошта арқылы жіберуге тура келер еді, ал ол топ ішінде ақпарат алмасу мен қадағалау үрдістері әлдеқайда қиынға соғар еді. Сонымен қоса ондай құралдар оқу үшін дербес мүмкіндіктерді ұсынады. Көпшіліктік блогта қалдырған жазба Сіздің мәселені шешуге ықпалын тигізеді. Себебі адамдармен мәселемен бөліскен соң оған басқа көзқараспен қарап, тиімді шешім табуға жәрдемдеседі.

Web 2.0 сервисінің дидактикалық қасиеттерін оқытушы оқу үрдісінде қолданыс табуға мүмкіндік береді.

1-қосымшада C4LPT-theCentreforLearning&PerformanceTechnologies(UK) мәліметтері бойынша білім беруде қолданылатын ТОП–50 құралдар тізімі келтірілген [3]. Көріп отырғанымыздай, құралдардың барлығы дерлік Web 2.0 сервисі болып табылады.

2-қосымшада (C4LPT берген мәліметтер бойынша) категорияларға қарай білім беру құралдарының тізімі (блогтар, вики, бетбелгілер және т.б.) ұсынылған [4].

Ресейде қолданыстағы Web 2.0 білім беру құралдарының рейтингі өзгеше [1]. Ресейде жиірек пайдаланылатын сервистердің құрама кестесін келтірейік.

Жоо-ның интеллектуалды білім беру ортасын құрудың жалпы принциптері. Smart-білім беруінің (ақылды білім беру) концепциясы — білім беру үрдісіне қатысушылардың біліктілігін үздіксіз дамытудың интеллектуалды ортасын жасау. Соның нәтижесінде инновациялық экономика жағдайында табысты іс-әрекет етуге қажетті жаңа біліктілікке ие болады. Интеллектуалды білім беру ортасы студенттің мақсаты, қалауы мен мүмкіндігіне қарай үздіксіз, уақыт пен оқу ақпаратына қол жету орнына тәуелсіз, тұлғалық бағытталған оқытуды назарда ұстайды.

Білім беру үрдісінде студенттер мен оқытушылардың сәйкес біліктілікке қол жету кітап түрінде баспаға жиі шыға бермейтін және тек қана электронды түрде болатын ең маңызды білім ағымымен тиімді жұмысты талап етеді. Инновациялық жоо келешегі оқыту контентінің үнемі жасалатын технологиялар мен білімнен артта қалуын еңсерусіз мүмкін емес. Білім беру үрдісінде қолданылатын білімді жасауды синхрондаудың технологиялық ортасы заманауи ақпараттық-коммуникациялық технологияларды қолданумен оқыту болып табылады. Бұл оқу материалдарының жаңа типі мен оқытуға жаңа тәсілдемені, *интеллектуалды білім беру ресурстарын жасауды* талап етеді. Ол ресурстар ең үздік дүниежүзілік ақпараттық ресурстар негізінде үнемі жаңарып, өз ісінің шеберлерінің сараптамалық бірлестігі растап, оқытушылардың жеке тұлғалық ерекшеліктеріне бейімделеді.

Интернет-технологиялар жоо-ның интеллектуалды білім беру ортасын құрудың адекватты құралына айналуда. Бүкіл дүниежүзілік желінің дамуының қазіргі кезеңінде Web 2.0 сервистері білім беру үшін аса үлкен мүмкіндіктерді ұсынады (Web 3.0, Semantic Web OntoWeb және KnowledgeWeb тәрізді жеке жобалар мен ғылыми зерттеме кезеңінде, ал Web 4.0 — концептуалды ұғыну кезеңінде).

Білім беруде қолданылатын ТОП–100 құралдар тізімін жариялайтын, C4LPT-theCentreforLearning&PerformanceTechnologies(UK) мәліметтері бойынша, аталған құралдардың көбі Web 2.0 сервистері болып табылады.

Оқу үрдісінің ортасында Web 2.0 құралдарының негізінде студенттердің өзара және оқытушылармен әрекет етуі жатады: пікір алмасу үшін блогтар, жобамен ұжымдық жұмыс жасау үшін вики, маңызды ресурстарға сілтемелері бар бетбелгілер сервисі, қажетті жаңалықтары бар RSS-таспасы, бейнедәрістерді көру және талқылау үшін YouTube, аудиоформатта дәрістерді тыңдау үшін подкасталар, әлеуметтік желілер мен виртуалды элементтер. Мұндай білім беру ортасында оқу контенті тез арада өзгереді, дамиды, жасалады; білім нақты тақырыптар бойынша курстастармен, оқытушымен және білімнің сәйкес саласындағы сарапшылар бірлестігімен талқыға салу және әңгімелеу барысында бірлесе қалыптасады.

Студенттер Web 2.0 мүмкіндіктерін біріктіріп, өздерінің дербес білім беру ортасын (personallearningenvironments, PLEs) жасайды. Студенттер үздік әлемдік оқу ресурстарына шектеусіз қол жеткізіп, оқытушымен кез келген жерде және қалаған уақытында байланысқа шыға алады. Мұндай ортада студент әр түрлі, бір-біріне қарама-қарсы мәліметтермен жұмыс жасауды меңгереді, онда ойлаудың репродуктивті емес, керісінше, креативті типі қалыптасады.

Оқытушы да Web 2.0 сервисінің көмегімен өзінің дербес білім беру ортасын жасайды: бейнеконференциялар өткізеді (вебинарлар), YouTube немесе Univertv.ru-да бейнедәрістерді орналастырады, GoogleDocs-та ашық құжаттармен жұмыс атқарады, MindMeister көмегімен білім карталарын жасайды, блог және wiki арқылы студенттердің бірлескен жұмысын ұйымдастырады, QuizMaker көмегімен білімді тестілейді, Scype немесе әлеуметтік желілер арқылы студенттермен қарым-қатынас жасайды немесе Ning веб-сервисі арқылы кәсіби бірлестікті жасайды.

Білім беруде қолданылатын IT-құралдарының көптігі мен жоо-ның білім беру ортасын құрудың көп нұсқаларына қарамастан, оның маңызды бөлігі — Web 2.0 сервистерімен біріктірілген, LMS(Learning ManagementSystem) базасындағы білім беру үрдісін басқару жүйесі болып табылады. LMS «вертикалды» технология болып табылса, педагогикалық өзара әрекет етуде Web 2.0 құралдарын пайдалану арқылы бірлестіктің «горизонталды» білім беру технологиясы ролін атқарады.

Web 2.0 сервистерінің көп бөлігі интеллектуалды білім беру ресурстары көмегімен өңдеуге мүмкіндік беретін қасиеттерге ие. Web 2.0 негізінде білім беру бағдарламаларын жасаудың шетелдік, отандық тәжірибесін зерттеу және біздің тәжірибе олардың жоғары тиімділігін көрсетті. Web 2.0 технологиясын қолдану икемді тұлғалық бағдарланған білім беру бағдарламаларын жасауға мүмкіндік береді. Олар студенттерді өз бетімен білім алуға ынталандырады, студентті білім беру үрдісінің субъектісінен оның өзінің оқуын жоспарлауға қатысатын құрастырушысына айналдыратын таным мен әрекеттің әдістерін қалыптастырады.

Біз жоо-ның интеллектуалды білім беру ортасының түпнегізі ретінде VLE Moodle-ді таңдадық. Ол өзара әрекет етіп оқытуды қолдайды, құрамына интерактивті оқу материалын жасау үшін кең мүмкіндіктері бар вики, блог, RSS, форум мен чат кіреді. Курсты жасағанда оқытушының қажеттілігіне қарай Moodle жүйесіне ресурс ретінде Web 2.0-нің басқа сервистері — бетбелгілер сервистері, сыртқы блогтар, вики, YouTube және т.б. кіреді.

VLEMoodle мен Web 2.0 сервистері негізінде «Заманауи жоғары кәсіби білім беруді дамытуда негізгі дүниежүзілік тенденциялар» курсы бойынша интеллектуалды білім беру ресурсы жасалынды. Ол келесі түрде жүзеге асырылды:

– студенттің жеке тұлғалық ерекшеліктерді анықтау;
– студенттің жеке тұлғалық ерекшеліктеріне сәйкес дербес білім беру траекториясын құру;
– студент пен оқытушы үшін оқу ақпаратына уақыт пен орынға тәуелсіз қолжеткізудің қарапайымдылығы, ұтқырлығы;
– оқу үрдісінде ашық әлемдік білім беру ресурстарын қолдану;
– Moodle-нің әрекеттік элементтері мен Web 2.0 сервистері көмегімен интерактивті тиімді «өзара әрекет жасаудағы оқыту»;
– оқу үрдісіне әлемдік сараптамалық бірлестіктерді тарту.

Постиндустриялық қоғамда білім беру өзінің мәртебесі бойынша адамның тіршілігі, табысты жеке мансабы үшін, әрі қоғам мен өндіріске қажетті мамандық алу үшін өзіндік жоспарланатын дербес білім беру болып табылады. Мұндай білім беру креативті, жалпыға ортақ, өмір бойы, мерзімсіз, әлеуметтік институттармен шектеу қойылмаған, адамның өмір салтына еш қиындықсыз енеді. Постиндустриялық қоғамда білім беру модульді тұлғалық бағытталған білім беру траекториясы, дүниежүзілік ашық білім беру ресурстарын, сараптамалық бірлестіктер әлеуеті мен әлеуметтік желілерді қолдану, педагогикалық міндеттерді шешу үшін ақпараттық-коммуникациялық технологиялар тәсілдерін кеңінен қолдану негізінде жүзеге асады.

Постиндустриялық білім беру жүйесінде педагогтың міндеті — жаңа білімді табысты меңгеру, біліктілікті жетілдіру, өз бетінше оқу, оқыту контенті мен оның элементтерін жасауда оқушылардың бір-бірімен және оқытушымен қызмет ету үшін дамитын дербес білім беру ортасын қалыптастыру бойынша студенттерге жағдай жасау.

Білім беру сапасын бақылау студенттердің өзін-өзі бақылауы мен өзін-өзі бағалауы жағына ауысады. Білім беру көпшілік алдында талқыға салынатын әрі сынға ұшырауға ашық болуы тиіс.

Әдебиеттер тізімі

1 Материалы Международного форума по образованию «*E*-Learning Россия: возможности электронного обучения сегодня». — М., 2010 г., 3–4 июня.

2 Материалы конференции Ассоциации E-Learning специалистов «PROeLearning». — 25–26 марта, 2010 г. — [ЭР]. Режим доступа: http://conf.elearningpro.ru/

3 Что такое Веб 2.0, «Компьютерра-Онлайн», 7.10.2011 г. — [ЭР]. Режим доступа: http://www.computerra.ru/think/234100/

4 *Андреев А.А.* Веб 2.0 в учебном процессе высшей школы. Печ. информатизация образования. — 2008: Материалы Междунар. науч.-метод. конф. — Славянск–на-Кубани: Изд. центр СГПИ, 2008. — С. 57–60.

Д.Б.Алибиев, А.Б.Сейтимбетова

Исследование возможностей использования технологии Web 2.0 для разработки интеллектуальных образовательных ресурсов

В статье проанализированы проблемы традиционных образовательных программ, возникающие при подготовке специалистов для постиндустриальной экономики. Показано, что многие из этих проблем могут быть решены с использованием философии Web 2.0. Изучен отечественный и зарубежный опыт использования инструментов Web 2.0 для создания инновационных образовательных программ, рассмотрены инструменты, сервисы и технологии Web 2.0 в образовании. Определены возможности использования философии и технологии Web 2.0 для разработки интеллектуальных образовательных ресурсов.

D.B.Alibiyev, A.B.Seiytimbetova

Study the possibilities of using Web 2.0 technologies to the development of intelligent educational resources

The article analyzes the problems of traditional educational programs arising in the preparation of professionals for the post-industrial economy. It is shown that many of these problems can be solved using the philosophy of Web 2.0. Studied Russian and foreign experience of using Web 2.0 tools to create innovative educational programs reviewed tools, services and Web 2.0 technologies in education. Considered the possibility of using philosophy and Web 2.0 technologies to the development of intelligent educational resources.

References

1 *Proceedings of the International Forum on Education «E-Learning Russia*: E-Learning today», Moscow, June 3–4, 2010.

2 *Proceedings of the conference of the Association of Professional eLearning «PRO e-Learning»*, 2010, March, 25–26, http://conf.elearningpro.ru/

3 *What is Veb 2.0, «Computerra-line» 7.10.2011g.*, http://www.computerra.ru/think/234100/

4 Andreyev A.A. *Web 2.0 in the educational process of higher education*. Pech. Informatizatsiya obrazovaniya, 2008, International scientific-methodical conference, Slavyansk on-Kuban: Publ. «Center SGPI», 2008, p. 57–60.

ӘОЖ 539.3

С.Б.Ахажанов, Ғ.Қ.Қаратаев

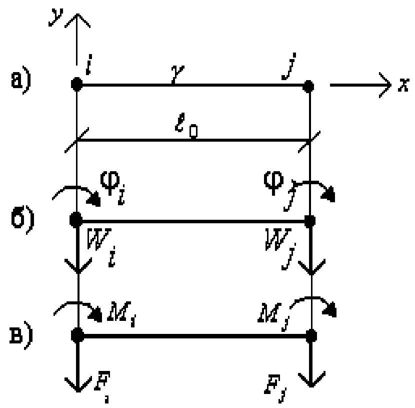
Е.А.Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті
(E-mail: stjg@mail.ru)

Күрделі рамалық құрылымдардың есептеуін автоматтандыру

Мақалада күрделі рамалық құрылымдардың есептеуін автоматтандыру қарастырылған. Рамалық құрылымдарды есептеу үшін ақырлы элементтер әдісі қолданылған. Ақырлы элемент үшін жалпы қатаңдық матрицасы табылған. Ақырлы элементтің негізгі тәуелділігі алынған. Мысал ретінде қатты рамалық құрылым қарастырылған. Нәтижелері кестелер түрінде көрсетілген және ішкі күштер эпюралары тұрғызылған. Сандық нәтижелер аналитикалық шешімдермен салыстырылған.

Кілт сөздер: деформация, кернеу, иілу, қатаңдық, рама, бойлық күш, көлденең күш, иілу моменті.

Жазықтықтағы өзектік жүйеден бір элементті бөліп алып, оны жергілікті координаттық жүйеде қарастырайық (1-а сур.).



1-сурет. Жалпыланған сызықтық ақырлы элемент

Бұл элементтің деформациялық күйі түйіндер жылжуларымен $(W_i, \varphi_i, W_j, \varphi_j)$ анықталады (1-сур., б), ал оның кернеулік күйі түйіндер күштерімен (F_i, M_i, F_i, M_j) табылады (1-сур., в). Қарастырылып отырған элементтің негізгі тәуелділігі былайша жазылады [1]:

$$\vec{F} = K \cdot \vec{V},\ K = \gamma \overset{0}{K} - \alpha \hat{K} - \beta \check{K};$$
$$\vec{F}^T = \left| F_i \ \ M_i \ \ F_j \ \ M_j \right|; \qquad (1)$$
$$\vec{V}^T = \left| W_i \ \ \varphi_i \ \ W_j \ \ \varphi_j \right|.$$

Мұнда: $\vec{F}, \vec{V}$ — түйіндер күштері мен жылжуларының векторлары; K — жалпы қатаңдық матрицасы; α, β, γ — негізгі параметрлер; $\overset{\circ}{K}, \hat{K}, \check{K}$ — әр түрлі себептерді сипаттайтын матрицалар.

Жалпыланған матрицаның құраушы матрицалары және негізгі параметрлері:

$$\overset{0}{K} = \frac{1}{\ell_0^3} \begin{bmatrix} 12 & 6\ell_0 & -12 & 6\ell_0 \\ 6\ell_0 & 4\ell_0^2 & -6\ell_0 & 2\ell_0^2 \\ -12 & -6\ell_0 & 12 & -6\ell_0 \\ 6\ell_0 & 2\ell_0^2 & -6\ell_0 & 4\ell_0^2 \end{bmatrix};\ \hat{K} = \frac{1}{\ell_0} \begin{bmatrix} 36 & 3\ell_0 & -36 & 3\ell_0 \\ 3\ell_0 & 4\ell_0^2 & -3\ell_0 & -\ell_0^2 \\ -36 & -3\ell_0 & 36 & -3\ell_0 \\ 3\ell_0 & -\ell_0^2 & -3\ell_0 & 4\ell_0^2 \end{bmatrix};$$

$$\overset{\vee}{K} = \ell_0 \begin{bmatrix} 156 & 22\ell_0 & 54 & -13\ell_0 \\ 22\ell_0 & 4\ell_0^2 & 13\ell_0 & -3\ell_0^2 \\ 54 & 13\ell_0 & 156 & -22\ell_0 \\ -13\ell_0 & -3\ell_0^2 & -22\ell_0 & 4\ell_0^2 \end{bmatrix}; \quad \begin{array}{l} \ell_0 = \dfrac{\ell}{L} = \dfrac{1}{n}; \ \ W = \dfrac{\hat{W}}{L}; \\ \gamma = \dfrac{J}{J_0}; \quad \alpha = \dfrac{\hat{N} L^2}{30EJ_0}; \end{array} \tag{2}$$

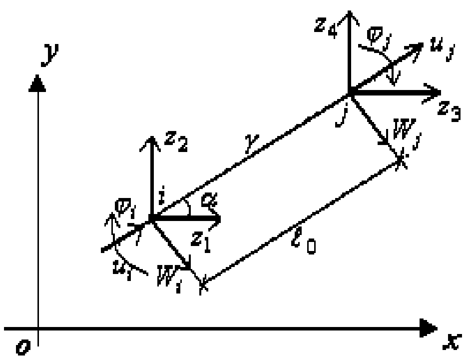
$$\beta = \frac{rL^4}{420EJ_0}; \; F = \frac{\hat{F} L^2}{EJ_0}; \; M = \frac{\hat{M} L}{EJ_0}; \; \varphi = \overset{\wedge}{\varphi}.$$

Мұнда L, EJ_0, J_0 — жүйенің ұзындығы, иілу қатаңдығы және осьтік момент инерциясы; $\hat{N}, \hat{F}, \hat{M}$ — элементтің бойлық және көлденең күштері мен моменті; $\hat{W}, \overset{\wedge}{\varphi}$-тік және бұрыштық жылжулар; ℓ, J — элементтің өлшемді ұзындығы мен осьтік момент инерциясы; ℓ_0, W, φ — элементтің өлшемсіз ұзындығы мен тік жылжуы және бұрыштық жылжуы; n — жүйенің бөлінгендегі элементтер саны; r — жайылған күштің бірлік ауданындағы қарқындылығы. Сонымен, (1) жалпылаған элементтің өлшемсіз түрдегі негізгі тәуелділігі болып табылады. Элементтің негізгі тәуелділігін (1) қолдану арқылы және $\vec{F} \to \vec{P}; \gamma \cdot \overset{\circ}{K} \to A; \hat{K} \to B; \overset{\vee}{K} \to C; \vec{V} \to \vec{u}$ ұмтылдыра отырып, жүйенің негізгі тәуелділігі алынады:

$$(A - \alpha \cdot B - \beta \cdot C)\vec{u} = \vec{P}. \tag{3}$$

Мұнда $\vec{u}, \vec{P}$ — жүйенің түйіндеріндегі сыртқы күштер мен жылжулар векторлары; α, β — белгілі (белгісіз) параметрлер; A, B, C — сандық матрицалар.

Енді өзектік жүйеден бір элементті бөліп, оны XOY координаттық жазықтықта қарастырайық (2-сур.).



2-сурет. Жазықтықтағы ақырлы элемент

Бұл элементтің жергілікті жүйедегі жылжулары $U_i, W_i, \varphi_i, U_j, W_j, \varphi_j$, ал жалпы координаттық жүйедегі жылжулары $z_1, z_2, \varphi_i, z_3, z_4, \varphi_j$ болып табылады. Элементтің өлшемсіз осьтік момент инерциясы — γ, ал ұзындығы — ℓ_0 Жергілікті координаттық жүйедегі элементтің негізгі тәуелділігін мына түрде қабылдаймыз:

$$\vec{F} = K \cdot \vec{V};$$

$$\vec{F}=\begin{bmatrix} N_i \\ F_i \\ M_i \\ N_j \\ F_j \\ M_j \end{bmatrix};\ K=\begin{bmatrix} K_{11}^0 & 0 & 0 & K_{12}^0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{11} & K_{12} & 0 & K_{13} & K_{14} \\ 0 & K_{12} & K_{22} & 0 & K_{23} & K_{24} \\ K_{12}^0 & 0 & 0 & K_{11}^0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{13} & K_{23} & 0 & K_{33} & K_{34} \\ 0 & K_{14} & K_{24} & 0 & K_{34} & K_{44} \end{bmatrix};\vec{V}=\begin{bmatrix} U_i \\ W_i \\ \varphi_i \\ U_j \\ W_j \\ \varphi_j \end{bmatrix}; \tag{4}$$

$$K_{11}^0=\frac{1}{\ell_0};K_{12}^0=-\frac{1}{\ell_0}.$$

Мұнда $\vec{F},\vec{V}$ — түйіндік күштер және жылжулар векторы; $K_{11},...,K_{44}$ — қатаңдық матрицасының элементтері. Олар (2) бойынша анықталады.

Элементтің ұзындығы және бағыттаушы косинустары түйіндер координаталары арқылы табылады:

$$\ell_0=\sqrt{\left(x_j-x_i\right)^2+\left(y_j-y_i\right)^2};\ \cos\alpha=\frac{x_j-x_i}{\ell_0};\sin\alpha=\frac{y_j-y_i}{\ell_0}. \tag{5}$$

Ескі жылжулар жаңа жылжулармен былайша байланыста болмақ (2-сур. бойынша):

$$\begin{gathered} U_i=z_1\cos\alpha+z_2\sin\alpha;\ W_i=z_1\sin\alpha-z_2\cos\alpha; \\ U_j=z_3\cos\alpha+z_4\sin\alpha;\ W_j=z_3\sin\alpha-z_4\cos\alpha. \end{gathered} \tag{6}$$

Векторлық түрде былайша жазылады:

$$\vec{V}=C\cdot\vec{z};\ C=\begin{vmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s & -c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & -c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix};\ \vec{z}=\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \varphi_i \\ z_3 \\ z_4 \\ \varphi_j \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Мұнда C — түрлендіру матрицасы; $\vec{z}$ — жалпы координаттық жүйедегі түйіндер жылжулар векторы; $c=\cos\alpha$; $s=\sin\alpha$.

Негізгі тәуелділікті (4) сол жағынан транспонирленген матрицаға C^T көбейтіп, оны жалпы координаттық жүйеде былайша жазамыз:

$$\vec{R}=S\cdot\vec{z};\ \vec{R}=C^T\cdot\vec{F};\ S=C^T\cdot K\cdot C. \tag{8}$$

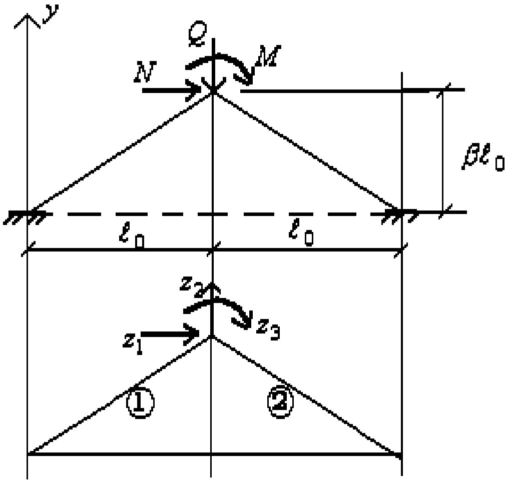
Мұнда S — қатаңдық матрицасы. Бұл матрица жалпы жағдайда бұрышқа α және матрицаларға $\overset{o}{K},\overset{\vee}{K},\hat{K}$ тәуелді болады. Олар (2) формула бойынша анықталады. Енді осы матрицаның жалпы түрін анықтайтын формуланы көрсетейік:

$$S=\begin{bmatrix} c^2K_{11}^0+s^2K_{11} & cs\left(K_{11}^0-K_{11}\right) & sK_{12} & c^2K_{12}^0+s^2K_{13} & cs\left(K_{12}^0-K_{13}\right) & sK_{14} \\ cs\left(K_{11}^0-K_{11}\right) & s^2K_{11}^0+c^2K_{11} & -cK_{12} & cs\left(K_{12}-K_{13}\right) & s^2K_{12}^0+c^2K_{13} & -cK_{14} \\ sK_{12} & -cK_{12} & K_{22} & sK_{23} & -cK_{23} & K_{24} \\ c^2K_{12}^0+s^2K_{13} & cs\left(K_{12}^0-K_{13}\right) & sK_{23} & c^2K_{11}^0+s^2K_{33} & cs\left(K_{11}^0-K_{33}\right) & sK_{34} \\ cs\left(K_{12}^0-K_{13}\right) & s^2K_{12}^0+c^2K_{13} & -cK_{23} & cs\left(K_{11}^0-K_{33}\right) & s^2K_{11}^0+c^2K_{33} & -cK_{34} \\ sK_{14} & -cK_{14} & K_{24} & sK_{34} & -cK_{34} & -cK_{44} \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Бұл матрица бас диагоналға байланысты симметриялы матрица болып табылады. Оның элементтері жалпы жағдайда (2) формуласы бойынша анықталады:

$$(K=\gamma\overset{0}{K}-\alpha\hat{K}-\beta\overset{\vee}{K}).$$

Мысал ретінде мынандай раманы есептеп көрелік (3-сур.). Бұл раманың көлденең қималары бірдей болсын $(\gamma = 1)$.



3-сурет. Рама

Есептеу ретін қарастырайық:

1. Раманы екі элементке бөліп, оның ұзындықтарын анықтаймыз

$$\ell_1^0 = \ell_2^0 = \ell_0 \cdot \gamma_0;\ \gamma_0 = \sqrt{1+\beta^2}.$$

2. Бағыттауыш косинустарын табамыз

$$\begin{aligned} \cos\alpha_1 &= \frac{l_0}{\ell_1^0} = \frac{1}{\gamma_0};\ \sin\alpha_1 = \frac{\beta\ell_0}{\ell_2^0} = \frac{\beta}{\gamma_0}; \\ \cos\alpha_2 &= \frac{l_0}{\ell_2^0} = \frac{1}{\gamma_0};\ \sin\alpha_2 = -\frac{\beta\ell_0}{\ell_2^0} = -\frac{\beta}{\ell_0}. \end{aligned} \tag{10}$$

3. Түйіндік жылжулар векторын жасақтаймыз

$$\left[\vec{z}^{(1)}\right]^T = \left|0 \quad 0 \quad 0 \quad z_1 \quad z_2 \quad z_3\right|;\ \left[\vec{z}^{(2)}\right]^T = \left|z_1 \quad z_2 \quad z_3 \quad 0 \quad 0 \quad 0\right|.$$

4. Түйіндер арқылы тепе-теңдік теңдеулерін құрамыз:

$$\begin{aligned} &\text{а) } z_1 : \vec{R}_4^{(1)} + \vec{R}_1^{(2)} = N :\ S_4^{(1)}\vec{z}^{(1)} + S_1^{(2)}\vec{z}^{(2)} = N \cdot \ell_0^3 \cdot \gamma_0^3; \\ &\text{б) } z_2 : \vec{R}_5^{(1)} + \vec{R}_2^{(2)} = -Q :\ S_5^{(1)}\vec{z}^{(1)} + S_2^{(2)}\vec{z}^{(2)} = -Q \cdot \ell_0^3 \cdot \gamma_0^3; \\ &\text{в) } z_3 : \vec{R}_6^{(1)} + \vec{R}_3^{(2)} = M :\ S_6^{(1)}\vec{z}^{(1)} + S_3^{(2)}\vec{z}^{(2)} = M \cdot \ell_0^3 \cdot \gamma_0^3. \end{aligned} \tag{11}$$

0

Осы теңдеулерді (9) матрицасын қолдану арқылы және K матрицасы бойынша (2) ашып жазамыз:

$$\text{а)}\left[\ell_0^2 c\alpha_1^2 + 12S\alpha_1^2\right]z_1 + c\alpha_1 S\alpha_1\left(\ell_0^2 - 12\right)z_2 - 6\ell_0 S\alpha_1 z_3 + \left[\ell_0^2 c\alpha_2^2 + 12S\alpha_2^2\right]z_1 +$$

$$+ c\alpha_2 S\alpha_2\left(\ell_0^2 - 12\right)z_2 + 6\ell_0 S\alpha_2 z_3 = N\ell_0^3\gamma_0^3;$$

$$\text{ә) } c\alpha_1 S\alpha_1\left(\ell_0^2 - 12\right)z_1 + \left[\ell_0^2 S\alpha_1^2 + 12c\alpha_1^2\right]z_2 + 6\ell_0 c\alpha_1 z_3 + c\alpha_2 S\alpha_2\left(\ell_0^2 - 12\right)z_1 +$$

$$+\left[\ell_0^2 S\alpha_2^2 + 12c\alpha_2^2\right]z_2 - 6\ell_0 c\alpha_2 z_3 = -Q\ell_0^3\gamma_0^3;$$

$$\text{б)} - 6\ell_0 S\alpha_1 z_1 + 6\ell_0 c\alpha_1 z_2 + 4\ell_0^2 z_3 + 6\ell_0 S\alpha_2 z_1 - 6\ell_0 c\alpha_2 z_2 + 4\ell_0^2 z_3 = M\ell_0^3\gamma_0^3.$$

Бұл теңдеулер бағыттауыш косинустарды (10) ескергенде былайша жазылады:

$$\text{а) } 2\left(\ell_0^2 + 12\frac{\beta^2}{\gamma_0^2}\right)z_1 - 12\ell_0\beta z_3 = N\ell_0^3\gamma_0^3;$$

$$\text{ә)}\ 2\left(\ell_0^2\beta^2 + \frac{12}{\gamma_0^2}\right)z_2 = -Q\ell_0^3\gamma_0^3; \tag{12}$$

$$\text{б)}\ -12\ell_0\beta z_1 + 8\ell_0^2\gamma_0^2 z_3 = M\ell_0^3\gamma_0^3.$$

Осы теңдеулерден жылжуларды анықтаймыз

$$z_2 = -\frac{Q}{2}\frac{\ell_0^3\gamma_0^3}{\left(\ell_0^2\beta^2 + \dfrac{12}{\gamma_0^2}\right)};\ z_1 = \frac{N\ell_0^3\gamma_0^3 + \dfrac{3}{2}M\ell_0^2\beta\gamma_0}{\left(2\ell_0^2 + 6\dfrac{\beta^2}{\gamma_0^2}\right)};$$

$$z_3 = \frac{\dfrac{M}{4}\ell_0^3\gamma_0 + 3M\ell_0\dfrac{\beta^2}{\gamma_0} + \dfrac{3}{2}N\ell_0^2\beta\gamma_0}{\left(2\ell_0^2 + 6\dfrac{\beta^2}{\gamma_0^2}\right)}. \tag{13}$$

Бұл жылжулар рама арқалыққа айналғанда $(\beta = 0,\ \gamma_0 = 1)$ мынандай мәндер қабылдайды:

$$z_2 = -\frac{Q\ell_0^3}{24};\ z_1 = \frac{N\ell_0}{2};\ z_3 = \frac{M\ell_0}{8}. \tag{14}$$

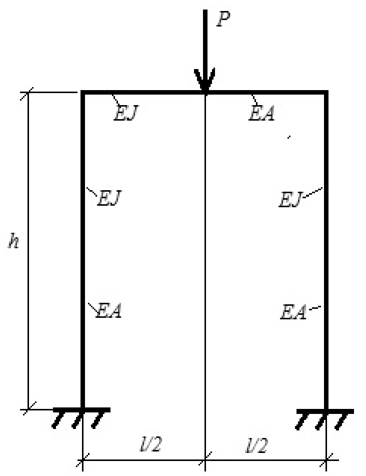
Енді (8) негізгі тәуелділікті қолдана отырып, элементтердің түйіндік күштерін анықтаймыз:

$$\left[\vec{R}^{(1)}\right]^T = \left|-\frac{N}{2};\frac{Q}{2}+\frac{3}{4}\frac{M}{\ell_0};\frac{Q\ell_0}{4}+\frac{M}{4};\frac{N}{2};-\frac{Q}{2}-\frac{3}{4}\frac{M}{\ell_0};\frac{Q\ell_0}{4}+\frac{M}{2}\right|; \tag{15}$$

$$\left[\vec{R}^{(2)}\right]^T = \left|\frac{N}{2};-\frac{Q}{2}+\frac{3}{4}\frac{M}{\ell_0};-\frac{Q\ell_0}{4}+\frac{M}{2};-\frac{N}{2};\frac{Q}{2}-\frac{3}{4}\frac{M}{\ell_0};-\frac{Q\ell_0}{4}+\frac{M}{4}\right|.$$

Алынған нәтижелер (14) және (15) екі шеті қатты бекітілген (статикалық анықталмаған) арқалықтың деформациялық z_1, z_2, z_3 және кернеулік күйлерін N, Q, M анықтауға мүмкіндік береді.

Енді осы ақырлы элементтер әдісін қолданып, келесі есепті шығарып көрелік. Бізге қатты рамалық құрылым берілсін $P = 1$ кН, $l = 1$ *м*, $h = 1$ *м* (4-сур.).



4-сурет. Қатты рамалық құрылым

Сыртқы күш әсер еткен кездегі раманың кернеулік және деформациялық күйлерін анықтауымыз қажет. Ол үшін раманың жартысын төрт элементке бөліп, түйіндерін, жылжуларын белгілейміз. Есепті шығару үшін бағдарлама құру керек.

Жалпы бағдарламасының қысқаша мағлұматы:
$N = 4$ — элементтер саны; $JZ = 5$ — түйіндер саны; $IZ = 15$ — жылжулар саны; $MP = 6$ — бекініс саны; $NP = 1$ — түйінге түскен күштер саны; $RM(2, N)$ — элементтің иілу қатаңдығы (EI); созылу (сығылу) қатаңдығы (EA); $RN(4, N)$ — элементтің x бойынша бастапқы координатасы (XI); соңғы (XJ), y бойынша (YI) және соңғы (YJ) координаталары беріледі; $IM(2, N)$ — түйіндер топологиясы ($i, j, j, k, k,\ldots$); $KP(NP)$ — күштердің қай жылжу бойынша түскенін көрсетеді; $DP(NP)$ — күштің мәні, $JP(MP)$ — бекініс қай жылжуда екенін білдіреді; $IIP(NC)$ — серпімді тіреу қай жылжуда екенін көрсетеді; $QP(NC)$ — серпімді тіреу қатаңдығының мәні.

Құрылған бағдарламаның нәтижелері 1,2-кестелер және эпюралар түрінде көрсетілген (5-сур.):

1 - к е с т е

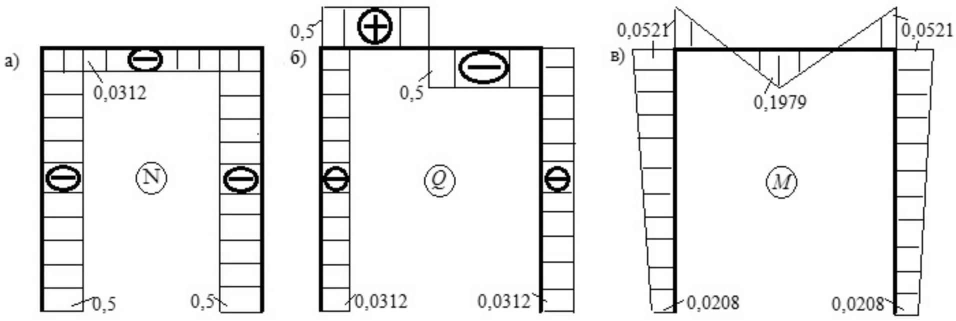
Бойлық, тік және бұрыштық жылжулар мәндері

Түйіндер	Жылжулар		
	U	W	φ
1	0	0	0
2	0,0156	0,4999	0,0364
3	0	0,5143	0
4	-0,0156	0,4999	-0,0364
5	0	0	0

2 - к е с т е

Бойлық күш, көлденең күш және иілу моменті мәндері

Элементтер	Ішкі күштер					
	N_i	Q_i	M_i	N_j	Q_j	M_j
1	-0,5	-0,0312	-0,0208	-0,5	-0,0312	-0,0521
2	-0,0312	0,5	-0,0521	-0,0312	0,5	0,1979
3	-0,0312	-0,5	0,1979	-0,0312	-0,5	-0,0521
4	-0,5	0,0312	-0,0521	-0,5	0,0312	-0,0208



5-сурет. Ішкі күштердің эпюралары

Мұнда *а)* — бойлық күш; *б)* — көлденең күш; *в)* — иілу моментінің эпюралары. Олар қатты рамалық құрылымның кернеулік күйін көрсетеді. Осы ұқсастықпен жылжулар нәтижелерінің эпюраларын тұрғызып, раманың деформациялық күйін көрсетуге болады.

Есептің нәтижесін шолып өтетін болсақ, рама симметриялы болғандықтан, бойлық күште 1, 4 және 2, 3-ші элементтерінің өзгерулері бірдей және барлық элементтерінде қысылады, көлденең күш эпюрасында 2 мен 3-те күштің мәніне секіреді, ал иілу моменті эпюрасында ең үлкен иілу күш түскен нүктеде пайда болады.

Сонымен, ақырлы элементтер әдісін қолдану арқылы құрылған бағдарлама бойынша әдебиеттердегі [2, 3] кез келген түрдегі күрделі рамалық құрылымдарды есептеуге болады.

Әдебиеттер тізімі

1 *Тұрсынов К.А.* Құрылыс механикасындағы ақырлы элементтер әдісі. — Қарағанды: ҚарМУ баспасы, 2004. — 53 б.
2 *Киселев В.А.* Строительная механика: Учебник для вузов. — 3-е изд., доп. — М.: Стройиздат, 1976. — 511 с.
3 *Дарков А.В. и др.* Строительная механика. — М.: Высш. шк., 1976. — 600 с.

С.Б.Ахажанов, Г.К.Каратаев

Автоматизированный расчет сложных рамных конструкций

В статье рассмотрен автоматизированный расчет сложных рамных конструкций. Для расчета был использован метод конечных элементов. Найдена общая матрица жесткости конечного элемента. Получена основная зависимость конечного элемента. Рассмотрен пример расчета жестких рамных конструкций. Результаты приведены в табличной форме и построены эпюры внутренних усилий. Численные результаты сравнены с аналитическими решениями.

S.B.Akhazhanov, G.K.Karatayev

The automated calculation of difficult frame designs

In this work the automated calculation of difficult frame designs is considered. For calculation of frame designs the method of final elements is used. The general matrix of rigidity of a final element is found. The main dependence of a final element is received. An example of calculation of rigid frame designs is reviewed. Results are given in a tabular form and curve the internal of efforts are constructed. Numerical results are compared to analytical decisions.

References

1 Tursynov K.A. *Method of the last elements in construction mechanics*, Karaganda: KSU Publ., 2004, 53 p.
2 Kiselyov V.A. *Construction mechanics. The textbook for higher education institutions*, Prod. 3, additional, Moscow: Stroyizdat, 1976, 511 p.
3 Darkov A.V. et al. *Construction mechanics*, Moscow: Higher school, 1976, 600 p.

УДК 517.95

Д.М.Ахманова, А.Е.Омирбекова

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова
(E-mail: danna.67@mail.ru)

Об интегральном уравнении Вольтерра с дельтаобразным ядром

В статье рассмотрено сингулярное интегральное уравнение Вольтерра второго рода, к которому редуцируется ряд краевых задач для нагруженных уравнений теплопроводности. Ввиду неограниченности промежутка интегрирования и дельтаобразности ядра к нему не применим метод последовательных приближений. Построено соответствующее характеристическое уравнение, решение которого найдено в явном виде. Для исходного уравнения применен метод равносильной регуляризации, найден его спектр.

Ключевые слова: сингулярное интегральное уравнение Вольтерра второго рода, норма оператора, метод регуляризации Карлемана-Векуа.

Рассматривается интегральное уравнение с переменными пределами интегрирования

$$\tilde{K}_{2\lambda}\tilde{v} \equiv \left(I-\lambda\tilde{K}_2\right)\tilde{v} \equiv \tilde{v}(t)-\lambda\int_t^{\infty}\tilde{K}_2(\tau,t)\tilde{v}(\tau)\,d\tau=\tilde{g}_1(t), \quad t\in R_+, \tag{1}$$

где

$$\tilde{K}_2(\tau,t)=e^{-(t-\tau)}\left(\frac{t}{\tau}\right)^{3/2-\omega}\cdot\frac{\tau^{\omega}}{2\sqrt{\pi}(\tau-t)^{3/2}}\exp\left(-\frac{\tau^{2\omega}}{4(\tau-t)}\right), \quad \omega<\frac{1}{2},$$

которое возникает при решении граничных задач для спектрально-нагруженных уравнений параболического типа [1, 2].

При исследовании уравнения (1) достаточно рассмотреть «упрощенное» интегральное уравнение [3]

$$K_{2\lambda}v \equiv \left(I-\lambda K_2\right)v \equiv v(t)-\lambda\int_t^{\infty}K_2(\tau,t)v(\tau)\,d\tau=g_1(t), \quad t\in R_+, \tag{2}$$

где

$$K_2(\tau,t)=\left(\frac{t}{\tau}\right)^{3/2-\omega}\cdot\frac{\tau^{\omega}}{2\sqrt{\pi}(\tau-t)^{3/2}}\exp\left(-\frac{\tau^{2\omega}}{4(\tau-t)}\right), \quad \omega<\frac{1}{2}. \tag{3}$$

Ядро интегрального уравнения (2) — функция $K_2(\tau,t)$ обладает следующим свойством:

$$\lim_{t\to\infty}\int_t^{\infty}K_2(\tau,t)\,d\tau=1. \tag{4}$$

Действительно, так как $t<\tau<\infty$, это следует из соотношений

$$\int_t^{\infty}\frac{\tau^{\omega}}{2\sqrt{\pi}(\tau-t)^{3/2}}\cdot e^{-\frac{\tau^{2\omega}}{4(\tau-t)}}d\tau=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_t^{\infty}\left\{\left[\frac{\tau^{\omega}}{4(\tau-t)^{3/2}}-\frac{\omega\cdot\tau^{\omega-1}}{2\sqrt{\tau-t}}\right]+\frac{\omega\cdot\tau^{\omega-1}}{2\sqrt{\tau-t}}\right\}e^{-\frac{\tau^{2\omega}}{4(\tau-t)}}d\tau=$$

$$=\left\|\frac{\tau^{\omega}}{2\sqrt{\tau-t}}=z; \qquad dz=\left(-\frac{\tau^{\omega}}{4(\tau-t)^{3/2}}+\frac{\omega\cdot\tau^{\omega-1}}{2\sqrt{\tau-t}}\right)d\tau\right\|=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-z^2}dz+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_t^{\infty}\frac{\omega\cdot\tau^{\omega-1}}{\sqrt{\tau-t}}\cdot e^{-\frac{\tau^{2\omega}}{4(\tau-t)}}d\tau=1+I(t)=$$

$$=\left|I(t)\right|=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_t^{\infty}\frac{|\omega|\cdot\tau^{\omega-1}}{\sqrt{\tau-t}}\cdot e^{-\frac{\tau^{2\omega}}{4(\tau-t)}}d\tau=\left\|\tau=\frac{t}{x}; \;\; d\tau=-\frac{t}{x^2}dx\right\|=$$

$$=\frac{\omega}{\sqrt{\pi}}\int_0^1\frac{t^{\omega-1}\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot t}{x^{\omega-1}\cdot\sqrt{1-x}\cdot x^2\cdot t^{\frac{1}{2}}}\cdot e^{-\frac{t^{2\omega}\cdot x}{4x^{2\omega}\cdot t(1-x)}}dx=\frac{|\omega|}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{t^{\frac{1}{2}-\omega}}\cdot\int_0^1\frac{1}{x^{\omega+\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{1-x}}\cdot e^{-\frac{1}{t^{1-2\omega}}\cdot\frac{x^{1-2\omega}}{4(1-x)}}dx\le$$

$$\le \frac{|\omega|}{\sqrt{\pi}} \cdot t^{\frac{1}{2}-\omega} \cdot \int_0^1 x^{\left(\frac{1}{2}-\omega\right)-1} (1-x)^{\frac{1}{2}-1} dx = \frac{|\omega|}{\sqrt{\pi}} \cdot B(1/2-\omega, 1/2) \cdot t^{\omega-1/2},$$

где $B(\cdot,\cdot)$ — бета-функция Эйлера.

Таким образом, $\lim\limits_{t\to\infty} |I(t)| = 0$ при $\omega < 1/2$. Следовательно,

$$\lim_{t\to\infty} \int_t^\infty \frac{\tau^\omega}{2\sqrt{\pi}(\tau-t)^{3/2}} \cdot e^{-\frac{\tau^{2\omega}}{4(\tau-t)}} d\tau = 1.$$

Равенство (4) справедливо и для ядра $\tilde{K}_2(\tau,t)$, это означает, что норма интегрального оператора, действующего в пространстве суммируемых функций и определяемого ядром $\tilde{K}_2(\tau,t)$, равна единице. Это существенно отличает уравнение (2) от уравнений Вольтерра второго рода, для которых решение существует и единственно.

Для исследования интегрального уравнения (2) рассмотрим соответствующее характеристическое уравнение, которое имеет вид

$$K_\lambda v \equiv (I-\lambda K) v \equiv v(t) - \lambda \int_t^\infty K(\tau,t) v(\tau) d\tau = g_1(t), \quad t \in R_+, \tag{5}$$

где

$$K(\tau,t) = \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1+\alpha/2} \cdot \frac{\alpha^{3/2}\tau^{\alpha-1}}{2\sqrt{\pi}(\tau^\alpha - t^\alpha)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\alpha}{4(\tau^\alpha - t^\alpha)}\right). \tag{6}$$

Здесь для сокращения записи введено обозначение

$$\alpha = 1 - 2\omega.$$

Всюду в дальнейшем будем учитывать, что $\alpha > 0$, так как $-\infty < \omega < 1/2$.

Отметим,что ядро характеристического уравнения $K(\tau,t)$ обладает теми же свойствами, что и ядро $K_2(\tau,t)$, и, в частности, для него справедливо следующее предельное соотношение:

$$\lim_{t\to\infty} \int_t^\infty K(\tau,t) d\tau = 1. \tag{7}$$

Проверим его справедливость $(\alpha > 0)$. Имеем

$$\lim_{t\to\infty} \int_t^\infty \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1+\alpha/2} \cdot \frac{(\alpha)^{3/2} \cdot \tau^{\alpha-1}}{2\pi(\tau^\alpha - t^\alpha)^{3/2}} \cdot e^{-\frac{\alpha}{4(\tau^\alpha - t^\alpha)}} d\tau = \left\| \frac{\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{\tau^\alpha - t^\alpha}} = z; \quad dz = -\frac{\sqrt{\alpha}}{4} \frac{\alpha \cdot \tau^{\alpha-1}}{(\tau^\alpha - t^\alpha)^{3/2}} d\tau \right\| =$$

$$= \left\| \tau^\alpha = t^\alpha \left(1 + \frac{\alpha}{4t^\alpha \cdot z^2}\right) \right\| = \lim_{t\to\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\left(1+\frac{\alpha}{4t^\alpha \cdot z^2}\right)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha}}} \cdot e^{-z^2} dz = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-z^2} dz = 1.$$

Для того чтобы интегральное уравнение (5) было характеристическим, оно должно удовлетворять следующим двум условиям:

1^0. Оно должно сводиться к «эталонному» уравнению (интегральному уравнению, соответствующему случаю $\omega = 0$) [4].

2^0. Разность ядер

$$K_2(\tau,t) - K(\tau,t) = \tilde{K}(\tau,t)$$

должна обладать слабой особенностью (при $t \to \infty$).

Проверим выполнение условия 1^0. Для этого в уравнении (5) произведем следующие замены независимых переменных:

$$t = [\alpha \cdot t_1]^{\frac{1}{\alpha}}, \quad \tau = [\alpha \cdot \tau_1]^{\frac{1}{\alpha}}$$

и введем обозначения:

$$\psi(t_1)=t_1^{-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{2}}\nu\left(\left[\alpha\cdot t_1\right]^{\frac{1}{\alpha}}\right),\quad g_2(t_1)=t_1^{-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{2}}g_1\left(\left[\alpha\cdot t_1\right]^{\frac{1}{\alpha}}\right);$$

$$k^*(z)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}z^{3/2}}\exp\left(-\frac{1}{4z}\right);\quad z>0.$$

Тогда уравнение (5) запишется в виде

$$k_\lambda^*\psi\equiv\left(I-\lambda k^*\right)\psi\equiv\psi(t_1)-\lambda\int_{t_1}^{\infty}k(\tau_1-t_1)\psi(\tau_1)d\tau_1=g_2(t_1). \tag{8}$$

Действительно (с учетом $d\tau=\alpha^{\frac{1}{\alpha}}\cdot\frac{1}{\alpha}\cdot\tau_1^{\frac{1}{\alpha}-1}d\tau_1=\alpha^{\frac{1}{\alpha}-1}\cdot\tau_1^{\frac{1}{\alpha}-1}d\tau_1$) имеем

$$\begin{gathered}\psi(t_1)-\lambda\int_{t_1}^{\infty}\frac{\alpha^{3/2}\left[\alpha\tau_1\right]^{-\frac{1}{\alpha}+1}\alpha^{\frac{1}{\alpha}-1}\cdot\tau_1^{\frac{1}{\alpha}-1}}{2\sqrt{\pi}\alpha^{3/2}\left(\tau_1-t_1\right)^{3/2}}\exp\left[-\frac{\alpha}{\alpha\cdot4(\tau_1-t_1)}\right]\psi(\tau_1)d\tau_1=\\=\psi(t_1)-\lambda\int_{t}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{\pi}\left(\tau_1-t_1\right)^{3/2}}\exp\left[-\frac{1}{4(\tau_1-t_1)}\right]\psi(\tau_1)d\tau_1=g_2(t_1).\end{gathered} \tag{9}$$

Теперь переходим к доказательству справедливости условия 2^0, которая следует из утверждения следующей теоремы.

Теорема 1. При выполнении условий $\alpha>0$ и $0<t<\tau<\infty$ имеет место оценка.

$$\left|K_2(\tau,t)-K(\tau,t)\right|\le C(\alpha)\frac{t^{1-\frac{\alpha}{2}}}{\tau^{3/2}\sqrt{\tau-t}}\cdot\exp\left[-C(\alpha)\frac{\tau^{1-\alpha}}{\tau-t}\right] \tag{10}$$

и выполняется предельное соотношение

$$\lim_{t\to\infty}\int_t^{\infty}\left|K_2(\tau,t)-K(\tau,t)\right|d\tau=0.$$

Для доказательства этой теоремы и для того, чтобы более проще показать то, что интегральное уравнение (5) с бесконечным пределом интегрирования является характеристическим для уравнения (2), удобнее свести уравнения (2) и (5) к уравнениям на конечном промежутке $(0,t)$. Для этого в интегральных уравнениях (2) и (5) произведем следующие замены независимых переменных:

$$t=1/t_1,\quad\tau=1/\tau_1,$$

и тогда они запишутся, соответственно, в виде

$$\nu(t_1)-\lambda\int_0^{t_1}\left(\frac{\tau_1}{t_1}\right)^{1+\frac{\alpha}{2}}\frac{t_1^{3/2}\cdot\tau_1^{\frac{\alpha}{2}-1}}{2\sqrt{\pi}\left(t_1-\tau_1\right)^{3/2}}\exp\left[-\frac{t_1\cdot\tau_1^{\alpha}}{4(t_1-\tau_1)}\right]\nu(\tau_1)d\tau_1=g_1(t_1); \tag{11}$$

$$\nu(t_1)-\lambda\int_0^{t_1}\left(\frac{\tau_1}{t_1}\right)^{1+\frac{\alpha}{2}}\frac{\alpha^{3/2}t_1^{\frac{3\alpha}{2}}\cdot\tau_1^{\frac{\alpha}{2}-1}}{2\sqrt{\pi}\left(t_1^{\alpha}-\tau_1^{\alpha}\right)^{3/2}}\exp\left[-\frac{\alpha t_1^{\alpha}\cdot\tau_1^{\alpha}}{4\left(t_1^{\alpha}-\tau_1^{\alpha}\right)}\right]\nu(\tau_1)d\tau_1=g_1(t_1). \tag{12}$$

Переобозначая переменные t_1 и τ_1 снова соответственно через t и τ и обозначая ядра уравнений (11) и (12) через $K_2'(t,\tau)$ и $K(t,\tau)$, представим их в виде

$$K_2'(t,\tau)=P_2'(t,\tau)\exp\left\{-Q_2'(t,\tau)\right\};\ K'(t,\tau)=P'(t,\tau)\exp\left\{-Q'(t,\tau)\right\}, \tag{13}$$

где

$$P_2'(t,\tau)=\frac{t^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha}}\cdot\tau^{\alpha}}{2\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}};\quad Q_2'(t,\tau)=\frac{t\cdot\tau^{\alpha}}{4(t-\tau)};$$

$$P'(t,\tau)=\frac{\alpha^{3/2}t^{\alpha-1}\cdot\tau^{\alpha}}{2\sqrt{\pi}\left(t^{\alpha}-\tau^{\alpha}\right)^{3/2}};\quad Q'(t,\tau)=\frac{\alpha\cdot t^{\alpha}\cdot\tau^{\alpha}}{4\left(t^{\alpha}-\tau^{\alpha}\right)}.$$

Отметим, что для ядер $K_2^{'}(t,\tau)$ и $K(t,\tau)$ также выполняются предельные соотношения

$$\lim_{t\to 0}\int_0^t K_2^{'}(\tau,t)\,d\tau=1;\ \lim_{t\to 0}\int_0^t K^{'}(\tau,t)\,d\tau=1. \tag{14}$$

и справедлива следующая

Теорема 2. При выполнении условий $\alpha>0$ и $0<\tau<t<\infty$ выполняется оценка

$$K_0^{'}(\tau,t)=\left|K^{'}(\tau,t)-K_2^{'}(\tau,t)\right|\le C(\alpha)\,\frac{t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\tau-t}}\cdot\exp\left[-C(\alpha)\,\frac{t\cdot\tau^{\alpha}}{t-\tau}\right] \tag{15}$$

и верно следующее соотношение:

$$\lim_{t\to 0}\int_t^t\left|K^{'}(t,\tau)-K_2^{'}(t,\tau)\right|d\tau=0.$$

Вначале докажем следующую лемму.

Лемма 1. При выполнении условий теоремы 2 справедливы неравенства

$$P_0^{'}(t,\,\tau)=\left|P^{'}(t,\,\tau)-P_2^{'}(t,\,\tau)\right|\le C(\alpha)\,\frac{t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}}}{\sqrt{t-\tau}}; \tag{16}$$

$$Q_0^{'}(t,\,\tau)=\left|Q_2^{'}(t,\,\tau)-Q^{'}(t,\,\tau)\right|\le C_2(\alpha)\cdot t^{\alpha}. \tag{17}$$

Доказательство леммы. Покажем справедливость (16). Имеем

$$t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{t-\tau}\cdot\left|P^{'}(t,\,\tau)-P_2^{'}(t,\,\tau)\right|=$$

$$=t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{t-\tau}\cdot\left|\frac{t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}}\cdot\tau^{\alpha}}{2\pi(t-\tau)^{3/2}}-\frac{\alpha^{3/2}\cdot t^{\alpha-1}\cdot\tau^{\alpha}}{2\pi\left(t^{\alpha}-\tau^{\alpha}\right)^{3/2}}\right|=$$

$$=\frac{t^{\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{t-\tau}\cdot t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}}}{2\sqrt{\pi}}\cdot\tau^{\alpha}\cdot\left|\frac{t^{1-\alpha}\left(t^{\alpha}-\tau^{\alpha}\right)^{3/2}-\alpha^{3/2}\cdot t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}}\cdot(t-\tau)^{3/2}}{(t-\tau)^{3/2}\cdot\left(t^{\alpha}-\tau^{\alpha}\right)^{3/2}}\right|=$$

$$=\frac{\tau^{\alpha}}{2\sqrt{\pi}}\left|\frac{t^{1-\alpha}\left(t^{\alpha}-\tau^{\alpha}\right)^{3/2}-\alpha^{3/2}\cdot t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}}\cdot(t-\tau)^{3/2}}{(t-\tau)\cdot\left(t^{\alpha}-\tau^{\alpha}\right)^{3/2}}\right|=\left\|\tau=x\cdot t,\quad 0<x<1\right\|=$$

$$=\frac{x^{\alpha}}{2\sqrt{\pi}}\cdot\left|\frac{\left(1-x^{\alpha}\right)^{3/2}-\alpha^{3/2}\cdot(1-x)^{3/2}}{(1-x)\cdot\left(1-x^{\alpha}\right)^{3/2}}\right|=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\cdot P_0^{'}(x).$$

Функция $P_0^{'}(x)$ непрерывна для всех значений x при $0\le x<1$, но имеет особенность при $x=1$. Поэтому вычислим

$$\lim_{x\to 1}\left|\frac{\left(1-x^{\alpha}\right)^{3/2}-\alpha^{3/2}(1-x)^{3/2}}{(1-x)\left(1-x^{\alpha}\right)^{3/2}}\right|=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\left|\frac{1-\alpha^{3/2}\left(\dfrac{1-x}{1-x^{\alpha}}\right)}{1-x}\right|=\lim_{x\to 1}\left|\frac{1-x^{\frac{3}{2}-\frac{3\alpha}{2}}}{1-x}\right|=3\left|\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}\right|.$$

Теперь докажем неравенство (17). Имеем

$$t^{-\alpha}Q_0^{'}(t,\,\tau)=t^{-\alpha}\,\frac{1}{\alpha}\cdot\left|\frac{t\cdot\tau^{\alpha}}{4(t-\tau)}-\frac{\alpha\cdot t^{\alpha}\cdot\tau^{\alpha}}{4\left(t^{\alpha}-\tau^{\alpha}\right)}\right|=\left\|\tau=t\cdot x,\ 0<x<1\ \right\|=$$

$$=\frac{x^{\alpha}}{4}\cdot\left|\frac{1}{1-x}-\frac{\alpha}{1-x^{\alpha}}\right|=\frac{x^{\alpha}}{4}\cdot\left|\frac{1-x^{\alpha}-\alpha+x\alpha}{(1-x)\left(1-x^{\alpha}\right)}\right|.$$

Функция $Q_0^{'}(t,tx)=Q_0^{'}(x)$ монотонна, $Q_0^{'}(0)=0$ и непрерывна для всех значений $x\in(0,1)$, имеет особенность лишь в точке $x=1$.

Вычислим

$$\lim_{x\to 1-0}Q_0^{'}(x)=\lim_{x\to 1-0}\frac{x^\alpha}{4}\left|\frac{x\alpha-\left(x^\alpha+\alpha-1\right)}{(1-x)\left(1-x^\alpha\right)}\right|=\left(\frac{0}{0}\right)=\frac{1}{4}\lim_{x\to 1-0}\left|\frac{\alpha-\alpha\cdot x^{\alpha-1}}{-\left(1-x^\alpha\right)-\alpha x^{\alpha-1}(1-x)}\right|=$$

$$=\left(\frac{0}{0}\right)=\frac{1}{4}\lim_{x\to 1-0}\left|\frac{(1-\alpha)\cdot\alpha\cdot x^{\alpha-2}}{\alpha\cdot x^{\alpha-1}+(1-\alpha)\cdot\alpha\cdot x^{\alpha-2}(1-x)+\alpha\cdot x^{\alpha-1}}\right|=\frac{1}{4}\left|\frac{(1-\alpha)\cdot\alpha}{2\cdot\alpha}\right|=\frac{|1-\alpha|}{8},$$

т.е. $C_2^{'}=|1-\alpha|/8$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Приведем доказательство для тех значений параметра α и $0<\tau<t<\infty$, для которых разность $Q^{'}(t,\tau)-Q_2^{'}(t,\tau)\geq 0$. А для тех значений параметра α и $0<\tau<t<\infty$, для которых разность $Q^{'}(t,\tau)-Q_2^{'}(t,\tau)<0$, достаточно будет в доказательстве поменять ролями функции $Q^{'}(t,\tau)$ и $Q_2^{'}=(t,\tau)$; $P^{'}(t,\tau)$ и $P_2^{'}(t,\tau)$ соответственно.

$$\left|K^{'}(t,\tau)-K_2^{'}(t,\tau)\right|=\left|P^{'}(t,\tau)\exp\left\{-Q^{'}(t,\tau)\right\}-P_2^{'}(t,\tau)\exp\left\{-Q_2^{'}(t,\tau)\right\}\right|=$$

$$=\left|P^{'}(t,\tau)\exp\left\{-Q^{'}(t,\tau)\right\}-P_2^{'}(t,\tau)\exp\left\{-Q_2^{'}(t,\tau)\right\}+P_2^{'}(t,\tau)\exp\left\{-Q^{'}(t,\tau)\right\}-P_2^{'}(t,\tau)\exp\left\{-Q_2^{'}(t,\tau)\right\}\right|\leq$$

$$\leq\left|\left(P^{'}(t,\tau)-P_2^{'}(t,\tau)\right)\exp\left\{-Q^{'}(t,\tau)\right\}+P_2^{'}(t,\tau)\left[\exp\left\{-Q^{'}(t,\tau)\right\}-\exp\left\{-Q_2^{'}(t,\tau)\right\}\right|\leq$$

$$\leq\left|\left(P^{'}(t,\tau)-P_2^{'}(t,\tau)\right)\right|\exp\left\{-Q^{'}(t,\tau)\right\}+\left|P_2^{'}(t,\tau)\right|\exp\left\{-Q^{'}(t,\tau)\right\}\left|\left(1-\exp\left(-Q_2^{'}(t,\tau)\right)+Q^{'}(t,\tau)\right)\right|\leq$$

$$\leq\left|\left(P^{'}(t,\tau)-P_2^{'}(t,\tau)\right)\right|\exp\left\{-Q^{'}(t,\tau)\right\}+P_2^{'}(t,\tau)\left|\left(-Q_2^{'}(t,\tau)\right)+Q^{'}(t,\tau)\right|\exp\left\{-Q^{'}(t,\tau)\right\}.$$

Используя лемму (1) и следующее двойное неравенство [4; 55]:

$$b_1\cdot t^{\alpha-1}(t-\tau)\leq t^\alpha-\tau^\alpha\leq b_2\cdot t^{\alpha-1}(t-\tau), \tag{18}$$

где

$$b_1=\min\{1,\alpha\},\quad b_2=\max\{1,\alpha\},$$

вначале получим

$$\exp\left\{-Q^{'}(t,\tau)\right\}=\exp\left\{-\frac{\alpha\cdot t^\alpha\cdot\tau^\alpha}{4\left(t^\alpha-\tau^\alpha\right)}\right\}\leq\exp\left\{-\frac{\alpha}{b_2}\cdot\frac{t^\alpha\cdot\tau^\alpha}{t^{\alpha-1}(t-\tau)}\right\}=\exp\left\{-\frac{\alpha}{b_2}\cdot\frac{t\cdot\tau^\alpha}{4\left(t^\alpha-\tau^\alpha\right)}\right\}.$$

Далее имеем

$$\left|\left(P^{'}(t,\tau)-P_2^{'}(t,\tau)\right)\right|\exp\left\{-Q^{'}(t,\tau)\right\}\leq C_1\cdot\frac{t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}}}{\sqrt{t-\tau}}\cdot\exp\left\{-\frac{\alpha}{b_2}\cdot\frac{t\cdot\tau^\alpha}{4(t-\tau)}\right\};$$

$$P_2^{'}(t,\tau)\left|\,Q_2^{'}(t,\tau)-Q^{'}(t,\tau)\right|\cdot\exp\left\{-Q^{'}(t,\tau)\right\}\leq$$

$$\leq C_2\cdot\frac{t^{\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}}\cdot\tau^\alpha\cdot t^\alpha}{2\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}}\cdot\exp\left\{-\frac{\alpha}{b_2}\cdot\frac{t\cdot\tau^\alpha}{8(t-\tau)}\right\}\cdot\exp\left\{-\frac{\alpha}{b_2}\cdot\frac{t\cdot\tau^\alpha}{8(t-\tau)}\right\}\leq$$

$$\leq C_2\cdot\frac{t^{\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}}\cdot\tau^\alpha\cdot t^\alpha}{2\sqrt{\pi}\cdot(t-\tau)^{3/2}}\cdot\frac{b_2\cdot(t-\tau)}{t\cdot\tau^{\alpha\cdot\alpha}}\cdot\frac{\alpha}{b_2}\cdot\frac{t\cdot\tau^\alpha}{8(t-\tau)}\cdot\exp\left\{-\frac{\alpha}{b_2}\cdot\frac{t\tau^\alpha}{8(t-\tau)}\right\}\cdot\exp\left\{\frac{\alpha}{b_2}\cdot\frac{t\cdot\tau^\alpha}{8(t-\tau)}\right\}\leq$$

$$\leq\left\|x\cdot e^{-x}\leq\frac{1}{e}\right\|\leq C_3\cdot\frac{t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}}}{\sqrt{t-\tau}}\cdot\exp\left\{\frac{\alpha}{b_2}\cdot\frac{t\cdot\tau^\alpha}{8(t-\tau)}\right\}.$$

Таким образом, получим

$$\left|K^{'}(t,\tau)-K_2^{'}(t,\tau)\right|\leq C\frac{t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}}}{\sqrt{t-\tau}}\exp\left\{-C\cdot\frac{t\cdot\tau^\alpha}{t-\tau}\right\}.$$

Выполнение неравенства (15) означает, что ядро

$$K_0'(t,\tau)=K_2'(t,\tau)-K'(t,\tau)$$

имеет слабую особенность и справедливо следующее предельное соотношение:

$$\lim_{t\to 0}\int_0^t \frac{t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}}}{\sqrt{t-\tau}}\cdot\exp\left\{-C\cdot\frac{t\cdot\tau^{\alpha}}{(t-\tau)}\right\}d\tau \le \lim_{t\to 0}\int_0^t \frac{t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}}}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau=0,$$

значит, уравнение (5) действительно является характеристическим для уравнения (2).

Таким образом, теорема 2, а тем самым и теорема 1 доказаны.

Как было отмечено ранее, если в характеристическом интегральном уравнении (5) произвести замены независимых переменных $(\alpha=1-2\omega>0)$:

$$t=\left[\alpha t_1\right]^{1/\alpha},\quad \tau=\left[\alpha\tau_1\right]^{1/\alpha}$$

и ввести обозначения

$$\tilde{\psi}(t_1)=v\left(\left[\alpha t_1\right]^{1/\alpha}\right),\qquad \tilde{g}_2(t_1)=g\left(\left[\alpha t_1\right]^{1/\alpha}\right); \tag{19}$$

$$k(z)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}z^{3/2}}\exp\left(-\frac{1}{4z}\right), \tag{20}$$

то получим следующее эталонное интегральное уравнение [4]:

$$k_{\lambda}^{*}\tilde{\psi}\equiv\left(I-\lambda k^{*}\right)\tilde{\psi}\equiv\tilde{\psi}(t)-\lambda\int_{t_1}^{\infty}\left(\frac{t_1}{\tau_1}\right)^{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{2}}\cdot k(\tau_1-t_1)\tilde{\psi}(\tau_1)d\tau_1=\tilde{g}_2(t_1); \tag{21}$$

$$0<t_1<\tau_1<\infty.$$

Используя его решение, запишем решение характеристического интегрального уравнения (5) в виде $(\alpha>0)$

$$v(t)=\tilde{\psi}\left(\left[\alpha^{-1}t^{\alpha}\right]\right)=g_1(t)+\lambda\int_t^{\infty}\left(\frac{t}{\tau}\right)^{1+\frac{\alpha}{2}}\cdot\tau^{\alpha-1}\cdot r_{\lambda-}\left(\left[\alpha^{-1}\tau^{\alpha}\right]\right)-$$

$$-\left[\alpha^{-1}\tau^{\alpha}\right]g_1(\tau)d\tau+\sum_{k=-N_1}^{N_2}c_k t^{1+\alpha/2}\cdot\exp\left(\frac{-iz_k}{\alpha}\cdot t^{\alpha}\right),\quad t\in R_+\ (*),$$

где

$$r_{\lambda-}(y)=\frac{1}{2\pi(-\theta)^{3/2}}\sum_{m=1}^{\infty}m\cdot\lambda^m\cdot\exp\left(\frac{m^2}{4y}\right),\ |\lambda|<1,\quad y\in R_-;$$

$$r_{\lambda-}(y)=2\sum_{k=-\infty}^{-(N_1+1)}\sqrt{-p_k}\cdot\exp(p_k\cdot y)+2\sum_{k=N_2+1}^{\infty}\sqrt{-p_k}\cdot\exp(p_k\cdot y)+$$

$$+\frac{1}{2\pi(-y)^{3/2}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{m}{\lambda^m}\cdot\exp\left(\frac{m^2}{4y}\right),\qquad \operatorname{Re}p_k>0,\ |\lambda|\ge 1,\quad y\in R_- -$$

$$-N_1\le k\le N_2,\quad N_1=\left[\frac{\ln|\lambda|+\arg\lambda}{2\pi}\right],\quad N_2=\left[\frac{\ln|\lambda|-\arg\lambda}{2\pi}\right].$$

Линии, описываемые уравнением $|\lambda|=\exp\left(|\arg\lambda+2k\pi|\right)$, делят комплексную плоскость параметра λ на непересекающиеся области D_m, $m=0,1,2,\ldots$, следующим образом:

$$D_{2n}=\left\{D_n^{(1)}\bigcap D_n^{(2)}\right\}\setminus\bigcup_{k=-1}^{2n-1}D_k;\quad D_{-1}=\varnothing,\ D_{2n+1}=\left\{D_n^{(1)}\bigcup D_n^{(2)}\right\}\setminus\bigcup_{k=0}^{2n}D_k; \tag{22}$$

где

$$D_n^{(1)}=\left\{\lambda:|\lambda|<\exp\left[(2n+1)\pi-\arg\lambda\right]\right\},\quad D_n^{(2)}=\left\{\lambda:|\lambda|<\exp\left[2n\pi+\arg\lambda\right]\right\},\ n=0,1,2,\ldots$$

Внешние части границ ∂D_m, $m = 0,1,2,...$, областей D_m, $m = 0,1,2,...$, обозначим, соответственно, через Γ_m, $m = 0,1,2,...$

Теперь найдем решение исходного интегрального уравнения методом регуляризации Карлемана-Векуа. Введем обозначение

$$\tilde{K}(\tau,t) = K_2(\tau,t) - K(\tau,t) \tag{23}$$

и запишем исходное интегральное уравнение (2) в виде

$$\tilde{\mathrm{K}}_\lambda \tilde{v} \equiv v(t) - \lambda \int_t^\infty K(\tau,t) v(\tau) d\tau = \lambda \int_t^\infty \tilde{K}(\tau,t) v(\tau) d\tau + g_1(t). \tag{24}$$

Рассматривая уравнение (24) как характеристическое, т.е. считая правую часть этого уравнения временно известной, запишем его решение:

$$v(t) \equiv g(t) - \lambda \int_t^\infty \tilde{K}(t,\tau) v(\tau) d\tau + \lambda \int_t^\infty \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1+\alpha/2} \tau^{\alpha-1} r_{\lambda-}\left(\frac{\tau^\alpha}{\alpha} - \frac{t^\alpha}{\alpha}\right) \times$$

$$\times \left[g_1(\tau) d\tau + \lambda \int_\tau^\infty \tilde{K}(\xi,\tau) v(\xi) d\xi \right] d\tau + \sum_{k=-N_1}^{N_2} c_k t^{1+\alpha/2} \exp\left(\frac{p_k}{\alpha} t^\alpha\right).$$

Преобразуем правую часть последнего равенства:

$$v(t) \equiv g_1(t) + \lambda \int_t^\infty \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1+\alpha/2} \tau^{\alpha-1} r_{\lambda-}\left(\frac{\tau^\alpha}{\alpha} - \frac{t^\alpha}{\alpha}\right) \cdot g_1(\tau) d\tau +$$

$$+ \sum_{k=-N_1}^{N_2} c_k t^{1+\alpha/2} \exp\left(\frac{p_k}{\alpha} \cdot t^\alpha\right) + \lambda \int_\tau^\infty \tilde{K}(\tau,t) v(\tau) d\tau +$$

$$+ \lambda \int_t^\infty v(\xi)\, d\xi \int_t^\infty \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1+\alpha/2} \cdot \tau^{\alpha-1} \cdot r_{\lambda-}\left(\frac{\tau^\alpha}{\alpha} - \frac{t^\alpha}{\alpha}\right) \cdot \tilde{K}(\xi,\tau) d\tau. \tag{25}$$

Поменяв ролями переменные интегрирования ξ и τ в повторном интеграле последнего уравнения, получим новое регуляризованное уравнение относительно искомой функции $v(t)$:

$$\tilde{\mathrm{K}}_\lambda^* v \equiv \left(I - \lambda \widehat{K}^*\right) v \equiv v(t) - \lambda \int_t^\infty \widehat{K}(\tau,t) v(\tau) d\tau = \widehat{g}(t) + \sum_{k=-N_1}^{N_2} c_k \cdot t^{1+\alpha/2} \cdot \exp\left(\frac{p_k}{\alpha} \cdot t^\alpha\right), \tag{26}$$

где использовали обозначения:

$$\widehat{K}(t,\tau) = \tilde{K}(t,\tau) + \lambda \int_t^\infty \left(\frac{t}{\xi}\right)^{1+\alpha/2} \xi^{\alpha-1} r_{\lambda-}\left(\frac{\tau^\alpha}{\alpha} - \frac{t^\alpha}{\alpha}\right) \cdot \tilde{K}(\tau,\xi) d\xi = \tilde{K}(t,\tau) + \lambda \tilde{\tilde{K}}(t,\tau); \tag{27}$$

$$\widehat{g}_1(t) = g_1(t) + \lambda \int_t^\infty \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1+\alpha/2} \tau^{\alpha-1} r_{\lambda-}\left(\frac{\tau^\alpha}{\alpha} - \frac{t^\alpha}{\alpha}\right) g_1(\tau) d\tau. \tag{28}$$

Покажем, что интегральное уравнение (26) действительно регулярное (имеет единственное решение), для этого достаточно показать справедливость следующей оценки:

$$\left|\widehat{K}(\tau)\right| \le C(\alpha) \frac{t^{-\varepsilon}}{\tau^{1/2+\alpha/2-\varepsilon} (\tau - t)^{1/2}} \cdot \exp\left\{-C(\alpha) \cdot \frac{\tau^{1-\alpha}}{\tau - t}\right\}; \tag{29}$$

$$0 < \varepsilon < \alpha/2, \quad \alpha > 0, \quad 0 < t < \tau < \infty.$$

Для регуляризации особых интегральных уравнений с бесконечным пределом интегрирования целесообразнее переходить к уравнениям на конечном интервале. Поэтому вначале преобразуем интегральное уравнение (25) к уравнению на конечном интервале. Для этого в нем произведем замены независимых переменных:

$$t = t_1^{-1}; \quad \tau = \tau_1^{-1}$$

и получим

$$v(t_1) - \lambda \int_0^{t_1} K'(t_1,\tau_1) v(\tau_1) d\tau_1 = \lambda \int_0^{t_1} \tilde{K}'(t_1,\tau_1) v(\tau_1) d\tau + g_1(t_1) \tag{30}$$

где

$$\tilde{K}'(t_1,\tau_1) = K_2'(t_1,\tau_1) - K'(t_1,\tau_1); \qquad (31)$$

и ядра $K_2'(t_1,\tau_1)$, $K'(t_1,\tau_1)$ определяются из равенств (13). Соответственно равенства (26)–(28) примут вид

$$\mathrm{K}_{\lambda}^{*'}\tilde{v} \equiv \left(I - \lambda\hat{K}^{*'}\right)v \equiv v(t_1) - \lambda\int_0^{t_1}\hat{K}'(t_1,\tau_1)v(\tau_1)\,d\tau_1 =$$

$$= \hat{g}(t_1) + \sum_{k=-N_1}^{N_2} c_k \cdot t_1^{-1-\alpha/2}\cdot\exp\left(\frac{p_k}{\alpha}\cdot t^{-\alpha}\right). \qquad (32)$$

Здесь использованы обозначения

$$\hat{K}'(t_1,\tau_1) = \tilde{K}'(t_1,\tau_1) + \lambda\int_{\tau_1}^{t_1}\left(\frac{\xi}{t_1}\right)^{1+\alpha/2}\cdot\xi^{-\alpha-1}\cdot r_{\lambda-}\left(\left[\alpha t_1^{\alpha}\right]^{-1} - \left[\alpha\xi^{\alpha}\right]^{-1}\right)\cdot\tilde{K}'(\tau_1,\xi)\,d\xi =$$

$$= \hat{K}'(t_1,\tau_1) + \lambda\cdot\tilde{\tilde{K}}'(t_1,\tau_1); \qquad (33)$$

$$\hat{g}_l(t_1) = g_l(t_1) + \lambda\int_0^{t_1}\left(\frac{\tau_l}{t_1}\right)^{1+\alpha/2}\cdot\tau_1^{-\alpha-1}\cdot r_{\lambda-}\left(\left[\alpha\cdot t_1^{\alpha}\right]^{-1} - \left[\alpha\cdot\tau_1^{\alpha}\right]^{-1}\right)\cdot g_1(\tau_1)\,d\tau_1. \qquad (34)$$

Теперь покажем, что интегральное уравнение (32) действительно регулярное (вольтеррово), для этого достаточно доказать справедливость следующей леммы:

Лемма 2. Ядро интегрального уравнения (32) имеет слабую особенность, т.е. справедлива оценка

$$\left|\hat{K}'(t_1,\tau_1)\right| \le C\frac{t_1^{1/2+\varepsilon}}{\tau_1^{1-\alpha/2+\varepsilon}(t_1-\tau_1)^{1/2}}\exp\left\{-c(\alpha)\cdot\frac{t_1\cdot\tau_1^{\alpha}}{t_1-\tau_1}\right\}; \qquad (35)$$

$$0<\varepsilon<\alpha/2;\ \alpha>0;\ 0<\tau_1<t_1<\infty.$$

Доказательство. Так как $\hat{K}'(t,\tau)$ имеет представление $\tilde{K}'(t,\tau) + \lambda\ \tilde{\tilde{K}}'(t,\tau)$ то оценка (35) следует из (15) и приведенных ниже соотношений. Используя следующее двойное неравенство [5]:

$$C_1\,t^{\alpha-1}(t-\tau) \le t^{\alpha} - \tau^{\alpha} \le C_2\,t^{\alpha-1}(t-\tau),\quad C_1 = \min\{1,\alpha\},\ C_2 = \max\{1,\alpha\},$$

вначале получим $(\alpha = 1-2\omega > 0)$

$$\tilde{\tilde{K}}'(t,\tau) \le M_1(\alpha)\int_{\tau}^{t}\eta^{-\alpha-1}\left(\frac{\eta}{\tau}\right)^{1-\alpha/2}\cdot\frac{\eta^{(\alpha-1)/2}}{\sqrt{\eta-\tau}}\cdot\frac{\sqrt{t}\eta^{\alpha/2}}{\sqrt{t-\eta}}\exp\left(-\frac{C_1(\alpha)(t-\eta)}{t\eta^{\alpha}}\right)d\eta +$$

$$+M_2(\alpha)\int_{\tau}^{t}\eta^{-\alpha-1}\left(\frac{\eta}{\tau}\right)^{1-\alpha/2}\cdot\frac{\eta^{(\alpha-1)/2}}{\sqrt{\eta-\tau}}\cdot\frac{t^{3/2}\eta^{3\alpha/2}}{(t-\eta)^{3/2}}\exp\left(-\frac{C_2(\alpha)\,t\eta^{\alpha}}{t-\eta}\right)d\eta = J_1(t,\tau) + J_2(t,\tau).$$

Здесь $C_j(\alpha),\ M_j(\alpha),\quad j=1,2$ — постоянные, зависящие только от α, функции $J_1(t,\tau),\ J_2(t,\tau)$ соответственно равны

$$J_1 = M_1(\alpha)\frac{\sqrt{t}}{\tau^{1-\alpha/2}}\int_{\tau}^{t}\frac{1}{\eta^{(\alpha+1)/2}\sqrt{(\eta-\tau)(t-\eta)}}\exp\left(-\frac{C_1(\alpha)(t-\eta)}{t\eta^{\alpha}}\right)d\eta = M_1(\alpha)\frac{\sqrt{t}}{\tau^{1-\alpha/2}}I_1(t,\tau);$$

$$J_2 = M_2(\alpha)\frac{\sqrt{t}}{\tau^{1-\alpha/2}}\int_{\tau}^{t}\frac{t\eta^{(\alpha+1)/2}}{(t-\eta)^{3/2}(\eta-\tau)^{1/2}}\exp\left(-\frac{C_2(\alpha)\,t\eta^{\alpha}}{t-\eta}\right)d\eta = M_2(\alpha)\frac{\sqrt{t}}{\tau^{1-\alpha/2}}I_2(t,\tau).$$

Далее каждую из функций $I_1(t,\tau),\ \ I_2(t,\tau)$ представим в виде суммы из двух слагаемых:

$$I_1(t,\tau) = I_{11}(t,\tau) + I_{12}(t,\tau);\quad I_2(t,\tau) = I_{21}(t,\tau) + I_{22}(t,\tau),$$

для каждого из которых последовательно будем иметь:

$$J_{11}(t,\tau) = \int_{\tau}^{\frac{t+\tau}{2}}\frac{1}{\eta^{(\alpha+1)/2}\sqrt{(\eta-\tau)(t-\eta)}}\exp\left(-\frac{C_1(\alpha)(t-\eta)}{t\eta^{\alpha}}\right)d\eta \le$$

$$\le C(\alpha)\sqrt{t}\int\limits_{\tau}^{\frac{t+\tau}{2}}\frac{\sqrt{t}\,d\eta}{(t-\eta)\sqrt{\eta(\eta-\tau)}}\le\left\|z^2=\frac{t-\tau}{t-\eta}-1\right\|\le$$

$$\le\frac{C(\alpha)}{\sqrt{t-\tau}}\int\limits_0^1\frac{dz}{\sqrt{z^2+\tau/t}}=\frac{C(\alpha)}{\sqrt{t-\tau}}\ln\left(\sqrt{t/\tau}+\sqrt{t/\tau+1}\right)=$$

$$=\frac{C(\alpha)}{\sqrt{t-\tau}}\ln\frac{1+\sqrt{1+\tau/t}}{\sqrt{\tau/t}}\le\frac{C(\alpha)}{\sqrt{t-\tau}}\ln\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{\tau/t}}\le$$

$$\le\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\left[C_1+C_2(\tau/t)^{\varepsilon}\left|\ln\frac{\tau}{t}\right|\cdot(t/\tau)^{\varepsilon}\right]=\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\left[C_1+C_3(t/\tau)^{\varepsilon}\right].$$

Здесь значение параметра ε выбирается из условия $0<\varepsilon<\alpha/2$;

$$I_{12}(t,\tau)=\int\limits_{(t+\tau)/2}^{t}\frac{1}{\eta^{(\alpha+1)/2}\sqrt{(\eta-\tau)(t-\eta)}}\exp\left(-\frac{C_1(\alpha)(t-\eta)}{t\eta^{\alpha}}\right)d\eta\le$$

$$\le\left(\frac{2}{(t-\tau)}\right)^{(\alpha+1)/2}\frac{C(\alpha)}{\sqrt{t-\tau}}\int\limits_{(t+\tau)/2}^{t}\frac{1}{\sqrt{(t-\eta)}}\exp\left(-\frac{C_1(\alpha)(t-\eta)}{t^{\alpha+1}}\right)d\eta\le$$

$$\le C(\alpha)\left(\frac{t}{(t+\tau)}\right)^{(\alpha+1)/2}\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\cdot\int\limits_{(t+\tau)/2}^{t}\exp\left(-\frac{C_1(\alpha)(t-\eta)}{t^{\alpha+1}}\right)d\left(\frac{\sqrt{C_1(\alpha)(t-\eta)}}{t^{(\alpha+1)/2}}\right)\le$$

$$\le\left\|z=\frac{\sqrt{C_1(\alpha)(t-\eta)}}{t^{(\alpha+1)/2}}\right\|\le\frac{C(\alpha)}{\sqrt{t-\tau}}\int\limits_0^{\infty}\exp\left\{-z^2\right\}dz\le\frac{C(\alpha)}{\sqrt{t-\tau}};$$

$$I_{21}(t,\tau)=\int\limits_{\tau}^{(t+\tau)/2}\frac{\sqrt{t}\eta^{(\alpha-1)/2}}{(t-\eta)^{3/2}(\eta-\tau)^{1/2}}\exp\left(-\frac{C_2(\alpha)\,t\eta^{\alpha}}{t-\eta}\right)d\eta\le C(\alpha)\int\limits_{\tau}^{\frac{t+\tau}{2}}\frac{\sqrt{t}d\eta}{(t-\eta)\sqrt{\eta(\eta-\tau)}}\le$$

$$\le\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\left[C_1+C_2(\tau/t)^{\varepsilon}\left|\ln\frac{\tau}{t}\right|\cdot(t/\tau)^{\varepsilon}\right]=\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\left[C_1+C_3(t/\tau)^{\varepsilon}\right],$$

где последнее неравенство получается так же, как и при оценке функции $I_{11}(t,\tau)$, и значение параметра ε выбирается также из условия $0<\varepsilon<\alpha/2$;

$$I_{22}(t,\tau)=\int\limits_{(t+\tau)/2}^{t}\frac{t\eta^{(\alpha-1)/2}}{(t-\eta)^{3/2}(\eta-\tau)^{1/2}}\exp\left(-\frac{C_2(\alpha)\,t\eta^{\alpha}}{t-\eta}\right)d\eta\le$$

$$\le\frac{C(\alpha)}{\sqrt{t-\tau}}\int\limits_{(t+\tau)/2}^{t}\frac{t\eta^{(\alpha-1)/2}}{(t-\eta)^{3/2}}\exp\left(-\frac{C_3(\alpha)\,t(t+\tau)^{\alpha}}{t-\eta}\right)d\eta=$$

$$=\frac{C(\alpha)}{\sqrt{t-\tau}}\int\limits_{(t+\tau)/2}^{t}\frac{t\eta^{(\alpha-1)/2}}{(t-\eta)^{3/2}}\exp\left(-\frac{C_3(\alpha)\,t^{\alpha+1}}{t-\eta}\left\{1+\frac{\tau}{t}\right\}^{\alpha}\right)d\eta\le$$

$$\le\frac{C(\alpha)}{\sqrt{t-\tau}}\int\limits_0^t\frac{t^{(\alpha+1)/2}}{(t-\eta)^{3/2}}\exp\left(-\frac{C_4(\alpha)\,t^{\alpha+1}}{t-\eta}\right)d\eta=\left\|\begin{aligned}z&=\frac{t^{(\alpha+1)/2}}{2\sqrt{t-\eta}}\\dz&=\frac{t^{(\alpha+1)/2}d\eta}{4(t-\eta)^{3/2}}\end{aligned}\right\|=$$

$$=\frac{C(\alpha)}{\sqrt{t-\tau}}\int\limits_{t^{\alpha/2}/2}^{\infty}\exp\left\{-z^2\right\}dz\le\frac{C(\alpha)}{\sqrt{t-\tau}}.$$

В этих неравенствах постоянные $C(\alpha)$, $C_j(\alpha)$, $j=1,2,3,4$, разные и зависят только от α. Из полученных неравенств следует искомая оценка (35). Лемма доказана.

Итак, в силу оценки (35) для заданной правой части, уравнение (32), а вместе с ним и уравнение (26) имеют только единственное решение, существование которого можно показать методом последовательных приближений.

Из соотношений (24) и (26) следует, что однородное уравнение

$$K_{2\lambda}^{*}v \equiv \left(I - \lambda K_2\right)v \equiv v\left(t\right) - \lambda \int\limits_t^{\infty} K_2\left(\tau, t\right)v\left(\tau\right)d\tau = 0,\ t \in R_+ \qquad (36)$$

равносильно неоднородному уравнению

$$\widehat{K}_{\lambda}^{*}v \equiv v\left(t\right) - \lambda \int\limits_t^{\infty} \widehat{K}\left(\tau, t\right)\mu\left(\tau\right)d\tau = \sum_{k=-N_1}^{N_2} c_k \cdot t^{1+\alpha/2} \cdot \exp\left(\frac{p_k}{\alpha} \cdot t^{\alpha}\right),\ t \in R_+. \qquad (37)$$

Рассмотрим вместо (37) семейство интегральных уравнений:

$$\widehat{K}_{\lambda}^{*}\mu \equiv v\left(t\right) - \lambda \int\limits_t^{\infty} \widehat{K}\left(t, \tau\right)v\left(\tau\right)d\tau = t^{1+\alpha/2} \cdot \exp\left(\frac{p_k}{\alpha} \cdot t^{\alpha}\right),\ k = -N_1, \ldots., 0,\ N_2, \quad t \in R_+. \qquad (38)$$

Далее в силу того, что каждое из уравнений (38) имеет единственное нетривиальное решение $v_{\lambda k}\left(t\right),\ k = -N_1, \ldots, 0, \ldots, N_2,$ соответствующее правой части уравнения (38) $t^{1+\alpha/2} \cdot \exp\left(\frac{p_k}{\alpha} \cdot t^{\alpha}\right)$, то для каждого значения параметра $\lambda \in C \setminus D_0$ эти функции $v_{\lambda k}\left(t\right),\ k = -N_1, \ldots, 0, \ldots, N_2,$ будут соответствующими собственными функциями однородного уравнения (36) (а значит, и однородного для (2) уравнения.

Теорема 3. Значения $\lambda \in D_0$ из (22) являются регулярными числами оператора $K_{2\lambda}^{*}$ (2).

Теорема 4. Множество $C \setminus D_0$ составляют характеристические числа оператора $K_{2\lambda}^{*}$ (2). Причем если $\lambda \in D_m \bigcup \Gamma_{m-1} \setminus \left\{\left(-1\right)^m e^{m\pi}\right\},\ m = 1, 2, \ldots,$ то $dim\, Ker\left(K_{2\lambda}^{*}\right) = m;$ и соответствующими собственными функциями будут решения уравнений (38):

$$v_{\lambda k}\left(t\right) = \left[\widehat{K}_{\lambda}^{*}\right]^{-1}\left[t^{1+\alpha/2} \cdot \exp\left(\frac{p_k}{\alpha} \cdot t^{\alpha}\right)\right],\ k = 1, \ldots.,\ m = N_1 + N_2 + 1.$$

Общим решением неоднородного интегрального уравнения (26), равно как и уравнения (2), будет функция

$$v_{\lambda}\left(t\right) = \left[\widehat{K}_{\lambda}^{*}\right]^{-1}\hat{g}\left(t\right) + \sum_{k=1}^{m=N_1+N_2+1} c_k \cdot v_{\lambda k}\left(t\right), \quad t \in R_+,$$

где c_k — произвольные постоянные, $k = 1, \ldots, m.$

Список литературы

1 *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии. — М.: Высш. шк., 1995. — 205 с.

2 *Нахушев А.М.* Нагруженные уравнения и их применение. — М.: Наука, 2012. — 232 с.

3 *Полянин А.Д., Манжиров А.В.* Справочник по интегральным уравнениям. — М.: Физматлит, 2003. — С. 608.

4 *Akhmanova D.M., Dzhenaliyev M.T., Ramazanov M.I.* On a particular Volterra integral equation of second kind with a spectral parameter // Siberian Mathematical Journal. — 2011. — Vol. 52. — № 1. — P. 1–12.

5 *Харди Г.Г., Литтльвуд Дж.Е., Полиа Г.* Неравенства. — М.: Иностр. лит, 1948. — С. 55.

Д.М.Ахманова, А.Е.Өмірбекова

Дельта тәрізді өзекті Вольтерра интегралдық теңдеуі туралы

Мақалада жүктелген жылуөткізгіштік теңдеуі үшін шеттік есептер қатарына редуцирленетін екінші текті Вольтерра сингулярлы интегралдық теңдеуі қарастырылған. Интегралдау аралығының шексіздігіне және дельта тәрізді өзегіне байланысты мұнда біртіндеп жуықтау әдісін қолдануға келмейді. Шешімі айқын түрде табылған сәйкес сипаттамалық теңдеу құрастырылған. Бастапқы теңдеуге тең қуатты регуляризациялау әдісі қолданылып, оның спектрі табылған.

D.M.Akhmanova, A.Ye.Omirbekova

On an integral of equation of Voltaire with delta-type kernel

The article considers the singular integral equation Volterra of the second kind, which reduces number of boundary value problems for the heat equation loaded. In view of unbounded intervals of integration and delta kernel does not apply to it the method of successive approximations. Construct the corresponding characteristic equation, the solution of which is found in explicit form. For the original equation, the method of equivalent regularization, found its spectrum.

References

1 Nakhushev A.M. *Equations of Mathematical Biology*, Moscow: Vysh. shk, 1995, 205 p.
2 Nakhushev A.M. *Loaded equations and their applications*, Moscow: Nauka, 2012, 232 p.
3 Polyanin A.D., Manzhirov A.V. *Handbook of Integral Equations*, Moscow: Fizmatlit, 2003, p. 608.
4 Akhmanova D.M., Dzhenaliyev M.T., Ramazanov M.I. *Siberian Mathematical Journal*, 2011, 52, 1, p. 1–12.
5 Hardy G.G., Littlewood D.E., Polya G. *Inequalities*, Moscow: Inostrannaya literatura, 1948, p. 55.

УДК 621.3.019

А.И.Годунов[1], Б.Ж.Куатов[2], Д.М.Сущик[2]

[1]Пензенский государственный университет, Россия;
[2]Военный институт Сил воздушной обороны, Актобе
(E-mail: kuatov.baurjan@mail.ru)

Алгоритмы контроля действий лётного экипажа по управлению летательным аппаратом

В статье рассмотрены алгоритмы контроля действий лётного экипажа по управлению летательным аппаратом (ЛА). В этой связи отмечено, что управление летательным аппаратом, реализуемое человеком-оператором, носит кусочно-непрерывный характер и представляет собой совокупность отдельных операций. При этом под операцией понимается такое действие человека по управлению ЛА, для которого существует совокупность условий, определяющих его начало и конец. Логический контроль управления движением летательным аппаратом заключается в проверке соответствия действий оператора требуемой логике управления в текущий момент времени. Проведенный анализ операторской деятельности лётных экипажей при управлении летательного аппарата позволил определить перечень возможных ошибок, возникающих в процессе этой деятельности.

Ключевые слова: летательный аппарат, экипаж, контроль управления движением.

Сложность работы экипажа определяется необходимостью восприятия в каждый момент времени большого количества различных сигналов, принятия решения на основе всей получаемой информации, выполнения необходимых действий в соответствии с принятым решением за ограниченные промежутки времени. Рассматривая управление летательного аппарата, реализуемое человеком-оператором, следует отметить, что такое взаимодействие носит кусочно-непрерывный характер и представляет собой совокупность отдельных операций. При этом под операцией понимается такое действие человека по управлению ЛА, для которого существует совокупность условий, определяющих его начало и конец.

Экипаж, выполняя полет по заданной траектории, должен управлять процессом движения ЛА. Если экипаж обнаруживает отклонения от курса движения либо от заданной высоты и скорости, то в штурвальном и директорном режимах такие отклонения ликвидируются действиями самого экипажа. Для оценки точности пилотирования рассмотрим понятие близости кривых.

Кривые $y = f(x)$ и $y = f_1(x)$ близки в смысле близости k-го порядка, если модули разностей достаточно малы [1–5].

$$\left|f(x)-f_1(x)\right|;$$
$$\left|f'(x)-f_1'(x)\right|;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$
$$\left|f^{(k)}(x)-f_1^{(k)}(x)\right|.$$

Чтобы интерпретировать смысл введенного понятия близости применительно к траекториям полета ЛА, предположим, что заданная траектория $y=f(x)$ изображается отрезком прямой, совпадающей с осью x. Тогда на интервале $[x_0;\ x]$ расстояние нулевого порядка будет равно $y_0=\left|f_1(x)\right|_{\max}=\left|y\right|_{\max}$, $x_0 \le x \le x_1$, т.е. оно представляет собой абсолютную величину максимального линейного бокового уклонения ЛА от заданного маршрута $l_{\max}$.

Расстояние первого порядка на интервале от x_0 до x_K будет равно

$$y=\left|f'(x)\right|_{\max}.$$

Из геометрического смысла первой производной как тангенса угла наклона касательной к кривой следует, что расстояние первого порядка представляет собой абсолютную величину максимального значения разности фактического и заданного путевых углов. Для малых отклонений угла $\Delta\beta$

$$y_1=\left|tg\Delta\beta\right|_{\max}\approx\left|\Delta\beta\right|_{\max}.$$

Для прямолинейного этапа маршрута расстояния первого порядка определяются максимальным значением разности $\Delta\beta$ между фактическим и заданным направлениями полета.

Для выяснения смысла расстояния второго порядка применительно к траекториям полета воспользуемся понятием кривизны кривой, под которой понимается предел отношения угла $\Delta\beta$ поворота касательной при смещении точки касания по дуге на величину ΔS, если эту величину устремить к нулю:

$$K=\lim\frac{\Delta\beta}{\Delta S}=\frac{d\beta}{dS}=\frac{1}{R},$$

где R — радиус кривизны кривой.

С другой стороны, кривизна K может быть представлена в виде

$$K=\frac{\dfrac{d^2x}{dx^2}}{\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}.$$

Если в этом соотношении предположить, что $\dfrac{dy}{dx}=0,$ т.е. рассмотреть точки траектории, в которых касательная к ней параллельна оси абсцисс и, следовательно, вектор скорости параллелен линии заданного пути, то выражение для кривизны примет вид

$$K=\frac{d^2y}{dx^2}\ \text{при}\ \frac{dy}{dx}=0. \qquad (1)$$

Эта формула характеризует кривизну линии заданного пути в точках ее максимумов.

Расстояние второго порядка для этого случая выразится в виде

$$y_2=\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{\max}. \qquad (2)$$

Сравнивая выражения (1) и (2), приходим к выводу, что расстояние второго порядка представляет собой максимальное значение кривизны линии фактического пути. В полученных соотношениях аргументом уравнения линии фактического пути является пройденное расстояние.

Если в приведенных формулах в качестве аргумента будет использоваться время полета t, то смысл расстояний первого и второго порядка изменится:

$$y_1=\left|\frac{dy}{dt}\right|_{\max}=\left|V_б\right|_{\max},$$

т.е. в этом случае расстояние первого порядка представит собой не максимальное значение разности между фактическим и заданным направлениями полета, а максимальную боковую составляющую скорости, характеризующую скорость приближения ЛА к линии заданного пути или удаления от нее. Для расстояния второго порядка получим:

$$y_2 = \left|\frac{d^2 y}{dt^2}\right|_{\max} = \left|\frac{dV_б}{dt}\right|_{\max} = \left|\alpha_б\right|_{\max},$$

т.е. расстояние второго порядка является максимальным значением бокового ускорения.

Все сказанное о расстояниях нулевого, первого и второго порядка относится не только к анализу фактической траектории, но и к анализу отклонения от заданного эшелона в вертикальной плоскости. В этом случае вместо максимального линейного бокового уклонения *ВС* маршрута нужно рассматривать его наибольшее уклонение по высоте от заданного эшелона, вместо боковой составляющей скорости следует рассматривать вертикальную скорость и вместо ускорения — ускорение, направленное по вертикали.

Если в приведенных выше формулах опустить знак максимума, то они будут характеризовать при $n = 0$ линейное боковое уклонение *ВС* от заданного маршрута в любой точке на отрезке $x_0 < x < x_1$, при $n = 1$ — текущую разность углов между фактическим и заданным курсом или боковую составляющую скорости движения, а при $n = 2$ — текущее значение бокового ускорения.

Точность выдерживания скорости ЛА при ее заданном значении оценивается как разность фактически выдерживаемой скорости полета и заданной. Для оценки точности пилотирования необходимо фиксировать не только отклонение фактической траектории от заданной, но и определять длительность того или иного отклонения, что требует определения обоснованной частоты контроля отклонения параметров движения. С этой целью для представления траектории движения используем линейную аппроксимацию. В этом случае максимальное значение погрешности будет равно:

$$\delta_{\max} = \left(\frac{d^2 y}{dt^2}\right)_{\max} \frac{\Delta t^2}{8},$$

где Δt — интервал квантования по времени; $y = f(t)$ — уравнение фактической траектории движения ЛА.

Решив приведенное соотношение относительно Δt, получим выражение для определения интервала квантования по времени:

$$\Delta t = \sqrt{\frac{8 \cdot \delta_{\max}}{\left(\frac{d^2 y}{dt^2}\right)_{\max}}}.$$

Недостаток такого подхода к определению интервала квантования по времени состоит в том, что здесь учитывается только значение максимальной величины бокового ускорения и не берется в расчет длительность существования такого ускорения. Поэтому полученное выражение может использоваться для гладких траекторий. Для сложных траекторий используется подход, основанный на теореме В.А. Котельникова, в соответствии с которой если непрерывная функция $f(t)$ не содержит в своем спектре частот выше $f_B = \frac{\omega_B}{2\pi}$, то эта функция полностью определяется последовательностью своих дискретных значений, взятых в точках, удаленных одна от другой во времени на интервалы

$$\Delta t = \frac{\pi}{\omega_B}, \tag{3}$$

где ω_B — круговая частота, ограничивающая спектр функции $f(t)$.

Для определения ω_B используется нормированная корреляционная функция. Как показали исследования, нормированная корреляционная функция короткопериодического движения *ВС* имеет вид

$$\rho(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}\cos\omega\tau. \tag{4}$$

Для определения $\omega_В$ выражение (4) можно упростить, приближенно рассматривая фактическую траекторию полета ЛА как случайный процесс. Тогда корреляционная функция имеет вид

$$\rho(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}.$$

В этом выражении α характеризует степень затухания связи между двумя линейными боковыми уклонениями, отстоящими друг от друга на интервал времени τ.

Найдем нормированную спектральную плотность из соотношения

$$S(\omega)=\frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\infty}e^{-\alpha\cdot\tau}\cdot\cos\omega\tau d\tau=\frac{2\alpha}{\pi}\cdot\frac{1}{\alpha^2+\omega^2}.$$

Ограничивая спектр частот значением ω_B, запишем выражение для нормированной корреляционной функции в виде

$$\rho(\tau)=\frac{2\alpha}{\pi}\int_0^{\omega_B}\frac{\cos\omega\tau}{\alpha^2+\omega^2}d\omega. \qquad (5)$$

Известно, что ограничение верхней части спектра, т.е. отбрасывание частот от ω_B до ∞, сказывается на точности воспроизведения нормированной корреляционной функции в окрестности $\tau = 0$. Для определения этой погрешности подставим $\tau = 0$ в соотношение (5), взяв пределы интегрирования от ω_B до ∞. Тогда получим

$$\delta\left[\rho(\tau)\right]=\frac{2\varepsilon}{\pi}\int_{\omega}^{\infty}\frac{d\omega}{\alpha^2+\omega^2}=1-\frac{2}{\pi}\cdot arctg\frac{\omega_B}{\alpha}.$$

Величину погрешности обычно принимают $\delta = 0{,}05$. Тогда

$$\omega_B=\alpha\cdot tg\frac{0{,}95}{2}\cdot\pi=12{,}7\cdot\alpha.$$

С учетом формулы (3) интервал Δt, определяющий период квантования по времени траектории движения ЛА, может быть вычислен в соответствии с выражением

$$\Delta t=\frac{1}{4\cdot\alpha}. \qquad (6)$$

Приближенное значение α можно найти, предварительно оценив наименьший интервал между двумя отклонениями ЛА от заданной траектории, которые можно считать практически независимыми. Для независимых величин обычно принимают $\rho(\tau) = 0{,}05$. Тогда величина α находится из выражения $0{,}05=e^{-\alpha|\tau|}$. Откуда $\alpha=\frac{1}{\tau}\cdot\ln 0.05\approx\frac{3}{\tau}$. Подставив найденное значение α в выражение (6), получим

$$\Delta t=\frac{\tau}{12}.$$

Таким образом, для контроля точности пилотирования необходимо через интервалы времени Δt определять величину бокового уклонения, величины уклонения по высоте и скорости, фиксировать случаи прерывания этих отклонений от заданных нормативов и длительность таких превышений, а также определять максимальные отклонения за время выполнения контролируемых действий. Рассмотрим алгоритм, реализующий указанные действия для каждого из контролируемых параметров. Исходными данными для работы алгоритма являются значения параметра r, измеряемого с определенной частотой, текущее значение времени t, значения верхнего и нижнего r_B, r_H пределов измерения параметра. Алгоритм должен вырабатывать записи ошибок регулирования контролируемого параметра, содержащие информацию о времени выхода параметра за один из пределов t, максимальном значении параметра $r_Э$ и времени входа параметра в заданные пределы t_2.

Поскольку для определения длительности выхода контролируемого параметра за заданные допустимые отклонения необходимо на каждом шаге контроля использовать информацию о результатах контроля на предыдущем шаге, введем две вспомогательные логические переменные k_1 и k_2.

$k_1 = 1$, если на предыдущем шаге измерения выполнялось условие $r > r_B$, в противном случае $k_1 = 0$.

$k_2 = 1$, если на предыдущем шаге измерения выполнялось условие $r > r_H$, в противном случае $k_2 = 0$.

Запись информации об очередной ошибке на текущем шаге контроля производится в том случае, если на предыдущем шаге измерений выход контролируемого параметра за заданные параметры имел место, а в текущем шаге не имеет места. В этом случае фиксируется момент входа параметра в заданные пределы и осуществляется запись информации об имевшей место ошибке. Каждая новая ошибка фиксируется в том случае, если на предыдущем шаге не было ошибки, а в текущем шаге ошибка появилась. Тогда t_1 принимают равным t — моменту текущего контроля на данном шаге.

Алгоритм параметрического и временного контроля параметров управления движением ЛА представлен на рисунке.

Логический контроль управления движением ЛА заключается в проверке соответствия действий оператора требуемой логике управления в текущий момент времени. Такой контроль должен фиксировать выдачу ошибочных управляющих воздействий, а также недопустимо длительное бездействие оператора при необходимости управления. Логический контроль осуществляется при выходе контролируемого параметра из заданной допустимой зоны значений. Обнаружение логических ошибок управления осуществляется на основе контроля логической взаимосвязи знака отклонения управляющего воздействия на текущем шаге контроля от управляющего воздействия на предыдущем шаге и знака отклонения контролируемого параметра от верхней и нижней границ допустимой зоны. Фиксация логической ошибки управления производится в случае выполнения следующих условий на i-том шаге контроля:

$$u_i - u_{i-1} < 0 \text{ при } r_i > r_{iB} \text{ или } u_i - u_{i-1} < 0 \text{ при } r_i < r_{iH}.$$

Если условие

$$u_i - u_{i-1} = 0 \text{ при } \begin{cases} r_i > r_{iB} \\ r_i < r_{iH} \end{cases} \tag{7}$$

выполняется в течение времени $t_k < T_k$, то фиксируется бездействие оператора при необходимости управления. Здесь t_k — время, в течение которого выполняется условие (7).

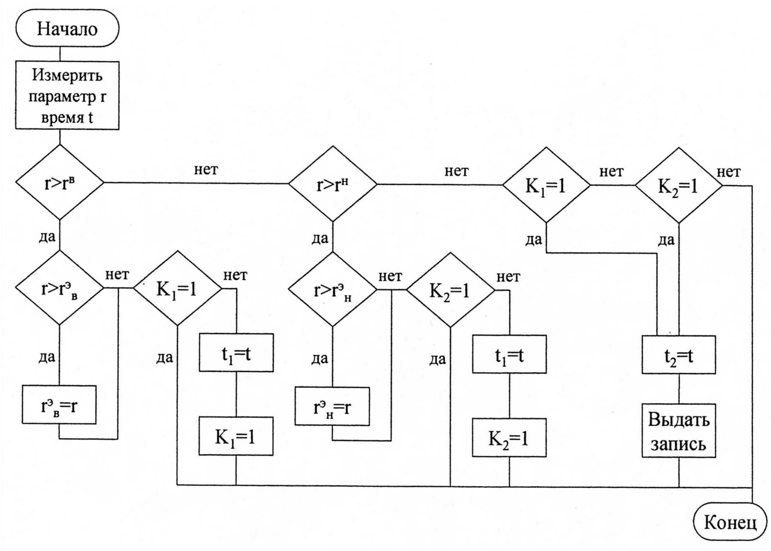


Рисунок. Алгоритм параметрического и временного контроля параметров управления движением ЛА

Проведенный анализ операторской деятельности лётных экипажей при управлении ЛА позволил определить перечень возможных ошибок, возникающих в процессе этой деятельности. Алгоритмы выявления таких ошибок и оценки деятельности операторов в автоматизированной системе контроля и оценки деятельности могут быть построены только на основе создания формализованных моделей для каждой операции. Основной целью создания формализованных моделей операций, выполняемых лётным экипажем ЛА, является разработка на их основе алгоритмов контроля деятельности операторов. В таких моделях должны быть отражены регулярным способом распределенные во времени действия экипажа при выполнении различных операций и логические взаимосвязи между ними. Эта задача может быть решена путем построения циклограмм деятельности экипажа.

Список литературы

1 *Годунов А.И.* Синтез автоматизированной системы оценивания качества пилотирования на авиационном тренажере // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. — 2012. — № 1 (21). — С. 58–64.

2 Автоматизированные обучающие системы профессиональной подготовки операторов летательных аппаратов / Л.С.Демин, Ю.Г.Жуковский, А.П.Семенин и др. / Под ред. В.Е.Шукшунова. — М.: Машиностроение, 1986. — 240 с.

3 Авиационные цифровые системы контроля и управления / О.А.Артаховский, Н.И.Григорьев и др. / Под ред. В.А.Мясникова. — Л.: Машиностроение, 1976. — 608 с.

4 *Корчемный П.А.* Психология лётного обучения. — М.: Воениздат, 1986. — 236 с.

5 *Годунов А.И.* Оценка качества имитируемой модели в технических средствах подготовки и обучения авиационных специалистов / А.И.Годунов, В.И.Мандриков, Б.Ж.Куатов // Тр. междунар. симп. «Надежность и качество», 2014. — Т. 1. — С. 296–300.

А.И.Годунов, Б.Ж.Қуатов, Д.М.Сущик

Ұшу аппаратын басқару бойынша ұшу экипажының іс-қимылдарын бақылау алгоритмі

Мақалада ұшу аппаратын басқару бойынша ұшу экипажының іс-қимылдарын бақылау алгоритмі қарастырылды. Соған байланысты адам-оператормен іске асырылатын ұшу аппаратын басқаруды қарастыра отырып, ондай өзара әрекет кесекті-үздіксіз сипаты бар екені белгіленді және оның басталуы мен аяқталуын анықтайтын жағдай жиынтығы бар жеке операция жиынтығын білдіреді. Ұшу аппаратының қозғалысын басқаруды қисынды бақылау оператор іс-қимылының ағымдағы уақыт кезінде қажетті басқару қисынына сәйкестікті тексеруден тұрады. Ұшу аппаратын басқару кезінде ұшу экипажының операторлық іс-қимылына жүргізілген талдау осы іс-қимыл үдерісінде пайда болуы мүмкін қателер тізімін анықтауға септігін тигізеді.

A.I.Godunov, B.Zh.Kuatov, D.M.Sushchik

Operation control procedures of an air crew to operate an aircraft

This paper considers operation control procedures of an air crew to operate an aircraft. Therefore, we envisage an aircraft control carried out by a human-operator. It’s noted, that such interaction has the piecewise continuous character and represents a complex of individual operations with the set of conditions defining its beginning and ending. The logical check of the aircraft movement control lies in conformance inspection of operators control logic actions in current time. The analysis of an air crew operator performance during the aircraft operation allowed to define the list of possible errors resulted in this activity.

References

1 Godunov A.I. *High Education Institutes News*. *Povolzhskiy region. Technical science*, 2012, 1 (21), p. 58–64.

2 *Automated instruction systems of aircraft operators professional education* / L.S. Demin, Yu.G. Zhukovskiy, A.P. Semenin et al., under edit. V.E. Shukshunov, Moscow: Mashinostroenie, 1986, p. 240.

3 *Aviation digital systems of control and management* / O.A. Artakhovskiy, N.I. Grigor’yev et al., under edit. V.A. Myasnikov, Leningrad: Mashinostroenie, 1976, p. 608.

4 Korchemniiy P.A. *Flight training psychology*, Moscow: Voenizdat, 1986, 236 p.

5 Godunov A.I. *Evaluation of simulate model quality in technical means of airmen training* / Godunov A.I., Mandrikov V.I., Kuatov B.Zh., reliability and quality» International symposium writings (1), 2014, p. 296–300.

УДК 512. 815.6

Ш.Ш.Ибраев

Университет «Болашак», Кызылорда
(E-mail: ibrayevsh@mail.ru)

О третьих когомологиях простых SL_2-модулей

Когомологии третьей степени простых модулей для простых односвязных алгебраических групп в положительной характеристике мало изучены. Они известны для некоторых простых модулей малых размерностей и для простых алгебраических групп ранга 2. Для группы SL_2 полное описание когомологии третьей степени простых модулей не получено. В статье вычислены когомологии третьей степени простых модулей для группы SL_2 над алгебраически замкнутым полем k характеристики $p > 3$.

Ключевые слова: алгебраическая группа, простой модуль, третья когомология.

Введение. Когомологии простых модулей алгебраических групп над полем положительной характеристики были исследованы в работах Дж.О'Хэллорана [1], Х.Андерсена [2], К.Бенделя, Д.Накано и К.Пиллена [3], А.С.Клещева и Дж.Шета [4, 5], Э.Клайна, Б.Паршаля и Л.Скотта [6, 7], Дж.МакНинча [8], Э.Клайна [9], С. Йехия [10], Дж.Йе [11], Дж.Лиу и Дж.Йе [12], Д.Стюарта [13, 14], А.С.Джумадильдаева и Ш.Ш.Ибраева [15], Ш.Ш.Ибраева [16–20] и группы американских алгебраистов VIGRE [21, 22].

В [1] были описаны когомологии простых модулей со старшими весами в области ограниченных весов. Эти модули являются простыми фактор-модулями модулей Вейля с простыми подмодулями.

Общая формула вычисления расширения двух простых модулей получена Х.Андерсеном в [2]. Она была использована в работах [10–12] для вычисления расширения простых модулей простых алгебраических групп ранга 2. Формулы вычисления расширения простых модулей, полученные для алгебраических групп ранга 2 в [11–12], обобщены в работе [3] для больших характеристик $p \geq 3h-3$, где h — число Кокстера. Когомологии первой степени простых модулей над Sp_{2n} с фундаментальными старшими весами вычислены в работах [4, 5]. Кроме того, они вычислены и для простых модулей с минимальными доминантными старшими весами в [6] и [7]. Последний результат был расширен в [21] для всех доминантных старших весов, меньших или равных фиксированному фундаментальному весу, за исключением некоторых малых характеристик поля, зависящих от системы корней. Расширения простых модулей для SL_2 получены в [9], и когомологии первой степени простых модулей для SO_7 вычислены в [16]. Связь между первой когомологией алгебраической группы с неприводимой системой корней над алгебраически замкнутым полем характеристики $p > 0$ с коэффициентами в простом модуле и соответствующей первой когомологией ее алгебры Ли изучена в [20], и там же получены необходимые достаточные условия их изоморфности.

В работе МакНинча [8] вычислены вторые когомологии простых модулей, размерности которых не превышают характеристику поля. Развивая методику, примененную в [21], авторами работы [22] были получены аналогичные результаты для вторых групп когомологий простых модулей. Вторые когомологии простых модулей вычислены также для SL_2 [13], SL_3 [14], Sp_4 [19], G_2 [18], SO_7 [17].

Примеры одномерной нетривиальной третьей когомологии содержатся в [1]. В [15] получено полное описание третьих групп когомологий простых модулей для простых односвязных алгебраических групп ранга 2 в положительной характеристике при незначительном ограничении на характеристику поля, исключаются случаи $p = 2, 3$ для A_2; $p = 2, 3, 5$ для B_2; $p = 2, 3, 5, 7, 11$ для G_2. Из основного результата этой работы следует, что размерности пространств когомологий не больше, чем ранг данной алгебраической группы, и существуют двумерные нетривиальные группы третьей когомологии в случаях A_2 и G_2. Как известно, для группы SL_2 ранга 1 аналогичный результат о когомологии третьей степени простых модулей еще не получен. Данная работа посвящена решению этой задачи. Нами найдены все простые G-модули с нетривиальными 3-когомологиями. Согласно полученному нами результату во всех нетривиальных случаях группа третьей когомологии одномерна. Для доказательства основной теоремы (теорема 1) будем использовать методику вычисления, разработанную в [15].

Пусть G — простая односвязная алгебраическая группа SL_2 над алгебраически замкнутым полем k характеристики $p>3$. Будем считать, что G определена и расщепляется над простым подполем F_p поля k. Пусть $G_1 = Ker\, F$, где F — отображение Фробениуса на G.

Обозначим через B и T соответственно подгруппу Бореля и максимальный тор группы G. Если R — система корней группы G, то действие группы Вейля W системы R на группу характера $X(T)$ максимального тора T определяется по формуле $S_\alpha(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha$, где $s_\alpha \in W$, $\alpha \in R$, и $\alpha^\vee$ — дуальный к α корень. Напомним, что $X(T)$ может быть идентифицирована со множеством целых чисел Z. Тогда множеством доминантных весов будет Z_+. Точечное действие группы Вейля определяется через полусуммы всех положительных корней $\rho = 1/2\alpha_1 = \lambda_1$ по формуле $w \cdot \lambda = w(\lambda + \rho) - \rho$, где $w \in W$, $\lambda \in X(T)$; α_1 — единственный положительный корень системы R; λ_1 — фундаментальный вес.

Аффинная группа Вейля W_p порождается отражениями вида $s_{\alpha,np}$ для всех $\alpha \in R_+ = \{\alpha_1\}$ и $n \in Z$. Обычно используется точечное действие $s_{\alpha,np} \cdot \lambda = \lambda - \langle \lambda + \rho, \alpha^\vee \rangle \alpha + np\alpha$ аффинной группы Вейля.

Пусть $X_+(T) = \{\lambda \in X(T) \,|\, \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \geq 0 \text{ для всех } \alpha \in S\} \approx Z_+$ — множество доминантных весов и $X_1(T) = \{\lambda \in X(T) \,|\, 0 \leq \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle < p \text{ для всех } \alpha \in S\} \approx Z_p$ — множество ограниченных весов.

Для любого $\lambda \in X(T)$ существует одномерный B-модуль k_λ и индуцированный G-модуль $H^0(\lambda) = Ind_B^G(k_\lambda)$. Известно, что $H^0(\lambda) \neq 0$ тогда и только тогда, когда $\lambda \in X_+(T)$. Если $V(\lambda)$ — модуль Вейля со старшим весом λ, то $H^0(\lambda) \approx V(-w_0(\lambda))^*$. Пусть $L(\lambda)$ — простой G-модуль со старшим весом λ. Его можно определить через $H^0(\lambda)$ или через $V(\lambda)$. С одной стороны, он простой цоколь $H^0(\lambda)$, а с другой — единственный простой фактор-модуль $V(\lambda)$ по максимальному подмодулю. Все три G-модуля, введенные выше, могут быть рассмотрены как G_1-модули, причем $L(\lambda)$ остается простым при переходе к G_1.

Пусть L — рациональный G-модуль. Через $L^{(d)}$ обозначим скручивание Фробениуса степени d для L. Тогда существует рациональный G-модуль V, такой что $V^{(d)} = L$, обозначим его через $L^{(-d)}$.

Предварительные сведения. При доказательстве основной теоремы мы используем следующие известные факты.

Теорема Стейнберга о тензорном произведении. Для любого $\lambda = \lambda^0 + p\lambda^1 + \cdots + p^m\lambda^m \in X_+(T)$, где $\lambda^i \in X_1(T)$, простой G-модуль $L(\lambda)$ со старшим весом λ разлагается в виде следующего тензорного произведения:

$$L(\lambda) = L(\lambda^0) \otimes L(\lambda^1)^{(1)} \otimes \cdots \otimes L(\lambda^m)^{(m)}. \tag{1}$$

Принцип связанности и структура индуцированных модулей. Пусть $\lambda, \mu \in X(T)$. Назовем λ G_1-связанным (G-связанным) с μ, если $\lambda \in W_p \cdot \mu + pX(T)$ ($\lambda \in W_p \cdot \mu$). Если $H^i(G_1, L(\lambda)) \neq 0$, то λ G_1-связан с нулевым весом [23], II.9.19. Аналогично, если $H^i(G, L(\lambda)) \neq 0$, то λ G-связан с нулевым весом [23], II.6.17.

Для $\lambda = a\lambda_1 \in X(T)$ мы будем использовать сокращенное обозначение a. Очевидно, что для G $W_p \cdot 0 + pX(T) \bigcap X_1(T) = \{0, p-2\}$. Согласно [23], II.8.20, $H^0(\lambda) \approx L(\lambda)$, если $\lambda \in X_1(T)$. В частности, $H^0(0) = L(0) \approx k$ и $H^0(p-2) = L(p-2)$.

Когомологии простых модулей для G_1.

Лемма 1 ([13, предложение 2.2.]). Пусть $\lambda \in X_1(T)$, тогда $H^i(G_1, L(\lambda)) = 0$, кроме следующих случаев:

(i) $H^{2i}(G_1, k)^{(-1)} \approx H^0(2i)$;

(ii) $H^{2i+1}(G_1, L(p-2))^{(-1)} \approx H^0(2i+1)$.

Расширения модулей для G. Все расширения двух простых модулей для G найдены в [9].

Пусть

$$M(\lambda^0) = \{L(\lambda) \big| \lambda \in X_+(T),\ Ext_G^1(L(\lambda^0), L(\lambda)) \neq 0\},\quad \lambda^0 \in X_1(T).$$

Лемма 2. Пусть $p > 3$. Тогда:

$M(0) = \{L(p-2)^{(r)} \otimes L(1)^{(r+1)},\ r \geq 0\}$;

$M(1) = \{L(p-3) \otimes L(1)^{(1)},\ L(1) \otimes L(p-2)^{(r)} \otimes L(1)^{(r+1)},\ r > 0\}$;

$M(2) = \{L(p-4) \otimes L(1)^{(1)},\ L(2) \otimes L(p-2)^{(r)} \otimes L(1)^{(r+1)},\ r > 0\}$.

Во всех перечисленных случаях $Ext_G^1(L(\mu), L(\lambda)) \approx k$.

Вторые когомологии простых модулей для G. Все нетривиальные вторые когомологии найдены в [13, теорема 1]. Пусть

$$M_i = \{L(\lambda^0 + p\mu) \big| E_2^{2-i,i} = H^{2-i}(G, H^i(G_1, L(\lambda^0 + p\mu)^{(-1)}) \neq 0, \lambda^0 \in X_1(T), \mu \in X_+(T)\}, i = 0,1,2.$$

Лемма 3. Пусть $p > 3$. Тогда:

(i) $M_2 = \{L(2)^{(1)}\}$;

$M_1 = \{L(p-2) \otimes L(p-3)^{(1)} \otimes L(1)^{(2)}, L(p-2) \otimes L(1)^{(1)} \otimes L(p-2)^{(r+1)} \otimes L(1)^{(r+2)}, r > 0\}$;

$M_0 = \{L(\mu)^{(d)} \big| L(\mu) \in M_2 \cup M_1, d > 0\}$;

(ii) $H^2(G, L(\lambda)) = \begin{cases} k, \text{ если } L(\lambda) \in \bigcup\limits_{i=0}^{2} M_i; \\ 0 \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$

О композиционном факторе двух модулей Вейля. Пусть $\lambda = a \in X_1(T)$, тогда очевидно, что $V(1) = L(1)$, $V(a) = L(a)$, и согласно [24]

$$L(1) \otimes L(a) \underset{G}{\longleftrightarrow} V(a+1) \oplus V(a-1). \tag{2}$$

Здесь знак $\underset{G}{\longleftrightarrow}$ означает, что обе стороны этого знака имеют одинаковые G-композиционные факторы.

Предварительные результаты. В дальнейшем нам понадобится информация о структурах цоколя тензорного произведения двух простых модулей. Сначала докажем несколько вспомогательных утверждений. Пусть $\mu^0 \in X_1(T)$ и $\Gamma(\mu^0) = \{\varphi \big| L(\varphi) \subset Soc_G L(1) \otimes L(\mu^0)\}$ — множество старших весов разложимых компонент $Soc_G L(1) \otimes L(\mu^0)$.

Лемма 4. Пусть $p > 3$ и $0 \in \Gamma(\mu^0)$. Тогда

$$\Gamma(\mu^0) = \begin{cases} \{0, 2\}, \text{ если } \quad \mu^0 = 1; \\ \varnothing \quad \text{в} \quad \text{остальных} \quad \text{случаях.} \end{cases}$$

Доказательство. Согласно формуле (2) $L(1) \otimes L(\mu^0)$ может иметь композиционный фактор, изоморфный $L(0)$, только в том случае, если $\mu^0 = 1$. Кроме того, $L(1) \otimes L(1) \underset{G}{\longleftrightarrow} V(2) \oplus V(0)$. Так как $V(2) \cong L(2)$ и $V(0) \cong L(0)$, то $L(1) \otimes L(1) \underset{G}{\longleftrightarrow} L(2) \oplus L(0)$. Очевидно, что $L(2) + L(0)$ — разложимый G-модуль. Следовательно, $L(1) \otimes L(1) \cong L(2) \oplus L(0)$ и $L(1) \otimes L(1) \cong Soc_G L(1) \otimes L(1)$.

Лемма 5. Пусть $p>3$ и $p-2\in\Gamma(\mu^0)$. Тогда

$$\Gamma(\mu^0)=\begin{cases}\{p-2,\, p-4\}, \text{если} \quad \mu^0=p-3;\\ \varnothing \quad \text{в} \quad \text{остальных} \quad \text{случаях.}\end{cases}$$

Доказательство аналогично лемме 4.

Для простого G-модуля $L(\lambda)$ спектральная последовательность Линдона-Хохшильда-Серра имеет вид [23], I.6.6.(3)

$$E_2^{nm}=H^n\left(G,H^m(G_1,L(\lambda))^{(-1)}\right)\Rightarrow H^{n+m}(G,L(\lambda)). \tag{3}$$

Если E_∞^{nm} — стабилизированное значение точек предыдущей спектральной последовательности, то

$$H^i(G,L(\lambda))=\oplus_{n+m=i}E_\infty^{nm}. \tag{4}$$

Пусть $\lambda=\lambda^0+p\mu$, тогда согласно [15, (1.3)]

$$E_2^{nm}\cong H^n\left(G,H^m(G_1,L(\lambda^0))^{(-1)}\otimes L(\mu)\right). \tag{5}$$

Используя формулы (5.15)–(5.20) работы [15], формулу (4) и лемму 1, получим

$$H^3(G,L(\lambda))=E_2^{03}\oplus E_2^{12}\oplus E_2^{21}\oplus E_2^{30}. \tag{6}$$

Пусть $N_i=\{L(\lambda^0+p\mu)\,\big|\,E_2^{3-i,i}=H^{3-i}(G,H^i(G_1,L(\lambda^0+p\mu))^{(-1)})\neq 0\},\quad i=0,1,2,3.$

Лемма 6. Пусть $p>3$. Тогда:

(i) $N_3=\{L(p-2)\otimes L(3)^{(1)}\}$;

(ii) $N_2=\{L(p-4)^{(1)}\otimes L(1)^{(2)},L(2)^{(1)}\otimes L(p-2)^{(r+2)}\otimes L(1)^{(r+3)},r\geq 0\}$;

(iii) $N_1=\{L(p-2)\otimes L(1)^{(1)}\otimes L(2)^{(2)},L(p-2)\otimes L(p-3)^{(1)}\otimes L(p-3)^{(2)}\otimes L(1)^{(3)}$;

$L(p-2)\otimes L(p-3)^{(1)}\otimes L(1)^{(2)}\otimes L(p-2)^{(r+3)}\otimes L(1)^{(r+4)},r\geq 0\}\bigcup\left\{L(p-2)\otimes L(\mu)^{(s)}\,\big|\,L(\mu)\in M_1\bigcup M_2,\, s\geq 1\right\}$.

Доказательство. (i) Используя определение N_3 и формулу (1), имеем:

$$N_3=\{L(p-2)\otimes L(\mu)^{(1)}\,\big|\,E_2^{03}=H^0(G,H^3(G_1,L(p-2)\otimes L(\mu)^{(1)})^{(-1)})\neq 0,\,\mu\in X_+(T)\}.$$

По формуле (5) и лемме 1

$$N_3=\{L(p-2)\otimes L(\mu)^{(1)}\,\big|\,H^0(G,L(3)\otimes L(\mu))\neq 0,\,\mu\in X_+(T)\}=\{L(p-2)\otimes L(3)^{(1)}\}; \tag{ii}$$

$$N_2=\{L(\mu)^{(1)}\,\big|\,L(\mu)\in M(2)\}=\{L(\mu)^{(1)}\,\big|\,L(\mu)\in\{L(p-4)\otimes L(1)^{(1)},L(2)\otimes L(p-2)^{(r+1)}\otimes L(1)^{(r+2)},r\geq 0\}\}=$$
$$=\{L(p-4)^{(1)}\otimes L(1)^{(2)},L(2)^{(1)}\otimes L(p-2)^{(r+2)}\otimes L(1)^{(r+3)},r\geq 0\}.$$

Во втором равенстве была использована лемма 2.

(iii) Используя определение N_1 и (1), имеем:

$$N_1=\{L(p-2)\otimes L(\mu)^{(1)}\,\big|\,E_2^{21}=H^2(G,H^1(G_1,L(p-2)\otimes L(\mu)^{(1)})^{(-1)})\neq 0,\,\mu\in X_+(T)\}.$$

По формуле (5) и лемме 1

$$N_1=\{L(p-2)\otimes L(\mu)^{(1)}\,\big|\,H^2(G,L(1)\otimes L(\mu))\neq 0,\,\mu\in X_+(T)\}=$$
$$=\{L(p-2)\otimes L(\mu^0+p\nu)^{(1)}\,\big|\,H^2(G,L(1)\otimes L(\mu^0+p\nu))\neq 0,\ \mu^0\in X_1(T),\,\nu\in X_+(T)\}=$$
$$=\{L(p-2)\otimes L(\mu^0)^{(1)}\otimes L(\nu)^{(2)}\,\big|\,H^2(G,L(1)\otimes(L(\mu^0)\otimes L(\nu)^{(1)}))\neq 0,\mu^0\in X_1(T),\ \nu\in X_+(T)\}=$$
$$=\{L(p-2)\otimes L(\mu^0)^{(1)}\otimes L(\nu)^{(2)}\,\big|\,H^2(G,Soc_G L(1)\otimes(L(\mu^0)\otimes L(\nu)^{(1)}))\neq 0,\ \mu^0\in X_1(T),\ \nu\in X_+(T)\}.$$

Согласно предложению 4.4 [11]

$$N_1=\{L(p-2)\otimes L(\mu^0)^{(1)}\otimes L(\nu)^{(2)}\,\big|\,H^2(G,(Soc_G L(1)\otimes L(\mu^0))\otimes L(\nu)^{(1)})\neq 0,\ \mu^0\in X_1(T),\,\nu\in X_+(T)\}.$$

Наконец, используя леммы 3–5, получим:

$$N_1=\{L(p-2)\otimes L(1)^{(1)}\otimes L(2)^{(2)},L(p-2)\otimes L(p-3)^{(1)}\otimes L(p-3)^{(2)}\otimes L(1)^{(3)};$$
$$L(p-2)\otimes L(p-3)^{(1)}\otimes L(1)^{(2)}\otimes L(p-2)^{(r+3)}\otimes L(1)^{(r+4)},r\geq 0\}\bigcup\left\{L(p-2)\otimes L(\mu)^{(s)}\,\big|\,L(\mu)\in M_1\bigcup M_2,\,s\geq 1\right\}.$$

Лемма 7. Пусть $p>3$. Тогда $N_0=\{L(\mu)^{(s)}\,\big|\,\mu\in N_3\bigcup N_2\bigcup N_1,\quad s>0\}$.

Доказательство.

$$N_0 = \{L(0) \otimes L(\mu)^{(1)} \,|\, H^3(G, H^0(G_1, L(0) \otimes L(\mu)^{(1)})^{(-1)}) \neq 0, \mu \in X_+(T)\} =$$

$$= \{L(\mu)^{(1)} \,|\, H^3(G, L(0) \otimes L(\mu)) \neq 0, \mu \in X_+(T)\} = \{L(\mu)^{(1)} \,|\, H^3(G, L(\mu)) \neq 0, \mu \in X_+(T)\}.$$

Согласно лемме 6 $H^3(G, L(\mu)) \neq 0,$ если

$$L(\mu) \in \{L(\mu^0 + p\gamma) \,|\, E_2^{03} = H^0(G, H^3(G_1, L(\mu^0)^{(-1)} \otimes L(\gamma)) \neq 0\};$$

$$\bigcup \{L(\mu^0 + p\gamma) \,|\, E_2^{12} = H^1(G, H^2(G_1, L(\mu^0)^{(-1)} \otimes L(\gamma)) \neq 0\};$$

$$\bigcup \{L(\mu^0 + p\gamma) \,|\, E_2^{21} = H^2(G, H^1(G_1, L(\mu^0)^{(-1)} \otimes L(\gamma)) \neq 0\} = N_3 \bigcup N_2 \bigcup N_1.$$

Следовательно, $N_0 = \left\{L(\mu)^{(s)} \,|\, \mu \in N_3 \bigcup N_2 \bigcup N_1, \quad s > 0\right\}.$

Сформулируем и докажем основную теорему. Сохраняем все обозначения предыдущего пункта.

Теорема 1. Пусть $G = SL_2$, $p > 3$ и $L(\lambda)$ — простой G-модуль. Тогда

$$H^3(G, L(\lambda)) \approx \begin{cases} k, \text{ если } L(\lambda) \in \bigcup\limits_{i=0}^{3} N_i; \\ 0 \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Доказательство. Согласно лемме 1 кратность вхождения данного неприводимого модуля (при наличии) к соответствующим когомологиям $H^i(G_1, L(\mu))^{(-1)}$, $i = 1,2,3,$ равна единице. Следовательно, во всех нетривиальных случаях $E_2^{nm} \approx k.$

Согласно лемме 6 множества N_3, N_2, N_1 попарно не пересекаются. Тогда утверждение теоремы следует из формулы (6) и лемм 6 и 7. Доказательство теоремы 1 завершено.

Список литературы

1 *O'Halloran J.* Weyl modules and the cohomology of Chevalley groups // Amer. J. Math. — 1981. — Vol. 103. — P. 399–410.

2 *Andersen H.H.* Extensions of modules for algebraic groups // Amer. J. Math. — 1984. — Vol. 106. — P. 489–504.

3 *Bendel C.P., Nakano D.K., Pillen C.* Extensions for finite Chevalley groups II // Trans. AMS. — 2002. — Vol. 354. — № 11. — P. 4421–4454.

4 *Kleshchev A.S., Shet J.* On extensions of simple modules over symmetric and algebraic groups // J. Algebra. — 1999. — Vol. 221. — P. 705–722.

5 *Kleshchev A.S., Shet J.* Corrigendum: On extensions of simple modules over symmetric and algebraic groups // J. Algebra. — 2001. — Vol. 238. — P. 843–844.

6 *Cline E., Parshal B., Scott L.* Cohomology of finite groups of Lie type. I // IHES Publ. Math. — 1975. — Vol. 45. — P. 169–191.

7 *Cline E., Parshal B., Scott L.* Cohomology of finite groups of Lie type. II // J. Algebra. — 1977. — Vol. 45. — P. 182–198.

8 *McNinch G.J.* The second cohomology of small irreducible modules for simple algebraic group // Pacific. J. Math. — 2002. — Vol. 204. — № 2. — P. 459–472.

9 *Cline E.* Ext1 for SL_2 // Commun. Algebra. — 1979. — Vol. 7. — P. 107–111.

10 *Yehia S. El.* Extensions of simple modules for the universal Chevalley group and parabolic subgroup: PhD Thesis. — Warwick, 1982.

11 *Ye Jia-chen*. Extensions of simple modules for the group *Sp* (4,*K*) // J. London Math. Soc. — 1990. — Vol. 2 (41). — P. 51–62.

12 *Liu Jia-chun, Ye Jia-chen*. Extensions of simple modules for the algebraic group of type *G*2 // Commun. Algebra. — 1993. — Vol. 21. — P. 1909–1946.

13 *Stewart D.I.* The second cohomology of simple SL_2-modules // Proc. Amer. Math. Soc. — 2010. — Vol. 138. — P. 427–434.

14 *Stewart D.I.* The second cohomology of simple SL_3-modules // Commun. Algebra. — 2012. — Vol. 40. — P. 4702–4716.

15 *Джумадильдаев А.С., Ибраев Ш.Ш.* О третьих когомологиях алгебраических групп ранга 2 в положительной характеристике // Матем. сб. — 2014. — Т. 205. — № 3. — С. 41–82.

16 *Ибраев Ш.Ш.* Первые группы когомологии простых модулей над алгебраической группой типа B_3 в положительной характеристике // Молодой ученый. — 2011. — Т. 2 — № 2 (25). — С. 6–10.

17 *Ибраев Ш.Ш.* Вторые группы когомологии простых модулей над $SO_7(k)$ в положительной характеристике // Вестн. Караганд. ун-та. Сер. Математика. — 2011. — № 3 (63). — С. 16–21.

18 *Ibrayev Sh.Sh.* The second cohomology groups of simple modules for G_2 // Сиб. электрон. матем. изв. — 2011. — Т. 8. — С. 381–396.

19 *Ibrayev Sh.Sh.* The second cohomology groups of simple modules over $Sp_4(k)$ // Commun. Algebra. — 2012. — Vol. 40. — P. 1122–1130.

20 *Ибраев Ш.Ш.* О первой когомологии алгебраической группы и ее алгебры Ли в положительной характеристике // Матем. заметки. — 2014. — Т. 96. — № 4. — С. 512–521.

21 University of Georgia VIGRE Algebra Group. First cohomology for finite groups of Lie type: simple modules with small dominant weights // Trans. Amer. Math. Soc. — 2013. — Vol. 365. — P. 1025–1050.

22 University of Georgia VIGRE Algebra Group. Second cohomology for finite groups of Lie type // J. Algebra. — 2012. — Vol. 360. — P. 21–52.

23 *Jantzen J.C.* Representations of algebraic groups. — Vol. 131. — Boston: Pure and Applied Mathematics, 1987.

24 *Винберг Е.Б., Онищик А.Л.* Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. — М.: Наука, 1988.

Ш.Ш.Ыбыраев

Жай SL_2-модульдердің үшінші когомологиялары туралы

Оң сипаттамалы жай бір байланысқан алгебралық группалар үшін жай модульдердің үшінші когомологиялары аз зерттелген. Олар кейбір өлшемі кіші жай модульдер үшін және рангы 2-ге тең жай алгебралық группалар үшін белгілі. SL_2 группасы үшін жай модульдердің үшінші когомологияларының толық сипаттамасы әлі алынбаған. Мақалада сипаттамасы $p>3$ алгебралық тұйық k өрісіндегі SL_2 группасы үшін жай модульдердің үшінші когомологиялары есептелген.

Sh.Sh.Ibrayev

On the third cohomology of simple SL_2-modules

The third cohomology groups of simple modules for the simple and simply connected algebraic groups in the positive characteristic are only a few investigated. They are well-known for some simple modules of small dimension and for the simple algebraic groups of rank 2. The third cohomology groups of simple modules for SL_2 has not studied yet. In this paper the third cohomology groups of simple modules for SL_2 over algebraically closed field k of characteristic $p>3$ are calculated.

References

1 O'Halloran J. *Amer. J. Math.*, 1981, 103, p. 399–410.
2 Andersen H.H. *Amer. J. Math.*, 1984, 106, p. 489–504.
3 Bendel C.P., Nakano D.K., Pillen C. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2002, 354, 11, p. 4421–4454.
4 Kleshchev A.S., Shet J. *J. Algebra*, 1999, 221, p. 705–722.
5 Kleshchev A.S., Shet J. *J. Algebra*, 2001, 238, p. 843–844.
6 Cline E., Parshal B., Scott L. *IHES Publ. Math.*, 1975, 45, p. 169–191.
7 Cline E., Parshal B., Scott L. *J. Algebra*, 1977, 45, p. 182–198.
8 McNinch G.J. *Pacific. J. Math*, 2002, 204, 2, p. 459–472.
9 Cline E. *Ext1 for* SL_2, *Commun. Algebra*, 1979, 7, p. 107–111.
10 Yehia S.El. *Extensions of simple modules for the universal Chevalley group and parabolic subgroup*, Warwick: PhD Thesis, 1982.
11 Ye Jia-chen. *J. London Math. Soc.*, 1990, 2 (41), p. 51–62.
12 Liu Jia-chun, Ye Jia-chen. *Commun. Algebra*, 1993, 21, p. 1909–1946.
13 Stewart D.I. *Proc. Amer. Math. Soc*, 2010, 138, p. 427–434.
14 Stewart D.I. *Commun. Algebra*, 2012, 40, p. 4702–4716.
15 Dzhumadil'dayev A.S., Ibrayev Sh.Sh. *Matem. Sbornic*, 2014, 205, 3, p. 41–82.
16 Ibrayev Sh.Sh. *Young scientist*, 2011, 2, 2 (25), p. 6–10.
17 Ibrayev Sh.Sh. *Bull. Karagand. un-ta Ser. Matematics*, 2011, 3 (63), p. 16–21.
18 Ibrayev Sh.Sh. *Sib. Electron. Matem. Izv.*, 2011, 8, p. 381–396.
19 Ibrayev Sh.Sh. *Commun. Algebra*, 2012, 40, p. 1122–1130.
20 Ibrayev Sh.Sh. *Matem. Zametki*, 2014, 96, 4, p. 512–521.
21 *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2013, 365, p. 1025–1050.

22 *J. Algebra*, 2012, 360, p. 21–52.
23 Jantzen J.C. *Representations of algebraic groups*, Boston, Pure and Applied Mathematics, 131, 1987.
24 Vinberg Ye.B., Onishchik A.L. *Seminar po gruppam Li i algebraicheskim gruppam*, Moscow: Nauka, 1988.

УДК 510.52 + .58

И.В.Латкин[1], А.В.Селиверстов[2]

[1]Восточно-Казахстанский государственный технический университет им. Д. Серикбаева, Усть-Каменогорск;
[2]Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, Москва, Россия
(E-mail: slvstv@iitp.ru)

Вычислительная сложность фрагментов теории поля комплексных чисел

В статье обсуждена вычислительная сложность формул в предварённой форме с ограничением на число перемен кванторов. В частности, говорится о теории алгебраически замкнутых полей. Доказано, что распознавание вершин многомерного куба на гиперплоскости сводится к распознаванию особых точек на гиперповерхности, построенной за полиномиальное время. Более того, доказаны некоторые соотношения между классами сложности. Даны рекомендации по улучшению концепции сложности, а также связи с теорией моделей.

Ключевые слова: вычислительная сложность, теория первого порядка, комплексные числа, перемена кванторов, иерархия классов.

1. Введение. Оптимизация функционала на множестве вершин многомерного куба является важной задачей, имеющей практические приложения в народном хозяйстве. Конкретные примеры и обычно используемые методы решения можно найти в работах [1–3]. Мы продемонстрируем сводимость таких задач к исследованию решений систем алгебраических уравнений над алгебраически замкнутым полем, которые легко интерпретируются в соответствующем языке первого порядка. Ввиду этого мы рассмотрим также разрешающие алгоритмы для фрагментов теории поля комплексных чисел, состоящих из формул, которые представимы в предварённой форме с числом перемен кванторов, ограниченной некоторой фиксированной величиной. Практическая ценность такого перехода объясняется возможностью более эффективного использования стандартных пакетов программ для символьных вычислений. Среди них Maple и свободно распространяемый пакет SINGULAR (http://www.singular.uni-kl.de). Поскольку многие задачи дискретной оптимизации являются алгоритмически трудными, поиск новых методов решения и эффективное использование готовых пакетов программ могут сократить как время работы вычислительных устройств, так и усилия, необходимые для разработки алгоритмов и отладки их программной реализации.

При формализации многих комбинаторных задач возникают универсально-экзистенциальные формулы. Последнее обстоятельство играет важную роль, в частности, они остаются истинными при переходе к индуктивному пределу, что позволяет использовать методы теории моделей [4, 5] при работе с алгебраически незамкнутыми полями. Покажем это на простом примере. Поле комплексных чисел элементарно эквивалентно алгебраическому замыканию поля рациональных чисел, которое является индуктивным пределом конечных алгебраических расширений. Поэтому замкнутая универсально-экзистенциальная формула, истинная в каждом конечном расширении поля рациональных чисел, будет истинной в поле комплексных чисел. Возможность выразить нужное свойство универсально-экзистенциальной формулой существенно зависит от класса иерархии, которому принадлежит задача распознавания. Поэтому методы теории моделей оказываются тесно связанными с исследованием вычислительной сложности.

2. Применение базисов Грёбнера. Напомним, что каждая полная рекурсивно аксиоматизируемая теория первого порядка разрешима. Примерами таких теорий служат теория алгебраически замкнутого поля фиксированной характеристики, теория вещественно замкнутых полей, теория плотных линейных порядков без концевых элементов, арифметика Пресбургера. Чистая теория равенства разрешима на полиномиально ограниченной памяти и полна в этом классе [6; 336]. Но для большинства разрешимых теорий сложность разрешающего алгоритма очень велика. Например, известен алгоритм дважды экспоненциального времени для теории поля комплексных чисел. С другой стороны, любой разрешающий алгоритм теории алгебраически замкнутого поля фиксированной характеристики требует использовать (по меньшей мере) экспоненциальную память [7]. Нижние границы сложности арифметики Пресбургера и её фрагментов обсуждаются в [8]. Высокая сложность и у многих неполных теорий [9].

Использование базисов Грёбнера является весьма общим методом решения многих задач, связанных с системами алгебраических уравнений над алгебраически замкнутым полем [10; 128]. История их возникновения и, в частности, вклад в развитие теории выдающегося российского математика А.И. Ширшова описаны в [11]. Алгоритмы вычисления базисов Грёбнера входят во многие пакеты для символьных вычислений, включая Maple и Singular. Однако применение этих методов часто оказывается малоэффективным из-за появления в ходе вычислений многочленов очень высокой степени [12–14]. Время работы соответствующих алгоритмов дважды экспоненциальное или ещё выше.

Существуют другие методы, не связанные с нахождением базисов Грёбнера и позволяющие определить совместность системы алгебраических уравнений с рациональными коэффициентами за экспоненциальное время. Впервые эта возможность была показана в [15], в дальнейшем метод был немного усовершенствован [16]. Наряду с этим развивались вероятностные алгоритмы [17–19]. Однако все известные вероятностные методы решения систем уравнений также требуют экспоненциального времени в общем случае. Хотя недавно для решения этой задачи описан эффективный вероятностный алгоритм, имеющий низкую сложность при некоторых дополнительных ограничениях на число мономов в уравнениях [19].

В [20] найден разрешающий алгоритм для формул в предварённой форме с ограниченным числом перемен кванторов, время работы которого экспоненциально зависит от длины формулы, но дважды экспоненциально — от числа перемен кванторов.

3. Иерархии задач по сложности. Напомним вкратце строение так называемой полиномиальной иерархии языков PH [6; 203–208, 21]. Она и другие ей подобные иерархии были введены для более точной классификации проблем по сложности их решения, так как каждую разумно поставленную проблему, ответ на которую может быть только «да» или «нет», можно сформулировать в терминах принадлежности к соответствующему языку.

Нижним (нулевым) уровнем этой иерархии объявляется класс языков, распознаваемых детерминированными машинами Тьюринга за полиномиальное время. Таким образом, языки этого класса считаются наиболее легко распознаваемыми. Насколько оправдана подобная точка зрения, мы обсудим позднее. Следующий, первый, уровень иерархии состоит из двух классов языков. Языки одного класса, обозначаемого как Σ_1^P, распознаются недетерминированными машинами Тьюринга за полиномиальное время, а другой класс — Π_1^P содержит все дополнения до языков первого, т.е. это просто классы NP и $coNP$ соответственно. Если уже определены классы уровня k, то уровень $k+1$ состоит из двух подуровней. На «нижнем» находится класс Δ_{k+1}^P, языки которого распознаются детерминированными машинами Тьюринга за полиномиальное время, с использованием языка L из класса Σ_k^P в качестве оракула, т.е. «подсказчика», который может сказать мгновенно, принадлежит ли данное слово языку L. «Верхний» подуровень состоит из двух классов — Σ_{k+1}^P и Π_{k+1}^P. В Σ_{k+1}^P собраны все языки, распознаваемые недетерминированными машинами Тьюринга за полиномиальное время, и тоже с использованием языка из класса Σ_k^P в качестве оракула. В Π_{k+1}^P — все дополнения до языков первого класса. Правильно ли подуровни названы «верхним» и «нижним», до сих пор неизвестно, вполне вероятно, что при достаточно больших k (два или более) все классы иерархии PH совпадают. Неизвестно также, верно ли, что $\Sigma_{k+1}^P \cap \Pi_{k+1}^P = \Delta_{k+1}^P$, хотя бы при одном k (см. ниже п. 5). Но, тем не менее, сходство в обозначении уровней этой иерархии и уровней арифметической иерархии в классической теории рекурсии не случайно, так как язык L принадлежит классу Σ_{k+1}^P тогда и только тогда, когда существуют такие многочлен $p(n)$ и вычислимый за полиномиальное время предикат $R(x, y_1, ..., y_{k+1})$, что

$$x \in L \Leftrightarrow \exists y_1 \forall y_2 \exists y_3 ... Q y_{k+1} \; \&_{j=1}^{k+1} [| y_j | \leq p(| x |) \,\&\, R(x, y_1, ..., y_{k+1})],$$

где Q — это $\exists$, если k чётное, и $\forall$, если k нечётное, а $|x|$ — длина слова x [7]. Для языков из класса Π_{k+1}^{P} кванторы $\exists$ и $\forall$ в (1) меняются местами.

Объединение всех классов языков, входящих в какие-то уровни, описанные выше, называют *PH*-иерархией.

По аналогии с полиномиальной иерархией PH [21] определяется экспоненциальная иерархия EH классов сложности, нулевой уровень которой состоит из языков, разрешимых за экспоненциальное время $poly(\exp(n))$, где число n означает длину входа, а основание степени может быть любым числом, большим единицы. Хотя это не доказано, широко распространено мнение о том, что иерархия EH невырожденная. Также рассматривается иерархия $EXP-H$, нулевой уровень которой состоит из языков, разрешимых за время $\exp(poly(n))$. Аналогично определяется иерархия $DoubleEXP-H$ для дважды экспоненциального времени.

4. Некоторые свойства иерархий. Отметим, что вырождение полиномиальной иерархии PH влечёт вырождение других аналогичных иерархий. Доказательство основано на методе, называемом набивкой, или накачкой. Однако обратная импликация не доказана.

Рассмотрим, например, взаимосвязь оценок сложности вычислений по памяти и по времени. Пусть *P-space* означает класс языков, которые распознаются с использованием полиномиальной памяти, а *EXP-space* — класс языков, допускаемых с использованием памяти $\exp(poly(n))$, где число n означает длину входа, а $DoubleEXP$ — класс языков, допускаемых за время $\exp(\exp(poly(n)))$.

Теорема 1. Равенство классов $P-space = EXP$ влечёт равенство классов *EXP-space* = $= DoubleEXP$.

Доказательство. Очевидно, что любое множество класса *EXP-space* распознаваемо за дважды экспоненциальное время. Пусть *P-space* $= EXP$. Рассмотрим множество X слов в алфавите 0 и 1, распознаваемое за дважды экспоненциальное время $t(x)$ алгоритмом A. Обозначим Y множество слов с префиксом из $\log t(x)$ нулей, единицы и слова x. В слове из Y суффикс x однозначно восстанавливается по слову из Y: это символы правее самой левой единицы. Очевидная модификация алгоритма A допускает множество Y за экспоненциальное от длины входа время. По предположению множество Y принадлежит *P-space*. Следовательно, Y допускается алгоритмом, требующим памяти, экспоненциально ограниченной длиной суффикса x. Поскольку слова из Y однозначно определяются своими суффиксами x, составляющими множество X, то, таким образом, X принадлежит классу *EXP-space.*

Известно частичное вырождение иерархии AM, отражающей интерактивные взаимодействия с конечным числом раундов между вероятностной машиной (Артуром), работающей полиномиальное время, и машиной с неограниченными ресурсами (Мерлином) [22]. Неформально, Артур должен узнать истину, ведя диалог с Мерлином, обладающим гораздо большими возможностями, но при этом, проверяя, не обманывает ли его Мерлин. Конечное число раундов можно свести к частному случаю, когда Мерлин даёт все ответы сразу. При этом посредством диалога с полиномиальным числом перемежений вопросов и ответов можно моделировать работу произвольного алгоритма с полиномиально ограниченной памятью. Важное отличие AM от PH состоит в использовании Артуром вероятностного алгоритма. По аналогии с этим результатом можно было бы ожидать, что иерархия PH тоже вырождена и класс NP совпадает с двойственным классом $coNP$. Однако многочисленные попытки доказать или опровергнуть это утверждение не привели к успеху.

5. Полные языки. Для всякого сложностного класса языков, т.е. класса, выделяемого на основании «одинаковости» временной или ёмкостной сложности алгоритмов, которые распознают языки этого класса, важной характеристикой служат *полные* в этом классе языки. Такой язык L должен, во-первых, сам принадлежать этому классу, во-вторых, для каждого языка M из этого класса вопрос о принадлежности слов языку M должен полиномиально сводиться к аналогичному вопросу для языка L. Таким образом, полный для сложностного класса язык полностью его характеризует относительно сложности вычислений, можно поэтому сказать, что полный в данном классе язык — это его паспорт.

Ярким примером этому может служить класс NP, для него известно очень много полных языков [6; 64], часто называемых NP-полными. В их число входят языки, соответствующие таким признанно сложным задачам, как задача о существовании гамильтонова цикла, задачи о выполнимости формул исчисления высказываний и о возможности правильно раскрасить вершины графа в k цветов и многие другие широко известные задачи.

В последнее время список известных NP-полных проблем активно пополняется за счёт классических задач алгебры. Например, таковой является задача о вычислении геодезической длины элементов в свободной разрешимой группе ступени 2 и фиксированного ранга [23]. В то же время для некоторых, казалось бы, очень тесно связанных с этой задачей проблем равенства, сопряженности и степени имеются алгоритмы полиномиальной сложности [23]. Более того, эти алгоритмы являются полиномиальными не только от длины исследуемых слов, но также и от ранга и ступени разрешимости свободной разрешимой группы, что сильно контрастирует с давно известными алгоритмами для решения этих задач, основанными на вложении Магнуса. Недавно эти детерминированные полиномиальные алгоритмы удалось заметно упростить [24], интересно, что вероятностные аналоги этих алгоритмов, которые описаны там же, имеют в качестве верхней границы сложности многочлены, степени которых лишь на единицу меньше, чем у детерминированных алгоритмов.

Наличие полных языков для некоторых сложностных классов является открытой проблемой. Например, существование полного языка во всей иерархии PH равносильно тому, что она имеет только конечное число уровней, т.е. она является почти вырожденной.

В отличие от этого, уровни полиномиальной иерархии PH допускают простую характеристику на основе полных языков в каждом классе. Примеры полных языков из класса Δ_2^P можно найти в [25]. Для классов Σ_k^P и Π_k^P таковыми служат классы предварённых формул с соответствующим числом перемен кванторов в чистой теории равенства. Вся же чистая теория равенства является полной для класса $P-space$ [6; 213, 214], и неизвестно, принадлежит ли она иерархии PH. В последнем случае она была бы полной и там.

Отметим, что если иерархия PH (или аналогичная ей) не вырождена, то, помимо «стандартных» уровней иерархии, существуют и промежуточные классы. Аналогичная ситуация наблюдается в теории тьюринговых степеней неразрешимости. Можно ожидать, что существует много языков, которые принадлежат некоторому уровню иерархии, но не полны в нём и не принадлежат вложенным уровням. Тем не менее, известно лишь немного кандидатов из класса NP, для которых не доказана ни полиномиальная разрешимость, ни NP-полнота. Один из таких языков состоит из пар изоморфных графов.

В [26] обнаружена связь проблемы равенства класса P пересечению классов NP и $coNP$ с проблемой поиска второго решения NP-полной задачи при условии, что некоторое решение уже известно. Если P не равен пересечению NP и $coNP$, то существует пример, когда поиск второго решения нельзя выполнить за полиномиальное время, зная первое решение. Если для каждого языка из пересечения NP и $coNP$ можно за полиномиальное время вычислить соответствующее решение, то второе решение можно найти за полиномиальное время.

Известный результат [20] показывает, что формулы с ограниченным числом перемен кванторов в теории поля комплексных чисел разрешимы алгоритмами экспоненциального времени, хотя это время зависит от числа перемен кванторов. Это может служить косвенным указанием на то, что либо экспоненциальная иерархия $EXP-H$ вырождена, либо сложность фрагментов с ограниченным числом перемен кванторов у теории поля комплексных чисел существенно ниже, чем у известных в настоящее время алгоритмов разрешения. Последнее обстоятельство может иметь важное теоретическое и практическое значение.

С другой стороны, даже совместность систем алгебраических уравнений с целыми коэффициентами, которая выражается в теории полей экзистенциальной формулой, является NP-трудной задачей. А именно, NP-полную задачу о разбиении множества целых чисел на две части с одинаковыми суммами за полиномиальное время можно свести к задаче распознавания особой точки на гиперповерхности в пространстве достаточно большой размерности.

6. Комбинированная мера сложности алгоритма. Вернёмся к вопросу о том, почему принято считать, что полиномиальные алгоритмы являются быстрыми. Для обоснования этого часто ограничиваются простым указанием на тот факт, что экспонента с любым основанием b, большим единицы, и показателем, линейно зависящим от аргумента n, станет больше значения любого многочлена $f(n)$ при всех n, начиная с некоторого значения m, зависящего от b и f. Поэтому при всех входах, чья длина n больше m, алгоритм с верхней оценкой времени $f(n)$ будет работать быстрее алгоритма с экспоненциальной оценкой. То же верно, например, для субэкспоненциальной функции $n^{\log(n)}$. Это теоретическое обоснование не всегда согласуется с практикой, поскольку иногда экспоненциальные алгоритмы работают быстрее полиномиальных даже на достаточно длинных входах.

Одна из причин этого в следующем. При подсчёте времени работы берутся во внимание только «внешние» действия программы, а именно, сколько и каких операций произвела машина с исходными данными и теми, что хранятся в оперативной памяти (к примеру, сложений, вычитаний, умножений, сравнений, пересылок из одних ячеек памяти в другие и т.п.). Аналогом этому для машин Тьюринга служит подсчёт числа стираний-записываний и сдвигов головки. Но в действительности время работы тратится не только на эти операции, но и на поиск нужной команды. Проиллюстрируем это простым примером.

Рассмотрим сначала алгоритм T, который решает некоторую задачу полиномиальным сведением её к одному из k частных случаев, для каждого из которых имеется свой полиномиальный алгоритм решения: вначале посредством подпрограммы T_0 определяется, какая из подпрограмм $T_1,\dots,T_k$ годится для данного входа, а затем происходит переход на эту подпрограмму. Предположим, что эту же задачу решает и алгоритм S, но путём прямого перебора экспоненциального количества вариантов. Пусть над входной цепочкой длины n для достижения результата каждая из программ T_i и S выполняет $f_i(n)$ и $F(n)$ действий соответственно. Если на входе x длины n требуется применить подпрограмму T_r и число n уже таково, что $F(n) > f_0(n) + f_r(n)$, то при расчётах на реальных ЭВМ это не обязательно означает, что алгоритм T, применённый к x, быстрее закончит вычисления, чем это сделает S.

Чтобы разобраться в ситуации, будем считать T и S программами машины Тьюринга. Как сейчас общепринято, мы отождествили *время работы* машин с *количеством действий на ленте*, т.е. с «внешней» сложностью, и проигнорировали те действия, которые нужны для перехода от подпрограммы T_0 к T_r — «внутреннюю» сложность исполнения T. Однако при громоздких программах T_i более реально было бы учесть и время перехода к подпрограмме T_r. Почти те же самые эффекты наблюдаются и в реальной вычислительной машине.

Для более адекватного описания сложности выполнения программ нужно ввести понятие *комбинированной* (или *агрегированной*) *меры сложности алгоритма*, которая учитывала бы и «внешнюю» и «внутреннюю» его сложность. Или точнее: нужно учитывать не только число шагов на ленте, но также и время поиска в программе очередной применимой команды, которое определяется *сложностью описания* (строения) всей программы, тогда многое станет на своё место. Однако если брать при этом в расчёт только длину программы, то этого будет явно не достаточно. Хотя сложность описания программы машины Тьюринга самой по себе, без учёта её действий на ленте, может быть, пожалуй, удовлетворительно охарактеризована *гёделевским* номером этой программы. Но, разумеется, при выполнении некоторых естественных требований на нумерацию. Например, гёделевский номер программы должен монотонно зависеть от числа её команд, количества внутренних состояний машины, мощности рабочего алфавита и многих других значимых параметров программы. Немаловажным обстоятельством является и величина номера: традиционная нумерация последовательностей, основанная на разложении натуральных чисел по степеням простых, иногда приводит к очень большим номерам для коротких последовательностей. Более эффективной, а значит и подходящей, может быть нумерация, основанная на канторовском перечислении пар и разбиении длинной последовательности на пару «начало–конец».

Два варианта возможного исправления недостатков традиционного способа подсчёта сложности сделаны в [27]. В первом из них предлагается совсем не учитывать выполнение «скользящих» команд, которые не меняют ни внутреннее состояние машины, ни запись на ленте, т.е. команд вида $q_i\alpha \to q_iR$ или $q_i\alpha \to q_iL$. Во втором — сложность выполнения «скользящей» команды предлагается считать равной 2^{-t+1}, где t — это номер выполнения данной команды, когда она исполняется несколько раз подряд. Например, если такая команда выполнилась однажды 5 раз подряд, а во второй — трижды, то все восемь её исполнений дадут прибавку к сложности $\left(2^0+2^{-1}+2^{-2}+2^{-3}+2^{-4}\right)$ + $+\left(2^0+2^{-1}+2^{-2}\right)$, а не восемь. Действительно, пройтись по массиву из двух десятков единиц, выполняя $q_i 1 \to q_i R,$ вроде бы заметно легче, чем написать их десяток. Недостаток обоих этих вариантов — тот, что и при очень длинном массиве единиц сложность всех исполнений «скользящей» команды останется маленькой, что опять противоречит интуиции.

7. Особые точки гиперповерхностей. Гиперповерхность, заданная формой f над полем характеристики нуль, *особая*, если совокупность частных производных первого порядка этой формы имеет нетривиальный нуль. Гладкость проективной гиперповерхности, заданной формой f степени d от $(n+1)$ переменной, выражается неравенством нулю дискриминанта, т.е. формы D от коэффициентов f [28]. Степень дискриминанта равна $(n+1)\,(d-1)^n$. При $d=1$ дискриминант равен ненулевой константе; при $d=2$ дискриминант пропорционален определителю матрицы квадратичной формы. Для форм f от двух переменных (при $n=1$), получаемых гомогенизацией многочленов $g(x)$ степени d от одной переменной, дискриминант D имеет степень $2d-2$ и совпадает с широко используемым дискриминантом многочлена g [29; 34]. Высокая степень дискриминанта иллюстрирует высокую вычислительную сложность элиминации кванторов в теории поля комплексных чисел.

Напомним геометрическую интерпретацию дискриминанта. Особые гиперповерхности в проективном пространстве соответствуют касательным гиперплоскостям к многообразию Веронезе. В свою очередь касательные гиперплоскости соответствуют точкам двойственного многообразия [30; 245–249]. Дискриминант определяет гиперповерхность в двойственном проективном пространстве, двойственную к многообразию Веронезе.

Назовем (-1, 1)-точкой всякую точку в проективном пространстве, чьи однородные координаты равны -1 или 1, с точностью до общего ненулевого множителя. Это вершины многомерного куба. Проверка принадлежности некоторой (-1, 1)-точки к данной гиперплоскости является NP-полной задачей. Подходы к ее решению, основанные на теореме Гильберта Nullstellensatz, обсуждаются в [31]. Отметим, что соответствующая задача оптимизации может быть решена псевдополиномиальным алгоритмом, основанным на методе динамического программирования [32]. Этот метод усовершенствован в работе [33].

Покажем, что задача о распознавании гиперплоскости, на которой не лежит никакая вершина многомерного куба, сводится к проверке гладкости комплексной проективной гиперповерхности нечётной степени, начиная с третьей. Это говорит о вычислительной трудности проверки гладкости таких гиперповерхностей, хотя для квадрики гладкость проверяется легко. С другой стороны, это может быть полезно для анализа близких комбинаторных задач [34], поскольку взаимное расположение особых точек связано некоторыми ограничениями.

Далее рассматриваются проективные гиперповерхности, которые заданы формами с коэффициентами из конечного алгебраического расширения поля рациональных чисел. Элементы конечного алгебраического расширения можно отождествить с многочленами ограниченной степени над полем рациональных чисел. Арифметические операции над этим полем сводятся к операциям над целыми числами, размер которых ограничен полиномом от длин записей исходных алгебраических чисел [10; 56–65; 35].

Теорема 2. Для любого нечётного числа d, начиная с трёх, существует детерминированный алгоритм, который получает на вход гиперплоскость H, заданную линейной формой $h = a_0x_0 + \ldots + a_nx_n$, где n не меньше трёх, и за полиномиальное время выдает такую гиперповерхность S степени d, что особые (-1, 1)-точки на S взаимно однозначно соответствуют (-1, 1)-точкам, лежащим на H.

Доказательство. Сопоставим линейной форме h форму нечётной степени d следующим образом: $f = a_0x_0^d + \ldots + a_nx_n^d$. Выходом алгоритма служит ограничение формы f на гиперплоскость H, которое определяет гиперповерхность S в пространстве H. Особыми точками на S служат точки касания гиперплоскости H с гиперповерхностью, заданной формой f.

Если в некоторой (-1, 1)-точке x обе формы h и f обращаются в нуль, то проективные гиперповерхности, заданные этими формами, касаются друг друга в x. Следовательно, S имеет особую точку x.

Градиенты форм ∇h и ∇f — коллинеарные в точках с координатами, удовлетворяющими равенствам $x_k^{d-1} = x_j^{d-1}$ для всех тех индексов k и j, для которых коэффициенты a_k и a_j не равны нулю. Если все коэффициенты не равны нулю, то такие точки с вещественными координатами являются (-1, 1)-точками. Здесь существенно используется чётность числа d -1. Если же k-й коэффициент равен нулю, то соответствующая координата особой точки может быть любой. Но в этом случае гиперплоскость H одновременно содержит или не содержит обе (-1, 1)-точки, отличающиеся k-й координатой. Следовательно, особые (-1, 1)-точки на S взаимно однозначно соответствуют (-1, 1)-точкам, лежащим на H. Теорема доказана.

Замечание. Ограничение снизу на число n в условии теоремы связано с тем, что в случае $n = 2$ S содержит конечное число точек.

Следствие. Для любого нечётного числа d, начиная с трёх, множество гиперповерхностей степени d в конечномерных пространствах над конечным алгебраическим расширением поля рациональных чисел, содержащих особую (-1, 1)-точку, NP -полное.

Доказательство. Рассматриваемое множество гиперповерхностей принадлежит классу NP, поскольку, недетерминированно угадав (-1, 1)-точку, за полиномиальное время можно проверить, является ли эта точка особой. Полнота в классе NP следует из предыдущей теоремы. Следствие доказано.

Работа выполнена при частичной поддержке Комитета науки МОН РК (грант 0726/ГФ) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект 13-04-40196-Н).

Список литературы

1 *Береснев В.Л., Мельников А.А.* Алгоритм ветвей и границ для задачи конкурентного размещения предприятий с предписанным выбором поставщиков // Дискретный анализ и исследование операций. — 2014. — Т. 21. — № 2. — С. 3–23.

2 *Каренов Р.С.* Методика анализа и оптимизации сетевого графика // Вестн. Караганд. ун-та. Сер. Математика. — 2013. — № 3 (71). — С. 53–65.

3 *Айсагалиев С.А., Айсагалиев Ж.К.* Исследование по математическому программированию // Вестн. КазНУ. Сер. мат., мех., инф. — 2013. — № 2 (77). — С. 4–20.

4 *Ешкеев А.Р.* Йонсоновские множества и их некоторые теоретико-модельные свойства // Вестн. Караганд. ун-та. Сер. Математика. — 2014. — № 2 (74). — С. 53–62.

5 *Ешкеев А.Р., Жолмагамбетова Б.Р.* Позитивно алгебраически простые модели в классе экзистенциально-замкнутых моделей выпуклых позитивных йонсоновских теорий // Вестн. Караганд. ун-та. Сер. Математика. — 2014. — № 2 (74). — С. 63–69.

6 *Гэри М., Джонсон Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. — М.: Мир, 1982. — 416 с.

7 *Heintz J.* Definability and fast quantifier elimination in algebraically closed fields // Theoretical Computer Science. — 1983. — Vol. 24. — P. 239–277.

8 *Fürer M.* The complexity of Presburger arithmetic with bounded quantifier alternation depth // Theoretical Computer Science. — 1982. — Vol. 18. — P. 105–111.

9 *Верещагин Н.К.* Новое доказательство разрешимости элементарной теории линейно упорядоченных множеств // Математические заметки. — 1990. — Vol. 47. — № 5. — P. 31–38.

10 *Кокс Д., Литтл Дж., О'Ши Д.* Идеалы, многообразия и алгоритмы. Введение в вычислительные аспекты алгебраической геометрии и коммутативной алгебры. — М.: Мир, 2000. — 687 с.

11 *Bokut L.A., Chen Y.* Gröbner–Shirshov bases and their calculation // Bull. of Mathematical Sciences. — 2014. — [ER]. Access mode: doi: 10.1007/s13373-014-0054-6.

12 *Mayr E.W., Meyer A.R.* The complexity of the word problems for commutative semigroups and polynomial ideals // Advances in Mathematics. — 1982. — Vol. 46. — № 3. — P. 305–329.

13 *Чистов А.Л.* Дважды экспоненциальная нижняя оценка на степень системы образующих полиномиального простого идеала // Алгебра и анализ. — 2008. — Т. 20. — № 6. — С. 186–213.

14 *Mayr E.W., Ritscher S.* Dimension-dependent bounds for Gröbner bases of polynomial ideals // J. of Symbolic Computation. — 2013. — Vol. 49. — P. 78–94.

15 *Чистов А.Л.* Алгоритм полиномиальной сложности для разложения многочленов и нахождение компонент многообразия в субэкспоненциальное время // Записки научных семинаров ЛОМИ. — Ленинград: Наука, 1984. — Т. 137. — С. 124–188.

16 *Chistov A.L.* An improvement of the complexity bound for solving systems of polynomial equations // Notes of scientific seminars PDMI. — New York, 2012. — 181. — 6. — P. 921–924.

17 *Schwartz J.T.* Fast probabilistic algorithms for verification of polynomial identities // J. of the ACM. — 1980. — Vol. 27. — P. 701–717.

18 *Giusti M., Lecerf G., Salvy B.* A Gröbner free alternative for polynomial system solving // J. of Complexity. — 2001. — Vol. 17. — P. 154–211.

19 *Herrero M.I., Jeronimo G., Sabia J.* Affine solution sets of sparse polynomial systems // J. of Symbolic Computation. — 2013. — Vol. 51. — P. 34–54.

20 *Григорьев Д.Ю.* Сложность разрешения теории первого порядка алгебраически замкнутых полей // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1986. — Т. 50. — № 5. — С. 1106–1120.

21 *Wrathall C.* Complete sets and the polynomial-time hierarchy // Theoretical Computer Science. — 1977. — Vol. 3. — P. 23–33.

22 *Babaiy L.* Trading group theory for randomness // Proc. of the 17th ACM Symposium on Theory of Computing (STOC). — 1985. — P. 421–429.

23 *Miasnikov A.G., Romankov V., Ushakov A., Vershik A.* The word and geodesic problems in free solvable groups // Transactions of the American Mathematical Society. — 2010. — Vol. 362. — № 9. — P. 4655–4682.

24 *Ushakov A.* Algorithmic theory of free solvable groups: Randomized computations // J. of Algebra. — 2014. — Vol. 407. — P. 178–200.

25 *Deiyneko V.G., Klinz B., Weginger G.J.* Uniqueness in quadratic and hyperbolic 0–1 programming problems // Operations Research Letters. — 2013. — Vol. 41. — P. 633–635.

26 *Найденко В.Г.* О сложности нахождения второго решения NP-полной задачи // Весцi Нацыянальнай Акадэмii Навук Беларусi. Серыя фiзiка-матэматычных навук. — 2012. — № 2. — С. 114–118.

27 *Латкин И.В., Латкина Л.П.* Разности Σ_2^0-множеств и практические алгоритмы // Материалы II Междунар. науч.-практ. конф. «Тенденции и перспективы развития современного научного знания». — М.: Ин-т стратегических исследований, 2012. — С. 44–56.

28 *Морозов А.Ю., Шакиров Ш.Р.* Новые и старые результаты в теории результатов // Теоретическая и математическая физика. — 2010. — Т. 163. — № 2. — С. 222–257.

29 *Прасолов В.В.* Многочлены. — М.: МЦНМО, 1999.

30 *Харрис Дж.* Алгебраическая геометрия. Начальный курс. — М.: МЦНМО, 2005. — 400 с. / Пер.: Harris J. Algebraic geometry. A first course. — New York: Springer-Verlag, 1992.

31 *Margulies S., Onn S., Pasechnik D.V.* On the complexity of Hilbert refutations for partition // J. Symb. Comput. — 2015. — Vol. 66. — P. 70–83.

32 *Papadimitriou C.H.* On the complexity of integer programming // J. ACM. — 1981. — Vol. 28. — № 4. — P. 765–768.

33 *Tamir A.* New pseudopolynomial complexity bounds for the bounded and other integer Knapsack related problems // Oper. Res. Lett. — 2009. — Vol. 37. — № 5. — P. 303–306.

34 *Горбунов К.Ю., Селиверстов А.В., Любецкий В.А.* Взаимное расположение параллельных гиперплоскостей, квадрик и вершин многомерного куба // Проблемы передачи информации. — 2012. — Т. 48. — № 2. — С. 113–120.

35 *Ноден П., Китте К.* Алгебраическая алгоритмика, с упражнениями и решениями. — М.: Мир, 1999. — С. 203, 204.

И.В.Латкин, А.В.Селиверстов

Кешен сандар өрісі теориясының есептелімділік күрделілік тұстары

Мақалада кванторлар өзгерісінің санына шектелген ескертілген түрдегі формулалардың есептелімділік күрделілі талданды. Дербес жағдайда алгебралық тұйық өрістер теориясымен жұмыс жасалды. Гипержазықтықтағы көпөлшемді кубтың төбелерін тану полиномиалдық уақытта құрылған гиперкеңістіктегі ерекше нүктелерді тануға келтірілді. Сондай-ақ күрделілік кластары арасындағы кейбір қатынастар дәлелденген. Авторлармен күрделіліктің жақсартылған тұжырымдамасы және модельдер теориясымен байланысы ұсынылған.

I.V.Latkin, A.V.Seliverstov

Computational complexity of fragments of the theory of complex numbers

We discuss the computational complexity of formulas in prenex form with bounded quantifier alternation depth. In particular, we have to do with the theory of algebraically closed fields. It is proved that recognition of multidimensional cube vertices on the hyperplane can be reduced to recognition of singular points on a hypersurface constructed in polynomial time. Moreover, some relations between complexity classes are proved. Finally, we discuss how one can improve a concept of complexity as well as connection with the model theory.

Referenses

1 Beresnev V.L., Melnikov A.A. *J. of Applied and Industrial Mathematics*, 2014, 8, 2, p. 177–189.

2 Karenov R.S. *Bull. of University of Karaganda. Ser.Mathematics*, 2013, 3 (71), p. 53–65.

3 Aisagaliyev S.A., Aisagaliyev Zh.K. *KazNU Bull. Mathematics, Mechanics and Computer Sciences*, 2013, 2 (77), p. 4–20 (in Russian).

4 Yeshkeyev A.R. *Bull. of University of Karaganda. Ser. Mathematics*, 2014, 2 (74), p. 53–62 (in Russian).

5 Yeshkeyev A.R., Zholmagambetova B.R. *Bull. of University of Karaganda. Ser. Mathematics*, 2014, 2 (74), p. 63–69 (in Russian).

6 Garey M.R., Johnson D.S. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, W.H. Freeman & Co. New York, 1979.

7 Heintz J. *Theoretical Computer Science*, 1983, 24, p. 239–277.

8 Fürer M. *Theoretical Computer Science*, 1982, 18, p. 105–111.

9 Vereshchagin N.K. *Mathematical Notes*, 1990, 47, 5, p. 444–449.

10 Cox D., Little J., O'Shea D. Ideals, Varieties, and Algorithms. *An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*, Moscow: Mir, 2000, 687 p.

11 Bokut L.A., Chen Y. *Bull. of Mathematical Sciences*, 2014. doi: 10.1007/s13373-014-0054-6.

12 Mayr E.W., Meyer A.R. *Advances in Mathematics*, 1982, 46, 3, p. 305–329.

13 Chistov A.L. *St. Petersburg Mathematical J.*, 2009, 20, 6, p. 983–1001.

14 Mayr E.W., Ritscher S. *J. of Symbolic Computation*, 2013, 49, p. 78–94.

15 Chistov A.L. *Computational complexity theory. Part II, Zap. Nauchn. Sem. LOMI, 137*, Otdel., Leningrad, Leningrad: Nauka, 1984, p. 124–188.

16 Chistov A.L. *J. of Mathematical Sciences*, New York, 2012, 181, 6, p. 921–924.

17 Schwartz J.T. *J. of the ACM*, 1980, 27, p. 701–717.

18 Giusti M., Lecerf G., Salvy B. *J. of Complexity*, 2001, 17, p. 154–211.

19 Herrero M.I., Jeronimo G., Sabia J. *J. of Symbolic Computation*, 2013, 51, p. 34–54.

20 Grigor'yev D.Yu. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 1987, 29, 2, p. 459–475.

21 Wrathall C. *Theoretical Computer Science*, 1977, 3, p. 23–33.

22 Babaiy L. *Proc. of the 17th ACM Symposium on Theory of Computing (STOC)*, 1985, p. 421–429.

23 Miasnikov A.G., Romankov V., Ushakov A., Vershik A. *Transactions of the American Mathematical Society*, 2010, 362, 9, p. 4655–4682.

24 Ushakov A. *J. of Algebra*, 2014, 407, p. 178–200.

25 Deineko V.G., Klinz B., Weginger G.J. *Operations Research Letters*, 2013, 41, p. 633–635.

26 Naidenko V.G. *Proc. of the National Academy of Sciences of Belarus. Series of Physikal-Mathematical sciences*, 2012, 2, p. 114–118.

27 Latkin I.V., Latkina L.P. *Transactions of II International theoretical and practical conference «The tendencies and prospects of the modern scientific knowledge»*, Moscow: Russian Institute for Strategic Studies, 2012, p. 44–56.

28 Morozov A.Yu., Shakirov Sh.R. *Theoretical and Mathematical Physics*, 2010, 163, 2, p. 587–617.

29 Prasolov V.V. *Polynomials*, Moscow: MTsNMO, 1999, 302 p.

30 Harris Dzh. *Algebraic geometry. A first course*, Moscow: MTsNMO, 2005; New York: Springer-Verlag, 1992.

31 Margulies S., Onn S., Pasechnik D.V. *J. Symb. Comput*., 2015, 66, p. 70–83.

32 Papadimitriou C.H. *J. ACM*, 1981, 28, 4, p. 765–768.

33 Tamir A. *Oper. Res. Lett*., 2009, 37, 5, p. 303–306.

34 Gorbunov K.Yu., Seliverstov A.V., Lyubetsky V.A. *Problems of Information Transmission*, 2012, 48, 2, p. 185–192.

35 Naudin P., Quitté C. *Algorithmique algébrique, avec exercices corrigés*, Paris: Masson, 1992, p. 203, 204.

UDC 512.7

A.T.Yerkex, T.N.Bekzhan

College of Mathematics and Systems Sciences, Xinjiang University, Urumqi, China
(E-mail: arxen999@163.com)

On outer elements of the noncommutative H_p spaces

In the article let M be a von Neumann algebra equipped with a faithful normal normalized tracial state τ, A be subdiagonal subalgebra of M. We transfer the results of [4] to the case $p<1$.

Key words: subdiagonal algebra, noncommutative Hardy space, inner-outer operators, finite von Neumann algebra.

Let M be a finite von Neumann algebra with a faithful normal tracial state τ. In [1], Arveson introduced the notion of finite, maximal, subdiagonal algebras A of M, as non-commutative analogues of weak-*Dirichlet algebras. Subsequently several authors studied the (non-commutative) H_p spaces associated with such algebras. Blecher and Labuschagne [2] studied outer operators in $H^p(A)(1\le p<\infty)$ (for the case $p<1$, see [3]). In [4] the authors extend their generalized inner-outer factorization theorem in [2] and establish characterizations of outers that are valid even in the case of elements with zero determinant.

In this paper, we will consider extend some results on outer operators in [4] to the case $p<1$, this can be considered as a complement to the work in [4].

This paper is organized as follows. Section 1 contains some preliminary definitions. In section 2, we extend the main results of [4] to the case $0<p<1$.

Preliminaries. Throughout this paper, we denote by M a finite von Neumann algebra on a Hilbert space H with a faithful normal tracial state τ. The closed densely defined linear operator x in H with domain $D(x)$ is said to be affiliated with M if and only if $u^*xu=x$ for all unitary operators u which belong to the commutant M' of M. If x is affiliated with M, then x is said to be τ-measurable if for every $\varepsilon>0$ there exists a projection $e\in M$ such that $e(H)\subseteq D(x)$ and $\tau(e^{\perp})<\varepsilon$ (where for any projection e we let $e^{\perp}=e-1$). The set of all τ-measurable operators will be denoted by $L^0(M;\tau)$ or simply by $L^0(M)$. The set $L^0(M)$ is a *-algebra with sum and product to be the respective closure of the algebraic sum and product.

The measure topology in $L^0(M)$ is given by the system $V(\varepsilon,\delta)=\{x\in L^0(M):\|xe\|_\infty\le\delta$ for some projection $e\in M$ with $\tau(e^{\perp})\le\varepsilon\}$, $\varepsilon>0$, $\delta>0$ of neighborhoods of zero.

Given $0<p<\infty$, we define $\|x\|_p=\tau(|x|^p)^{1/p}$, $x\in M$, where $|x|=(x^*x)^{\frac{1}{2}}$. Then $(M,\|\cdot\|_p)$ is a normed (or quasi-normed for $p<1$) space, whose completion is the noncommutative L^p — space associated with (M,τ), satisfying all the expected properties such as duality (see [5, 6]), denoted by $L^p(M,\tau)$ or simply by $L^p(M)$. As usual, we set $L^\infty(M,\tau)=M$ and denote by $\|\cdot\|_\infty(=\|\cdot\|)$ the usual operator norm.

Given a von Neumann subalgebra N of M, an expectation $E:M\to N$ is defined to be a positive linear map which preserves the identity and satisfies $E(xy)=xE(y)$ for all $x\in N$ and $y\in M$. Since E is positive it is hermitian, i.e. $E(x)^*=E(x^*)$ for all $x\in M$. Hence $E(yx)=E(y)x$ for all $x\in N$ and $y\in M$. For a complete study of E, we refer to [1, 7].

Definition 1.1. Let A be a w*-closed unital subalgebra of M, and let E be a faithful, normal expectation from M onto the diagonal von Neumann algebra $D=A\cap J(A)$. Then A is a finite subdiagonal subalgebra of M with respect to E if:

(i) $A+J(A)$ *is w*-dense in* M;

(ii) $E(xy)=E(x)E(y),\ \forall x,y\in A$;

$$(iii)\quad \tau \circ E = \tau.$$

It is proved by Exel [8] that a finite subdiagonal algebra A is automatically maximal in the sense that if B is another subdiagonal algebra with respect to E containing A, then $B = A$. This maximality yields the following useful characterization of A:

$$A = \{x \in M : \tau(xa) = 0, \forall a \in A_0\},$$

where $A_0 = A \cap \ker E$ (see [1]).

For $p < \infty$ we define $H^p(A)$ to be the closure of A in $L^p(M)$, and for $p = \infty$ we simply set $H^\infty(A) = A$ for convenience. These are the so-called Hardy spaces associated with A. Let K be a subset of $L^p(M)$. We set $J(K) = \{x^* : x \in K\}$ and denote the closed linear span of K in $L^p(M)$ by $[K]_p$. We will keep this notation throughout the paper.

Definition 1.2. Let $0 < p \le \infty$. An operator $h \in H^p(A)$ is called left outer, right outer or bilaterally outer according to $[hA]_p = H^p(A)$, $[Ah]_p = H^p(A)$ or $[AhA]_p = H^p(A)$.

Recall that the Fuglede-Kadison determinant $\Delta(x)$ of an operator $x \in L^p(M)$ $(0 < p \le \infty)$ can be defined by $\Delta(x) = \exp(\tau(\log|x|)) = \exp(\int_0^\infty \log t dv_{|x|}(t))$, where $dv_{|x|}$ denotes the probability measure on R_+ which is obtained by composing the spectral measure of $|x|$ with the trace τ. It is easy to check that $\Delta(x) = \lim\limits_{p\to 0}\|x\|_p$.

As the usual determinant of matrices, Δ is also multiplicative: $\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y)$. We refer the reader for information on determinant to [1, 2, 9–20].

Outers

Definition 2.1. Let $H^0(A)$ be the closure of A in the topology of convergence in measure. We say that $h \in H^0(A)$ is outer in $H^0(A)$ if hA is dense in $H^0(A)$ with respect to the topology of convergence in measure.

We say that an element $h \in H^0(A)$ is uniform outer in $H^0(A)$ if there is a sequence $a_n \in A$ such that $\{ha_n\}$ is a uniformly bounded sequence in A in operator norm, which converges to 1 in measure.

The following is the extension to the case $p < 1$ of [4] Proposition 2.3.

Proposition 2.2. Let $0 < p < \infty$ and $h \in H^p(A)$. Then h is outer in $H^0(A)$ in the sense above if h is outer in $H^p(A)$.

Proof. The proof is the same as that of [4] Proposition 2.3.

By [3] Theorem 2.1, an argument similar to that of [4] Proposition 2.4 and 2.5, we have the following results.

Proposition 2.3. Let $0 < p < \infty$. Then $h \in H^p(A)$ is outer if and only if $E(h)$ is outer in $L^p(D)$ and $[hA_0]_p = H_0^p(A)$, where $H_0^p(A) = [A_0]_p$.

Proposition 2.4. Let $0 < p < \infty$. Then $h \in H^p(A)$ is outer if and only if $E(h)$ is outer in $L^p(D)$ and $E(h) - h \in [hA_0]_p$.

Definition 2.5. (i) We say that an element $h \in H^p(A)$ is uniform outer in $H^p(A)$ if there exists a sequence $a_n \in A$ such that $\{ha_n\}$ is a uniformly bounded sequence in A in operator norm, and $ha_n \to 1$ in p-norm.

(ii) We say that $h \in H^0(A)$ is uniform outer in $H^0(A)$ if there is a sequence $a_n \in A$ such that $\{ha_n\}$ is a uniformly bounded sequence in A in operator norm, which converges to 1 in measure.

Theorem 2.6. Let $0 < p < \infty$. Suppose that h is outer in $H^p(A)$ and $\Delta(h) \ne 0$. Then h is uniform outer in $H^p(A)$.

Proof. We will use the case $p \ge 1$ already proved in [4]. Thus assume $p < 1$. Choose an integer m such that $np \ge 1$. By [3] Theorem 3.4, there exist $h_1, ..., h_n \in H^{np}(A)$ such that $h = h_1 \cdots h_n$ and

$h_k^{-1} \in A, k = 2,3,\cdots,n.$ Since $\Delta(h_1) \neq 0,$ by [4] Theorem 2.8, there exists a sequence $a_m \in A$ such that $\{h_1 a_m\}$ is a uniformly bounded sequence in A in operator norm, and $h_1 a_m \to 1$ in p-norm. Set $b_m = h_n^{-1} \ldots h_2^{-1} a_m$. Now $b_m \in A$ such that $\{hb_m\}$ is a uniformly bounded sequence in A in operator norm, and $hb_m \to 1$ in p -norm. Consequently, h is uniform outer.

Lemma 2.7. Let $0 < p < \infty, h \in H^p(A).$ If $E(h)$ is outer in $L^p(D),$ then h is of the form $h = ug$ where $g \in H^p(A)$ is outer and $u \in A$ is a unitary. If $\Delta(E(h)) > 0,$ then $\Delta(g) > 0.$

Proof. This result is proved in [4] for $p \geq 1.$ Let $\frac{1}{p} = \frac{1}{r} + \frac{1}{q}$ and $1 \leq r < \infty.$ By [3] Theorem 3.4, there exist $h_1 \in H^r(A)$ and $h_2 \in H^q(A)$ such that $h = h_1 h_2$ and $h_2^{-1} \in A.$ Then $E(h) = E(h_1)E(h_2)$ and $E(h_2)^{-1} = E(h_2^{-1}).$ Hence $E(h_1)$ is outer in $L^p(D).$ By [4] Lemma 4.1, there are outer $g_1 \in H^r(A)$ and unitary $u \in A$ such that $h_1 = ug_1.$ Set $g = g_1 h_2.$ Then $g \in H^p(A)$ is outer and $h = ug.$ The second part is trivial.

An argument similar to that of [4] Lemma 4.3, we have the following result.

Lemma 2.8. Let $h \in L^p(M)$ be given, where $0 < p < \infty,$ and suppose that $\|ah\|_p = \|h\|_p$ for a contraction $a \in M.$ Then $h = a^* ah.$ If in addition the left support of h is 1, then a is a unitary.

Using Lemma 2.8, [3] Theorem 2.1 and an argument to that of [4] Theorem 4.4, we obtain the following.

Theorem 2.9. Let $h \in L^p(A)$ be given, where $0 < p < \infty,$ and let P be the canonical quotient map from $[hA]_p$ to $[hA]_p = [hA_0]_p.$ Then h will be outer if and only if $E(h)$ is outer in $L^p(D)$ and $\|E(h)\|_p = \|P(h)\|.$

Theorem 2.10. Let $f \in L^p(M)$ $(0 < P < \infty).$ Then the following conditions are equivalent:

(i) f is of the form $f = uh$ for some outer $h \in H^p(A)$ and a unitary $u \in M.$

(ii) The map $D \to [fA]_p / [fA_0]_p : d \mapsto P(fd)$ is injective, where P is the quotient map $P : [fA]_p \to [fA]_p / [fA_0]_p.$

(iii) $fe \notin [fA_0]_p$ for every nonzero projection e in $D.$

Proof. $(i) \Rightarrow (ii).$ Let f be of the form $f = uh$ for some outer $h \in H^p(A)$ and a unitary $u \in M.$ Then $[fA]_p = u[hA]_p = uH^p(A)$ and $[fA_0]_p = u[hA_0]_p = u[A_0]_p.$ Thus the $[fA]_p / [fA_0]_p = (u[A]_p)/(u[A_0]_p) = = uL^p(D),$ which ensures the validity of $(ii).$

$(ii) \Rightarrow (iii).$ It is trivial.

$(iii) \Rightarrow (i).$ This result is proved in [4] for $p \geq 1.$ Let $\frac{1}{p} = \frac{1}{r} + \frac{1}{q}$ and $1 \leq r < \infty.$ Then there exist $f_1 \in L^r(M)$ and $f_2 \in L^q(M)$ such that $f^* = f_1^* f_2^*$ and $f_2^{-1} \in M,$ so $f = f_2 f_1.$ It is clear that $f_1 e \notin [f_1 A_0]_p$ for every nonzero projection e in $D.$ Hence, by [4] Theorem 4.6, there are outer $h_1 \in H^r(A)$ and unitary $v \in M$ such that $f_1 = vh_1.$ Let $g_2 = f_2 v,$ then $g_2 \in L^q(M)$ and $g_2^{-1} \in M.$ By [3] Theorem 3.1, there are $h_2 \in H^q(A)$ and unitary $u \in M$ such that $g_2 = uh_2$ and $h_2^{-1} \in A.$ Hence $h_2 h_1$ is outer and $f = uh.$

2010 Mathematics Subject Classification: Primary 46L51, 46L52; Secondary 46J15. The authors are partially supported by NSFC grant No. 11371304.

References

1 *Arveson W.B.* Analyticity in operator algebras, Amer.J.Math, 1967. — 89. — P. 578–642.

2 *Blecher D.P., Labuschagne L.E.* Applications of Fuglede-Kadison determinant: SzegÖ's theorem and outers for noncommutative H^p, Trans. Amer. Math. Soc., 2008. — 360. — P. 6131–6147.

3 *Bekjan T.N., Riesz Q.Xu and Szeg Ö* Type factorizations for noncommutative Hardy spaces, J. Operator Theory, 2009. — 62. — p. 215–231.

4 *Blecher D.P., Labuschagne L.E.* Outers for noncommutative H^p revisited, Studia Math., 2013. — 217. — P. 265–287.

5 *Pisier G., Xu Q.* Noncommutative L^p -spaces, In Handbook of the geometry of Banach spaces, 2003. — Vol. 2. — P. 1459–1517.

6 *Takesaki M.* Duality for crossed products and the structure of von Neumann algebras of type III, Acta Math., 1973. — 131 — P. 249–310.

7 *Marsalli M., West G.* Noncommutative H^p -spaces, J. Operator Theory, 1997. — 40 — P. 339–355.

8 *Exel R.* Maximal subdiagonal algebras, Amer. J. Math., 1988. — 110 — P. 775–782.

9 *Fuglede B., Kadison R.V.* Determinant theory in finite factors, Ann. Math., 1952. — 55 — P. 520–530.

10 *Fack T., Kosaki H.* Generalized *S*-numbers of τ-measurable operators // Pac. J. Math., 1986. — 123 — P. 269–300.

11 *Ji G., Saito K.-S.* Factorization in subdiagonal algebras // J.Funct. Anal., 1998. — 159 — P. 191–202.

12 *Kawamura S., Tomiyana J.* On subdiagonal algebras associated with flows in operator algebras, J. Math. Soc. Japan, 1977. — 29 — P. 73–90.

13 *Labuschagne L.E.* A noncommutative SzegÖ theorem for subdiagonal subalgebras of von Neumann algebras. Proc. Amer. Math. Soc., 2005. — 133 — P. 3643–3646.

14 *Marsalli M.* Noncommutative H^2 -spaces, Proc. Amer. Math. Soc., 1997. — 125. — P. 779–784.

15 *Marsalli M., West G.* The dual of noncommutative H^1 // Indiana Univ. Math. J., 1998. — 47. — P. 489–500.

16 *McAsey M., Muhly P.S., Saito K.-S.* Non-self adjoint crossed products (invariant subspaces and maximality). — Trans. Amer. Math. Soc., 1979. — 248. — P. 381–410.

17 *Randrianantoanina N.* Hilbert transform associated with finite maximal subdiagonal algebras // J. Austral. Math. Soc. (Series A), 1999. — 65 — P. 388–404.

18 *Saito K.-S.* On non-commutative Hardy spaces associated with flows on finite von-Neumann algebras, Tohoku Math. J., 1977. — 29 — P. 585–595.

19 *Saito K.-S.* A note on invariant subspaces for maximal subdiagonal algebras, Proc. Amer. Math. Soc., 1979. — 77 — P. 349–352.

20 *Terp M.* L^p -spaces associated with an arbitrary von Neumann algegras, Notes, Math. Institute, Copenhagen Univ, 1981.

А.Т.Еркех, Т.Н.Бекжан

Коммутативті емес H_p кеңістігінің сыртқы элементтері

Мақалада тура нормаланған кеңістіктегі және ішкі алгебраның ішкі диагоналі болатын фон Нейман алгебрасы қарастырылды. Авторлар алдыңғы жұмыстарда алынған нәтижелерді қолданды.

А.Т.Еркех, Т.Н.Бекжан

Внешние элементы некоммутативных H_p пространств

В статье рассмотрена алгебра фон Неймана, оснащенная точным нормальным нормированным пространством и являющаяся поддиагональю подалгебры. Авторами были использованы ранее полученные результаты.

UDC 510.67

A.R.Yeshkeyev

Ye.A.Buketov Karaganda State University;
Institute of Applied Mathematics, Karaganda
(E-mail: Modth1705@mail.ru)

Properties of a stability for positive Jonsson theories

Actually, we study the connections of the Δ-*PM*-theories with their centers in the enrich signature. The properties of various companions of some Δ-*PM*-theories and their connection with this theory are considered on the language of the central types of positive Jonsson theory.

Key words: Jonsson theory, existentially closed model, forking, central type, the syntactic and semantic similarity of jonsson theories.

The main result of this article is the following theorem.

Theorem 1.2. Let $T-\Delta-PM$-theory, α-Jonsson, perfect, complete for $\Sigma_{\alpha+1}$ sentences. Then the following conditions are equivalent:

1) the ratio *PJNF* satisfies axioms 1–7 relatively theory T;

2) T^* stable and for any $p \in P$, $A \in A$ $((p, A) \in P \backslash JNF \Leftrightarrow p$ does not forks over A (in the sense of Shelah).

Under the above notions, for example we obtained the following.

Theorem 2.1. Let $T\Sigma_{\alpha+1}$ — complete, perfect $\Delta-PM$ theory. Thenthe following conditions are equivalent:

1) theory $T^c - P$-λ-stable in the sense of [1];

2) theory $T^* - P$-λ-stable.

In studying the properties of forking for positive Jonsson theories weconsidered axiomatic approach. Such analogs was considered in [2], respectively, for Jonsson theory.

Introduction

It is well known that using the concept of the forking outstanding specialist in the Model Theory S.Shelah was resolved the problem of classification of complete theories regarding the spectrum. Thus the concept of forking is a very important concept in the Model Theory. But, at the same time, it should be noted that the above concept of forking was determined to complete theories.

This article describes an attempt to transfer the concept a forking to the certain class of theories, which generally are not complete, but at the same time, this class is wide enough and natural.

Jonsson's conditions are the natural algebraic requirements that arise in studying a wide class of algebras. To Jonsson's properties satisfied such theories as group theory, the theory of Abelian groups, the theory of fields of fixed characteristic, the theory of Boolean algebras, the theory of ordered sets, thetheory of polygons (S-Acts, where S is a monoid), and many others. Let us to recall the definition of Jonsson theory.

Definition 1. The theory T is Jonsson's theory if it satisfies to followingconditions:

1) T has a infinite model;

2) T it is inductive;

3) T admits a joint embedding property (*JEP*);

4) T admits a property of an amalgamation (*AP*).

As is evident from the of the list, that the obtaining technic of such results for Jonsson theories applying can be quite broad. In this paper, the object of our research will focus on a class of theories related to the notion jonssoness and positivity. A subject of there search such theories related to the so-called «Eastern» model theory. This conventional definition and separation of the general model theory into two main areas: «Western» and «East» well-known expert in model theory Keisler H.J., identified in his survey article [3]. However, he notes that the western model theory studies the complete theories, and the eastern model theory correspondingly Jonsson theories. This work is a review of results concerning researches of notion of some kind of positive Jonsson theories and its a class of models. All necessary information about Jonsson theories can be found in [2, 4–7].

In the work [8] of I.Ben-Yaacov, was introduced a positive model theory, and within it were considered so-called *CAT*s. One can find as that syntactic feature of this work is the elimination of symbols of an universal quantifier and a negation in the basic formulas. Semantic feature is to consider as morphisms of continuations and immersions. It is easy to note that the problematic of positive Jonsson's theories and *CAT*s are very dense connected.

We recall the following definition concerning some particular type of positive Jonsson theory.

Let L be a first-order language.At is the set of atomic formulas of the language. B^+ *(At)* — with respect to a closed set of positive Boolean combinations (conjunction and disjunction) of all atomic formulas and their subformulae change of variables. $L^+= Q\ (B^+(At))$ is a set of formulas in normal prenex form obtained by applying quantifiers (∀ and ∃) to B^+ (At). We mean a formula positive if it belongs to L^+. Axiomatizable theory is called positive if its axioms are positive. $B\ (L^+)$ is an arbitrary Boolean combination of formulas L^+. When $\Delta=B\ (At)$ we get the usual Jonsson theory with the only difference that it has only positive axioms.

Let $0 \le n \le \omega$. Let Π_n^+ — the set of all formulas of a language L^+withthe form ∀∃...φ (i.e. the formulae from with a change of quantifiers beginning from ∀).

Let $\Delta \subseteq \Pi_n^+ \subseteq L^+$.

Recall the following definition of some kind of positive theory from [4].

Definition 2. Theory T is called Δ-positive mustafinien-(Δ-*PM*)-theory, if

1) theory$T$ has infinite model;

2) theory$T$ is Π_{n+2}^+ axiomatizable;

3) theory$T$ admits $\Delta - JEP$;

4) theory$T$ admits $\Delta - AP$.

Definition 3. The T theory is called Δ − mustafinien (Δ − *M*)-theory, if in the definition 2 we considered as morphisms only immersions following [8].

Remark: If the length of prefix of considered axioms exactly equal to two, then the above definitions 2 and 3 give to us, respectively, definitions of Δ-positive Jonsson (Δ − *PJ*) theory and Δ-Jonsson (Δ − *J*) theory.

We should say that presenting results about models of Δ − *PJ*-theories [4] which are positive generalization of Jonsson's theories, if they are, in general,such, because the are exist the samples of non-Jonsson, but positive Jonssonin any type above mentioned meaning. But we will not go beyond the first-order. Even in the case where Δ − *PJ*-theory is not Jonsson, uses the idea ofthe generalization of a semantic method [4] for Jonsson theories. The essenceof this generalization is that properties of Δ − *PJ*-central completion will betranslated on Δ − *PJ*-preimage.

If Δ − *PJ*-theory is Jonssonien, we will to work with the *ModT* like withthe class of models of a Jonsson theory. If Δ − *PJ*-theory is not Jonssonien, then as with the *ModT*, we consider E_T^+ — a positive class of existentially closedmodels of this theory. This approach for the class E_T — class of existentiallyclosed models of any universal theory T has been studied in [9]. Since relatively Jonsson Theories there are two possibilities: the perfect and imperfect cases ofones, we will adhere to the following. It is known in the [4] that if the Jonssontheory T is perfect, the class of its existentially closed models E_T elementaryand coincides with the $ModT^*$, where T^*— its center. In the opposite case, i.e, if the theory T is does not perfect, we do as in the [9], i.e instead of *ModT* weare working with the class E_T^+. When we consider an arbitrary Δ − *PJ*-theory T, the class E_T^+ considered as extension of the class E_T (both classes are alwaysavailable), and depending on the perfectness and incompleteness of the model-theoretic properties of a class E_T^+ represent interest. In this article usuallywe considered that Δ − *PJ*-theory are Δ − *PJ*-perfect, and it is a natural generalization of perfectness in Jonsson's case. It is clear that all results for Δ−*PM*-theories one can trivial transfer to other types of positive Jonssontheories (Δ − *PJ*, Δ − *M*, Δ − *J*), so we will prove just for Δ − *PM*-case ofpositive Jonsson theory.

The greatest progress has been made in the description of perfect Jonsson theories [4]. It is turn out that when theory is perfect then its center became a model companion of this theory. The idea of central-type dates back to the various enrichments of signatureand types of expressions through their forgetting in the old signature. And in the first and second cases, these ideas allow you to transfer the basic model-theoretic concepts defined for complete theories, theories on Jonsson and positive generalizations that generally incomplete.

The idea of the central type appears when considering enriched signature.

Let T an arbitrary $\Delta-PM$-theory in the language of the signature σ. Let C-semantic model theory of T. $A \subseteq C$. Let $\sigma_{\Gamma}(A)=\sigma \cup \{c_a | a \in A\} \cup \Gamma$ where $\Gamma=\{P\} \cup \{c\}$. Consider the following theory $T_{\Gamma}^{PM}(A)=Th_{\Pi_{\alpha+2}^{+}}(C,a)_{a\in A} \cup \{P(c)\} \cup \{"P \subseteq "\}$, where $\{"P \subseteq "\}$ there are infinite number of sentences, which says that the interpretation of characters P has positively existentially closed sub model in the signature σ. This theory is not necessarily complete.

Through S_{Γ}^{PM} denote the set of all $\sum_{\alpha+1}^{+}$ – completions. Theory T is $P-\lambda$-stable if

$\left|S_{\Gamma}^{PM}\right| \leq \lambda$ for any A, such that $|A| \leq \lambda$.

Let us consider all completions of the center T^{*} of the theory T in the new

Signature σ_{Γ} where $\Gamma = \{c\}$. By virtue $\Delta-PM$-ness of the theory T^{*}, there is its center, and we denote it as T^{c}. When restricted T^{c} to the signature σ, the theory T^{c} becomes a complete type. This type we call the central type of theory T.

§1 About forking in the class of the $\Delta-PM$ theories

Our aim is to define the concept of forking by axiomatic way for the $\Delta-PM$ theory when it perfect α–Jonsson theory. We go by generalizing the results of [10, 2]. Give the following definitions.

Definition 1.1. Let $M-\sum_{\alpha+1}^{+}-$ saturated Δ-positive $\alpha+1-$existentiallyclosed model of cardinality k (k large enough cardinal) $\Delta-PM$ theory ofT ($\sum_{\alpha+1}^{+}$ saturation is saturation-type relatively $\sum_{\alpha+1}^{+}$ to its capacity). Recall that the model M of the theory T is called Δ-positive existentiallyclosed if for each Δ-homomorphism and every $a \in M$, and $\varphi(\bar{x},\bar{y}) \in \Delta : N \models \exists \bar{y}\, \varphi(f(\bar{a}),\bar{y}) \Rightarrow M \models \exists \bar{y}\, \varphi(\bar{a},\bar{y})$. Let $T\Delta-PM$ theory, $S^{PM}(X)$ the set of all positive $\sum_{\alpha+1}^{+}$ complete n-types, over X joint with T for each finite n.

Let A — class of all subsets of the M, P class of all $\sum_{\alpha+1}^{+}$ types (not necessarilycomplete), let $PJNF \subseteq P \times A$ — a binary relation. We impose on the $PJNF$ (positive Jonsson nonforking) the following axioms:

Axiom 1. If $(p,A) \in PJNF$, $f \in Aut(M)$, $f(A)=B$, that $(f(p),B) \in PJNF$.

Axiom 2. If $(p,A) \in PJNF$, $q \subseteq p$, then $(q,A) \in PJNF$.

Axiom 3. If $A \subseteq B \subseteq C$, $p \in S^{PM}(C)$, then $(p,A) \in PJNF \Leftrightarrow (p,B) \in PJNF$ and $(p|B,A) \in PJNF$.

Axiom 4. If $A \subseteq B, dom(p) \subseteq B, (p,A) \in PJNF$, then $\exists q \in S^{PM}(B)$ ($p \in q$ and $(q,A) \in PJNF$).

Axiom 5. There is a cardinal μ such that if $A \subseteq B \subseteq C$, $p \in S^{PM}(B), (p,A) \in PJNF$, then $\left|\{q \in S^{PM}(C) : p \subseteq q \text{ and } (q,A) \in PJNF\}\right| < \mu$.

Axiom 6. There is a cardinal ρ such that $\forall p \in P, \forall A \in A$ if $(p,A) \in PJNF$, then $\exists A_1 \subseteq A, (|A_1| < \rho \text{ and } (p,A_1) \in PJNF)$.

Axiom 7. If $p \in S^{PM}(A)$, then $(p,A) \in PJNF$.

The classical notion of forking belongs to Shelah.

Definition 1.2. Set of formulas $\{\varphi(\bar{x},\bar{a}_i) : i<k\}=p$ called k–in consistent for some positive integer k, if every finite subset p of cardinality k is inconsistent, $ie \models \neg \bar{x}\left(\varphi\left(\bar{x},\overline{a_{i_1}}\right) \wedge \ldots \wedge \varphi\left(\bar{x},\overline{a_{i_k}}\right)\right)$ for each $i_1 < \ldots < i_k < k$.

Partial type on a variety of relatively $k \in \omega$ divisible if there is a formula $\varphi(\bar{x},\bar{a})$ and a sequence $\langle a_i : i \in \omega \rangle$ such that:

1) $p \mid -\varphi(\bar{x},\bar{a})$;

2) $tp(\bar{a}/A)=tp(\bar{a}_i/A)$ for all i;

3) $\{\varphi(\overline{x},\overline{a}_i): i\in\omega\}$ k — is incompatible.

Also p divided over A the relatively certain k. In addition p is forked over A in T if there are exist formulas $\varphi_0(\overline{x},\overline{a}_0),\dots,\varphi_n(\overline{x},\overline{a}_n)$ such that:

(i) $p| = \bigcup_{0\le i\le n}\varphi_i(\overline{x},\overline{a}_n)$;

(ii) $\varphi_i(\overline{x},\overline{a}_i)$ is divided over A for each i.

Following agreement is important. In fact, we will talk about the semantic aspect of the $\Delta-PM$-theory. If the $\Delta-PM$-theory of T is α–Jonsson, then with $ModT$ we work as with the class some models Jonsson theory. If the $\Delta-PM$-theory of T is not α–Jonsson, then as a class $ModT$ we will consider it positively existentially closed models $\sum_{\alpha+1}^{+}T$. This approach for class $\sum_{\alpha+1}^{+}T$. of existentially closed models of arbitrary universal theory T was considered in [9]. Since relatively Jonsson theories are two possible cases: perfect and imperfect, we will adhere to the following. It is well known [4] that if the theory T perfect Jonsson, the class of its existentially closed models of elementary and coincides with $ModT^*$, where T^* is its center. Otherwise, i.e. if the theory T is not perfect, we proceed in a similar [9], but instead $ModT$ working with the class $\sum_{\alpha+1}^{+}T$. This class is considered as an extension E^T class of existentially closedmodels (both classes always exist), and depending on the theory of T perfectand imperfect model-theoretic properties of a class of $\sum_{\alpha+1}^{+}T$ special interest.In this article, when considered Δ considered $\Delta-PM$-theory $\Delta-PM$ – are perfect, which is a natural generalization of perfect sense in Jonsson.

Definition 1.3. Following [3], we say that the model $A\in K$ is simple in theclass K, if for any $B\in K$ such that there exists a homomorphism $h: A\to B$, that is an h embedding. We say that the theory T satisfies the condition (S), ifeach model $A\in K$ is simple in the class K. In [3] observed that (S) is equivalentto the syntactic properties: (S') is «Each existential formula L is equivalent T to some positive existential formula».

Easy to see that not Jonsson $\Delta-PM$-theory T into force of the agreement $ModT$ satisfies the property (S').

We will use in the proof of Theorem 1.2. The following results:

Theorem 1.1. (Ramsey F.P.). Let I be an infinite set, $n<\omega$, $|I|^n$ the family of all subsets of the set I, which consists precisely of the n elements. If $|I|^n = A_0\cup\ldots\cup A_{k-1}$, $k<\omega$, $A_i\cap A_j=\varnothing$ with $i<j<k$ there exists an infinite $J\subset I$ such that $|J|^n\subset A_i$ for some $i<k$.

Lemma 1.1. [10, Lemma 14.9]. Let T stable theory, M saturated modelof the power μ^+ types $p_1,p_2\in S(M)$ each does not forks over A. Then if $p_1\restriction A = p_2\restriction A$ there exists an A elementary identity monomorphism f suchthat $f(d_1)\sim d_2$, where d_1,d_2 the schema defining p_1,p_2 respectively.

The class of all Δ positive α + 1-existentially closed models of the theory T is denoted by $\sum_{\alpha+1}^{+}T$.

Definition 1.4. We say that the $\Delta-PM$-theory T $PM-\lambda$ is stable if for any model $A\in\sum_{\alpha+1}^{+}T$, any subset X of set $A|X|\le\lambda \Rightarrow |S^{PM}(X)|\le\lambda$. $\Delta-PM$-theory T PM-stable if it is $PM-\lambda$-stable, for some λ.

Theorem 1.2. Let $T-\Delta-PM$ theory, α Jonsson, perfect, complete for $\sum_{\alpha+1}$ sentences. Then the following conditions are equivalent:

1) the ratio $PJNF$ satisfies axioms 1–7 relatively theory T;

2) T^* stable and not for any $p\in P, A\in A((p,A)\in PJNF \Leftrightarrow p$ does not forks over A (in the sense of Shelah).

Proof.

1 ⇒ 2. Let $\lambda = 2^{\rho\cdot|T|\cdot\mu}$, where λ, ρ, μ are the cardinals, which corresponded to axioms 1–7. We now show that T $P-\lambda$ — is stable. Then, by [11], we have that $T^*\lambda$ is stable. Obviously, that $\lambda^\rho=\lambda$. Let $|A|=\lambda$. If $p\in S^{PM}(A)$, then, by Axiom 7, $(p,A)\in PJNF$ and by Axiom 6 there is $A_p\subseteq A$ such that

$|A_p| < \rho$ and $(p, A_p) \in PJNF$. Then by Axiom 3 $(p \restriction A_p, A) \in PJNF$. We denote $p \restriction A_p$. Although $g(p)$. By axiom $5 \left|\{q \in S^{PM}(A) : g(q) = g(p)\}\right| < \mu$. Consequently $\left|S^{PM}(A)\right| \leq \left|\{g(p) : p \in SPM(A)\}\right| \cdot \mu \leq \left|A^{\rho}\right| \cdot 2^{\rho \cdot |T|} \cdot$ $\cdot \mu \leq \lambda^{p} \cdot \lambda \cdot \lambda = \lambda^{\rho} = \lambda.$ Consequently, T $PM - \lambda$ stable. And we conclude that $T^{*}\lambda$-stable by [11]. Suppose now $(p, A) \in PJNF$. We show that ρ it does not a forks overA. Let $B = dom(p)$. Then by Axiom 4, there exists $q \in SPM(B)$ such that and $(q, A) \in PJNF$. We prove that q does not forks over A (then p doesnot forks over A by Axiom 2). Assume the contrary. Then by the perfectness of theory T and definitions 1.2., and also (S') there is a finite set of positive existential formulas Σ_0^+ such that $q \left|- \bigcup \{\varphi : \varphi \in \Sigma_0^+\}\right.$ and each formula $\varphi \in \Sigma_0^+$ is divided over A. Let $C = B \cup D$, D — the set of constants appearing at least one of the formulas of Σ_0^+. By Axiom 4, there exists $q_0 \in S^{PM}(C)$ such that $q \in q_0$ and $(q_0, A) \in PJNF$. Clearly, therefore $q_0 \left|- \bigcup \{\varphi : \varphi \in \Sigma_0^+\}\right.$, there $\varphi(\overline{x}, \overline{a}) \in q_0 \cap \Sigma_0^+$. Using Theorem 1.1., Compactness theorem and divisibility $\varphi(\overline{x}, \overline{a})$ over A, we can show the existence of a sequence $\left\langle \overline{a_\alpha} : \alpha < \mu^+ \right\rangle$ and elementary monomorphisms $f_\alpha, \alpha < \mu^+$ identical to $\overline{a_0} = \overline{a}, \overline{a_\alpha} = f_\alpha(\overline{a}), \alpha < \mu^+$ — and $\left\{\varphi(\overline{x}, \overline{a_\alpha}) : \alpha < \mu^+\right\}$ such that k is inconsistent for some $< \omega$.

Let $E = C \bigcup \left\{\overline{a_\alpha} : \alpha < \mu^+\right\}$, $q_\alpha = f_\alpha(q_0)$. $0 < \alpha < \mu^+$. By Axiom 1, $(q_0, A) \in PJNF$, $\alpha < \mu^+$, by Axiom 4, there exist $q_\alpha^{'} \in S^{PM}(E)$ such that $q_\alpha \subseteq q_\alpha^{'}$ and $\left(q_\alpha^{'}, A\right) \in PJNF$. Clearly, that $\varphi(\overline{x}, \overline{a_\alpha}) \in q_\alpha^{'}, q_\alpha \subseteq q_\alpha^{'}, \alpha < \mu^+$. We have $\left|\left\{q_\alpha^{'} : \alpha < \mu^+\right\}\right| = \mu^+$ as $\left\{\varphi\left(\overline{x}, \overline{a_\alpha}\right) : \alpha < \mu^+\right\}$ k-incompatible. This contradicts the axiom 5. Consequently, q does not forks over A. Thus, we have that if $(p, A) \in PJNF$ than p does not forks over A.

Let us prove the opposite direction. Let P not forking over A. Since the theory T is perfect that T^*, it is model-complete [8], and enough for us to workonly with existential types, furthermore into force (S') with positive existential types, and consider $\Sigma_{\alpha+1}^+$-saturated positive — α + 1 existentially closed models of the theory T. We need to prove that $(p, A) \in PJNF$. Let $M \supseteq A$, $M \supseteq dom(p)$, $|M| > 2^{\rho \cdot |T| \cdot \mu}$ and M is $\Sigma_{\alpha+1}^+$-saturated model of the theory, T^*, $t \in S^{PM}(M)$, $p \subseteq t, t$ does not forks over A. By Axiom 7 $(t \restriction A, A) \in$ $\in PJNF$, and by axiom 5 there is $q \in SPJ(M)$ that $q \supseteq t \restriction A$ and $(q, A) \in PJNF$. As shown above $(q, A) \in PJNF$ implies that q does not forks over A. By Lemma 1 there is automorphisms f of model M identical on A such that $y = f(q)$. Then, by Axiom 1 $(t, A) \in PJNF$ and Axiom 2 $(p, A) \in PJNF$. Therefore, 1 ⇒ 2 is proved.

2 ⇒ 1. Since the center of the theory T, namely, T^* is a complete theory, then you can apply forking properties in the sense of Shelah. For example, as inthe proof of Theorem 19.1 (2 ⇒ 1) [10]. The results (analogs of axioms 1–7 forcomplete theory) can be easily limited to generalizations of the correspondingconcepts in α-Jonsson sense.

§2 Stable properties of a central-type for Δ-PM-theory

In this section we give a proof of the fact that the properties of central stable types as the stability in the usual sense for centers with additional predicate coincides with the stability in the sense of PM with additional predicate.

D well on the fact that the predicate is highlighted. At one time a Frenchmathematician B.Poizat [12] defined the concept of elementary pair of models. In fact it is a model in which as an elementary submodel describes the implementation of a single predicate symbol. Later Mustafin T.G. introduced theconcept of T-stability [13], which generalizes the notion of an elementary pairabove. The latest achievement in this issue is the notion of E-stability [14] introduced and considered Palyutin E.A. Concept of an E-stability differs from theconcept of T-stability, in the sense that it is stable with respect to definability. Recall that in the classical case if the theory is stable, then any type definable.

We introduce the following notation:

Let T is an arbitrary $\Delta{-}PM$ theory in the language of the signature σ. Let *C* semantic model of theory *T*. $A \subseteq C$. Let $\sigma_\Gamma(A) = \sigma \cup \{c_a | a \in A\} \cup \Gamma$ where $\Gamma = \{P\} \cup \{c\}$. Consider the following theory $T_\Gamma^{PM}(A) = Th_{\Pi^+_{\alpha+2}}(C,a)_{a\in A} \cup \{P(c)\} \cup \{"P \subseteq "\}$, where $\{"P \subseteq "\}$ there are infinite number of sentences, which says that the interpretation of characters *P* have positively existentially closed submodel in the signature σ. This theory to necessarily complete. Therefore it may be the finite model. The requirement of existential isolation submodel is not accidental. This is due to the fact that the sub-model in our reasoning is bound to be endless. And any existentially closed model is infinite by definition.

Through S_Γ^{PM} the set of all $\Sigma^+_{\alpha+1}$-completions, theory $T - P - \lambda$-stable if $|S_\Gamma^{PM}| \le \lambda$ for any *A*. Such that $|A| \le \lambda$.

Let us consider all completions of a center T^* theory *T* in the new signature σ_Γ where $\Gamma = \{c\}$. Due to the fact that this theory *T* satisfied of a condition $\Delta{-}PM$ theory, that enrich the language does not change. Further, due to the fact that the condition *T* quite as α-Jonsson theory, that T^* — is a $\Delta - PM$ theory.

Then there is its center, and it is one of the completions of the theory T^* in the rich language. This center we denote it as T^c. When restricted T^c to the signature σ, the theory T^c becomes a complete type. This type we call as thecentral type theory *T*.

Under the above definitions, we obtain the following.

Theorem. Let *T* is $\Sigma_{\alpha+1}$-complete, perfect $\Delta - PM$ theory. Then thefollowing conditions are equivalent:

1) theory $T^c - P - \lambda$-stable in the sense of [1];

2) theory $T^* - PM - \lambda$-stable.

Proof. From 1) ⇒ 2) the proof is trivial, if the completions are not more than λ, then $\Sigma^+_{\alpha+1}$-completions obviously are not more than λ.

We prove from 2) to 1). Let theory $T^* - PM - \lambda$-stable. This is equivalentto saying that $T_\Gamma^{PM}(A)$ in the signature $\sigma_p(A) = \sigma_A \cup \{P\}$ is equal to the thecorresponding hull of Kaiser, denoting by *T0*. By the perfectness of the theory *T*, we have that $T_0 = T^*$ and $\sum^+_{\alpha+1} T = ModT^*$ ([4]) and then $T_\Gamma^{PM}(A) = T_0$ is a perfect Jonsson theory. Let the theory T_0 has no more than $\lambda \Sigma^+_{\alpha+1}$-completions. The center of theory T in the new signature $\sigma_p(A) = \sigma_A \cup \{P\}$ will be equals to $Th(C,a)_{a\in A} \cup \{P(c_a) | a \in A\}\{"P \le "\}$. We have show thatall completions of T^* are no more λ. There by $T^* P - \lambda$ stable (in the sense of [9]). Understand what is due of T^* is not complete in the new signature. Adding constants gives only inessential extension that will does not change thenumber of types of existentially closed submodels of *C*. The significant roll play simplementation predicate *P*. In this case, implementation of the predicate *P* is an elementary submodel *M* of model *C*. Since semantic model *C* of α−Jonssontheory of *T* is existentially closed [4], in view of the predicate *P* in *C* ($M \le C$) follows that $M \in \sum^+_{\alpha+1} T$. Let us consider an arbitrary completion *T'* of thetheory T^* in a new signature. By the definition T^*, there exists a model $Mof \sum^+_{\alpha+1} T$ such that $T' = Th(C,M,a)_{a\in A}$ where *M* — interpretation of the predicate *P* in the semantic model *C*. We have that $T' = Th(C,M,a)_{a\in A}$ is an Jonsson theory. In this case, by model completeness of *T'* any formula in *T'* is equivalent to some an existential formula in the *T'*. Then by $\Sigma^+_{\alpha+1}$-completeness of the theory of *T*, the number of the completions by 2) not more than λ. Thisproves the assertion.

Conclusion. Note that since the theory, complete for existential sentences satisfies the joint embedding property (*JEP*), but the converse is not true one conclude that $\Sigma^+_{\alpha+1}$-completeness condition in Theorem can not be removed. Due to thefact that there is a continuum non-elementary equivalent between themselves existentially closed groups, and group theory is Jonsson, it can be concluded that the condition of the perfectness in the theorem can not remove.

References

1 *Mustafin T.G., Nurmagambetov T.A.* On *P*-stability of complete theories. Structural properties of algebraic systems. Collection of scientific papers. — Karaganda: Publ. KSU, 1990. — P. 88–100.

2 *Yeshkeyev A.R.* On Jonsson stability and some of its generalizations // Journal of Mathematical Sciences. — 2010. — Vol. 166. — № 5. — P. 646–654.

3 Handbook of mathematical logic: In 4 parts / Ed. J.Barwise. The Modeltheory: Tr. from English to Russian. — Moscow: Nauka; the main edition of Physics and Mathematical Literature, 1982. — 126 p.

4 *Yeshkeyev A.R.* Jonsson theories. — Karaganda: Publ. KSU, 2009. — 250 p.

5 *Yeshkeyev A.R.* The structure of lattices of positive existential formulaeof ($\Delta - PJ$)-theories // Science Asia-Journal of the Science Society of Thailand. — Vol. 39. — Supplement 1, July, 2013. — P. 19–24.

6 *Yeshkeyev A.R.* The Properties of Positive Jonsson's Theories and TheirModels // International Journal of Mathematics and Computation. — 2014. — Vol. 22. — № 1. — P. 161–171.

7 *Yeshkeyev A.R.* Forking and some kind of stability for positive Jonssontheories. Abstracts Book 13th Asian Logic Conference Sun Yat-Sen University, 16–20, September, 2013. — Guangzhou city, 2013. — P. 12.

8 *Itay Ben-Yaacov*. Positive model theory and compact abstract theories // Journal of Mathematical Logic. — 2003. 3 — № 1. — P. 85–118.

9 *Pillay A.* Forking in the category of existentially closed structures. Connection between Model Theory and Algebraic and Analytic Geometry (A.Macintyred), Quaderni di Matematica. — 2001. — Vol. 6. — University of Naples.

10 *Mustafin T.G.* The number of models of theories. — Karaganda: Publ. KSU, 1983. — 105 p.

11 *Yeshkeyev A.R., Begetaeva G.S.* Stabilityof theory and its center. Karaganda State University // Bull. of KSU. — Mathematics ser., 2009. — 4 (56). — P. 29–34.

12 *Poizat B.* Paires des structures stables // J.Symbolic Logic. — 1983. 48. — P. 239–249.

13 *Mustafin T.G.* New concepts of stability theories // Proceedings of the Soviet-French symposium on the models theory. — Karaganda, 1990. — P. 112–125.

14 *Palyutin E.A.* E^{*}-stable theories // Algebra and Logic. — 2003. 2, 42. — P. 194–210.

А.Р.Ешкеев

Позитивті йонсондық теориялардың стабильдік қасиеттері

Мақалада $\Delta - PM$-теориялар мен олардың орталықтарының байланыстары зерттелді. Осы $\Delta - PM$-теорияның және оның неше түрлі компаньондарының қасиеттері позитивті йонсондық теориялардың орталық типтердің тілінде қарастырылды.

А.Р.Ешкеев

Стабильные свойства позитивных йонсоновских теорий

В статье изучены связи $\Delta - PM$-теорий и их центров в обогащенной сигнатуре. На языке центральных типов позитивной йонсоновской теории рассмотрены свойства различных компаньонов $\Delta - PM$-теории с самой теорией.

UDC 510.67

A.R.Yeshkeyev

Ye.A.Buketov Karaganda State University;
Institute of Applied Mathematics, Karaganda
(E-mail: Modth1705@mail.ru)

Convex fragmens of strongly minimal Jonsson sets

This article introduced and discussed the concepts of minimal Jonsson sets and respectively strongly minimal Jonsson sets. On this basis, we introduce the concept of independence of special subsets of existentially closed submodel of semantic model. The concept of independence leads to the concept of basis and then we have the Jonsson analogue of the theorem on uncountable categoricity.

Key words: Jonsson sets, Jonsson strongly minimal sets, fragments of Jonsson sets.

This article is devoted to the study of the concept Jonsson sets and its application. Jonsson sets concept defined in [1] and further results were obtained, which were presented in [2–4].

The concept of strongly minimality, as for the sets and for the theories played a decisive role in obtaining results which describe the uncountable-categorical theories [5].

We will consider all theories with additional property, it is a property of convexity.

So all theory will be convex.

Recall that theory T will be convex, if for any model $\mathfrak{A}$ of theory T and any collection $\{\mathfrak{B}_i : i \in I\}$ of substructures of $\mathfrak{A}$ which are models of T, the intersection $\cap\, \mathfrak{B}_i$ is a model of T.

The Jonsson theory are a natural subclass of broad class of theories, as a class of inductive theories. As is known, the main examples of the theories of algebras are examples of inductive theories, and they tend to represent an example of incomplete theories.

In modern model theory an technical apparatus developed mainly for complete theories, so today appliances study of incomplete theories are noticeably poorer than for complete theories.

On the one hand the Jonsson conditions area natural algebraic requirements that arise in the study of a wide class of algebras.

On the other hand natural examples of Jonsson theories are many, it is, for example, the theory of boolean algebras, abelian groups, fields of fixed characteristics, polygons (S-Acts, where S is monoid), and etc.

All of these examples are important in an algebra and in the various areas of mathematics. As can be seen, the list of the following scope of application of the technique developed for studying Jonsson theories can be quite broad.

Thus, all of the above suggests that the study of model-theoretic properties of Jonsson theories is atopicaltask.

Studying the inductive theories [6], it follows that Jonsson theory, as a subclass of inductive theories are such a part where there are certain methods of investigation incomplete theories, namely the method of transfer of properties of first-order theory of Jonsson center on the its Jonsson theory.

On this method and on research in the study of Jonsson theories and unrelated to the material in this article, we refer the reader to the following: [7–10].

As noted above, the basic technique associated with more subtle methods of studying the behavior of model elements, is the prerogative of the art study complete theories.

Therefore, even just trying to find a generalization of standard concepts from the arsenal of complete theories, we can come to a tautology or a concept that is not technically justified.

Therefore even been proposed Jonsson set.

Recall the basic definitions of [1], which are associated with these sets.

Suppose we are given an arbitrary language L.

The theory T is called Jonsson, if:

1) the theory T has infinite models;
2) the theory T of inductive;
3) the theory T has the joint embedding property (JEP);
4) the theory T has the property of amalgam (AP).

Jonsson theory T be a perfect theory, if its semantic model saturated.

Let T be perfect Jonsson theory complete for existential sentences in the language L and its semantic model is C.

We say that a set X be Σ-definable if it is definable by some existential formula.

a) The set X is said Jonsson in the theory T if it satisfies the following properties.

X is the Σ-definable subset of C;

dcl (X) is a support of some existentially closed submodel C.

b) The set X is said to be algebraically Jonsson in the theory T if it satisfies the following properties:

X is Σ-definable subset of C;

acl (X) is the support of some existentially closed submodel C.

From the definition of Jonsson sets can be seen that they work very simply in the sense of Morley rank [1]. It turns out that the elements of the set-theoretic difference(wells) of the closure and a Jonsson set have rank 0, i.e, they are algebraic. So, this is a case where we can work with the elements even in the case of incomplete.

The second point the utility of such a definition Jonsson set is that we closinga given set immediately obtain some existentially closed model. This in turn enables usfirst to determine Jonsson fragment from the set, and in principle and in an arbitrary theory.

At this point quite well studied are perfect Jonsson theory. For them, was proved a criterion of perfectness [7], which provide to carry out many model-theoretic facts about Jonsson theory and its center. There are complete descriptions as the center of such theories and models of their classes.

If in the caseof study of complete theories we mainly deal with two objects, it is the theory itself and its models, in the case of study of Jonsson theory we consider as models the class of existential closed models of the theory, as well as some additional condition is the completness of the theory in logical sense. At least, this theory must be existentially complete.

We give a definition of Jonsson fragment:

We say that all $\forall\exists$-consequences of an arbitrary theory create Jonsson fragment of this theory, if the deductive closure of these $\forall\exists$-consequences will beJonsson theory.

Due to the fact that this is not always true, it would be interesting to be able to allocate in arbitrary theory this part that will Jonsson theory. Such a task the place to be if only because of the fact that morleyzation of a theory it provides us, moreover, the resulting theory is perfect [6].

Another way is to use such a fact that any countable model of inductive theory necessarily isomorphically embeds in some existentially closed model of this theory [6].

Next, consider all $\forall\exists$-consequences which are true in this model. Then in the case of Jonsson theory is well known fact that $\forall\exists$-consequences whichtrue in this existentially closed model form aJonsson theory.

To study the behavior of the elements of wells in the case of Jonsson sets, we can always consider the $\forall\exists$-consequences which true in the above closures ofJonsson set. In view of the above, in this case, consideredset of sentences would be Jonsson theory.

Obtained in this case Jonsson theory will be called the Jonsson fragment of corresponding Jonsson set. It is clear that we can carry out research on the relationship Jonsson fragments from the original theory, which is a new formulation of the problem of study Jonsson theory.

The main objective of this article is the following problem:

In the frame of these newly introduced definitions, consider and try to describe strongly minimal Jonsson sets.

This in turn will entail a number of new formulations of problems, such as refinement of Lachlan-BaldwinTheorem in the framework of the newly introduced subjects.

Recall that Jonsson theory T has a semantic model C in enough large cardinality. If this model is saturated, this theorycalled perfect Jonsson theory.

Semantic model of perfect Jonsson theory uniquely determined by their power.

Further, since we have to deal with perfect Jonsson theory, it is convenient to work within a large semantic existentially closed model containing all other existentially closed models of considered perfect Jonsson theory. We call this model of universal existential domain (UED).

It can also be characterized by the following conditions.

1. Each model of this theory is isomorphically embeddable in C.

2. Every isomorphism between two its submodels which are models of considered theory extends to an automorphism model C.

We will not consider all subsets of C, but only a Jonsson subset.

For any Σ — definable subsets of a semantic model we have that the following result is yields.

Lemma 1. Σ — definablesubset of the semantic model is definable over a set of parameters from A if and only if it invariant under all automorphisms of model C, leaving in place each element of A.

It follows that the definable closure dcl (A) of Jonsson set A, i.e. the set of all elements definable over A is the set of elements that are invariant under all automorphisms of A.

From Lemma 1 it follows that the element b is algebraic over A if and only if it has only a finite number of conjugate elementsover A.

We define the Morleyrank for existentially definable subsets of the semantic model.

We want to assign to each Σ — definable subset M of the semantic model ordinal number (or maybe 1 or ∞) — its Morley rank, denoted by MR. First, we define the ratio $MR(M)\geq\alpha$ by recursion on the ordinal α.

Let T be perfect Jonsson theory and C its *UED*.

Definition 1. $MR(M)\geq 0,$ if and only if M is not empty;

$MR(M)\geq\lambda,$ if and only if $MR(M)\geq\alpha$ for all $\alpha<\lambda$ (λ is a limit ordinal);

$MR(M)\geq(\alpha+1),$ if and only if there exists in M an infinite family of (M_i) disjoint Σ — definable subsets such that $MR(M_i)\geq\alpha$ at all i.

Then the Morley rank of M is $MR(M)=\sup\{\alpha / MR(M)\geq\alpha\}$

Moreover, we assume that $MR(\varnothing)=-1$ and $MR(D)=\infty$, if $MR(M))\geq\alpha$ for all α (in the latter case we say that M has no rank).

Note that Σ — definable subset M has rank 1 if it is empty; rank 0 if it is finite; rank 1 if it is infinite, but does not contain an infinite family of disjoint infinite Σ — definable classes.

Lemma 2. We have the relation $MR(M_1\cup M_2)=\max(MR(M_1),MR(M_2))$.

Definition 2. Morley degree $MD(M)$ of Jonsson subset M of the semantic model that has Morley rank α, d is the maximum length of its decomposition $M=M_1\cup...\cup M_d$ existentially definable disjoint subsets of rank α.

In the case of rank 0 a degree of existentially definable subset M is a number of its elements. If existentially definable subset has no rank, is not defined and its degree of Morley.

Let us consider Jonsson minimal sets. Further, under the structure of the model refers to the signature or the language $\mathcal{L}$of Jonsson theory under consideration.

Let $\mathcal{M}$ a structure, and let $D\subseteq M^n$ infinite Σ — definable subset. We say that D is minimal in $\mathcal{M}$, if for any Σ — definable $Y\subseteq D$ or Y is finite, or $D\setminus Y$ finite.If $\varphi(\overline{\upsilon},\overline{a})$ is the formula that determines the D, then we can also say that $\varphi(\overline{\upsilon},\overline{a})$ is minimal.

We say that D and φ be Jonsson strongly minimal, if φ is minimal in any existentially closed extension $\mathcal{N}$of$\mathcal{M}$.

We say that a theory T Jonsson strongly minimal if$\forall\mathcal{M}\in E_T$, M is Jonsson strongly minimal.

The following properties of the algebraic closure true for any algebraically Jonssonset D.

i) $acl(acl(A))=acl(A)\supseteq A$;

ii) If $A\subseteq B,$ then $acl(A)\subseteq acl(B)$;

iii) If $a\in acl(A),$ then $a\in acl(A_0)$ for some finite $A_0\subseteq A$.

More subtle property holds if D Jonsson strongly minimal.

Lemma on a replacement. Suppose that D is a subset of the semantic model of the theory and it Jonsson strongly minimal, $A\subseteq D$ and $a,b\in D.$ If $\in acl(A\cup\{b\})\setminus acl(A),$ then $b\in acl(A\cup\{a\})$.

Remark. Jonsson strongly minimal set is existentially definable subset of the semantic model of the theory of rank 1 and degree 1 in the sense of Morley.

Definition 3. 1. Jonsson theory T Jonsson totally transcendental, if each existentially definable subset of its semantic model has Morley rank.

2. A theory T is ω-stable Jonsson, if the number of existential types is countable over every countable subset A semantic model.

Theorem 1. Jonsson theory T Jonsson totally transcendental, if and only if it Jonsson ω-stable.

Lemma 3. Let a and b be arbitrary elements of the semantic model. If the element b is algebraic over A and a, where A is existentially definable subset of the semantic model, the $MR(b/A) \leq MR(a/A)$.

Corollary 1. Let M — some ω-saturated existentially closed submodel of semantic model, and some φ is a $L(M)$ formula of rank α and Morley degree d. Then φ can be decomposed to $L(M)$ formulas $\varphi_1,...,\varphi_m$ rank α and degree 1.

In any Jonsson strongly minimal set, we can define the concept of independence, which generalizes the linear independence in vector spaces and algebraic independence of algebraically closed fields.

We fix $\mathcal{M} \models T$ and D is Jonsson strongly minimal set in the $\mathcal{M}$ — existential closed submodel ofsemantic model of T, where T is Jonsson theory.

Definition 2. We say that $A \subseteq D$ independent if $a \notin acl(A \setminus \{a\})$ for all $a \in A$. If $C \subset D$, we say that A independent over C, if $a \notin acl(C \cup (A \setminus \{a\}))$ for all $a \in A$.

Definition 4. We say that A is a basis for $Y \subseteq D$, if $A \subseteq Y$ independent and $acl(A) = acl(Y)$.

Obviously, that any maximal independent subset of Y is the basis for Y.

Let $I(E_T, \aleph_0)$denotes the number of countable existentially closed models of Jonssontheory T.

Using the technique of proofs for complete theories and concepts relevant to the changing techniques for Jonsson sets, we can prove Jonsson analogues of the results to appropriate spectrum of countable models [6].

Corollary 1. If T is Jonssonstrongly minimal Jonsson theory, complete for existential sentences, then T is k — categorical for $\kappa \geq \aleph_1$and $I(E_T, \aleph_0) \leq \aleph_0$.

Corollary 2. If T Jonsson theory complete for the existential sentence uncountably categoricaland there is Jonsson strongly minimal $\mathcal{L}$-formula, then either $T\aleph_0$-categorical or $I(E_T, \aleph_0) = \aleph_0$.

Theorem 2. If T Jonsson theory complete for the existential sentence is uncountably categorical, but not $\aleph_0$-categorical, then $I(E_T, \aleph_0) = \aleph_0$.

Definition 4. Jonsson stability (J-stability).Let T is a Jonsson theory, $S^J(X)$ is the set of all existential complete n-type over X, in accordance with the T, for any finite n.We shall say that Jonsson theory T be $J-\lambda$ stable if for any T-existentially closed model and for any its subset X

$|X| \leq \lambda \Rightarrow |S^J(X)| \leq \lambda.$

Theorem 3. If T Jonssonsuperstable, but not $\aleph_0$-categorical, then $I(E_T, \aleph_0) \geq \aleph_0$.

Let us consider the stability for fragments of Jonsson sets.

Let X Jonssonset and M is existentially closed model, where dcl (X) = M.

Consider the fragment of Jonsson set X as the theory $Th_{\forall\exists}(M) = T_M$.

Lemma 2. T_M will be Jonsson theory.

Theorem 1. Let T_M, as described above. If $\lambda \geq \omega$, then the following conditions are equivalent:

T_M is $J-\lambda$ — stable;

T^* is λ — stable, where T^* is the centerof T.

Theorem 2. Then the following conditions are equivalent:

(1) $T_M^* - \omega$ -categorical; (2) $T_M - \omega$ -categorical.

Definition 9. Let $A, B \in E_T$ and $A \subset B$. Then B is algebraically simpleextension A in E_T, if for any model $C \in E_T$ so that if A isomorphically embedded in C, then B is isomorphically embedded in C.

Let X be algebraically Jonsson set, acl (X) = M, the formula that determines the set X is strongly minimal existential formula.

Theorem 3. Then the following conditions are equivalent:

(1) $T_M^* - \omega_1$ — categorical;

(2) Any countable model from E_{T_M} has algebraically simple extension in E_{T_M}.

All undefined in this article definitions, as well as more detailed information about Jónsson theories can be found in [7].

References

1 *Ешкеев А.Р.* Йонсоновские множества и их некоторые теоретико-модельные свойства // Вестн. Караганд. ун-та. — Сер. Математика. — 2014. — № 2 (74). — С. 53–62.

2 *Yeshkeyev A.R.* The similarity of Jonsson sets // Abstracts. V congress of the Turkic World Mathematicians. — Kyrgyzstan, Issyk-Kul, June, 5–7, 2014. — P. 217.

3 *Yeshkeyev A.R.* Jonsson sets and some of their model-theoretic properties. Abstracts Book // International Congress of Mathematicians August, 13–21, 2014, Seoul, Korea, 2014. — P. 8.

4 *Yeshkeyev A.R.* On Jonsson sets and some their properties. Abstracts Book Logic // Colloquium, Logic, Algebra and Truth Degrees. Vienna Summer of Logic, July, 9–24, 2014. — P. 108.

5 *Baldwin, John T.; Lachlan, Alistair H.* 1971, On Strongly Minimal Sets, The Journal of Symbolic Logic // The Journal of Symbolic Logic. — Vol. 36. — № 1. — 36. — p. 79–96.

6 Справочная книга по математической логике: В 4 ч. / Под ред. Дж.Барвайса. — Ч. 1.Теория моделей / Пер. с англ. — М.: Наука; Гл. ред. физ.-мат. лит., 1982. — 126 с.

7 *Ешкеев А.Р.* Йонсоновские теории. — Караганда: Изд-во КарГУ, 2009. — 250 с.

8 *Ешкеев А.Р.* Счетная категоричность $\Delta - PM$ -теорий: Тез. 12-й межвуз. конф. по математике, механике и информатике. — Алматы, 2008.

9 *Ешкеев А.Р., Мейрембаева Н.К.* Свойства $\left(\Sigma_{n+1}^{+}, \Sigma_{n+1}^{+}\right)$ -атомных моделей $T - \Delta - PM$ -теории // Вестн. КазНУ. — Сер. математика, механика, информатика. — 2008. — № 3. Спец. вып. — С. 74–77.

10 *Ешкеев А.Р.* О йонсоновской стабильности и некоторых её обобщениях // Фундаментальная и прикладная математика. — Вып. 8. — МГУ, ЦНИТ. — 2008. — С. 117–128.

А.Р.Ешкеев

Қатты минималды йонсондық жиындардың дөңес фрагменттері

Мақалада йонсондық минималды жиындардың және қатты минималды йонсондық жиындардың ұғымдары енгізілген және қарастырылған. Осы негізде семантикалық модельдің экзистенционалды тұйық ішкі модельдің арнайы ішкі жиындары үшін тәуелсіздік ұғымы енгізілді. Бұл ұғым арқылы базис ұғымына келуге болады және әрі қарай саналымсыз категориялық туралы теореманың йонсондық баламасына ие боламыз.

А.Р.Ешкеев

Выпуклые фрагменты сильно минимальных йонсоновских множеств

В статье введены и рассмотрены понятия минимальных йонсоновских множеств и соответственно сильно минимальных йонсоновских множеств. На этой основе введено понятие независимости специальных подмножеств экзистенциально замкнутой подмодели семантической модели. Понятие независимости приводит к понятию базиса, и далее мы имеем йонсоновский аналог теоремы о несчетной категоричности.

References

1 Yeshkeyev A.R. *Bull. of the Karaganda University*, Ser. math., 2014, 2 (74), p. 53–62.

2 Yeshkeyev A.R. *The similarity of Jonsson sets. Abstracts. V congress of the Turkic World Mathematicians*, Kyrgyzstan, Issyk-Kul, June, 2014, 5–7, p. 217.

3 Yeshkeyev A.R. *Jonsson sets and some of their model-theoretic properties. Abstracts Book. International Congress of Mathematicians August, 13–21*, 2014, Seoul, Korea, p. 8.

4 Yeshkeyev A.R. *On Jonsson sets and some their properties. Abstracts Book Logic. Colloquium, Logic, Algebra and Truth Degrees. Vienna Summer of Logic*, July, 9–24, 2014, p. 108.

5 Baldwin, John T., Lachlan, Alistair H. *Journal of Symbolic Logic* (The Journal of Symbolic Logic, 36, 1971, p. 79–96.

6 *Handbook of mathematical logic: In 4 parts* / Ed. Dzh.Barvaysa, 1.Teoriya models: lane. from English, Moscow: Nauka; Home edition of Physical and Mathematical Literature, 1982, 126 p.

7 Yeshkeyev A.R. *Yonsonovskiiy theory*, Karaganda: KSU publ., 2009, 250 p.

8 Yeshkeyev A.R. *Counting categorical — theory: Abstracts. 12th Conference of the Universities in mathematics, mechanics and information*, Almaty, 2008.

9 Yeshkeyev A.R., Meyrembayeva N.K. *Bull. of the KNU, Ser. of mathematics, mechanics, computer science, Special Issue*, *3*, 2008, p. 74–77.

10 Yeshkeyev A.R. *Fundamental and Applied Mathematics*, 8, MSU, CNIT, 2008, p. 117–128.

УДК 517.925.46

Х.С.Рамазанова

Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Астана
(E-mail: hanym1981@mail.ru)

О существовании фокусных и сопряженных точек полулинейного дифференциального уравнения второго порядка на заданном интервале

В статье установлены условия существования фокусных и сопряженных точек полулинейного дифференциального уравнения второго порядка на заданном интервале и даны условия его осцилляторности.

Ключевые слова: полулинейное дифференциальное уравнение, фокусная точка, сопряженные точки, осцилляторность.

1 Введение

На интервале $I=(a,b),\quad -\infty\le a<b\le+\infty,$ рассмотрим следующее дифференциальное уравнение второго порядка:

$$(\rho(t)\left|y'(t)\right|^{p-2}y'(t))'+\vartheta(t)\left|y(t)\right|^{p-2}y(t)=0,\quad t>0, \tag{1}$$

где $1<\rho<\infty,$ ρ и ϑ — непрерывные функции на $I.$ Причем $\rho(t)>0$ для всех $t\in I.$

Уравнение (1) называется полулинейным дифференциальным уравнением в силу того, что пространство решений уравнения (1) при $p\ne 2$ является однородным, но не аддитивным.

Когда $p=2,$ уравнение (1) переходит к линейному уравнению Штурма-Лиувилля

$$(\rho(t)y'(t))'+\vartheta(t)y(t)=0. \tag{2}$$

Функция $y:I\to R$ называется решением уравнения (1), если $y(t)$ непрерывно дифференцируема вместе с $\rho(t)\left|y'(t)\right|^{p-2}y'(t)$ на I и удовлетворяет уравнению (1) на $I.$

Далее приведем основные понятия и утверждения, относящиеся к уравнению (1), придерживаясь терминологии, данной в книге О.Досли (O.Dosly) и П.Рехак (P.Rehak) [1].

Нетривиальное решение уравнения (1) называется осцилляторным при $t=b\,(t=a),$ если оно имеет бесконечное число нулей, сходящихся к $b\,(a),$ а в противном случае решение называется неосцилляторным при $t=b\,(t=a).$

Уравнение (1) называется осцилляторным (неосцилляторным) при $t=b\,(t=a),$ если все его нетривиальные решения осцилляторны (неосцилляторны) при $t=b\,(t=a).$

Известно, что в [1] для уравнения (1) справедливы теоремы Штурма о сравнении и разделении нулей. Поэтому уравнение (1) осцилляторно при $t=b\,(t=a),$ если одно его непрерывное решение осцилляторно при $t=b\,(t=a).$

Пусть $I_0\subset I$ — замкнутый, открытый или полуоткрытый интервал. В исследовании осцилляционных свойств важные значения имеют такие понятия, как уравнение с сопряженными точками и уравнения без сопряженных точек на I_0.

Точки $t_1, t_2 \in I$ называются сопряженными точками по отношению к уравнению (1), если существует нетривиальное решение $y(t)$ уравнения (1) такое, что $y(t_1) = y(t_2) = 0.$

Уравнение (1) называется уравнением без сопряженных точек на I_0, если любое его нетривиальное решение на I_0 имеет не более одного нуля, а в противном случае, т.е. если существует нетривиальное решение уравнения (1), имеющее два или более нулей на I_0, уравнение (1) называется уравнением с сопряженными точками на I_0.

Далее для краткости, следуя работе [1], мы будем говорить, что уравнение (1) бессопряжено на I_0, если оно является уравнением без сопряженных точек на I_0, и уравнение сопряжено на I_0, если оно является уравнением с сопряженными точками на I_0.

Теперь введем следующие понятия, относящиеся к уравнению (1), которые рассматриваются в данной работе [1; 193].

Точка $\beta \in I$ называется правой фокусной точкой точки $\alpha \in I, \alpha < \beta$ по отношению к уравнению (1), если существует нетривиальное решение $y(t)$ этого уравнения такое, что $y'(\alpha) = 0 = y(\beta).$

Аналогично, точка $\alpha \in I$ называется левой фокусной точкой точки $\beta \in I, \alpha < \beta$ по отношению к уравнению (1), если существует нетривиальное решение $y(t)$ этого уравнения такое, что $y'(\beta) = 0 = y(\alpha).$

Уравнение (1) называется право- (лево-) бесфокусным на (α, β), если не существует в (α, β) правой (левой) фокусной точки точки $\alpha, (\beta)$ по отношению к уравнению (1).

Вопросы осцилляторности и неосцилляторности уравнения (1) исследованы достаточно хорошо. Основные результаты и методы исследования даны в [1]. Однако получение необходимых и достаточных (совпадающих) условий в терминах коэффициентов уравнения (1) пока остается открытым.

Вопросы фокусности, сопряженности уравнения (1) на заданном интервале исследованы слабо (см. [2]). В основном даны только необходимые результаты, относящиеся к линейному уравнению (2) (см., например, [3–5] и приведенные там ссылки).

В разделе 5.1.8 книги [1] даны различные необходимые условия существования левой и правой фокусных точек относительно уравнения (1), когда функция $\rho \equiv 1$.

В данной работе сначала устанавливаются достаточные условия существования левой и правой фокусных точек на заданном интервале, далее на основе полученных результатов определяются сопряженность и осцилляторность уравнения (1).

2. Основные результаты

Пусть $a < \alpha < \beta < b$ и $W_p^1(\alpha,\beta)$ — пространство Соболева с нормой $\|f\|_{W_p^1} = \|f'\|_p + \|f\|_p$, где $\|\cdot\|_p$ — обычная норма пространства $L_p(\alpha,\beta),\ 1 < p < \infty.$

Положим

$$W_{p,r}^1(\alpha,\beta) = \left\{ f \in W_p^1(\alpha,\beta) : f(\beta) = 0 \right\};$$

$$W_{p,l}^1(\alpha,\beta) = \left\{ f \in W_p^1(\alpha,\beta) : f(\alpha) = 0 \right\}.$$

На основании теорем 5.8.3 и 5.8.4, а также с учетом замечания 5.8.1 [1], имеем

Теорема A^+. Уравнение (1) право бесфокусно на (α,β) тогда и только тогда, когда

$$\int_\alpha^\beta (\rho(t)\left|f'(t)\right|^p - \vartheta(t)\left|f(t)\right|^p)dt \ge 0 \qquad (3)$$

для всех нетривиальных $f \in W_{p,r}^1(\alpha,\beta).$

Теорема A. Уравнение (1) лево бесфокусно на (α,β) тогда и только тогда, когда выполнено (3) для всех нетривиальных $f \in W_{p,l}^1(\alpha,\beta).$

В силу непрерывности функции ϑ и $f \in W_p^1(\alpha,\beta)$ на $[\alpha,\beta]$ интеграл $\int_\alpha^\beta \vartheta(t)\left|f(t)\right|^p)dt < \infty.$ Поэтому неравенство (3) эквивалентно неравенству

$$\int_{\alpha}^{\beta} \vartheta(t)\left|f(t)\right|^{p} dt \le \int_{\alpha}^{\beta} \rho(t)\left|f'(t)\right|^{p} dt. \qquad (4)$$

В случае $\vartheta \ge 0$ неравенство (4) является весовым неравенством Харди в дифференциальной форме (см. [6, 7]) с наилучшей постоянной меньше или равной единице. В [8], используя результаты по весовым неравенствам Харди, получено достаточное, а также необходимое условие существования фокусных точек уравнения (1), когда $\vartheta \ge 0$.

В данной работе исследуется более общий случай, когда функция ϑ может быть знаконепостоянной на (α,β).

Положим $\vartheta_{+}(t) = \max\{0, \vartheta(t)\}$, $v_{-}(t) = \max\{0, -\vartheta(t)\}$. Тогда $\vartheta(t) = \vartheta_{+}(t) - \vartheta_{-}(t)$, $\forall t \in I$. Так как функции ϑ, ϑ_{+} и ϑ_{-} — непрерывные на $[\alpha,\beta]$, то для $f \in W_{p}^{1}(\alpha,\beta)$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \vartheta(t)\left|f(t)\right|^{p} dt = \int_{\alpha}^{\beta} \vartheta_{+}(t)\left|f(t)\right|^{p} dt - \int_{\alpha}^{\beta} \vartheta_{-}(t)\left|f(t)\right|^{p} dt .$$

Поэтому неравенство (4), в свою очередь, эквивалентно неравенству

$$\int_{\alpha}^{\beta} \vartheta_{+}(t)\left|f(t)\right|^{p} dt \le \int_{\alpha}^{\beta} (\rho(t)\left|f'(t)\right|^{p} + \vartheta_{-}(t)\left|f(t)\right|^{p}) dt. \qquad (5)$$

Теперь, объединяя утверждения теоремы A^{+} и теоремы A^{-}, сформулируем

Теорема 1. Уравнение (1) лево- (право-) бесфокусно на интервале (α,β) тогда и только тогда, когда неравенство (5) выполнено для всех нетривиальных $f \in W_{p,r}^{1}(\alpha,\beta)$ $\left(f \in W_{p,l}^{1}(\alpha,\beta)\right)$.

Из теоремы 1 вытекает эквивалентное ей утверждение.

Теорема 2. На интервале (α,β) существует левая (правая) точка точки $\beta, (\alpha)$ по отношению к уравнению (1) тогда и только тогда, когда существует нетривиальная функция $\tilde{f} \in W_{p,l}^{1}(\alpha,\beta)$ $\left(\tilde{f} \in W_{p,r}^{1}(\alpha,\beta)\right)$ такая, что

$$\int_{\alpha}^{\beta} \vartheta_{+}(t)\left|\tilde{f}(t)\right|^{p} dt > \int_{\alpha}^{\beta} (\rho(t)\left|\tilde{f}'(t)\right|^{p} + \vartheta_{-}(t)\left|\tilde{f}(t)\right|^{p}) dt .$$

Введем функции

$$\varphi_{p}^{+}(x) = \inf_{\alpha<t<x} \left\{ \left(\int_{t}^{x} \rho^{1-p'}(s) ds \right)^{1-p} + \int_{t}^{\beta} \vartheta_{-}(s) ds \right\};$$

$$\varphi_{p}^{-}(x) = \inf_{x<t<\beta} \left\{ \left(\int_{x}^{t} \rho^{1-p'}(s) ds \right)^{1-p} + \int_{\alpha}^{t} \vartheta_{-}(s) ds \right\}.$$

Функции $\varphi_{p}^{+}, \varphi_{p}^{-}$ ранее введены в [9], где показаны различные их свойства.

Теорема 3. Если

$$\sup_{\alpha<x<\beta} \left[\varphi_{p}^{+}(x) \right]^{-1} \int_{x}^{\beta} \vartheta_{+}(t) dt > 1, \qquad (6)$$

то на интервале (α,β) существует левая фокусная точка точки β по отношению к уравнению (1).

Доказательство. Пусть выполнено (6). Тогда существует точка $x_0 \in (\alpha,\beta)$, такая что

$$\int_{x_0}^{\beta} \vartheta_{+}(x) > \varphi_{p}^{+}(x_0). \qquad (7)$$

В силу строгости неравенство в (7) и из определения функции φ_{p}^{+} существует точка $c \in (\alpha, x_0)$ такая, что

$$\int_{x_0}^{\beta} \vartheta_{+}(t) dt > \left(\int_{c}^{x_0} \rho^{1-p'}(s) ds \right)^{1-p} + \int_{c}^{\beta} \vartheta_{-}(s) ds. \qquad (8)$$

Построим функцию $\tilde{f}$, полагая

$$\tilde{f}(t)=\begin{cases}0,\ \alpha\le t<c;\\ \left(\int\limits_c^{x_0}\rho^{1-p'}(s)ds\right)^{-1}\int\limits_c^t\rho^{1-p'}(s)ds, \quad c\le t<x_0;\\ 1,\ x_0\le t\le\beta.\end{cases}$$

Функция $\tilde{f}$ — абсолютно непрерывная на $[\alpha,\beta]$ и принадлежит пространству $W^1_{p,l}(\alpha,\beta)$. Оценим правую и левую части (5) при $f=\tilde{f}$.

$$\int\limits_\alpha^\beta \vartheta_+(t)\left|\tilde{f}(t)\right|^p dt>\int\limits_{x_0}^\beta \vartheta_+(t)dt; \tag{9}$$

$$\int\limits_\alpha^\beta \rho(t)\left|\tilde{f}'(t)\right|^{p'} dt=\left(\int\limits_c^{x_0}\rho^{1-p'}(s)ds\right)^{-p}\int\limits_c^{x_0}\rho(t)\left|\rho^{1-p'}(t)\right|^p dt=\left(\int\limits_c^{x}\rho^{1-p'}(s)ds\right)^{1-p}; \tag{10}$$

$$\int\limits_\alpha^\beta \vartheta_-(t)\left|\tilde{f}(t)\right|^p dt=\left(\int\limits_c^{x_0}\rho^{1-p'}(s)ds\right)^{-p}\int\limits_c^{x_0}\vartheta_-(t)\left|\int\limits_c^t\rho^{1-p'}(s)ds\right|^p dt+\int\limits_{x_0}^\beta\vartheta_-(t)dt\le\int\limits_c^{x_0}\vartheta_-(t)dt+\int\limits_{x_0}^b\vartheta_-(t)dt=\int\limits_c^b\vartheta_-(t)dt. \tag{11}$$

Из (8)–(11) имеем

$$\int\limits_\alpha^\beta \vartheta_+(t)\left|\tilde{f}(t)\right|^p dt>\int\limits_\alpha^\beta\left(\rho(t)\left|\tilde{f}'(t)\right|^p+\vartheta_-(t)\left|\tilde{f}(t)\right|^p\right)dt.$$

Следовательно, по теореме 2 на интервале (α,β) существует левая фокусная точка точки β по отношению к уравнению (1).

Аналогично доказывается следующая

Теорема 4. Если

$$\sup_{\alpha<x<\beta}\left[\overset{-}{\varphi}_p(x)\right]^{-1}\int\limits_\alpha^x\vartheta_+(t)dt>1,$$

то на интервале (α,β) существует правая фокусная точка точки α по отношению к уравнению (1). В случае $\vartheta\ge 0$, т.е. $\vartheta\equiv\vartheta_+$, $\vartheta_-\equiv 0$, из теорем 3 и 4 вытекают результаты работы [8].

Из доказательств теорем 3 и 4 следуют:

Следствие 1. Если существуют точки $c,d:\alpha<c<d<\beta$ такие, что

$$\int\limits_\alpha^\beta\vartheta_+(t)dt>\left(\int\limits_c^d\rho^{1-p'}(s)ds\right)^{1-p}+\int\limits_c^\beta\vartheta_-(s)ds,$$

то на интервале (α,β) существует левая фокусная точка точки β по отношению к уравнению (1).

Следствие 2. Если существуют точки $c,d:\alpha<d<c<\beta$ такие, что

$$\int\limits_\alpha^d\vartheta_+(t)dt>\left(\int\limits_d^c\rho^{1-p'}(s)ds\right)^{1-p}+\int\limits_d^c\vartheta_-(s)ds,$$

то на интервале (α,β) существует правая фокусная точка точки α по отношению к уравнению (1).

Из теорем 3 и 4, следствий 1 и 2 при $p=2$ получаем условие существования левой (правой) фокусной точки точки $\beta\,(\alpha)$ по отношению к линейному уравнению (2).

Между фокусными и сопряженными точками по отношению к уравнению (1) имеется следующая связь.

Лемма 1. Уравнение (1) сопряжено на интервале (α,β) тогда и только тогда, когда существует точка $c\in(\alpha,\beta)$ и она имеет левую и правую фокусные точки соответственно на интервалах $(\alpha,c),(c,\beta)$ по отношению к уравнению (1).

Действительно, если уравнение (1) сопряженно на интервале (α,β), то существуют точки $t_1,t_2 \in (\alpha,\beta)$, $t_1 < t_2$, и нетривиальное решение y уравнения (1) такое, что $y(t_1)=y(t_2)=0$. По определению решения функция y, непрерывно дифференцируемая на $[\alpha,\beta]$. Поэтому, по теореме Ролля, существует точка $c: t_1 < c < t_2$ такая, что $y'(c)=0$. Тогда точка t_1 есть левая фокусная точка точки c на интервале (α,c), а t_2 — правая фокусная точка точки c на интервале (c,β) по отношению к уравнению (1).

Обратно, пусть существует точка $c\in(\alpha,\beta)$, имеющая левую $t^- \in(\alpha,c)$ и правую $t^+ \in (c,\beta)$ фокусные точки по отношению к уравнению (1), соответственно на интервалах (α,c), (c,β). Тогда существуют нетривиальные решения y_-, y_+ уравнения (1) такие, что $y'_-(c)=y_-(t^-)=0, y'_+(c)= = y_+(t^+)=0$. Но по теореме 1.1.1 работы [1] пространство решений уравнения (1) однородно и задачи Коши имеет единственное решение, определенное на всем интервале (α,β). Поэтому $y=y_-=y_+$ и $y(t^-)=y(t^+)=0$, т.е. уравнение (1) сопряжено на интервале (α,β). Лемма 1 доказана.

Примем следующее соглашение.

Для любого $A\in R$ положим

$$(A)_+ = \begin{cases} A, \text{ если } A>0; \\ 0, \text{ если } A\le 0. \end{cases} \tag{12}$$

Пусть для некоторого $c\in(\alpha,\beta)$

$$A^+(\alpha,c)=\sup_{\alpha<x<c}\left[\overset{+}{\varphi}_p(x)\right]\int_x^c \vartheta_+(t)dt-1;$$

$$A^-(c,\beta)=\sup_{c<x<\beta}\left[\overset{-}{\varphi}_p(x)\right]\int_c^x \vartheta_+(t)dt-1.$$

Теорема 5. Если

$$\sup_{\alpha<c<\beta}\left(A^+(\alpha,c)\right)_+ + \left(A^+(\alpha,c)\right)_+ > 0, \tag{13}$$

то уравнение (1) сопряжено на интервале (α,β).

Доказательство. Пусть имеет место (13). Супремум по $c:\alpha<c<\beta$ не может достигать при $c\to\alpha$ или при $c\to\beta$, так как в этом случае одна из скобок в (13) обращается в нуль. Поэтому в силу строгости неравенства (13) существует точка $c_0\in(\alpha,\beta)$ и имеет место

$$\left(A^+(\alpha,c_0)\right)_+ + \left(A^-(c_0,\beta)\right)_+ > 0.$$

Откуда следует, что $\left(A^+(\alpha,c_0)\right)_+ \ne 0$ и $\left(A^-(c_0,\beta)\right)_+ \ne 0$. Тогда в силу (12)

$$\sup_{\alpha<x<c_0}\left[\overset{+}{\varphi}_p(x)\right]^{-1}\int_x^{c_0} \vartheta_+(t)dt>1;$$

$$\sup_{c_0<x<\beta}\left[\overset{-}{\varphi}_p(x)\right]^{-1}\int_{c_0}^{x} \vartheta_+(t)dt>1.$$

Полученные неравенства в силу теорем 3 и 4 означают, что точка c_0 имеет левую и правую точки по отношению к уравнению (1) соответственно на интервалах (α,c_0), (c_0,β). Тогда по лемме 1 уравнение (1) сопряженно на интервале (α,β). Теорема 5 доказана.

Теорема 6. Пусть $b=\infty$. Если при некотором $h>0$

$$\overline{\lim_{\alpha\to\infty}}\sup_{\alpha<c<\alpha+h}\left(A^+(\alpha,c)-1\right)_+\left(A^-(c,\alpha+h)-1\right)_+>0, \tag{14}$$

то уравнение (1) осцилляторно при $t=\infty$.

Доказательство. Пусть при некотором $h>0$ выполнено (14). Тогда по определению верхнего предела и строгости неравенства в (14) существует последовательность $\{\alpha_k\}_{k\ge1}\subset I$ такая, что $\alpha_k\to\infty$ при $k\to\infty$ и

$$\sup_{\alpha_k<c<\alpha_k+h}\left(A^+(\alpha_k,c)-1\right)_+\left(A^-(c,\alpha_k+h)-1\right)_+>0.$$

На основании теоремы 5 уравнение (1) сопряжено на интервалах $(\alpha_k,\alpha_k+h), k\ge 1.$ Так как $\alpha_k\to\infty$ при $k\to\infty,$ то можно выбрать подпоследовательность $\left\{\alpha_{k_n}\right\}_{n\ge 1}\subset\left\{\alpha_k\right\}_{k\ge 1}$ такую, что $\alpha_{k_n}+h<\alpha_{k_{n+1}}$ при всех $n\ge 1.$ Тогда уравнение (1) сопряжено на взаимно не пересекающихся интервалах $\left(\alpha_{k_n},\alpha_{k_n}+h\right),$ $n\ge 1.$ Это означает, что для каждого $n\ge 1$ существует нетривиальное решение уравнения (1), имеющее два нуля на интервале $\left(\alpha_{k_n},\alpha_{k_n}+h\right).$ Отсюда по теореме Штурма о разделении нуля существует нетривиальное решение $y(t)$ уравнения (1), имеющее на каждом $\left(\alpha_{k_n},\alpha_{k_n}+h\right)$ по крайней мере по одному нулю $\alpha_{k_n}<t_k<\alpha_{k_n}+h.$ Так как $\alpha_{k_n}\to\infty$ при $n\to\infty,$ то $t_n\to\infty$ при $n\to\infty.$ Следовательно, решение $y(t)$ осцилляторно при $t=\infty,$ и уравнение (1) также осцилляторно при $t=\infty.$ Теорема 6 доказана.

Отметим, что при $p=2$ из теоремы 5 и 6 получаем условия сопряженности на интервале (α,β) и осцилляторности при $t=b=\infty$ линейного уравнения (2).

Список литературы

1 *Dosly O., Rehark P.* Half-linear diferential equations // Math. studies. — 2005. — 202.

2 *Rodrigues M.M.* Lyapunov Inequalities for Nonlinear *p*-Laplacian Problems with Weight Functions // Int. Journal of Math. Analysis. — 2011. — Vol. 5. — № 30. — P. 1497–1506.

3 *Man Kam Kwong*. On Lyapunov's Inequality for Disfocality // Journal of Math.Analysis and Applications. — 1981. — Vol. 83. — P. 486–494.

4 *Pedro Almeniar, Lucas Jodar*. Convergent Disfocality and nondisfocality Criteria for second-Order Linear Differential Equations // Abstract and Applied Analysis. — Vol. 2013, Article ID 987976, II p.

5 *Panigrahi S.* Criteria for Disfocality for Third Order Differential Equations // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equation. — 2009. — № 23. — P. 1–17.

6 *Opic B., Kufner A.* Hardy-type inequalities // Longman Scientific and Technical. — 1990.

7 *Абылаева А.М., Байарыстанов А.О., Ойнаров Р.* Весовое дифференциальное неравенство Харди на множестве $\overset{\circ}{AC}(I)$ // Сиб. математический журнал. — 2014. — Т. 55. — № 3. — С. 477–493.

8 *Кудабаева С.Е., Ойнаров Р.* Критерии бессопряженности полулинейного дифференциального уравнения второго порядка // Математический журнал. — 2010. — Т. 10. — № 2 (36).

9 *Oiynarov R.* Reversion of Holder Type Inequalities for Sums of Weighted Norms and Additive Weighted Estimates of Integral Operators // Mathematical Inequalities & Applications. — 2003. — Vol. 6. — № 3. — P. 421–436.

Х.С.Рамазанова

Екінші ретті жартылай сызықты дифференциалдық теңдеудің берілген интервалда фокустық және түйіндестік нүктелерінің бар болуы

Мақалада екінші ретті жартылай сызықты дифференциалдық теңдеудің берілген интервалда фокустық және түйіндестік нүктелерінің бар болу шарттары алынған және оның тербелімділік шарты берілген.

Kh.S.Ramazanova

On the existence of focal and conjugate points of half-linear second-order differential equation on a given interval

Established conditions for the existence of focal points and conjugate points of half-linear second-order differential equations on a given interval and are given oscillatory conditions.

References

1 Dosly O., Rehark P. *Math. studies*, 2005, 202.
2 Rodrigues M.M. *Int. Journal of math. analysis*, 2011, 5, 30, p. 1497–1506.
3 Man Kam Kwong. *Journal of math. analysis and applications*, 1981, 83, p. 486–494.
4 Pedro Almeniar, Lucas Jodar. *Abstract and applied analysis*, 2013, Article ID 987976, II p.
5 Panigrahi S. *Electronic journal of qualitative theory of differential equation*, 2009, 23, p. 1–17.
6 Opic B., Kufner A. *Hardy-type inequalities*, Longman scientific and technical, 1990.
7 Abylayeva A.M., Baiyarystanov A.O., Oinarov R. *Siberian math. journal*, 2014, 55, 3, p. 477–493.
8 Kudabayeva S.Ye., Oiynarov R. *Math. journal*, 2010, 10, 2 (36), p. 56–66.
9 Oiynarov R. *Mathematical Inequalities & Applications*, 2003, 6, 3, p. 421–436.

АВТОРЛАР ТУРАЛЫ МӘЛІМЕТТЕР
СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Akhazhanov, S.B. — Senior lecturer in Chair of algebra, mathematical logic and geometry named after prof. T.G.Mustafin, Ye.A.Buketov Karaganda State University.

Akhmanova, D.M. — Candidate of physical and mathematical sciences, Associate professor of methods of teaching mathematics and computer sciences, Ye.A.Buketov Karaganda State University.

Alibiyev, D.B. — Dean of Mathematics, Candidate of physical and mathematical science, Associate professor, Department of applied Mathematics and Computer sciences, Ye.A.Buketov Karaganda State University.

Bekzhan, T.N. — Professor PhD, of Xinjiang University, Urumqi, China.

Yerkex, A.T. — Xinjiang University, Urumqi, China.

Yeshkeyev, A.R. — Doctor of physical and mathematical sciences, Professor of the Chair of algebra, mathematical logic and geometry named after prof. T.G.Mustafin, Ye.A.Buketov Karaganda State University, Institute of Applied Mathematics, Karaganda.

Godunov, A.I. — Doctor of technical sciences, Professor of the Department «Automatics and telemechanics», Penza State University, Russia.

Ibrayev, Sh.Sh. — Candidate of physical and mathematical sciences, Head of the department of Mathematics, informatics and information systems, «Bolashak» University, Kyzylorda.

Karatayev, G.K. — Graduate student of the faculty of mathematics and information technologies, Ye.A.Buketov Karaganda State University.

Kuatov, B.Zh. — Deputy Chief, T.Ya.Begeldinov Military Institute of Air Defense Forces of the Republic of Kazakhstan for Academic Affairs and Research, Aktobe.

Latkin, I.V. — Candidate of physical and mathematical sciences, Associate professor of «Higher Mathematics», D.Serikbayev East Kazakhstan State Technical University, Ust-Kamenogorsk.

Omirbekova, A.Ye. — Magistrant faculty of mathematics and information technologies, Ye.A.Buketov Karaganda State University.

Ramazanova, Kh.S. — PhD student, L.N.Gumilyov Eurasian National University, Astana.

Seiytimbetova, A.B. — Underground of faculty of mathematics and information technologies, Ye.A.Buketov Karaganda State University.

Seksembayeva, M.A. — Magistrant of the second course in the specialty 6M060200 – «Informatics», Ye.A.Buketov Karaganda State University.

Seliverstov, A.V. — Institute for information transmission problems, A.A. Kharkevich Russian Academy of sciences, Moscow, PhD, Leading researcher, Laboratory 6, Russia.

Sushchik, D.M. — Head teacher, Aviation equipment department of Air Force Defense Institute of the Republic of Kazakhstan, Aktobe.