

ЛИТЕРАТУРА

1. Пименов В.Г., Свиридов С.В. Сеточные методы решения уравнения переноса с запаздыванием // Вестник Удмуртского ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. № 3. С. 59–74.
2. Калиткин Н.Н. Численные методы. Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2011. 586 с.
3. Пименов В.Г. Разностные методы решения уравнений в частных производных с наследственностью. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2014. 134 с.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Программы развития УрФУ (постановление 211 правительства Российской Федерации №02.А03.21.0006 от 27 августа 2013) и РФФИ (проект № 13-01-00089).

Поступила в редакцию 1 июня 2015 г.

Sviridov S.V. INVESTIGATION OF THE SCHEMES WITH SYMMETRIZED DERIVATIVES FOR THE NUMERICAL SOLUTION OF THE ADVECTION EQUATION WITH DELAY

This paper considers the scheme of symmetrized derivatives for solving the advection equation with functional delay. The order of convergence is constructed here. Also the paper contains some numerical experiments with different types of delay.

Key words: advection equations with delay; numerical methods.

Свиридов Сергей Владимирович, Уральский федеральный университет имени первого президента России Б.Н. Ельцина, г. Екатеринбург, Российская Федерация, ассистент кафедры вычислительной математики, e-mail: sergey.sviridov@urfu.ru

Sviridov Sergey Vladimirovich, Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, Ekaterinburg, the Russian Federation, Assistant of the Computational Mathematics Department, e-mail: sergey.sviridov@urfu.ru

УДК 519.178

ЗАМЕЧАНИЕ О НЕЯВНО ЗАДАННЫХ ГИПЕРГРАФАХ

© А.В. Селиверстов

Ключевые слова: гиперграф; вложение; инвариант; форма.

Описаны эффективно проверяемые необходимые условия существования вложения рёберно-взвешенных гиперграфов, заданных неявным образом. Обсуждается их применение в биоинформатике.

Важность поиска легко проверяемых условий вложения гиперграфов обусловлена возможностью их применения для решения прикладных задач, в частности, для анализа генных сетей [1]. Отметим, что гиперграфы естественно возникают при изучении сложных регуляторных систем с одновременным воздействием большого числа факторов. Некоторые результаты о спектрах гиперграфов, полезные для классификации и проверки неизоморфности, были получены в работе [2].

Гиперграф называется *рёберно-взвешенным*, если каждому его ребру приписано число — вес ребра. Мы предполагаем, что вес ребра — неотрицательное рациональное число. Если вершины не соединены ребром, соответствующий вес полагаем равным нулю.

Отображение φ множеств вершин является *вложением* гиперграфа G в гиперграф \hat{G} , если оно сохраняет отношение смежности, и вес ребра в G не меньше, чем вес его образа в \hat{G} . Если каждый вес равен либо нулю, либо единице, мы приходим к задаче о существовании обычного вложения гиперграфов без учёта весов. Поскольку задача о существовании вложения гиперграфов обобщает задачу о существовании гамильтонова цикла в графе, она является NP -полной. Однако можно надеяться на создание эвристических алгоритмов, применимых при некоторых ограничениях на веса рёбер [3, 4]. Известны легко распознаваемые классы гамильтоновых графов, например, 3-связный регулярный граф, имеющий достаточно много рёбер, гамильтонов [5].

Некоторые гиперграфы допускают короткое описание. Гиперграфу с n вершинами соответствует мультилинейный многочлен от n переменных, в котором каждый коэффициент равен весу ребра, инцидентного вершинам с номерами, равными номерам переменных монома. Используя скобочную запись или, например, определитель матрицы, многочлен гиперграфа с большим числом рёбер можно задать коротким выражением, значение которого эффективно вычислимо. В общем случае таким описанием служит арифметическая схема или неветвящаяся программа [6]. Более того, с любой записью многочлена можно работать как с чёрным ящиком, если известна степень многочлена [7]. В этом случае полезно иметь инварианты, вычисляемые без разложения такого многочлена, то есть без вычисления веса для каждого ребра гиперграфа. Отметим, что некоторые важные многочлены не удаётся задать схемой маленького размера. Таков перманент матрицы, причём уменьшить размер схемы не удаётся и над конечным полем нечётной характеристики [8]. Над полем характеристики два перманент совпадает с определителем и легко вычислим.

Поскольку мультилинейный многочлен определяется его значениями в $(0, 1)$ -точках, для его неявного задания достаточно указать другой многочлен с теми же значениями в $(0, 1)$ -точках. Для мультилинейной формы коэффициент при мономе равен значению этой формы в $(0, 1)$ -точке, у которой входящие в этот моном координаты равны единице, а остальные — равны нулю.

Ниже рассмотрены d -гиперграфы, в которых каждое ребро инцидентно ровно d вершинам. Им соответствуют мультилинейные формы степени d , в частности, обычным графам — квадратичные формы. Наш метод основан на применении дифференциальных операторов, инвариантных относительно перестановок на индексах координат. Таковы операторы

$$L_m f = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^m f}{\partial x_k^m},$$

среди которых L_2 — это оператор Лапласа Δ . Обозначим через L_m^d линейный оператор, равный d -кратному применению оператора L_m .

Т е о р е м а. *Для мультилинейной формы f степени d инвариант $L_m^d(f^m)$ равен сумме m -степеней весов рёбер d -гиперграфа, умноженной на число $d!(m!)^d$. Более того, если рёберно-взвешенный d -гиперграф G можно вложить в d -гиперграф \hat{G} , то значение инварианта $L_m^d(f^m)$ для G не превосходит значения $L_m^d(\hat{f}^m)$ для \hat{G} .*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вклад в значение инварианта дают только те мономы формы f^m , у которых степень по каждой переменной кратна числу m . Поскольку форма f мультилинейная, такими будут только m -степени мономов из f . Рассмотрим последовательное применение операторов L_m к некоторому члену формы f^m . Первое применение оператора L_m приводит к появлению d членов от $d-1$ переменной каждый и нового общего числового множителя $m!$. Второе применение L_m снова приводит к появлению общего множителя $m!$, увеличению числа членов в $d-1$ раз и к уменьшению числа переменных в одном мономе. После d применений оператора L_m получим числовой множитель $d!(m!)^d$. Искомое

неравенство следует из неравенств для каждого из рёбер гиперграфа G и его образа при вложении в гиперграф \hat{G} .

Частный случай при $m = 2$ и $d = 3$ рассмотрен в [9]. Для мультилинейной кубической формы $f = \sum_{i < j < k} e_{ijk} x_i x_j x_k$ получается инвариант, пропорциональный сумме квадратов весов рёбер:

$$\Delta\Delta\Delta(f^2) = 48 \sum_{i < j < k} e_{ijk}^2.$$

Хотя инвариант $L_m^d(f^m)$ может совпадать для неизоморфных d -гиперграфов, вероятность случайного совпадения ограничена сверху по лемме Шварца–Зиппеля [10]. Этот инвариант, рассматриваемый как форма от весов рёбер, имеет степень md . Если вес каждого ребра независимо и равномерно распределён на множестве целых чисел $\{0, \dots, k-1\}$, то эта вероятность не превышает $\frac{md}{k}$.

Так же можно использовать любые дифференциальные операторы, получаемые из симметрических многочленов с положительными коэффициентами заменой координаты на частную производную по этой координате, и линейные комбинации инвариантов с положительными коэффициентами. Более того, при доказательстве неизоморфности годятся и другие дифференциальные операторы [11]. Поскольку степени используемых при вычислениях форм известны и ограничены сверху, такие инварианты можно вычислить, используя значения формы f на множестве точек, мощность которого ограничена некоторым многочленом от n . Для этого достаточно иметь любую запись формы f , используемую как чёрный ящик.

ЛИТЕРАТУРА

1. Евдокимов А.А., Кочемазов С.Е., Отпущенников И.В., Семенов А.А. Исследование дискретно-автоматных моделей генных сетей нерегулярной структуры методами символьных вычислений // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2014. Т. 21. № 3. С. 25–40.
2. Shao J., Qi L., Hu S. Some new trace formulas of tensors with applications in spectral hypergraph theory // Linear and Multilinear Algebra. 2015. V. 63. № 5. P. 971–992.
3. Гимади Э.Х., Истомин А.М., Рыков И.А. О задаче нескольких коммивояжёров с ограничениями на пропускные способности рёбер графа // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2013. Т. 20. № 5. С. 13–30.
4. Глебов А.Н., Замбалаева Д.Ж., Скретнева А.А. 2/3-приближённый алгоритм для несимметричной задачи о двух коммивояжёрах на максимум // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2014. Т. 21. № 6. С. 11–20.
5. Kühn D., Lo A., Osthus D., Staden K. The robust component structure of dense regular graphs and applications // Proc. London Math. Soc. 2015. V. 110. № 1. P. 19–56.
6. Kaltofen E. Greatest common divisors of polynomials given by straight-line programs // J. ACM. 1988. V. 35. № 1. P. 231–264.
7. Kaltofen E., Trager B. Computing with polynomials given by black boxes for their evaluations: Greatest common divisors, factorization, separation of numerators and denominators // J. Symbolic Comput. 1990. V. 9. P. 301–320.
8. Бассальго Л.А. О числе ненулевых перманентов над конечным полем нечетной характеристики // Пробл. передачи информ. 2013. Т. 49. № 4. С. 95–97.
9. Гершгорин Р.А., Рубанов Л.И., Селиверстов А.В. Легко вычисляемые инварианты для распознавания гиперповерхности // Информационные процессы. 2014. Т. 14. № 4. С. 365–369.
10. Schwartz J.T. Fast probabilistic algorithms for verification of polynomial identities // J. ACM. 1980. V. 27. № 4. P. 701–717.
11. Бибиков П.В., Лычагин В.В. Классификация линейных действий алгебраических групп на пространствах однородных форм // ДАН. 2012. Т. 442. № 6. С. 732–735.

Поступила в редакцию 9 апреля 2015 г.

Seliverstov A.V. A NOTE ON IMPLICITLY GIVEN HYPERGRAPHS

There are described effectively verifiable necessary conditions for the existence of an embedding between edge-weighted hypergraphs given implicitly. The application of the conditions to solve problems

of bioinformatics is discussed.

Key words: hypergraph; embedding; invariant; form.

Селиверстов Александр Владиславович, Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, г. Москва, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, e-mail: slvstv@iitp.ru

Seliverstov Alexandr Vladislavovich, Institute for Information Transmission Problems of RAS (Kharkovich Institute), Moscow, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Leading Researcher, e-mail: slvstv@iitp.ru

УДК 517.977

МЕТОД ПРОГРАММНЫХ ИТЕРАЦИЙ В АБСТРАКТНОЙ ИГРЕ УДЕРЖАНИЯ И ОПЕРАТОРНАЯ ВЫПУКЛОСТЬ

© Д.А. Серков, А.Г. Ченцов

Ключевые слова: программные итерации; операторная выпуклость.

Статья посвящена исследованию соотношений абстрактной версии метода программных итераций и конструкций, связанных с построением операторно выпуклой оболочки множества посредством предоболочки. Рассматривается игровая задача удержания траекторий абстрактной системы в заданном множестве.

Статья продолжает [1–3] и посвящена исследованию соотношений абстрактной версии метода программных итераций (МПИ) и конструкций [4], связанных с построением операторно выпуклой оболочки множества посредством предоболочки [4, с. 12]. Рассматривается игровая задача удержания траекторий абстрактной системы в заданном множестве.

1. Предполагаются заданными произвольные непустое подмножество (п/м) I вещественной прямой \mathbb{R} а также T_2 -пространство (X, τ) , $X \neq \emptyset$. Здесь I — аналог промежутка управления, а X — фазовое пространство «системы». В множестве X^I всех отображений из I в X выделяем непустое множество \mathbf{C} , $\mathbf{C} \subset X^I$, возможных траекторий упомянутой «системы». Кроме того, задано непустое множество Ω отображений из I в (непустое) множество Y ; элементы Ω играют роль неопределенных факторов процесса. Сама «система» отождествляется с мультифункцией (м/ф) \mathcal{S} , действующей из $D \times \Omega$, где $D \triangleq I \times X$, в \mathbf{C} (см. [1, (3.4)]); предполагается, что значениями \mathcal{S} являются непустые п/м \mathbf{C} . Если $(t, x) \in D$ и $\omega \in \Omega$, то $\mathcal{S}((t, x), \omega)$ имеет смысл множества траекторий «системы», возможных при действии Ω . Если $t \in I$, то $I_t \triangleq \{\xi \in I \mid \xi \leq t\}$ и $\mathbf{I}_t \triangleq \{\xi \in I \mid \xi \geq t\}$. Если W — множество, то через $\mathcal{P}(W)$ обозначается семейство всех п/м W (булеан W). Если B — множество, $f : I \mapsto B$ и C — непустое п/м I , то через $(f \mid C)$ обозначаем сужение f на множество C . В терминах множеств I_t , $t \in I$, определяется условие неупреждаемости м/ф из Ω в \mathbf{C} , подобное [1, с.162]. Среди таких м/ф выделяем (многозначные) квазистратегии, полагаемые, конечно, непустозначными и подчиненными «системе». В этой связи условимся через $\mathbf{M}(\Omega, \mathbf{C})$ обозначать множество всех м/ф из Ω в \mathbf{C} , которые могут принимать \emptyset в качестве своих значений. Если $z = (t, x) \in D$, то

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_z \triangleq \{ \alpha \in \mathbf{M}(\Omega, \mathbf{C}) \mid (\forall \omega \in \Omega \forall h \in \alpha(\omega) \exists h' \in \mathcal{S}(z, \omega) : (h \mid \mathbf{I}_t) = (h' \mid \mathbf{I}_t)) \\ \& (\forall \omega_1 \in \Omega \forall \omega_2 \in \Omega \forall t' \in \mathbf{I}_t ((\omega_1 \mid \mathbf{I}_{t'}) = (\omega_2 \mid \mathbf{I}_{t'})) \Rightarrow \\ \{ (h \mid \mathbf{I}_{t'}) : h \in \alpha(\omega_1) \} = \{ (h \mid \mathbf{I}_{t'}) : h \in \alpha(\omega_2) \}) \& (\alpha(\omega) \neq \emptyset \forall \omega \in \Omega) \} \end{aligned}$$