Нетривиальные бифуркации на бесконечности
Nontrivial bifurcations at infinity

Красносельский А.М.

Институт проблем передачи информации РАН
Большой Каретный пер., 19 Москва, ГСП-4, 127994, Россия
e-mail: `sashaamk@iitp.ru`

Рачинский Д.И.

Институт проблем передачи информации РАН
Большой Каретный пер., 19 Москва, ГСП-4, 127994, Россия;
и University College Cork, Cork, Ireland
e-mail: `D.Rachinskii@ucc.ie`

Изучается уравнение

$$\mathcal{L}(p;\lambda)x = f(t,x;\lambda), \qquad p = \frac{d}{dt} \tag{1}$$

с параметром $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}$. Здесь $\mathcal{L}$ — вещественный дифференциальный многочлен переменной p, функция f непрерывна по совокупности переменных, равномерно ограничена и периодична по t с общим для всех λ периодом 2π. Пусть $\lambda_0 \in \operatorname{Int}\Lambda$. Если у многочлена $L(p) = \mathcal{L}(p;\lambda_0)$ нет корней вида ki при целых k, то множество $\mathfrak{P}_\varepsilon$ всех 2π-периодических решений уравнения (1) при всех $|\lambda-\lambda_0| \leqslant \varepsilon$ ограничено для некоторого достаточно малого $\varepsilon > 0$. Если у многочлена L есть корни вида ki, то множество $\mathfrak{P}_\varepsilon$ может быть неограниченным при любом ε. Приводятся условия неограниченности множества $\mathfrak{P}_\varepsilon$ и изучается его геометрия.

Ранее изучались ситуации, когда в пространстве $\Lambda \times C$ множество периодических решений имеет вид конечного числа (в случае общего положения — двух, но иногда и более [1]) неограниченных непрерывных ветвей, уходящих на бесконечность. В достаточно общих предположениях могут возникать геометрически другие ситуации, когда множество решений в $\Lambda \times C$ имеет вид уходящей к бесконечности последовательности циклических непрерывных ветвей, не связных между собой.

Пусть многочлен $\mathcal{L}$ имеет вид $L(p)+(\lambda-\lambda_0)M(p;\lambda)$ и $\deg L > \deg M$; нелинейность f имеет вид $b(t;\lambda)+f(x;\lambda)$; коэффициенты многочлена $\mathcal{L}$ постоянны, коэффициенты многочлена M непрерывны по λ; линейная часть вырождена: $L(\pm i) = 0$, $L(ki) \neq 0$, $k \neq \pm 1$, $k \in \mathbb{Z}$.

Важную роль при описании геометрической структуры неограниченных множеств периодических решений играет функция

$$F(r) = \int_0^{2\pi} \sin t\, f\big(r\sin(t);\lambda_0\big)\, dt.$$

Основное условие возникновния нетривиальных бифуркаций:

$$F^* = \limsup_{r\to\infty} F(r) > F_* = \liminf_{r\to\infty} F(r). \qquad (2)$$

Неограниченные множества решений краевых задач с такими нелинейностями рассматривались ранее в [2]; там линейная часть уравнения от параметра не зависела, точки бифуркации на бесконечности определялись только нелинейностью, они не были изолированными, а заполняли невырожденные промежутки. Условие (2) исключает из рассмотрения нелинейности, удовлетворяющие условию насыщения $f(x) \to \pm\bar{f} \neq 0,\ x \to \pm\infty$ и многие близкие к ним.

Множество назовем циклической непрерывной ветвью, если в любой его ε-окрестности лежит нестягиваемая в ней замкнутая кривая (гомеоморфный образ окружности). Это определение дополняет введенное М.А. Красносельским (см. [3]) понятие непрерывной ветви. Типичный пример циклической непрерывной ветви — замкнутая кривая.

Приведем пример теоремы о существовании неограниченной цепочки циклических ветвей периодических решений уравнения (1). Пусть $\mu = M(i;\lambda_0) \neq 0$, положим

$$\bar{b} = \int_0^{2\pi} e^{ti} b(t;\lambda_0)\,dt, \qquad \nu = \Big|\frac{\bar{b}\mu}{\pi\Im\mu}\Big|.$$

Теорема. *Пусть либо* $F_*F^* < 0$ *и* $\min\{|F_*|,|F^*|\} > \nu$, *либо* $F_*F^* > 0$ *и* $\min\{|F_*|,|F^*|\} < \nu < \max\{|F_*|,|F^*|\}$. *Тогда множество* 2π*-периодических решений уравнения* (1) *не ограничено в* C, *в* $\Lambda \times C$ *оно содержит бесконечную последовательность ограниченных циклических непрерывных ветвей.*

Авторы поддержаны Российским фондом фундаментальных исследований (гранты 06-01-00256, 06-01-72552) и Science Foundation Ireland.

Список литературы

[1] Красносельский А.М., Рачинский Д.И., О числе неограниченных ветвей решений в окрестности асимптотической точки бифуркации, *Функц. анализ и его приложения* 39, No. 3, 37-53 (2005).

[2] Krasnosel'skii A.M., Mawhin J., The index at infinity for some vector fields with oscillating nonlinearities, *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 6, No. 1, 165-174 (2000).

[3] Красносельский М.А., Забрейко П.П., *Геометрические методы нелинейного анализа*, М.: Наука (1975).