

Проективно-инвариантное описание излучины реки

Л.И. Рубанов, А.В. Селиверстов

Институт проблем передачи информации, Российская академия наук, Москва, Россия

Поступила в редколлегию 29.09.2016

Аннотация—Как вычислить проективный инвариант кубической кривой, аппроксимирующей русло реки вблизи её излучины? Хорошо известный подход использует нормальную форму Вейерштрасса. Однако важно найти её посредством вычислений, устойчивых к погрешностям представления кривой, в частности, не требующих вычисления касательных или точек перегиба. Предлагается новый алгоритм для вычисления проективного инварианта кубической кривой, который можно применить для описания излучин рек.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: кубическая кривая, нормальная форма Вейерштрасса, проективный инвариант, описание изображений, распознавание образов, машинное зрение, алгоритм.

1. ВВЕДЕНИЕ

Анализ изображений часто использует распознавание контуров, представляющих собой плоские кривые [1, 2]. При этом важно распознавать проективно эквивалентные кривые, поскольку они соответствуют различным проекциям на плоскость одного и того же объекта в трёхмерном пространстве [3]. Например, значительные искажения возникают при фотосъёмке широкоугольным объективом, а также при совмещении снимков, сделанных с различных ракурсов [4–7]. Отметим, что реальные объекты часто обладают симметрией, распознавание которой на изображении может быть затруднено [8, 9]. С другой стороны, искусственное нарушение пропорций изображения целенаправленно используется при создании карикатурного изображения [10]. Далее мы будем рассматривать гладкие кривые на вещественной проективной плоскости.

Задача инвариантного относительно проективных преобразований плоскости описания овала с неявно выраженной симметрией при условии, что овал пересекается с каждой прямой не более чем в двух точках, рассмотрена в [11], а также в цитируемых там ранних работах. Близкие методы применяются для описания некоторых невыпуклых овалов [12]. Эти методы используют только вычисление касательной. Другие методы вычисления инвариантов основаны на вычислении старших производных [3, 13], что приводит к значительным вычислительным трудностям из-за необходимости компенсации неточностей дискретизации и квантования исходного изображения. Также вычисления сводятся к решению системы алгебраических уравнений. Это можно сделать посредством алгоритмов, основанных на вычислении базисов Грёбнера [14, 15]. Для приведенных систем n алгебраических уравнений от n неизвестных известна формула для решения в виде ряда гипергеометрического типа от коэффициентов [16]. Однако такие алгоритмы, не использующие специфику задачи, обычно требуют больших затрат времени и памяти, а также неустойчивы к погрешностям при аппроксимации исходных данных.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Напомним, что вещественная проективная плоскость — это неориентируемая поверхность. Наглядно её можно представить как результат склеивания круга и листа Мёбиуса по краю; при

погружении проективной плоскости в трёхмерное аффинное пространство неизбежно самопересечение поверхности. Другая модель получается отождествлением антиподальных точек на двумерной сфере. При этом соединяющий антиподальные точки путь на сфере соответствует неориентируемой замкнутой кривой, которая не является границей. Координаты на сфере определяют координаты на проективной плоскости. В частности, это позволяет определить понятие случайной точки, равномерно распределённой на проективной кривой (подразумевается замкнутая кривая на проективной плоскости). С другой стороны, проективная плоскость получается присоединением к аффинной плоскости бесконечно удалённой проективной прямой. В свою очередь, проективная прямая получается присоединением к аффинной прямой одной бесконечно удалённой точки.

Класс проективно эквивалентных кривых соответствует конусу в трёхмерном пространстве. Сечения этого конуса плоскостями, не проходящими через вершину конуса, являются аффинными кривыми, проективные замыкания которых эквивалентны. При этом соответствующие аффинные кривые могут иметь различное число компонент связности и, на первый взгляд, быть совершенно разными. Например, все гладкие кривые второй степени (коники) проективно эквивалентны. Кубические кривые образуют однопараметрическое семейство. Гладкая неприводимая проективная кубическая кривая над полем вещественных чисел приводима проективным преобразованием к нормальной форме Вейерштрасса [17, стр. 29]. В аффинном пространстве она задаётся уравнением вида:

$$y^2 = x^3 + px + q, \quad (1)$$

где многочлен в правой части не имеет кратных корней, то есть отличен от нуля дискриминант

$$-4p^3 - 27q^2. \quad (2)$$

Две кривые в нормальной форме Вейерштрасса проективно эквивалентны тогда и только тогда, когда совпадают отношения [17, стр. 143]

$$\frac{q^2}{p^3}. \quad (3)$$

Если дискриминант (2) отрицательный, то кривая связная; если положительный, то кривая состоит из двух компонент связности, одна из которых неориентируемая, а другая — овал без точек перегиба.

Симметрией кривой будем называть проективное преобразование плоскости, при котором рассматриваемая кривая отображается на себя. Симметрия, совпадающая с обратной, называется *инволюцией*. Будем говорить, что точки на кривой расположены симметрично, если они переходят друг в друга при рассматриваемой симметрии этой кривой. Кривая в нормальной форме Вейерштрасса (1) симметрична относительно смены знака координаты y .

Для последовательного просмотра точек на проективной кривой важно выбрать удобную параметризацию кривой. При этом удобно рассматривать проективную плоскость как сферу с отождествлёнными антиподальными точками. В частности, если проективная кривая соответствует кубической форме от трёх переменных $f(x, y, z)$, задающей конус, то соответствующая кривая на сфере состоит из точек, в которых форма f обращается в нуль на тройке направляющих косинусов. При переходе к антиподальной точке все косинусы одновременно меняют знак. Поэтому в антиподальных точках значения кубической формы f отличаются только знаком, следовательно, полученное уравнение относительно направляющих косинусов корректно определяет кривую на проективной плоскости.

Гладкая проективная кубическая кривая над полем вещественных чисел имеет ровно три вещественные точки перегиба. Более того, если прямая пересекает эту кривую в трёх точках,

из которых две служат точками перегиба, то такова и третья точка пересечения [17, стр. 31]. Другие шесть комплексных точек перегиба не принадлежат вещественной плоскости. Гладкая кубическая кривая в форме Вейерштрасса над полем вещественных чисел пересекает бесконечно удалённую прямую в одной точке, которая является точкой перегиба. Эта кривая в другой нормальной форме пересекает бесконечно удалённую прямую в трёх точках перегиба. Отметим, что в [18] предложен итерационный алгоритм для приведения к такой форме.

Любые две тройки попарно различных точек на проективной прямой переходят друг в друга при некотором проективном преобразовании. Однако для четырёх точек такое преобразование существует не всегда. Для четырёх точек на аффинной прямой T, U, V и W с координатами t, u, v и w при проективных преобразованиях остаётся инвариантным *двойное отношение* $[T, U, V, W]$, равное следующему выражению от координат точек:

$$[T, U, V, W] = \frac{v - t}{v - u} : \frac{w - t}{w - u}. \tag{4}$$

Доказательство приведено в [19, стр. 64–65]. Получающиеся при таких совпадениях тройки точек проективно эквивалентны. Для любого конечного множества точек можно выбрать систему аффинных координат так, что абсциссы всех точек различные. В этом случае двойные отношения (4) четвёрок точек на каждой прямой можно вычислять, используя абсциссы точек в качестве их координат на прямой.

Теорема (Папп Александрийский). *Даны точки U, V и W на прямой L и точки U', V' и W' на прямой L' . Три точки пересечения трёх пар прямых UV' и VU' , UW' и WU' , VW' и WV' лежат на одной прямой.*

Доказательство приведено в [17, стр. 14] и [19, стр. 71]. На рис. 1 показан пример расположения точек и прямых из теоремы.

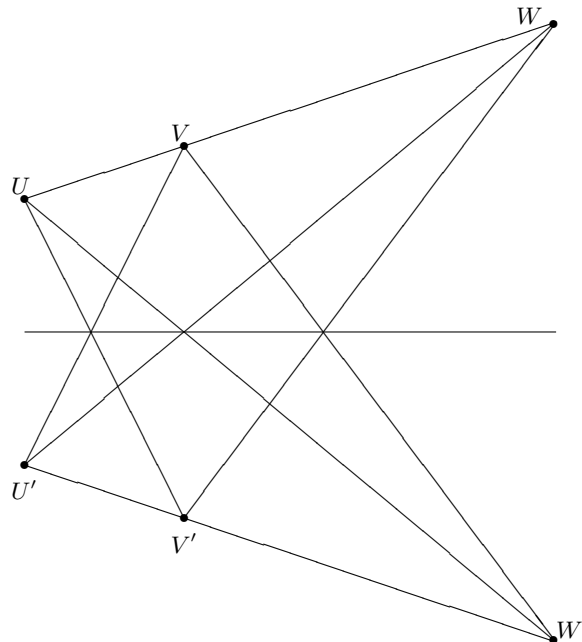


Рис. 1. Иллюстрация к теореме Паппа.

Зная положение точки перегиба на кубической кривой, её легко привести к форме Вейерштрасса. Неподвижная при инволюции точка кубической кривой — это либо точка перегиба, либо такая точка, в которой касательная прямая трансверсально пересекает эту кривую в точке перегиба. Однако точное вычисление точки перегиба, то есть точки кривой, в которой равен нулю гессиан соответствующей кубической формы, связано с вычислительными трудностями. Действительно, при сдвиге вдоль кривой в окрестности точки перегиба положение касательной почти не меняется.

Мы рассмотрим легко проверяемое условие симметричного относительно инволюции расположения точек на кубической кривой, не требующее точного вычисления касательных и точек перегиба. Отметим, что при инволюции проективной плоскости неподвижными остаются точки некоторой прямой и ещё одна точка, не лежащая на этой прямой. Аналогичная конструкция рассмотрена в [20].

Теорема 1 (Необходимое условие симметричного расположения). *Дана гладкая кубическая кривая. Пусть точки кривой U , V и W лежат на одной секущей прямой L , а точки U' , V' и W' — их образы при инволюции φ — лежат на другой секущей прямой L' . Пусть прямые L и L' пересекаются в точке T . Тогда значения проективного инварианта совпадают между собой для двух четвёрок точек $[T, U, V, W]$ и $[T, U', V', W']$. Более того, точка T и три точки пересечения трёх пар прямых UV' и VU' , UW' и WU' , VW' и WV' лежат на одной прямой, неподвижной при инволюции φ .*

Доказательство. При инволюции φ прямая L отображается на прямую L' . Поэтому точка T пересечения этих прямых остаётся неподвижной. Следовательно, равны двойные отношения $[T, U, V, W] = [T, U', V', W']$. В силу теоремы Паппа три точки пересечения трёх пар прямых UV' и VU' , UW' и WU' , VW' и WV' лежат на одной прямой. В силу единственности такой прямой, она неподвижна при инволюции φ . Теорема доказана.

Замечание. Если прямые L и L' расположены несимметрично, то точка T может не принадлежать прямой, построенной в теореме Паппа. Однако если точка T принадлежит ей для некоторой пары секущих, то этого не достаточно для существования инволюции. Нужно рассматривать вторую пару секущих M и M' .

Теорема 2. *Даны точки U , V и W на прямой L , и точки U' , V' и W' на прямой L' . Следующие три условия эквивалентны:*

1. *точка T и три точки пересечения трёх пар прямых UV' и VU' , UW' и WU' , VW' и WV' лежат на одной прямой;*
2. *существует проективное преобразование φ , для которого $\varphi(T) = T$, $\varphi(U) = U'$, $\varphi(V) = V'$ и $\varphi(W) = W'$;*
3. *в системе координат, где инварианты определены, выполнено равенство двойных отношений $[T, U, V, W] = [T, U', V', W']$.*

Доказательство. Второе и третье условия эквивалентны [19, стр. 64–65]. Для доказательства эквивалентности первых двух условий можно считать, что точка T бесконечно удалённая, а прямые L и L' параллельны на аффинной плоскости. В этом случае прямая, построенная в теореме Паппа, параллельна им тогда и только тогда, когда четырёхугольники $VV'U'U$ и $WW'U'U$ являются параллелограммами. Тогда соответствующие точки совмещаются параллельным переносом. Теорема доказана.

Покажем, что существует эффективно проверяемое достаточное условие симметричного относительно некоторой инволюции расположения точек на кубической кривой (рис. 2).

Теорема 3 (Достаточное условие симметричного расположения). *Дана гладкая кубическая кривая и четыре попарно различные секущие прямые L, L', M и M' , каждая из которых пересекает кривую в трёх точках. Прямые L и L' пересекаются в точке T , не лежащей на кривой; прямые M и M' пересекаются в точке S , не лежащей на кривой и отличной от точки T ; прямые L и M' пересекаются в точке E , не лежащей на кривой; прямые M и L' пересекаются в точке F , не лежащей на кривой. Обозначим точки пересечения кривой и секущей L через U, V и W ; секущей L' — через U', V' и W' ; секущей M — через A, B и C ; секущей M' — через A', B' и C' . Пусть на прямой ST лежат шесть точек пересечения шести пар прямых: UV' и VU', UW' и WU', VW' и WV', AB' и BA', AC' и CA', BC' и CB' . Тогда существует инволюция φ , сохраняющая кривую, при которой $\varphi(S) = S, \varphi(T) = T, \varphi(U) = U', \varphi(V) = V', \varphi(W) = W', \varphi(A) = A', \varphi(B) = B', \varphi(C) = C'$.*

Доказательство. В силу теоремы 2 для рассматриваемого набора точек существует инволюция φ , оставляющая точки S и T неподвижными и переставляющая 12 точек $U, V, W, U', V', W', A, B, C, A', B'$ и C' в соответствии с требованием. Покажем, что при этом отображении точки кривой переходят в точки той же кривой. На кривой лежат хотя бы восемь различных рассматриваемых точек. Действительно, каждые две из четырёх прямых L, L', M и M' пересекаются в одной точке. Всего шесть точек пересечения. По условию четыре из них E, F, S и T не лежат на кривой. Даже если остальные две лежат на кривой, то среди 12 точек $U, V, W, U', V', W', A, B, C, A', B'$ и C' найдутся десять различных. Но через десять различных точек плоскости проходит единственная кубическая кривая, включая приводимые, поскольку общая кубическая форма имеет десять мономов. Поэтому исходная кривая совпадает с симметричной кривой, которая достраивается по половине исходной кривой посредством инволюции φ . Теорема доказана.

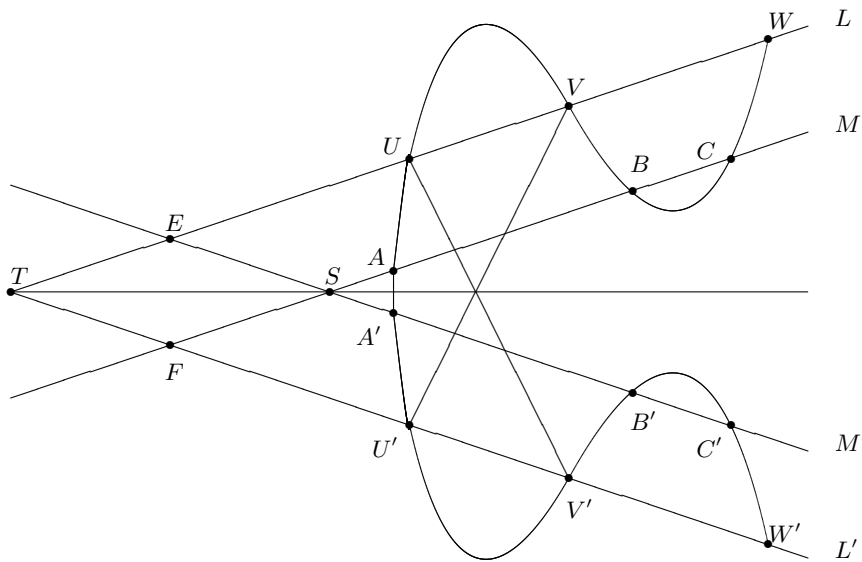


Рис. 2. Пример расположения точек и некоторых прямых в теореме 3.

Замечание. Согласно теореме Паппа, часть условий в теореме 3 избыточна. Однако дополнительные условия могут быть полезны для повышения точности. Для более точного определения положения прямой удобнее использовать точки, расположенные далеко друг от друга,

чтобы исключить погрешности приближённых вычислений. С другой стороны, теорема 2 позволяет заменить часть проверок инцидентности прямых и точек проверкой равенства проективных инвариантов для точек на секущих, что может быть эффективнее вспомогательных геометрических построений из теоремы Паша. И только при совпадении численных значений надо проводить проверку всех условий.

3. ПРИВЕДЕНИЕ К НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Зная прямую, отражение относительно которой оставляет кубическую кривую инвариантной, легко вычислить линейное преобразование координат для приведения к нормальной форме Вейерштрасса. Отметим, что в общем случае это преобразование не ортогональное. В новой системе каждая точка на оси абсцисс остаётся неподвижной при инволюции, а ось ординат проходит через две разные точки, переходящие друг в друга при этой инволюции.

Итак, приведение кубической кривой к нормальной форме Вейерштрасса основано на поиске двух пар симметрично расположенных секущих. Если приблизительно известно положение двух точек перегиба кривой, то секущие надо выбирать так, чтобы они пересекали кривую около разных точек перегиба. Будем использовать обозначения из теоремы 3. При фиксированной точке V на секущей L будем подбирать точку V' пересечения второй секущей L' с кривой вблизи другой точки перегиба; далее будем подбирать точку T пересечения L и L' так, чтобы она лежала либо внутри ориентируемой компоненты кривой, либо лежала внутри овала, образованного дугой кривой и отрезком VV' . Точки T , V и V' однозначно определяют секущие L и L' . Отметим, что мы предполагаем лишь грубую локализацию точек перегиба, не достаточную для приведения к нормальной форме без дополнительных построений. Также можно выбирать и вторую пару секущих M и M' пересекающими эту кривую в точках V и V' , но подбирать точку S отличную от точки T . Произвольно фиксируя точку V , надо варьировать три точки: точку V' на дуге кривой и две точки T и S в ограниченной области плоскости.

Будем варьировать точки V' , S и T , пока не будут выполнены достаточные условия теоремы 3. Построенная при этом прямая ST становится осью абсцисс в новой системе координат на аффинной плоскости. Ось ординат проходит через две симметрично расположенные точки на кривой, например, через точки U и U' . В новых координатах аффинная кривая задана уравнением вида

$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Без ограничения общности можно считать, что коэффициент при старшем члене $a = 1$. Чтобы вычислить коэффициенты b , c и d , достаточно знать образы при проективном преобразовании произвольных четырёх точек кривой в общем положении, то есть не переходящих друг в друга при инволюции. Например, можно использовать точки U , V , W и точку пересечения прямой ST с кривой. Далее линейная замена переменной x на разность $(x - b/3)$ приводит его к виду (1), удобному для вычисления проективного инварианта кривой, равного отношению (3). В частности, вычисление этого проективного инварианта кривой не требует вычисления уравнения кривой в исходных координатах и не использует вычисление касательных прямых или радиуса кривизны кривой.

С другой стороны, знание приблизительного положения точек перегиба существенно упрощает вычисления. Глядя на рисунок, обычно легко указать приблизительные положения симметрично расположенных точек, упоминаемых в теореме 3. Проверка симметричности расположения угаданных точек и последующее вычисление проективного инварианта кривой выполняются с использованием лишь трансверсально пересекающихся прямых и кривой.

Поскольку исходные данные содержат неточности вследствие дискретизации, для вычисления проективного инварианта целесообразно использовать большее число точек, выбирая среднее или наиболее вероятное из вычисленных значений. Более того, это позволяет корректировать ошибки не только в исходных данных, но и на промежуточных вычислениях [21]. Отдельный интерес представляет реализация описанных алгоритмов для многопроцессорных вычислительных систем [22]. Разные варианты прямых L' , M и M' можно рассматривать независимо друг от друга без использования межпроцессорного обмена при параллельной обработке вариантов.

4. ЛОКАЛЬНОЕ ОПИСАНИЕ УЧАСТКОВ КРИВОЙ И ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ

Естественным источником исходных данных для практического приложения нашего метода служат полутоновые или мультиспектральные (в том числе в инфракрасном диапазоне) изображения русла реки, полученные при фотосъёмке широкоугольным объективом или под разными углами к поверхности Земли. С помощью известных методов обработки изображений (таких как пороговое преобразование, связывание контуров, построение остова области — скелетонизация и др.) они преобразуются в двоичные изображения центральной линии реки, в общем случае многосвязной. Результатом метода является описание русла реки набором инвариантов, не зависящих от проективных преобразований. Говоря неформально, если кривая в нормальной форме Вейерштрасса описывает симметричную излучину реки, то проективный инвариант кривой, состоящей из одной компоненты связности, описывает относительную длину канала, необходимого для спрямления излучины реки. На рис. 2 показан пример связанной гладкой кубической кривой в нормальной форме Вейерштрасса. Кривая симметрична при отражении относительно оси абсцисс.

Аналогично инвариант кривой, состоящей из двух компонент связности, говорит об относительной удалённости старицы от основного русла реки.

Поскольку на вещественной гладкой кубической кривой три точки перегиба (точки перегиба могут лежать на бесконечно удалённой прямой), она не может аппроксимировать кривую с большим числом точек перегиба. В частности, если кривая соответствует руслу, то кубическая кривая обычно хорошо описывает одну излучину реки. Таким образом, вычисляемый нашим методом проективный инвариант (3) служит характеристикой небольшого участка. Описание кривой в целом требует неявной аппроксимации кубическими сплайнами и приписывания каждому из них в отдельности своего инварианта. При этом линейные и квадратичные сплайны не пригодны для описания, не зависящего от проективных преобразований, поскольку они все проективно эквивалентны. Напротив, использование кубических сплайнов позволяет вычислить такой инвариант [13].

Хотя вычисление инварианта не требует построения кубического сплайна в исходных координатах в явном виде, нужно выделить связанные участки кривой, заведомо содержащие две точки перегиба внутри и достаточно длинные фланги на краях. Для этого нужна грубая локализация точек перегиба. Важно, что нам достаточно локализовать их с низкой точностью, недостаточной для непосредственного вычисления нормальной формы Вейерштрасса как таковой. Приближённая локализация точек перегиба может быть выполнена посредством преобразования Хафа. Действительно, касательная прямая в точке перегиба хорошо аппроксимирует кривую, давая относительно большой вклад в ходе процедуры голосования. Отметим, что близкий метод был использован для распознавания дорожных знаков в реальном времени [23]. С другой стороны, рассмотренные вычисления позволяют проверить, насколько хорошо данная кривая аппроксимируется кубической кривой.

Как отмечено в начале работы, мы не требуем связности кубической кривой. Напротив можно рассматривать кривые, состоящие из объединения овала и неориентируемой компоненты связности. Нормальная форма Вейерштрасса такой кривой имеет вид (1), где многочлен в правой части имеет три вещественных корня. Это эквивалентно положительности дискриминанта (2).

При описании реки такой овал соответствует старице. Поэтому использование кривых с двумя компонентами также представляется естественным для приложения.

Отметим, что в [24] обсуждается высокая чувствительность к погрешностям в исходных данных геометрических построений, основанных на теореме Паскаля о шестиугольнике, частным случаем которой является теорема Паппа. А именно, угол Паскаля весьма чувствителен к отклонению кривой от коники.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Несмотря на значительные успехи в области дифференциальной геометрии при изучении гладких кривых, для анализа цифровых изображений более эффективными оказываются алгоритмы, основанные на методах начертательной геометрии, но устойчивые к погрешностям исходных данных. Предлагаемый нами метод анализа изображений обладает именно этим свойством. Его применение предполагает сочетание с ранее разработанными методами скелетонизации и связывания контуров, содержащих разрывы. Однако возникающие при этом ошибки не являются критическими для применения метода. Отметим также очевидное сходство нашего подхода с кодами, исправляющими ошибки, а также с задачами дискретной оптимизации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белим С.В., Кутлуниин П.Е. Выделение контуров на изображениях с помощью алгоритма кластеризации. *Компьютерная оптика*, 2015, том 39, № 1, стр. 119–124. doi: 10.18287/0134-2452-2015-39-1-119-124
2. Чочиа П.А. Переход от 2D- к 3D-изображениям: модификация двухмасштабной модели и алгоритмов обработки. *Информационные процессы*, 2014, том 14, № 3, стр. 242–255. (*Journal of Communications Technology and Electronics*, 2015, vol. 60, no. 6, pp. 678–687. doi: 10.1134/S1064226915060054)
3. Burdis J.M., Kogan I.A., Hong H. Object-image correspondence for algebraic curves under projections. *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*, 2013, vol. 9, no. 023, 31 p. doi: 10.3842/SIGMA.2013.023
4. Котов А.П., Фурсов В.А., Гошин Е.В. Технология оперативной реконструкции трёхмерных сцен по разноракурсным изображениям. *Компьютерная оптика*, 2015, том 39, № 4, стр. 600–605. doi: 10.18287/0134-2452-2015-39-4-600-605
5. Гошин Е.В., Фурсов В.А. Реконструкция 3D-сцен по разноракурсным изображениям при неизвестных внешних параметрах съёмки. *Компьютерная оптика*, 2015, том 39, № 5, стр. 770–775. doi: 10.18287/0134-2452-2015-39-5-770-775
6. Mishkin D., Matas J., Perdoch M. MODS: Fast and robust method for two-view matching. *Computer Vision and Image Understanding*, 2015, vol. 141, pp. 81–93. doi: 10.1016/j.cviu.2015.08.005
7. Ершов Е.И., Карнаухов В.Н., Мозеров М.Г. Алгоритмы стереозрения на основе параллакса движения монокулярной камеры бокового обзора. *Информационные процессы*, 2015, том 15, № 4, стр. 414–427. (*Journal of Communications Technology and Electronics*, 2016, vol. 61, no. 6, pp. 695–704. doi: 10.1134/S1064226916060073)
8. Lee S., Liu Y. Curved glide-reflection symmetry detection. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2012, vol. 34, no. 2, pp. 266–278. doi: 10.1109/TPAMI.2011.118

9. Диаз-Эскобар Х., Кобер В.И., Карнаухов В.Н. Распознавание символов на искаженных изображениях с использованием морфологической и фазовой фильтраций. *Информационные процессы*, 2015, том 15, № 2, стр. 207–214. (*Journal of Communications Technology and Electronics*, 2015, vol. 60, no. 12, pp. 1360–1365. doi: 10.1134/S1064226915120050)
10. Sela M., Aflalo Y., Kimmel R. Computational caricaturization of surfaces. *Computer Vision and Image Understanding*, 2015, vol. 141, pp. 1–17. doi: 10.1016/j.cviu.2015.05.013
11. Николаев П.П. Распознавание проективно преобразованных плоских фигур. VIII. О вычислении ансамбля корреспонденции овалов с симметрией вращения. *Сенсорные системы*, 2015, том 29, № 1, стр. 28–55.
12. Pritula N., Nikolaev D.P., Sheshkus A., Pritula M., Nikolaev P.P. Comparison of two algorithms modifications of projective-invariant recognition of the plane boundaries with the one concavity. In: *7th International Conference on Machine Vision (ICMV 2014)*. Eds. A. Verikas, B. Vuksanovic, P. Radeva, J. Zhou. *Proc. SPIE*, 2015, vol. 9445, no. 944508, 5 p. doi: 10.1117/12.2181215
13. Гершгорин Р.А., Рубанов Л.И., Селиверстов А.В. Легко вычисляемые инварианты для распознавания гиперповерхности. *Информационные процессы*, 2014, том 14, № 4, стр. 365–369. (*Journal of Communications Technology and Electronics*, 2015, vol. 60, no. 12, pp. 1429–1431. doi: 10.1134/S1064226915120074)
14. Bardet M., Faugère J.-C., Salvy B. On the complexity of the F_5 Gröbner basis algorithm. *Journal of Symbolic Computation*, 2015, vol. 70, pp. 49–70. doi: 10.1016/j.jsc.2014.09.025
15. Bokut L.A., Chen Yuqun. Gröbner–Shirshov bases and their calculation. *Bulletin of Mathematical Sciences*, 2014, vol. 4, no. 3, pp. 325–395. doi: 10.1007/s13373-014-0054-6
16. Куликов В.Р., Степаненко В.А. О решениях и формулах Варинга для систем n алгебраических уравнений от n неизвестных. *Алгебра и анализ*, 2014, том 26, № 5, стр. 200–214. (*St. Petersburg Math. J.*, 2015, vol. 26, pp. 839–848. doi: 10.1090/spmj/1361)
17. Прасолов В.В., Соловьев Ю.П. *Эллиптические функции и алгебраические уравнения*. М.: Факториал, 1997. (Prasolov V.V., Solovyev Yu.P. *Elliptic Functions and Elliptic Integrals*. Providence: Amer. Math. Soc., 1997.)
18. Селиверстов А.В. Кубические формы без мономов от двух переменных. *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*, 2015, том 25, № 1, стр. 71–77.
19. Прасолов В.В., Тихомиров В.М. *Геометрия*. М.: МЦНМО, 2013, 3-е изд. (Prasolov V.V., Tikhomirov V.M. *Geometry*. Amer. Math. Soc., 2001.)
20. Guletskiĭ V., Tikhomirov A. Algebraic cycles on quadric sections of cubic in \mathbb{P}^4 under the action of symplectomorphisms. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 2016, vol. 59, no. 2, pp. 377–392. doi: 10.1017/S0013091515000176
21. Влэдуц С.Г., Кабатянский Г.А., Ломаков В.В. Об исправлении ошибок при искажениях в канале и синдроме. *Проблемы передачи информации*, 2015, том 51, № 2, стр. 50–56. (*Problems of Information Transmission*, 2015, vol. 51, no. 2, pp. 132–138. doi: 10.1134/S0032946015020040)
22. Рубанов Л.И. О распараллеливании неоднородных циклов на суперкомпьютерах с распределённой памятью. *Информационные процессы*, 2013, том 13, № 4, стр. 295–305. (*Journal of Communications Technology and Electronics*, 2014, vol. 59, no. 6, pp. 639–646. doi: 10.1134/S1064226914060175)
23. Якимов П.Ю. Отслеживание дорожных знаков в видеопоследовательности с использованием скорости автомобиля. *Компьютерная оптика*, 2015, том 39, № 5, стр. 795–800. doi: 10.18287/0134-2452-2015-39-5-795-800
24. Хейфец А.Л. Геометрическая точность компьютерных алгоритмов конструктивных задач. *Проблемы качества графической подготовки студентов в техническом вузе: традиции и инновации*, 2016. <http://dgng.pstu.ru/conf2016/papers/74/>

Projective-Invariant Description of Meandering River

L.I. Rubanov, A.V. Seliverstov

How to calculate the projective invariant of a cubic curve approximating the river bed near its meander? A well-known approach uses the Weierstrass normal form. However, it is important to find it with computing that is robust under errors in the curve description, and in particular does not require the computation of tangent lines or inflection points. We propose a new algorithm for calculating the projective invariant for a cubic curve as well as its using to describe the bends of rivers.

KEYWORDS: cubic curve, Weierstrass normal form, projective invariant, image description, pattern recognition, machine vision, algorithm.