

© 2015 г. В.В. Вьюгин, д.ф.-м.н., vyugin@iitp.ru  
В.Г. Трунов, к.т.н., trunov@iitp.ru  
(Институт проблем передачи информации РАН им А.А. Харкевича,  
Москва)

## ПОСТРОЕНИЕ КОМБИНИРОВАННЫХ ФИНАНСОВЫХ СТРАТЕГИЙ НА ОСНОВЕ УНИВЕРСАЛЬНОГО АДАПТИВНОГО ПРОГНОЗИРОВАНИЯ <sup>1</sup>

Рассматривается алгоритм адаптивного прогнозирования элементов временного ряда в режиме онлайн. На основе этого алгоритма определяется универсальная стратегия для финансового рынка: такая стратегия обеспечивает асимптотически наибольший доход по сравнению с любой торговой стратегией, в которой решение принимается на основе правил, непрерывно зависящих от входной информации. Для снижения риска при одновременной торговле несколькими финансовыми инструментами проводится адаптивное перераспределение текущего капитала между ними согласно алгоритму AdaHedge. Предложены варианты комбинированной игры с использованием различных алгоритмических торговых стратегий. Приведены результаты численных экспериментов на исторических данных торговых площадок ММВБ и BATS(US).

### 1. Введение

Рассматривается задача прогнозирования последовательности исходов, которые поступают последовательно в режиме онлайн. При этом не делается никаких стохастических предположений об источнике, порождающем последовательность. Как говорят, данные поступают из “черного ящика”. В этих условиях ничего не остается, как только изучать доступную последовательность исходных данных и пытаться строить предсказания, совершенствуя схему прогноза данных в процессе их поступления. Будем использовать некоторое обобщение постановки задачи предсказания, предложенной Дэйвидом [1]. Для построения прогнозов будет использована модификация метода Фостера и Вохра [2]. Необходимые определения будут даны ниже.

Данный метод будет применен для прогнозирования временных рядов цен финансовых инструментов (акций). На основе полученных прогнозов будет определена игра в терминах покупки и продажи акций. Методы подобного типа называются алгоритмической торговлей.<sup>2</sup>

---

<sup>1</sup>Численные эксперименты (раздел 5) выполнены в ИПИ РАН за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00150).

<sup>2</sup>Алгоритмическая торговля (Algorithmic trading) – это формализованный процесс совершения торговых операций на финансовых рынках по заданному алгоритму с использованием специализированных компьютерных систем (торговых роботов).

Будет доказана теорема об оценке эффективности предложенной торговой стратегии, а именно, будет доказано свойство "универсальности" стратегии: доход при применении этой стратегии асимптотически не меньше, чем доход любой торговой стратегии, в которой решение принимается на основе правил, непрерывно зависящих от входной информации.

Ковер [3] предложил алгоритм формирования "универсального" динамического портфеля акций, который стал платформой для теоретико-информационного подхода к построению универсальных торговых стратегий. При использовании алгоритма Ковера деньги динамически перераспределяются между несколькими акциями в зависимости от текущей доходности этих акций, а получаемый доход оказывается асимптотически не меньшим, чем доход от любой постоянной стратегии. При этом никаких стохастических предположений о поведении временных рядов цен акций не делается. При любом характере изменения цен полученные результаты имеют смысл. Ковер и Ордентлих [4] распространили этот алгоритм на случай, при котором может использоваться дополнительная информация. Дополнительная информация в этой работе задавалась значением состояния. Предполагается, что множество таких состояний конечно.

В настоящей статье приводится алгоритм, предназначенный для торговли с одним финансовым инструментом. По сравнению с любой "не слишком сложной" торговой стратегией, он также будет давать асимптотически наибольший доход. Мы сравниваем доходность данного алгоритма с доходностью целого класса игровых стратегий. Во-первых, расширим понятие состояния – теперь это произвольное действительное число  $x$ , в котором может быть закодирована различная информация. Во-вторых, алгоритм будет соревноваться с классом игровых стратегий, которые задаются непрерывными функциями  $D(x)$  от входной информации  $x$ . Здесь также не делаем никаких стохастических предположений о поведении временных рядов цен акций.

В предложенной стратегии будет использоваться метод прогнозирования исходов временного ряда. Этот метод является модификацией метода построения рандомизированных предсказаний Какаде и Фостера [5] и метода предсказаний Вовка [6] с использованием гильбертовых пространств, порожденных воспроизводящими ядрами.

В [1] описана постановка задачи прогнозирования и метод тестирования соответствующих прогнозов. Предсказатель получает онлайн числовую последовательность исходов  $\omega_1, \dots, \omega_{n-1}, \dots$ , а его задача состоит в вычислении числовой оценки  $p_n$  для будущего события  $\omega_n$  по известным  $n - 1$  исходам  $\omega_1, \dots, \omega_{n-1}$ . Число  $p_n$  можно рассматривать как прогноз среднего значения будущего исхода  $\omega_n$ . Если  $\omega_i$  принимает значение 0 или 1, это среднее можно интерпретировать как вероятность события  $\omega_n = 1$ .

Примером прогнозирования при бинарном исходе является вероятностное предсказание погоды на завтра. Событие  $\omega_n = 1$  можно интерпретировать как дождь в  $n$ -й день, а число  $p_n$  – как его вероятность, которую можно вычислить по данным о погоде  $\omega_1, \dots, \omega_{n-1}$  за предшествующие  $n - 1$  дней. Отсутствие дождя соответствует  $\omega_n = 0$ , его вероятность  $1 - p_n$ . Если дождь случается так же часто, как он прогнозируется предсказателем, предсказатель считается калибруемым. Например, если дождь случается в 80% дней, для которых предсказатель давал прогноз  $p_n = 0,8$ . В этом примере  $p_n \in [0, 1]$ .

Здесь будет рассмотрен более общий случай, если  $\omega_n \in [0, 1]$  и  $p_n \in [0, 1]$  для всех  $n$ . Например, действительные числа  $\omega_n$  могут быть ценой финансового инструмента в момент времени  $n = 1, 2, \dots$ ; цена нормирована, так что предполагается  $0 \leq \omega_n \leq 1$  для всех  $n$ . Число  $p_n$  можно рассматривать как прогноз цены на момент  $n$ , так что  $0 \leq p_n \leq 1$  для всех  $n$ .

В [1] точное определение калибруемости прогнозов выглядит следующим образом: пусть  $I(p)$  обозначает характеристическую функцию подынтервала  $I \subseteq [0, 1]$ , т.е.  $I(p) = 1$ , если  $p \in I$ , и в противном случае  $I(p) = 0$ . Бесконечная последовательность прогнозов  $p_1, p_2, \dots$  называется хорошо калибруемой на бесконечной последовательности исходов  $\omega_1, \omega_2, \dots$ , если для характеристической функции  $I(p)$  произвольного подынтервала  $[0, 1]$  калибровочная ошибка стремится к нулю, а именно,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(p_i)(\omega_i - p_i) \rightarrow 0$$

при  $n \rightarrow \infty$ . Индикаторная функция  $I(p_i)$  определяет некоторое “правило выбора”, которое отбирает номера  $i$  исходов, для которых вычисляется отклонение между прогнозом  $p_i$  и этим исходом  $\omega_i$ .

Рандомизированный алгоритм, при использовании которого предсказания с вероятностью единица хорошо калибруются на произвольной последовательности исходов, предложен Фостер и Вохра [2]. В этом алгоритме выполняется внутренняя рандомизация прогноза  $p_i$ , так что настоящее значение прогноза скрыто от генерирующего исходы источника. Какаде и Фостер [5] усовершенствовали этот алгоритм, показав, что для получения универсальных хорошо калибруемых предсказаний достаточно случайным образом округлять предсказания, вычисленные некоторым детерминированным алгоритмом.

В [5] рассматривается конечное пространство исходов и распределения вероятностей на этом пространстве в качестве прогнозов. В этой работе в качестве пространства исходов  $\omega_i$  рассматривается единичный интервал  $[0, 1]$ , а прогноз  $p_i$  — это действительное число из этого интервала (которое будет значением некоторой случайной переменной). Рандомизированный прогноз будет задаваться с помощью вероятностного распределения на интервале  $[0, 1]$ .

Теорема 2 из раздела 2 данной работы утверждает существование торговой стратегии, которая приносит доход асимптотически не меньший, чем любая стационарная торговая стратегия, использующая в качестве решающего правила произвольную непрерывную функцию от входной информации. Данная универсальная стратегия использует предсказания, которые вычисляются с помощью алгоритма теоремы 1.

В разделе 3 описана компьютерная технология и приведены результаты численных экспериментов на исторических данных цен акций ММВБ и электронной биржи BATS(US) за 2014 г., загруженных с сайта <http://www.finam.ru>. Особое внимание уделено вопросам хеджирования рисков. Предложены адаптивные алгоритмы для одновременной игры на нескольких инструментах с оптимальным перераспределением финансовых ресурсов. Приведены результаты соответствующих численных экспериментов. Данная работа развивает стратегии, предложенные в работах [7], [8].

## 2. Основные теоретические результаты

Теорема 2 подтверждает универсальность предложенной торговой стратегии. Это асимптотически наилучшая стратегия в классе стратегий, представленных непрерывными функциями от входной информации.

Предположим, что вещественные значения  $S_1, S_2, \dots$ , которые будем интерпретировать как цены некоторой акции, поступают в режиме онлайн. Также предположим, что они ограничены и нормированы так, что  $0 \leq S_i \leq 1$  для всех  $i$ .

Приведем стандартные понятия и определения, используемые при торговле финансовыми инструментами.

В процессе торговли на финансовом рынке трейдеры покупают и продают акции. Считаем, что число  $C$  покупаемых или продаваемых единиц финансового инструмента может принимать любое вещественное значение. Допускается возможность покупать отрицательное число акций: при  $C > 0$  покупка  $-C$  акций эквивалентна продаже  $C$  акций, а продажа  $-C$  акций эквивалентна покупке  $C$  акций. Допускаем, что каждый трейдер может одалживать деньги в неограниченном количестве.<sup>3</sup>

Под стратегией понимается некоторый алгоритм (может быть, рандомизированный), выдающий в начале каждого раунда  $i$  игры число  $C_i$  единиц финансового инструмента, которое необходимо купить (если это число положительное или равно нулю) или продать (если оно отрицательное). Для простоты изложения (в условиях отсутствия комиссии) предполагаем, что в конце этого же раунда трейдер продает купленные единицы или покупает проданные в том же количестве, соответственно. Таким образом, за  $i$ -й раунд игры капитал трейдера увеличивается (уменьшается) на величину  $C_i(S_i - S_{i-1})$ .<sup>4</sup>

Проводится сравнение двух типов торговых стратегий на финансовом рынке представленных в виде игры с двумя типами игроков – трейдеров: на шаге  $i$  *Трейдер M* использует рандомизированную стратегию – он покупает случайное число акций  $\tilde{M}_i$ , которое вычисляется некоторым рандомизированным алгоритмом; *Трейдер D* покупает  $D(x_i)$  акций, где  $D$  – произвольная непрерывная функция, определенная на единичном отрезке  $[0, 1]$ , а  $x_i$  – число из отрезка  $[0, 1]$ , в котором закодирована входная информация и которое выдается трейдерам прежде, чем они применят свои методы. Таким образом,  $C_i$  равно  $\tilde{M}_i$  для *Трейдера M* и равно  $D(x_i)$  для *Трейдера D*.

Вещественное число  $x_i$  также называется *сигналом* или *дополнительной информацией*. Число  $x_i$  принадлежит  $[0, 1]$ , в нем может быть закодирована любая числовая информация. Например, это может быть даже будущая цена акции  $S_i$ .

Каждый *Трейдер D* использует на шаге  $i$  только информацию  $x_i$  – он покупает (или продает)  $D(x_i)$  единиц акции. Стратегия этого типа будет называться *стационарной*.

Для *Трейдера M* данная игра является игрой с полной информацией. Алгоритм *Трейдера M* будет использовать все значения  $S_{j-1}$  и  $x_j$  при  $j \leq i$ .

Прошлые цены акции, сигналы и сделанные предсказания также можно закодировать в сигнале  $x_i$ , поэтому *Трейдер D* также может использовать эту информацию.

---

<sup>3</sup>В реальной торговле за каждую операцию покупки или продажи может уплачиваться комиссия – определенный процент с использованной суммы денег. Теорема 2 не учитывает комиссию. В разделе 3 приведены результаты расчетов с учетом комиссии.

<sup>4</sup>В численных экспериментах раздела 3 применяются более сложные стратегии.

Здесь имеется ограничение: функция  $D$  должна быть непрерывной.

Стратегия *Трейдера М* является рандомизированной. Приведем метод случайного округления, предложенный в работе [5]. Пусть  $K$  – произвольное натуральное число. Разбиваем интервал  $[0, 1]$  на  $K$  равных подынтервалов длины  $\Delta = 1/K$  с помощью рациональных точек  $v_i = i\Delta$ , где  $i = 0, 1, \dots, K$ . Пусть  $V$  – множество этих точек. Любое число  $p \in [0, 1]$  может быть представлено в виде линейной комбинации двух граничных точек подынтервала, содержащего  $p$ , а именно,  $p = \sum_{v \in V} w_{v_{i-1}}(p)v_{i-1} + w_{v_i}(p)v_i$ , где  $p \in [v_{i-1}, v_i]$ ,  $i = \lfloor p/\Delta + 1 \rfloor$ ,  $w_{v_{i-1}}(p) = 1 - (p - v_{i-1})/\Delta$  и  $w_{v_i}(p) = (v_i - p)/\Delta$ . Определим  $w_v(p) = 0$  для всех остальных  $v \in V$ .

Пусть  $\tilde{p}$  равно  $v_{i-1}$  с вероятностью  $w_{v_{i-1}}(p)$  и равно  $v_i$  с вероятностью  $w_{v_i}(p)$ .

Обозначим через  $\bar{w}(p) = (w_v(p) : v \in V)$  вектор этих вероятностей. Говорим, что округляем число  $p$  до  $v_{i-1}$  с вероятностью  $w_{v_{i-1}}(p)$  и до  $v_i$  с вероятностью  $w_{v_i}(p)$ .

Для  $z, z' \in [0, 1]$  определим скалярное произведение  $K(z, z') = (\bar{w}(z) \cdot \bar{w}(z'))$ , которое называем ядром.

Предварительно приведем теорему, в которой определяется алгоритм для вычисления хорошо калибруемых прогнозов. Эти прогнозы будут использоваться для определения торговой стратегии.

Введем тесты для проверки прогнозов (правила выбора подпоследовательностей) более общего вида, чем те, которые рассматривались в работах [1] и [5]. Для произвольного подмножества  $\mathcal{S} \subseteq [0, 1]^2 = [0, 1] \times [0, 1]$  определим

$$I_{\mathcal{S}}(p, x) = \begin{cases} 1, & \text{если } (p, x) \in \mathcal{S}, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где  $p, x \in [0, 1]$ . В разделе 5 будем использовать множества типа  $\mathcal{S} = \{(p, x) : p > x\}$  и  $\mathcal{S} = \{(p, x) : p \leq x\}$ .

Используем гильбертовы пространства, порожденные воспроизводящим ядром - RKHS.<sup>3</sup> В качестве первого этапа доказательства теоремы 2 покажем в разделе 5, что для произвольного гильбертова пространства RKHS можно определить стратегию  $\tilde{M}_i$ , которая является универсальной для класса всех стационарных стратегий, задаваемых функциями из этого пространства. После этого, используя пространство RKHS специального вида, перенесем свойство универсальности на произвольные стратегии, задаваемые непрерывными функциями.

Напомним основные определения теории гильбертовых пространств, порожденных воспроизводящим ядром. Гильбертово пространство  $\mathcal{F}$  функций, определенных на множестве  $X$ , называется RKHS на  $X$ , если функционал  $f \rightarrow f(x)$  является непрерывным для каждого  $x \in X$ . Обозначаем через  $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$  норму на пространстве  $\mathcal{F}$ . Также определяется  $c_{\mathcal{F}}(x) = \sup_{\|f\|_{\mathcal{F}} \leq 1} |f(x)|$ . Константа вложения пространства  $\mathcal{F}$  определяется как  $c_{\mathcal{F}} = \sup_x c_{\mathcal{F}}(x)$ . Более подробно о пространствах типа RKHS см. в монографии [9].

Будем рассматривать RKHS  $\mathcal{F}$  на  $X = [0, 1]$  с конечной константой вложения  $c_{\mathcal{F}} < \infty$ . Важный пример такого пространства RKHS – соболевское пространство

---

<sup>3</sup>RKHS – сокращение для названия типа функциональных гильбертовых пространств (Reproducing Kernel Hilbert Space).

$\mathcal{F} = H^1([0, 1])$ , которое состоит из абсолютно непрерывных функций  $f : [0, 1] \rightarrow \mathcal{R}$  с  $\|f\|_{\mathcal{F}} < \infty$ , где  $\|f\|_{\mathcal{F}} = \sqrt{\int_0^1 (f(t))^2 dt + \int_0^1 (f'(t))^2 dt}$ . Для такого пространства  $c_{\mathcal{F}} = \sqrt{\coth 1} = \sqrt{\frac{1+e^{-2}}{1-e^{-2}}}$  (см. [6]).

Пусть  $\mathcal{F}$  – некоторое пространство RKHS на  $X$  со скалярным произведением  $(f \cdot g)$  для  $f, g \in \mathcal{F}$ . По теореме Рисса–Фишера для любого  $x \in X$  существует  $k_x \in \mathcal{F}$  такое, что  $f(x) = (k_x \cdot f)$  для всех  $f \in \mathcal{F}$ . Тогда воспроизводящее ядро определяется как  $R(x, y) = (k_x \cdot k_y)$ .

В обратную сторону, любая симметрическая положительно определенная функция  $K(x, y)$  определяет некоторое каноническое пространство RKHS  $\mathcal{F}$ , а также отображение  $\Phi : X \rightarrow \mathcal{F}$ , так что  $R(x, y) = (\Phi(x) \cdot \Phi(y))$ .

Пусть  $\mathcal{F}$  – некоторое гильбертово пространство RKHS на  $[0, 1]$  с конечной константой вложения  $c_{\mathcal{F}}$ ,  $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$  – соответствующая норма и  $R(x, x')$  – ядро на  $[0, 1]$ .

Предполагаем, что последовательность  $S_1, S_2, \dots \in [0, 1]$  вещественных чисел и последовательность  $x_1, x_2, \dots \in [0, 1]$  сигналов поступают в режиме онлайн.

*Теорема 1.* Пусть  $\epsilon > 0$ . Можно построить алгоритм для вычисления прогнозов  $p_1, p_2, \dots$  такой, что выполнены следующие условия:

- для любого  $\delta > 0$ , для любого подмножества  $S \subseteq [0, 1]^2$  и для любого  $n$  с вероятностью не менее  $1 - \delta$

$$(1) \quad \left| \sum_{i=1}^n I_S(\tilde{p}_i, \tilde{z}_i)(S_i - \tilde{p}_i) \right| \leq cn^{3/4+\epsilon}(c_{\mathcal{F}}^2 + 1)^{1/4} + \sqrt{\frac{n}{2} \ln \frac{2}{\delta}},$$

где  $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \dots$  – соответствующие рандомизации  $p_1, p_2, \dots$  и  $\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots$  – рандомизации чисел  $z_1, z_2, \dots$ , где  $z_i = S_{i-1}$ ,  $i = 1, 2, \dots$ ;  $c$  – абсолютная константа;

- для любого  $D \in \mathcal{F}$

$$(2) \quad \left| \sum_{i=1}^n D(x_i)(S_i - p_i) \right| \leq \|D\|_{\mathcal{F}} \sqrt{(c_{\mathcal{F}}^2 + 1)n}$$

для всех  $n$ .

- для любого подмножества  $S \subseteq [0, 1]^2$  с вероятностью 1

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_S(\tilde{p}_i, \tilde{z}_i)(S_i - \tilde{p}_i) = 0.$$

Доказательство теоремы см. в разделе 5.

Определим универсальную торговую стратегию в виде последовательности случайных величин  $\tilde{M}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . Предполагаем, что значения  $S_1, S_2, \dots \in [0, 1]$  и  $x_1, x_2, \dots \in [0, 1]$  подаются последовательно в режиме онлайн.

Центральным моментом стратегии  $\tilde{M}_i$  является рандомизированный алгоритм для вычисления предсказаний  $\tilde{p}_i$  из теоремы 1. Этот алгоритм будет представлен в ее доказательстве в разделе 5.

Полагаем  $\mathcal{K}_0^D = 0$  и  $\mathcal{K}_0^M = 0$ . На каждом раунде игры  $i$  участники производят следующие действия. *Рынок* анонсирует сигнал  $x_i \in [0, 1]$ . Определяется точность случайного округления:  $\Delta = \Delta_s$ , где величины  $\Delta_s$ ,  $s = 1, 2, \dots$ , определены в разделе 5 в конце доказательства Теоремы 1. Вычисляем прогноз  $p_i$  с помощью алгоритма теоремы 1, приводимого ниже в в разделе 5). После этого, генерируем рандомизированное значение этого прогноза –  $\tilde{p}_i$ , а также – рандомизированное значение цены  $\tilde{S}_{i-1}$ .

*Треjder M* покупает  $\tilde{M}_i$  акций по цене  $S_{i-1}$  за каждую, где

$$\tilde{M}_i = \begin{cases} 1, & \text{если } \tilde{p}_i > \tilde{S}_{i-1}, \\ -1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

*Треjder D* покупает  $D(x_i)$  акций по цене  $S_{i-1}$  за каждую, где  $D$  – произвольная непрерывная функция на  $[0, 1]$ . *Рынок* объявляет цену  $S_i$  акции. После этого *Треjder M* продает  $\tilde{M}_i$  акций по цене  $S_i$  и обновляет значение своего кумулятивного выигрыша:  $\mathcal{K}_i^M = \mathcal{K}_{i-1}^M + \tilde{M}_i(S_i - S_{i-1})$ . *Треjder D* продает  $D(x_i)$  акций по цене  $S_i$  и обновляет значение своего кумулятивного выигрыша:  $\mathcal{K}_i^D = \mathcal{K}_{i-1}^D + D(x_i)(S_i - S_{i-1})$ .

Подчеркнем, что реализация случайной величины  $\tilde{M}_i$  скрыта от *Рынка*, когда он анонсирует цену  $S_i$ . *Рынок* может знать метод рандомизации и вычислять вероятности событий  $\tilde{M}_i = 1$  и  $\tilde{M}_i = -1$ .

Говорим, что в случае  $\tilde{M}_i > 0$  *Треjder M* переходит на длинную позицию; в противном случае он переходит на короткую позицию. То же самое относится к *Треджеру D*.<sup>2</sup>

Допускаем, что трейдеры могут одалживать деньги и акции в неограниченном количестве. По окончании серии раундов игры оценим выигрыш (или долг) каждого из трейдеров.

*Треjder M* может покупать или продавать только одну акцию. Поэтому для сравнения эффективности стратегий трейдеров необходимо нормировать стратегию *Трейдера D*. Рассмотрим норму  $\|D\|_\infty = \sup_{0 \leq x \leq 1} |D(x)|$ , где  $D$  – произвольная непрерывная функция, определенная на единичном отрезке  $[0, 1]$ . Далее будем использовать величину  $\|D\|_+ = \max\{1, \|D\|_\infty\}$  в качестве нормирующего множителя. Основной результат этого раздела представим в виде теоремы 2, которая утверждает, что с вероятностью 1 средний выигрыш универсальной торговой стратегии асимптотически

---

<sup>2</sup>Длинная позиция (LONG) на финансовом рынке – это приобретение ценных бумаг в начале раунда игры с целью их продажи в конце раунда в расчете на увеличение их стоимости. Короткая позиция (SHORT) – это продажа одолженных (у другого трейдера) акций в начале раунда игры с целью их покупки и возвращения в конце раунда игры. Переходя на короткую позицию, трейдер рассчитывает на уменьшение цены в конце раунда игры.

не меньше, чем средний выигрыш любой стационарной торговой стратегии, отнесенный на одну акцию.

*Теорема 2. Можно построить такой алгоритм для вычисления прогнозов цен финансовых инструментов, что для любой непрерывной функции  $D$  асимптотическое соотношение*

$$(4) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\mathcal{K}_n^M - \|D\|_+^{-1} \mathcal{K}_n^D) \geq 0$$

*выполнено почти всюду относительно распределения вероятностей, порожденного методом рандомизации.*

Доказательство теоремы 2 приведено в разделе 5.

Можно переформулировать требование (4) в виде

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\mathcal{K}_n^M - \mathcal{K}_n^D) \geq 0$$

для всех  $D$  таких, что  $\|D\|_\infty \leq 1$ .

Торговая стратегия  $\tilde{M}_i$ , удовлетворяющая условию (4), называется *универсально состоятельной*.

Стратегия, предложенная в теореме 2, является также *асимптотически безрисковой*:

*Следствие 1. Условие*

$$(5) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{K}_n^M}{n} \geq 0$$

*выполнено почти всюду.*

Действительно, поскольку условие (4) асимптотической оптимальности *Трейдера  $M$*  выполнено также относительно тривиальной стратегии  $D(x) = 0$  для всех  $x$ , то для этой стратегии также выполнено условие (5).

### 3. Результаты численных экспериментов

Свойство асимптотической состоятельности (4) предложенной стратегии  $M$  обусловливает целесообразность ее применения. Поскольку стратегия  $M$  дает асимптотически наибольший доход по сравнению с любой стратегией  $D$  из достаточно широкого класса, можно предполагать, что она будет выигрывать достаточно много, если существует хотя бы одна стратегия  $D$ , которая выигрывает достаточно много.

#### 3.1. Исходные данные и технология вычислений

Численные эксперименты по прогнозированию временных рядов и виртуальной торговле акциями проводили на материале поминутных цен акций нескольких произвольно выбранных российских компаний, представленных на рынке ММВБ и нескольких компаний, представленных на рынке BATS США за период с 15.01.2014 до 15.12.2014.

Схема расчета, определенная в доказательстве теоремы 1, была существенно упрощена. Поскольку ядра  $K$  и  $M$  из доказательства теоремы имеют аналогичный

вид в большинстве практических приложений, для их приближения была использована гладкая ядерная функция:

$$\mathcal{K}(p, p_n) = \cos((\pi(p - p_n)/2)).$$

Источником информации для прогноза и принятия решений служили только предыдущие значения цен инструмента.

Для алгоритма, осуществляющего операции в реальном времени, решающее значение имеет скорость вычислений. Так, при работе с минутными данными время вычисления прогноза необходимо сократить до нескольких секунд. Проведенные ранее [7] эксперименты показывают, что при работе на персональном это условие достигается для длины предыстории порядка 5000 точек. При проведении численных экспериментов вычисления проводили параллельно на двух или нескольких процессорах, которые работали на частично пересекающихся временных отрезках, сдвинутых относительно друг друга на 2000 точек. По результатам прогнозирования на таких частично перекрывающихся отрезках формировали единый суммарный прогноз. Для точек из перекрывающихся временных отрезков выбирали прогноз с наибольшей длиной предыстории.

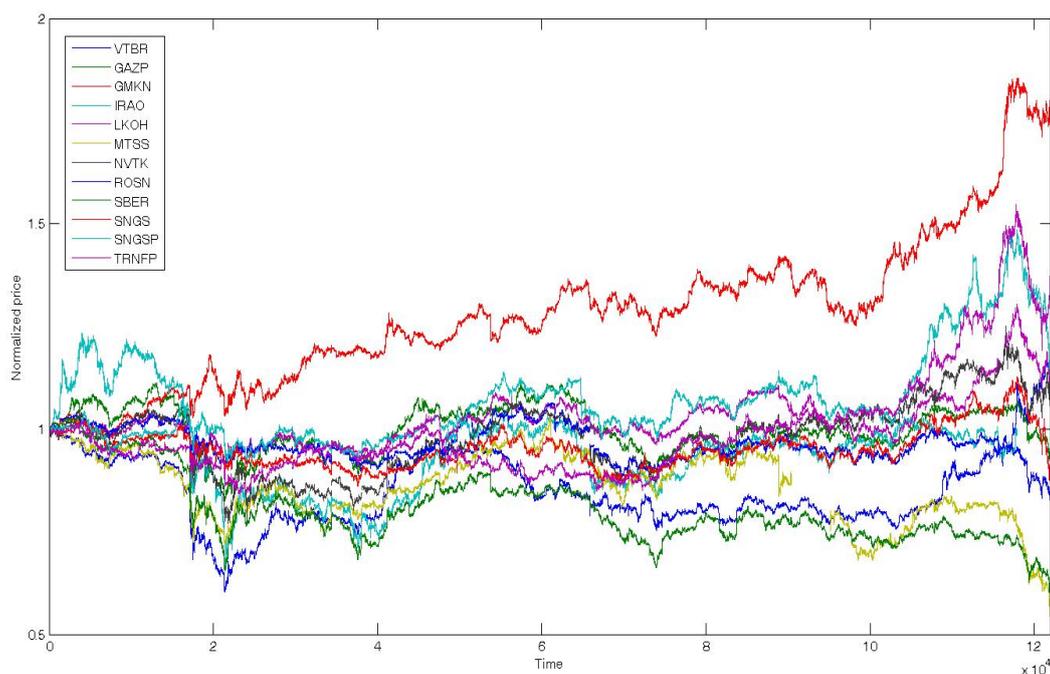


Рис. 1. Графики изменения нормированных цен нескольких российских акций на рынке ММВБ за период с 15.01.2014 по 15.12.2014.

Первые  $L_{tr}$  точек каждого скользящего временного отрезка использовали как тренировочную выборку для локальной настройки модели, т.е. для масштабирования цен на акции, определения размера сетки рандомизации и начального обучения алгоритма прогнозирования.

На рис. 1 приведены графики изменения цен нескольких российских ценных бумаг за период с 15.01.2014 по 15.12.2014 на рынке ММВБ. Для удобства сравнения графики приведены в долях от начальной цены, которая принимается за 1.

Конечные точки на каждом графике позволяют оценить доходность стратегии “buy-and-hold” (“B&H”), когда определенное число акций приобретается в начале полного периода работы с инструментом, и продается по его окончании.

На рис. 2 приведены аналогичные графики для нескольких ценных бумаг на рынках США за тот же период с 15.01.2014 по 15.12.2014.

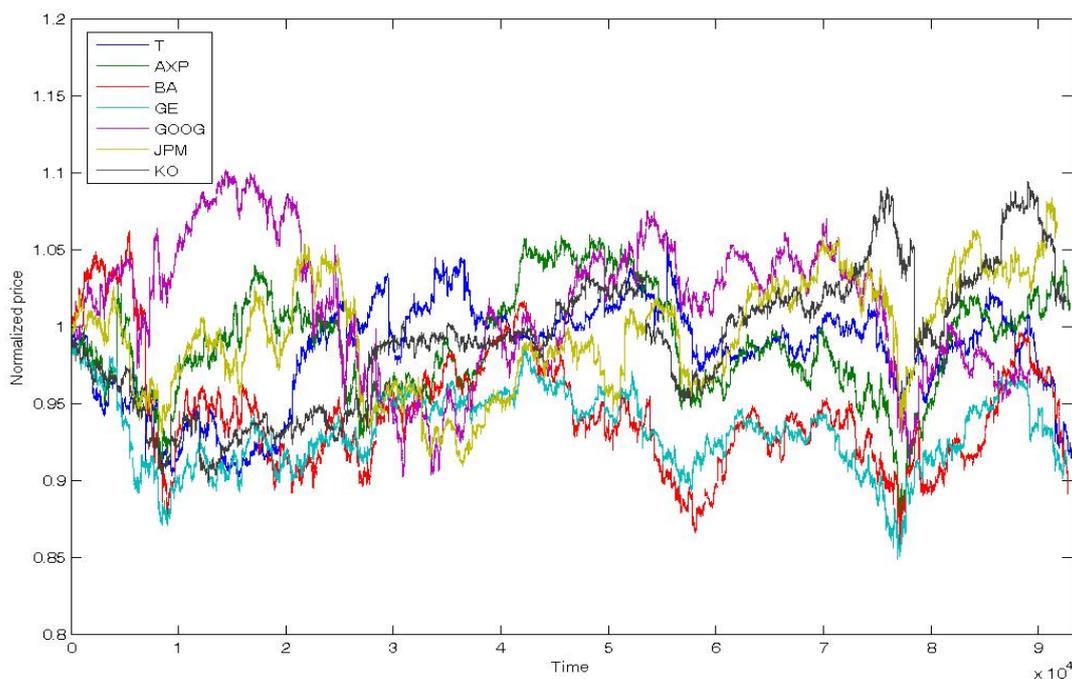


Рис. 2. Графики изменения нормированных цен нескольких акций биржи BATS за период с 15.01.2014 по 15.12.2014.

### 3.2. Комбинированные стратегии

Для снижения риска при одновременной работе с несколькими финансовыми инструментами обычно используют хеджирование, т.е. перераспределение текущего капитала между ними. Виртуальная торговля на группе акций проводилась в соответствии с несколькими возможными стратегиями. Самая простая комбинированная стратегия состоит в том, что акции торгуются независимо, а капитал распределяется между ними равномерно. При этом доходность оценивается по каждому инструменту отдельно, а затем результаты усредняются.

**Алгоритм AdaHedge.**<sup>5</sup> Более сложная стратегия адаптивного смешивания состоит в том, что в процессе торговли капитал перераспределяется между инструментами по некоторому правилу в зависимости от накопленных на предыдущих шагах

<sup>5</sup>Этот алгоритм был предложен в работе [10].

доходов. Согласно этому алгоритму, общая сумма перераспределяется между финансовыми инструментами в зависимости от их доходности в прошлом. В данной версии алгоритма каждые восемь часов на очередном раунде  $t$  игры капитал перераспределяли между  $K$  финансовыми инструментами в соответствии с весами  $w_t^1, \dots, w_t^K$ , где  $w_t^i \geq 0$  и  $\sum_{i=1}^K w_t^i = 1$ . При этом взималась соответствующая комиссия. Начальные веса выбирали равными:  $w_t^i = 1/K$  при  $1 \leq i \leq K$ . В дальнейшем веса изменяли согласно рекурсивному правилу:

$$w_t^i = \frac{w_{t-1}^i e^{\eta_t s_t^i}}{\sum_{j=1}^K w_{t-1}^j e^{\eta_t s_t^j}}$$

при  $1 \leq i \leq K$ , где  $s_t^i = \mathcal{K}_t^i - \mathcal{K}_{t-1}^i$  – изменение капитала  $i$ -ой стратегии,  $\eta_t$  – переменный параметр обучения, который вычисляется следующим образом. Пусть  $h_t = \sum_{i=1}^K w_t^i s_t^i$  и  $m_t^i = -\frac{1}{\eta_t} \ln \sum_{i=1}^K w_t^i e^{\eta_t s_t^i}$ . Пусть  $\delta_t = m_t - h_t$  и  $\Delta_t = \sum_{t'=1}^t \delta_{t'}$ . Полагаем  $\eta_t = \frac{\ln K}{\Delta_{t-1}}$ . Подробный анализ эффективности алгоритма AdaHedge см. в работе [10].

**Алгоритм следования за финансовым инструментом с максимальной прогнозируемой доходностью (Maximum Predicted Profit - MPP).** Эта стратегия при очередном входе в игру выбирает тот финансовый инструмент, для которого прогнозируется наибольший доход.

Предполагаем, что при  $m = 1, \dots, K$  в начале раунда  $i$  известны последовательности  $S_1^m, \dots, S_{i-1}^m$  вещественных чисел и последовательности векторов – сигналов  $x_1^m, \dots, x_{i-1}^m, x_t^m$ . Для каждого  $i$  вычисляем предсказания  $p_i^1, \dots, p_i^K$  будущих значений этих последовательностей и соответствующие рандомизации  $\tilde{p}_1^i, \dots, \tilde{p}_K^i$ .

Определим прогнозируемую локальную доходность инструмента  $m$  на раунде  $t$  игры следующей формулой:

$$D_t^m = \begin{cases} \tilde{p}_i^m (1 - \chi) / \tilde{S}_{i-1}^m (1 + \chi) - 1, & \text{если } \tilde{p}_i^m > \tilde{S}_{i-1}^m, \\ 1 - \tilde{p}_i^m (1 + \chi) / \tilde{S}_{i-1}^m (1 - \chi) & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где  $\chi$  – величина комиссии за транзакцию.

При практической реализации алгоритма MPP на каждом раунде сначала определяли список активных инструментов, которые в данный момент играют на рынке. Среди них выбирали инструмент, имеющий максимальную прогнозируемую доходность. Если полученный максимум оказывался больше некоторого наперед заданного порога, то выполняли вход в рынок и держали эту бумагу до тех пор, пока не выполнялось условие на выход из рынка. Если условие на вход в рынок не выполнено, то переходили к следующей временной точке. После выхода из рынка – снова выбирали очередной инструмент с максимальной прогнозируемой доходностью и т.д.

Данный алгоритм использовался в качестве одной из стратегий, которые участвуют при перераспределении капитала с помощью алгоритма AdaBoost (результаты приведены на рисунках 4,5). Данная стратегия позволила получить доход на рынке акций ММВБ, но оказалась убыточной на рынке ВАТS. Применение алгоритма AdaBoost позволило значительно увеличить доходность усредняющей стратегии в первом случае и защититься от убытков во втором случае.

### 3.3. Результаты экспериментов по виртуальной торговле

Виртуальную торговлю проводили, используя рандомизированную стратегию, как описано в разделе 2. Сравнивая рандомизированную текущую цену и рандомизированный прогноз на каждом шаге  $t$ , принимали решение, пойдет рынок вверх или вниз. В первом случае акцию покупали по цене  $S_t$ , а во втором (при прогнозе вниз) эту акцию продавали.

Результат виртуальной торговли является случайным процессом, так как значения прогноза рандомизированы. Чтобы оценить эффективность алгоритма, проведено 100 сеансов виртуальной торговли. Полученные реализации случайных процессов усредняли и оценивали их среднее значение и стандартное отклонение.

На рисунках 3 и 4 показаны диаграммы перераспределения весов инструментов при использовании метода AdaHedge. Сумма весовых коэффициентов в каждый момент времени равна 1 поэтому вклад каждого инструмента легко оценить по высоте столбика этого цвета на вертикальном участке диаграммы. Как видим, на начальном этапе веса всех инструментов равны между собой, а затем происходит их перераспределение в соответствии с принятым методом хеджирования. Метод ММР включен в список как самостоятельный инструмент. На этой же диаграмме в той же временной шкале приведен график изменения накопленного “дохода”.

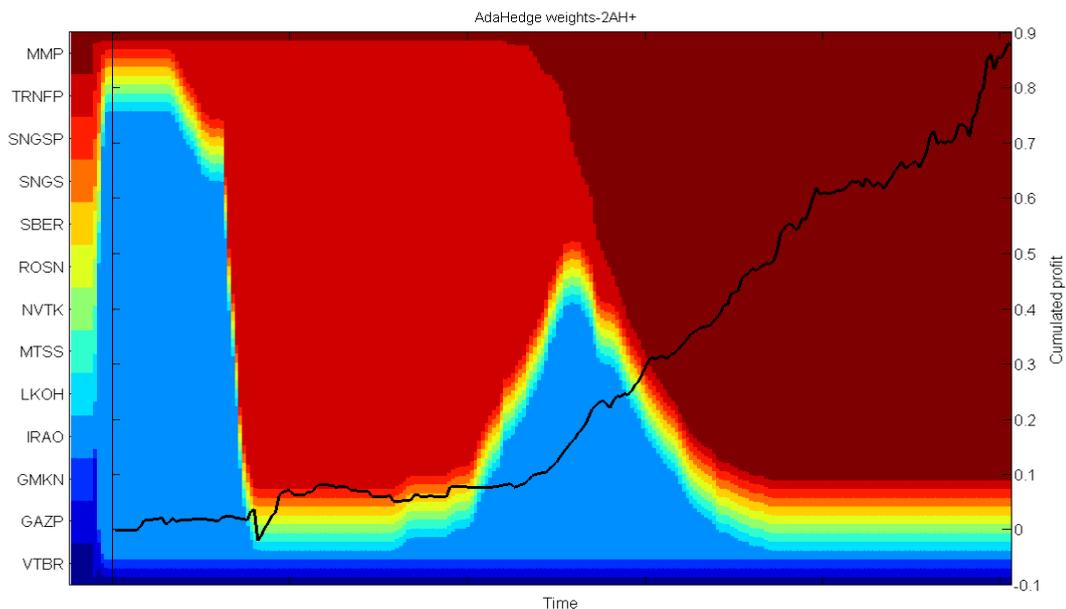


Рис. 3. Усредненная диаграмма перераспределения весов инструментов при рандомизированной виртуальной торговле акциями ММВБ.

На следующем рисунке (Рис. 5) первые 12 кривых отражают динамику изменения парциальных доходностей, т.е. результатов независимой игры с каждым инструментом, а синяя пунктирная кривая результат их тривиального смешивания/усреднения. Для сравнения там же приведены результаты алгоритма следования за финансовым инструментом с максимальной прогнозируемой доходностью МРР, а также результаты нескольких способов смешивания экспертов: AVE – метод тривиального смешива-

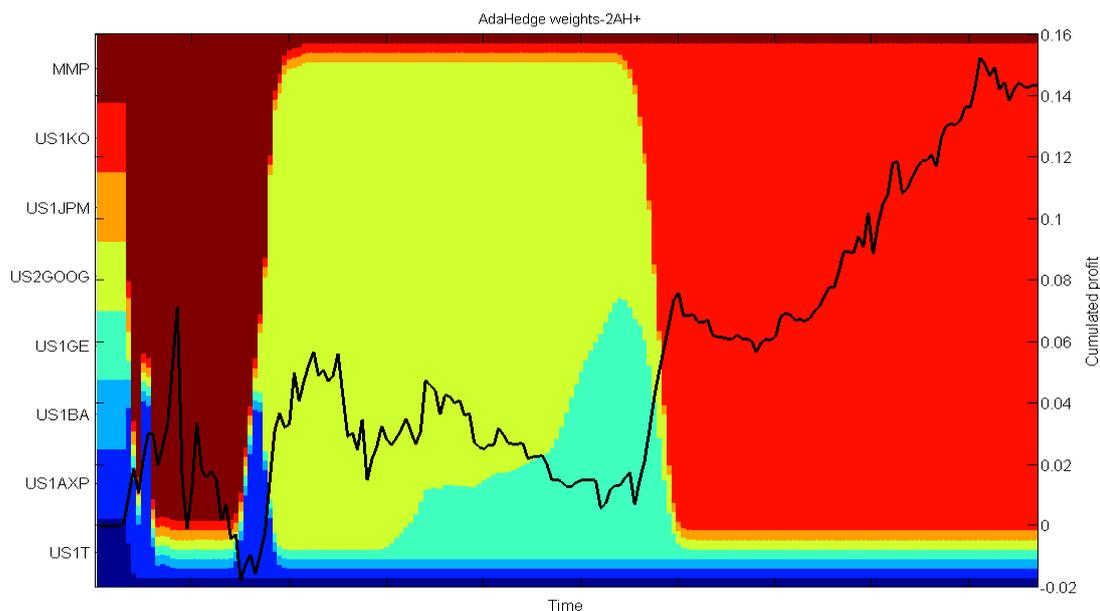


Рис. 4. Усредненная диаграмма перераспределения весов инструментов при рандомизированной виртуальной торговле акциями BATS.

ния без учета стратегии следования за финансовым инструментом с максимальной прогнозируемой доходностью, AVE+ – то же с учетом этой стратегии, AH – результат комбинирования стратегий с помощью алгоритма AdaHedge без учета стратегии следования за финансовым инструментом с максимальной прогнозируемой доходностью, AH+ – то же с учетом этой стратегии).

На Рис. 6 приведены аналогичные результаты для акций США.

Влияние размера комиссии, выплачиваемой за каждую сделку можно оценить по данным таблиц 1-4, где приведены усредненные результаты виртуальной торговли за указанные периоды времени для двух групп ценных бумаг. В столбце ТИКЕР указано условное короткое название ценной бумаги; в последующих столбцах приведены средние значения и стандартные отклонения доходности (в процентах) на конец интервала наблюдения для различных уровней комиссии (величина комиссии, кратная 0,0001 от стоимости сделки указана в скобках в заголовках столбцов). В таблицах 1 и 2, отражающих результаты независимой игры, в последнем столбце приведена для сравнения доходность стратегии 'В & Н'. В таблицах 3 и 4 приведены результаты сравнения нескольких рассмотренных методов комбинированной игры.

При рандомизации прогнозов и цен использовали сетку с размером ячейки в 0,01 от локального значения стандартного отклонения, вычисленного по предыстории в 200 точек.

#### 4. Заключение

Универсальность предлагаемого метода алгоритмической торговли заключается в том, что доход от торговли асимптотически не меньше, чем при любой торговой стратегии, представленной произвольной непрерывной функцией от входной информации. Свойство асимптотической оптимальности сохраняется для любой последо-

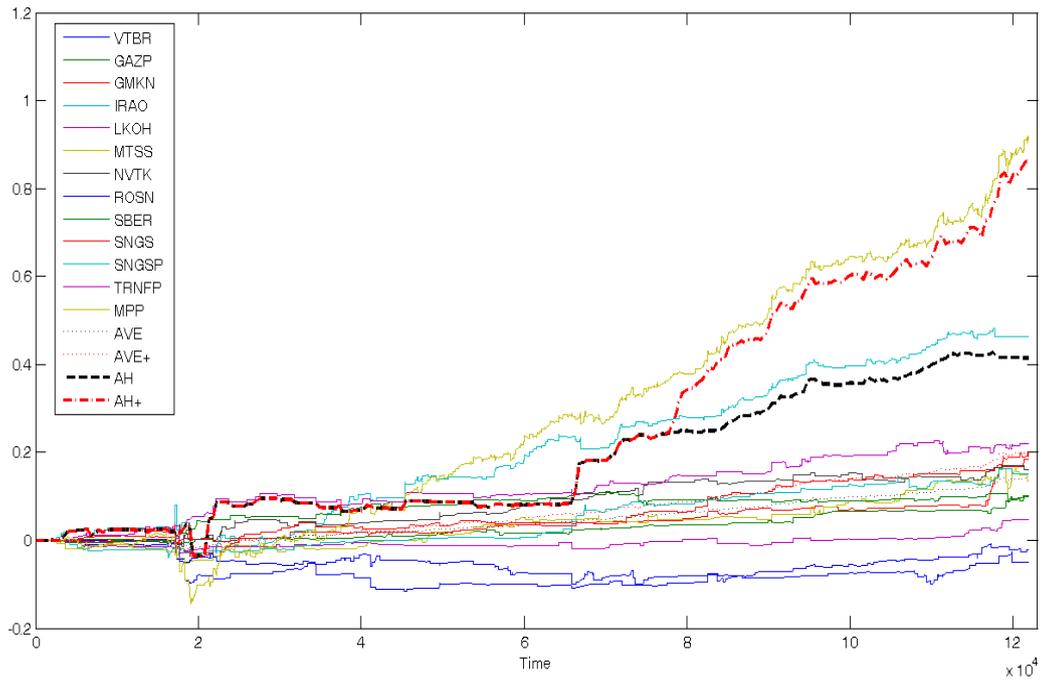


Рис. 5. Результаты независимой виртуальной торговли акциями ММВБ и метода MPP в сравнении с процедурой смешивания AdaHedge (комиссия за транзакцию составляет 0,0001 от цены сделки).

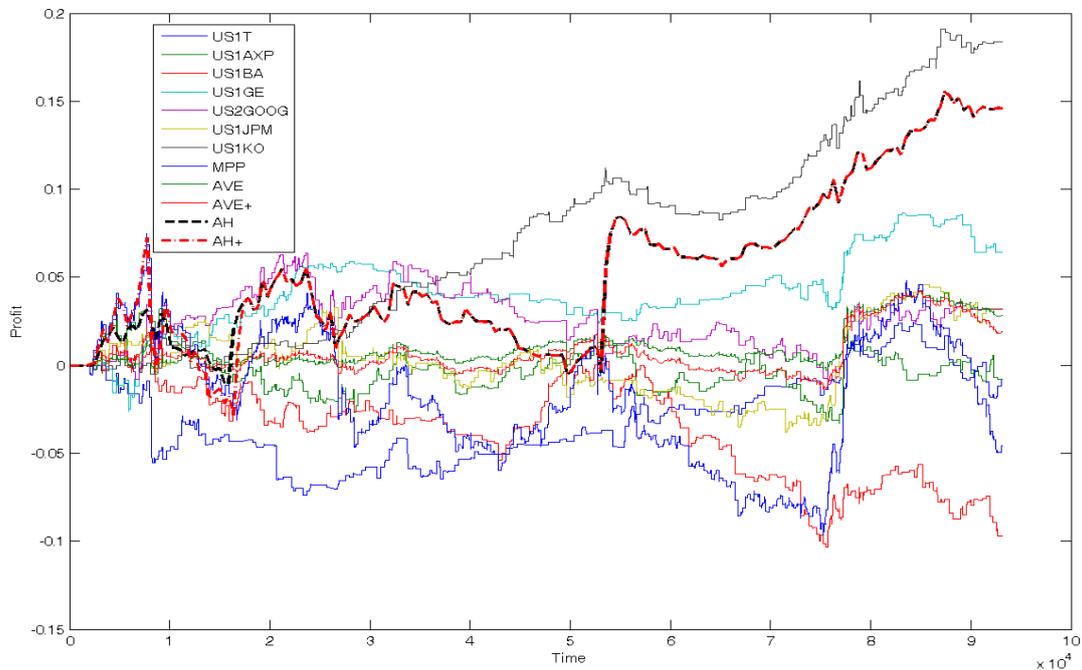


Рис. 6. Результаты независимой виртуальной торговли акциями биржи BATS в сравнении с процедурой смешивания по методу AdaHedge (комиссия за транзакцию составляет 0,0001 от цены сделки).

Таблица 1. Суммарные результаты независимой виртуальной торговли акциями на рынке ММВБ за период с 15.01.2014 до 15.12.2014.

ТИКЕР	MEAN(0)	STD(0)	MEAN(1)	STD(1)	MEAN(2)	STD(2)	'B & H'
VTBR	1,14	2,53	-3,32	2,56	-9,17	2,47	15,12
GAZP	13,96	0,22	10,25	0,20	6,60	0,22	-5,79
GMKN	22,54	0,40	18,45	0,45	14,38	0,38	76,85
IRAO	53,49	3,96	44,35	4,37	36,99	3,63	-0,31
LKOH	10,71	0,51	7,53	0,48	4,29	0,48	13,94
MTSS	18,57	0,49	11,94	0,51	5,52	0,52	-43,99
NVTK	19,04	0,50	15,37	0,47	11,75	0,47	9,45
ROSN	3,44	0,08	-0,18	0,06	-3,76	0,07	-17,18
SBER	15,17	0,12	10,25	0,11	5,32	0,11	39,79
SNGS	24,65	0,11	19,41	0,11	14,15	0,11	-10,57
SNGSP	17,88	0,20	14,05	0,20	10,23	0,19	13,85
TRNFP	26,80	0,38	21,22	0,39	15,60	0,37	35,37

Таблица 2. Суммарные результаты независимой виртуальной торговли несколькими акциями США на рынке ВАТS за период с 15.01.2014 до 15.12.2014.

ТИКЕР	MEAN(0)	STD(0)	MEAN(1)	STD(1)	MEAN(2)	STD(2)	'B & H'
US1T	4,46	0,11	-2,31	0,12	-9,09	0,09	-8,30
US1AXP	6,59	0,27	-1,06	0,25	-8,81	0,22	1,42
US1BA	-1,95	0,21	-9,95	0,24	-18,01	0,23	-10,84
US1GE	13,93	0,14	7,23	0,15	0,52	0,17	-9,01
US2GOOG	8,80	0,39	1,39	0,37	-6,02	0,36	-3,68
US1JPM	10,94	0,12	2,35	0,14	-6,23	0,12	6,72
US1KO	24,25	0,07	18,59	0,07	12,89	0,07	1,71

Таблица 3. Суммарные результаты нескольких вариантов комбинированной виртуальной торговли на рынке ММВБ за период с 15.01.2014 до 15.12.2014.

МЕТОД	MEAN(0)	STD(0)	MEAN(1)	STD(1)	MEAN(2)	STD(2)
MPP	128,05	3,49	92,63	3,90	57,64	4,19
AVE	18,76	0,41	13,97	0,44	9,20	0,41
AVE+	27,17	0,57	20,02	0,64	12,93	0,62
АН	53,07	3,65	39,47	3,87	27,02	3,37
АН+	128,05	3,49	87,67	3,90	30,24	8,59

Таблица 4. Суммарные результаты нескольких вариантов комбинированной виртуальной торговли на рынке ВАТS за период с 15.01.2014 до 15.12.2014.

МЕТОД	MEAN(0)	STD(0)	MEAN(1)	STD(1)	MEAN(2)	STD(2)
MPP	18,21	1,03	-4,71	1,14	-27,83	0,85
AVE	10,10	0,17	2,85	0,17	-4,47	0,16
AVE+	11,11	0,23	1,90	0,25	-7,39	0,20
АН	23,76	0,27	14,35	0,24	4,80	0,25
АН+	20,49	2,39	14,35	0,24	4,80	0,25

вательности цен акций и не зависит от их поведения.

Идея подобной универсальности в финансовой математике была впервые предложена в [3], [4] для построения алгоритма формирования динамического универсального портфеля акций при отсутствии предположения о стохастическом характере изменения цен акций. Аналогичное предположение было использовано в [15].

В основе данной универсальной игровой стратегии лежит рандомизированный алгоритм вычисления хорошо калибруемых предсказаний. Построенные предсказания выдерживают тесты двух видов, т.е. обобщенные тесты на калибруемость и тесты, задаваемые функциями из функционального пространства RKHS. Предсказания выдерживают все тесты обоих видов, что позволяет одновременно использовать калибруемые предсказания для оценки игровых стратегий двух типов – рандомизированной пороговой стратегии и любой стратегии, задаваемой непрерывной функцией. Доказано, что пороговая рандомизированная стратегия оказывается асимптотически более эффективной, чем любая непрерывная стратегия.

Вторая часть работы посвящена оптимальному комбинированию предложенных игровых стратегий. Использование алгоритмического хеджирования позволяет снизить риски от потерь проигрывающих стратегий и получать доход при наличии в группе стратегий хотя бы одной заметно выигрывающей стратегии.

Алгоритмы реализованы в виде компьютерных программ и компьютерной технологии, проведены экспериментальные расчеты на исторических данных.

Результаты расчетов показывают, что универсальный алгоритм позволяет получать доход, превышающий доход стандартных торговых стратегий даже при наличии комиссионных сборов. Причем универсальный алгоритм одновременно получает положительный доход при игре как на повышение, так и на понижение, независимо от характера изменения цены финансового инструмента. Использование комбинированной стратегии на группе финансовых инструментов с помощью алгоритма AdaHedge позволяет снизить риски потерь.

Расчеты показали, насколько не эффективен финансовый рынок в условиях игнорирования транзакционных расходов. При регулярном проведении таких расчетов можно получать полезную информацию для технического анализа финансового рынка. Дополнительный анализ финансовых возможностей алгоритма приведен в работах [7], [14].

## 5. Приложение: Доказательства теорем 1 и 2

*Доказательство* теоремы 1. Предварительно по заданному  $\Delta > 0$  построим рандомизированный алгоритм, прогнозы которого будут калиброваться относительно расширенных правил выбора на последовательности  $S_1, S_2, \dots$  с точностью до  $\Delta$ . Далее применим этот алгоритм в условиях переменной точности округления:  $\Delta \rightarrow 0$ , так что будут выполнены условия теоремы.

Построим алгоритм для вычисления прогнозов такой, чтобы выполнялось неравенство (2) для всех  $D$  из RKHS  $\mathcal{F}$  и для всех  $n$ . Также для любого  $\delta > 0$ , любого  $S \subseteq [0, 1]^2$  и любого  $n$  с вероятностью не менее  $1 - \delta$  будет выполнено

$$\left| \sum_{i=1}^n I_S(\tilde{p}_i, \tilde{z}_i)(S_i - \tilde{p}_i) \right| \leq \leq \Delta n + 2\sqrt{\frac{n(c_{\mathcal{F}}^2 + 1)}{\Delta}} + \sqrt{\frac{n}{2} \ln \frac{2}{\delta}}.$$

Предположим, что детерминированные прогнозы  $p_1, \dots, p_{n-1}$  уже определены (полагаем  $p_1 = 1/2$ ). Вычислим теперь детерминированный прогноз  $p_n$  и случайно округлим его до  $\tilde{p}_n$ .

Разбиение  $V = \{v_0, \dots, v_K\}$  и вероятности случайного округления были определены ранее в разделе 2. Округляем детерминированный прогноз  $p_n$  до  $v_{i-1}$  с вероятностью  $w_{v_{i-1}}(p_n)$  и до  $v_i$  с вероятностью  $w_{v_i}(p_n)$ . Также случайным образом округляем  $z_n = S_{n-1}$  до  $v_{s-1}$  с вероятностью  $w_{v_{s-1}}(z_n)$  и до  $v_s$  с вероятностью  $w_{v_s}(z_n)$ , где  $z_n \in [v_{s-1}, v_s]$ .

Пусть  $W_v(p_n, z_n) = w_{v^1}(p_n)w_{v^2}(z_n)$ , где  $v = (v^1, v^2)$  и  $v^1, v^2 \in V$ , и  $W(p_n, z_n) = (W_v(p_n, z_n) : v \in V^2)$  – вектор, задающий вероятностное распределение на  $V^2 = V \times V$ . Определим соответствующее ядро  $K(p, z, p', z') = (W(p, z) \cdot W(p', z'))$ .

По определению ядро  $R(x, x')$  можно представить в виде скалярного произведения в пространстве признаков:  $R(x, x') = (\Phi(x) \cdot \Phi(x'))$ . Рассмотрим функцию

$$(6) \quad U_n(p) = \sum_{i=1}^{n-1} (K(p, z_n, p_i, z_i) + R(x_n, x_i))(S_i - p_i).$$

Определим начальное значение  $p_1 = 1/2$ . Приведем алгоритм для вычисления детерминированного прогноза  $p_n$ .<sup>6</sup> На шаге  $n$  рассмотрим функцию (6).

Если  $U_n(p) > 0$  для всех  $p \in [0, 1]$ , то определим  $p_n = 1$ ; если  $U_n(p) < 0$  для всех  $p \in [0, 1]$ , то определим  $p_n = 0$ ; в противном случае пусть  $p_n$  есть какой-либо корень уравнения  $U_n(p) = 0$  (такой корень существует по теореме о промежуточном значении).

Пусть прогнозы  $p_1, p_2, \dots$  вычислены с помощью этого алгоритма. По определению прогноза  $p_n$ , для любого  $n$  и исхода  $S_n$  выполнено  $U(p_n)(S_n - p_n) \leq 0$ . Тогда, как

<sup>6</sup>Впервые подобный алгоритм был представлен в [12].

легко видеть, для любого  $N$ :

$$\begin{aligned}
0 &\geq \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^{n-1} (K(p_n, z_n, p_i, z_i) + R(x_n, x_i)) \times \\
&\quad \times (S_i - p_i)(S_n - p_n) = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^N K(p_n, z_n, p_i, z_i)(S_i - p_i)(S_n - p_n) - \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (K(p_n, z_n, p_n, z_n)(S_n - p_n))^2 + \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^N R(x_n, x_i)(S_i - p_i)(S_n - p_n) - \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (R(x_n, x_n)(S_n - p_n))^2 = \\
&= \frac{1}{2} \left\| \sum_{n=1}^N W(p_n, z_n)(S_n - p_n) \right\|^2 - \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \|W(p_n, z_n)\|^2 (S_n - p_n)^2 + \\
&\quad + \frac{1}{2} \left\| \sum_{n=1}^N \Phi(x_n)(S_n - p_n) \right\|_{\mathcal{F}}^2 - \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \|\Phi(x_n)\|_{\mathcal{F}}^2 (S_n - p_n)^2.
\end{aligned}$$

Здесь  $\|\cdot\|$  – эвклидова норма, а  $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$  – норма на  $\mathcal{F}$ .

Так как  $(S_n - p_n)^2 \leq 1$  для всех  $n$  и

$$\begin{aligned}
\|W(p_n, z_n)\|^2 &= \sum_{v \in V^2} (W_v(p_n, z_n))^2 \leq \\
&\leq \sum_{v \in V^2} W_v(p_n, z_n) = 1,
\end{aligned}$$

первая вычитаемая сумма ограничена сверху числом  $N$ .

Так как  $\|\Phi(x_n)\|_{\mathcal{F}} = c_{\mathcal{F}}(x_n)$  и  $c_{\mathcal{F}}(x) \leq c_{\mathcal{F}}$  для всех  $x$ , вторая вычитаемая сумма ограничена сверху величиной  $c_{\mathcal{F}}^2 N$ . В результате получаем:

$$\begin{aligned}
(7) \quad &\left\| \sum_{n=1}^N W(p_n, z_n)(S_n - p_n) \right\| \leq \sqrt{(c_{\mathcal{F}}^2 + 1)N}, \\
&\left\| \sum_{n=1}^N \Phi(x_n)(S_n - p_n) \right\|_{\mathcal{F}} \leq \sqrt{(c_{\mathcal{F}}^2 + 1)N}
\end{aligned}$$

для всех  $N$ . Обозначим:  $\bar{\mu}_n = \sum_{i=1}^n W(p_i, z_i)(S_i - p_i)$ . По (7)  $\|\bar{\mu}_n\| \leq \sqrt{(c_{\mathcal{F}}^2 + 1)n}$  для всех  $n$ .

Пусть  $\bar{\mu}_n = (\mu_n(v) : v \in V^2)$ . По определению для любого  $v$

$$(8) \quad \mu_n(v) = \sum_{i=1}^n W_v(p_i, z_i)(S_i - p_i).$$

Вставляем величину  $I(v)$  в сумму (8), где  $I$  – характеристическая функция произвольного подмножества  $S \subseteq [0, 1]^2$ , суммируем по  $v \in V^2$  и изменяем порядок суммирования. Применяем неравенство Коши–Буняковского для векторов  $\bar{I} = (I(v) : v \in V^2)$ ,  $\bar{\mu}_n = (\mu_n(v) : v \in V^2)$  в евклидовой норме и получим:

$$(9) \quad \begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^n \sum_{v \in V^2} W_v(p_i, z_i) I(v)(S_i - p_i) \right| = \\ & = \left| \sum_{v \in V^2} I(v) \sum_{i=1}^n W_v(p_i, z_i)(S_i - p_i) \right| = \\ & = |(\bar{I} \cdot \bar{\mu}_n)| \leq \|\bar{I}\| \cdot \|\bar{\mu}_n\| \leq \sqrt{|V^2|(c_{\mathcal{F}}^2 + 1)n} \end{aligned}$$

для всех  $n$ , где  $|V^2| = (1/\Delta + 1)^2 \leq 4/\Delta^2$  – число элементов разбиения.

Пусть  $\tilde{p}_i$  – случайная величина, принимающая значения  $v \in V$  с вероятностями  $w_v(p_i)$ . Напомним, что  $\tilde{z}_i$  – случайная величина, принимающая значения  $v \in V$  с вероятностями  $w_v(z_i)$ .

Пусть  $S \subseteq [0, 1]^2$  и  $I$  – характеристическая функция этого множества. Для любого  $i$  математическое ожидание случайной величины  $I(\tilde{p}_i, \tilde{z}_i)(S_i - \tilde{p}_i)$  равно

$$(10) \quad \begin{aligned} & E(I(\tilde{p}_i, \tilde{z}_i)(S_i - \tilde{p}_i)) = \\ & = \sum_{v \in V^2} W_v(p_i, z_i) I(v)(S_i - v^1), \end{aligned}$$

где  $v = (v^1, v^2)$ .

Неравенство Хефдинга–Азумы утверждает, что для любого  $\gamma > 0$

$$(11) \quad Pr \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V_i \right| > \gamma \right\} \leq 2e^{-2n\gamma^2}$$

для всех  $n$ , где  $V_i$  – ограниченные мартингал-разности.

Далее полагаем  $V_i = I(\tilde{p}_i, \tilde{z}_i)(S_i - \tilde{p}_i) - E(I(\tilde{p}_i, \tilde{z}_i)(S_i - \tilde{p}_i))$  и  $\gamma = \sqrt{\frac{1}{2n} \ln \frac{2}{\delta}}$ , где  $\delta > 0$ . Имеем для любого  $\delta > 0$ ,  $S$  и  $n$  с вероятностью  $1 - \delta$

$$(12) \quad \begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^n I(\tilde{p}_i, \tilde{z}_i)(S_i - \tilde{p}_i) - \sum_{i=1}^n E(I(\tilde{p}_i, \tilde{z}_i)(S_i - \tilde{p}_i)) \right| \leq \\ & \leq \sqrt{\frac{n}{2} \ln \frac{2}{\delta}}. \end{aligned}$$

По определению детерминированного прогноза суммы

$$\sum_{v \in V^2} W_v(p_i, z_i) I(v)(S_i - p_i) \text{ и } \sum_{v \in V^2} W_v(p_i, z_i) I(v)(S_i - v^1)$$

различаются не более чем на  $\Delta$  для всех  $i$ , где  $v = (v^1, v^2)$ . Суммируя (10) по  $i = 1, \dots, n$  и используя неравенство (9), получаем

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^n E(I(\tilde{p}_i, \tilde{z}_i)(S_i - \tilde{p}_i)) \right| = \\ & = \left| \sum_{i=1}^n \sum_{v \in V^2} W_v(p_i, z_i) I(v)(S_i - v^1) \right| \leq \\ (13) \quad & \leq \Delta n + 2\sqrt{(c_{\mathcal{F}}^2 + 1)n/\Delta^2} \end{aligned}$$

для всех  $n$ .

По (12) и (13) для любых  $S$  и  $n$  имеем с вероятностью  $1 - \delta$

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^n I(\tilde{p}_i, \tilde{z}_i)(S_i - \tilde{p}_i) \right| \leq \\ (14) \quad & \leq \Delta n + 2\sqrt{(c_{\mathcal{F}}^2 + 1)n/\Delta^2} + \sqrt{\frac{n}{2} \ln \frac{2}{\delta}}. \end{aligned}$$

По неравенству Коши–Буняковского

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n=1}^N D(x_n)(S_n - p_n) \right| = \\ & = \left| \sum_{n=1}^N (S_n - p_n)(D \cdot \Phi(x_n)) \right| \\ & = \left| \left( \sum_{n=1}^N (S_n - p_n)\Phi(x_n) \cdot D \right) \right| \leq \\ & \leq \left\| \sum_{n=1}^N (S_n - p_n)\Phi(x_n) \right\|_{\mathcal{F}} \cdot \|D\|_{\mathcal{F}} \leq \\ & \leq \|D\|_{\mathcal{F}} \sqrt{(c_{\mathcal{F}}^2 + 1)N}. \end{aligned}$$

Выражение  $\Delta n + 2\sqrt{(c_{\mathcal{F}}^2 + 1)n/\Delta^2}$  из оценки (14) принимает свое минимальное значение при  $\Delta = \sqrt{2}(c_{\mathcal{F}}^2 + 1)^{\frac{1}{4}} n^{-\frac{1}{4}}$ .

Для получения оценки (1) рассмотрим последовательность шагов  $n_s = (s + M)^M$ ,  $M = \lceil 2/\epsilon \rceil$ , где  $\lceil r \rceil$  есть наименьшее целое число, большее или равное  $r$ , а также последовательность параметров  $\Delta_1 > \Delta_2 > \dots \rightarrow 0$ , где  $\Delta_s = \sqrt{2}(c_{\mathcal{F}} + 1)^{\frac{1}{4}} n_s^{-\frac{1}{4}}$ . На каждом шаге  $n_s \leq i < n_{s+1}$  конструкции будем округлять числа вышеуказанным способом с точностью до  $\Delta_s$ . Детали этой конструкции можно найти в [11].

Соотношение (3) может быть получено из неравенства (1) с помощью леммы Бореля–Кантелли. Теорема 1 доказана.

*Доказательство* теоремы 2. На каждом шаге  $i$  вычисляем детерминированный прогноз  $p_i$  и его рандомизацию  $\tilde{p}_i$  согласно приведенному выше алгоритму. Пусть также  $\tilde{S}_{i-1}$  – рандомизированная прошлая цена  $S_{i-1}$  финансового инструмента. В теореме 1  $z_i = S_{i-1}$  и  $\tilde{z}_i = \tilde{S}_{i-1}$ .

При данном методе рандомизации имеют место следующие верхние оценки

$$(15) \quad \left| \sum_{i=1}^n I(\tilde{p}_i > \tilde{S}_{i-1})(\tilde{S}_{i-1} - S_{i-1}) \right| \leq \sum_{t=0}^s (n_{t+1} - n_t) \Delta_t = O(n_s^{\frac{3}{4}}),$$

где  $n_s \leq n < n_{s+1}$ .

Пусть  $D(x)$  – произвольная функция из RKHS  $\mathcal{F}$ . Очевидным образом оценка (15) верна, если заменить  $I(\tilde{p}_i > \tilde{S}_{i-1})$  на  $\|D\|_+^{-1} D(\mathbf{x}_i)$ . Для простоты приведем оценки для случая, когда  $D(x) \geq 0$  для всех  $x$  и

$$\tilde{M}_i = \begin{cases} 1, & \text{если } \tilde{p}_i > \tilde{S}_{i-1}, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Далее все соотношения между суммами рассматриваются с точностью до  $o(n)$ . Используем неравенства теоремы 1.

Для произвольного  $\delta > 0$  с вероятностью  $1 - \delta$  имеет место следующая цепь равенств и неравенств:

$$(16) \quad \mathcal{K}_n^M = \sum_{i=1}^n \tilde{M}_i(S_i - S_{i-1}) =$$

$$(17) \quad = \sum_{\tilde{p}_i > \tilde{S}_{i-1}} (S_i - \tilde{p}_i) + \sum_{\tilde{p}_i > \tilde{S}_{i-1}} (\tilde{p}_i - \tilde{S}_{i-1}) + \sum_{\tilde{p}_i > \tilde{S}_{i-1}} (\tilde{S}_{i-1} - S_{i-1}) \geq$$

$$(18) \quad \geq \sum_{\tilde{p}_i > \tilde{S}_{i-1}} (\tilde{p}_i - \tilde{S}_{i-1}) - \sqrt{\frac{n}{2} \ln \frac{2}{\delta}} - o(n) \geq$$

$$\geq \|D\|_+^{-1} \sum_{i=1}^n D(x_i)(\tilde{p}_i - \tilde{S}_{i-1}) - \sqrt{\frac{n}{2} \ln \frac{2}{\delta}} - o(n) =$$

$$= \|D\|_+^{-1} \sum_{i=1}^n D(x_i)(p_i - S_{i-1}) + \|D\|_+^{-1} \sum_{i=1}^n D(x_i)(\tilde{p}_i - p_i) -$$

$$(19) \quad -\|D\|_+^{-1} \sum_{i=1}^n D(x_i)(\tilde{S}_{i-1} - S_{i-1}) - \sqrt{\frac{n}{2} \ln \frac{2}{\delta}} - o(n) \geq$$

$$(20) \quad \geq \|D\|_+^{-1} \sum_{i=1}^n D(x_i)(p_i - S_{i-1}) - \sqrt{\frac{n}{2} \ln \frac{2}{\delta}} - o(n) =$$

$$= \|D\|_+^{-1} \sum_{i=1}^n D(x_i)(S_i - S_{i-1}) -$$

$$(21) \quad -\|D\|_+^{-1} \sum_{i=1}^n D(x_i)(S_i - p_i) - \sqrt{\frac{n}{2} \ln \frac{2}{\delta}} - o(n) \geq$$

$$\geq \|D\|_+^{-1} \sum_{i=1}^n D(x_i)(S_i - S_{i-1}) -$$

$$-\|D\|_+^{-1} \|D\|_{\mathcal{F}} o(n) - \sqrt{\frac{n}{2} \ln \frac{2}{\delta}} =$$

$$= \|D\|_+^{-1} \mathcal{K}_n^D - \|D\|_+^{-1} \|D\|_{\mathcal{F}} o(n) - \sqrt{\frac{n}{2} \ln \frac{2}{\delta}}.$$

При переходе от (17) к (18) были использованы неравенство (1) из теоремы 1 и оценка (15); по этой причине были вычтены величина  $\sqrt{\frac{n}{2} \ln \frac{2}{\delta}}$  и дополнительная величина порядка  $o(n)$ . При переходе от (19) к (20) также была вычтена величина порядка  $o(n)$ . При переходе от (20) к (21) было использовано неравенство (2) из теоремы 1; в результате был вычтен член порядка  $o(n)$ .

Таким образом, для любого  $\delta > 0$  и для любого  $n$  с вероятностью  $1 - \delta$  выполнено

$$(22) \quad \mathcal{K}_n^M \geq \|D\|_+^{-1} \mathcal{K}_n^D - o(n) - \sqrt{\frac{n}{2} \ln \frac{2}{\delta}}.$$

Неравенство (4) будет следовать из (22) и первой леммы Бореля-Кантелли.

Теорема 2 доказана для произвольной неотрицательной функции  $D \in \mathcal{F}$ . Доказательство утверждения для произвольной неположительной функции  $D \in \mathcal{F}$ , а также для функций общего вида аналогично.

Расширим полученные асимптотические оценки для любой непрерывной функции  $D(x)$  с помощью универсального ядра и соответствующего канонического RKHS.

Гильбертово пространство RKHS  $\mathcal{F}$  на  $X$  называется *универсальным*, если  $X$  – компактное метрическое пространство и любая непрерывная функция  $f$  на  $X$  может быть аппроксимирована в метрике  $\|\cdot\|_\infty$  функцией из  $\mathcal{F}$  с произвольной точностью: для любого  $\epsilon > 0$  существует  $D \in \mathcal{F}$  такая, что  $\sup_{x \in X} |f(x) - D(x)| \leq \epsilon$  (см. [13], определение 4).

Будем использовать  $X = [0, 1]$ . Соболевское пространство  $\mathcal{F} = H^1([0, 1])$  является универсальным RKHS (см. [9, 11]).

Существование универсального RKHS на  $[0, 1]$  позволяет получить полную версию теоремы 2, а именно, алгоритм для вычисления детерминированных предсказаний  $p_i$  и метод последовательной рандомизации такие, что соответствующая рандомизированная торговая стратегия  $\tilde{M}_i$  выигрывает на одну единицу финансового инструмента не меньше, чем любая нетривиальная непрерывная стационарная стратегия  $f$ . Точнее неравенство

$$(23) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\mathcal{K}_n^M - \|f\|_+^{-1} \mathcal{K}_n^f) \geq 0$$

выполнено почти всюду относительно распределения вероятностей, порожденного последовательной рандомизацией.

Этот результат непосредственно следует из неравенства (22) и возможности как угодно точно аппроксимировать любую непрерывную функцию  $f$  на  $[0, 1]$  с помощью функции  $D$  из универсального (соболевского) RKHS  $\mathcal{F}$ .

Заметим, что свойство универсальной состоятельности (23) является асимптотическим и ничего не утверждает о скорости сходимости в случае произвольной непрерывной функции  $f$ . Оценка скорости сходимости (22) может быть получена для функций из более специальных пространств RKHS.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dawid A.P.* Calibration-based empirical probability [with discussion] // *Ann. Statist.* 1985. V. 13. P. 1251–1285.
2. *Foster D.P., Vohra R.* Asymptotic calibration // *Biometrika.* 1998. V. 85. P. 379–390.
3. *Cover T.* Universal portfolios // *Math. Finance.* 1991. V. 1. P. 1–29.
4. *Cover T., Ordentlich E.* Universal portfolio with side information // *IEEE Transact. Inform. Theory.* 1996. V. 42. P. 348–363.
5. *Kakade, S.M., Foster, D.P.* Deterministic calibration and Nash equilibrium // *Lecture Notes in Comput. Sci.* Berlin: Springer, 2004. V. 3120. P. 33–48.
6. *Vovk V.* On-line regression competitive with reproducing kernel Hilbert spaces (extended abstract) // *Lecture Notes Comput. Sci.* Berlin: Springer, 2006. V. 3959. P. 452–463.
7. *Вьюгин В.В., Трунов В.Г.* Адаптивное прогнозирование и его применение для технического анализа финансовых инструментов // *Информ. процессы.* 2011. Т. 11, № 1. С. 46-75.
8. *Вьюгин В.В., Трунов В.Г.* Адаптивная универсальная торговая стратегия // *Информ. процессы.* 2013. Т. 13, № 4. С. 237-264.
9. *Scholkopf B., Smola A.* *Learning with Kernels.* MIT Press, Cambridge, MA, 2002.
10. *de Rooij, S., van Erven, T., Grunwald, P.D., Koolen, W.M.* Follow the Leader If You Can, Hedge If You Must // *J. of Machine Learning Research.* 2014. V.15 P.1281–1316.
11. *V'yugin V.V.* Universal Algorithm for Trading in Stock Market Based on the Method of Calibration // *Lecture Notes on Artificial Intelligence (LNAI).* V. 8139. P.53–67.
12. *Vovk V., Takemura A., Shafer G.* Defensive forecasting // *Proc. 10 Int. Workshop Artific. Intelligence Statist.* (ed. by R. G. Cowell and Z. Ghahramani) Cambridge UK: Society for Artificial Intelligence and Statistics, 2005. P. 365–372.

13. *Steinwart I.* On the influence of the kernel on the consistency of support vector machines // J. Machine Learning Res. 2001. V. 2. P. 67-93.
14. *V'yugin V., Trunov V.* Universal algorithmic trading // J. of Investment Strategies. 2012/13. V. 2(1). P. 63–88.
15. *V'yugin V.V.* The Following the Perturbed Leader Algorithm and Its Application for Constructing Game Strategies // J. Communicat. Technology and Electronics. 2015. V. 60(6). P. 647–657.

Вьюгин В.В., *Институт проблем передачи информации РАН им. А.А. Харкевича, заведующий лабораторией, Москва, vyugin@iitp.ru*

Трунов В.Г., *Институт проблем передачи информации РАН им А.А. Харкевича, ведущий научный сотрудник, Москва, trunov@iitp.ru*