V. V. V'yugin, Certain examples of upper semilattices of computable numerations, *Algebra Logika*, 1973, Volume 12, Number 5, 512–529

Алгебра и логика, 12, № 5 (1973), 512-529.

УДК 517.11:518.5

О НЕКОТОРЫХ ПРИМЕРАХ ВЕРХНИХ ПОЛУРЕШЕТОК ВЫЧИСЛИМЫХ НУМЕРАЦИЙ

В.В.ВЬЮГИН

Пусть $\mathfrak{A}$ - некоторый класс рекурсивно-перечислимых (р.п.) множеств. Через $L(\mathfrak{A})$ будем обозначать верхнюю полурешетку вычислимых нумераций класса $\mathfrak{A}$. Элементами $L(\mathfrak{A})$ являются все классы, на которые отношение эквивалентности нумераций разбивает множество всех вычислимых нумераций класса $\mathfrak{A}$. Частичный порядок на $L(\mathfrak{A})$ определен следующим образом: для $\mathcal{U},\mathcal{V}\in L(\mathfrak{A})$ $\mathcal{U}\leq\mathcal{V}$ тогда и только тогда, когда $\alpha\leq\beta$ для некоторых $\alpha\in\mathcal{U}$, $\beta\in\mathcal{V}$. Для $\mathcal{U},\mathcal{V}\in L(\mathfrak{A})$ $\mathcal{U}\cup\mathcal{V}$ будет обозначать наименьшую верхнюю грань $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$. $\mathcal{U}\cup\mathcal{V}$ есть класс всех нумераций $\mathfrak{A}$, эквивалентных $\alpha\oplus\beta$ для некоторых $\alpha\in\mathcal{U}$, $\beta\in\mathcal{V}$ (для всех n $(\alpha\oplus\beta)(2n)=\alpha(n)$, $(\alpha\oplus\beta)(2n+1)=\beta(n)$).

Вычислимая нумерация μ класса $\mathfrak{A}$ называется минимальной, если класс всех нумераций $\mathfrak{A}$, эквивалентных μ, является минимальным элементом $L(\mathfrak{A})$, то есть для всякой вычислимой нумерации ν класса $\mathfrak{A}$ из $\nu\leq\mu$ следует $\nu\equiv\mu$. Начальным сегментом верхней полурешетки $L(\mathfrak{A})$, определенным вычислимой нумерацией α_0 класса $\mathfrak{A}$, называется множество $\{\mathcal{U}\mid\mathcal{U}\in L(\mathfrak{A})\ \&\ \mathcal{U}\leq\mathcal{V}_0\}$, где $\alpha_0\in\mathcal{V}_0$. Класс р.п. множеств называется вычислимым, если он имеет непустую верхнюю полурешетку вычислимых нумераций.

В работе построен класс р.п. множеств $\mathfrak{A}$, который имеет непустую верхнюю полурешетку вычислимых нумераций $L(\mathfrak{A})$, обладающую следующим свойством: для любого $a\in L(\mathfrak{A})$ существуют такие b, $c\in L(\mathfrak{A})$, что $b\nleq c$, $c\nleq b$ и $a=b\cup c$. Из этого следует, что $L(\mathfrak{A})$ не содержит минимальных элементов. Далее, для некоторой бесконечной последовательности достаточно простых классов р.п. множеств $\mathcal{L}_0,\mathcal{L}_1,\ldots$ $\mathcal{L}_n,\ldots$ доказано, что $L(\mathcal{L}_{n+1})$ содержит начальный сегмент, неизоморфный никакому начальному сегменту $L(\mathcal{L}_x)$ при $x \leq n$, вследствие чего верхние полурешетки $L(\mathcal{L}_0), L(\mathcal{L}_1), \dots L(\mathcal{L}_n), \dots$ попарно неизо - морфны.

Вычислимая нумерация β некоторого класса конечных множеств называется строго вычислимой, если функция g, такая, что $g(x)$ есть количество элементов $\beta(x)$, является общерекурсивной.

Класс $\mathfrak{A}$ р.п. множеств называется эффективно дискретным (фи - нитно разделяющимся в [3]), если существует класс конечных множеств $\mathcal{L}$, имеющий строго вычислимую нумерацию, такой, что

а) для всякого $A \in \mathfrak{A}$ существует такое $p \in \mathcal{L}$, что $p \leq A$,

б) для всяких $A, B \in \mathfrak{A}$ и $p \in \mathcal{L}$ из $p \subseteq A \cap B$ следует $A = B$.

Любые две вычислимые нумерации эффективно дискретного класса эквивалентны [3]. В работе построен вычислимый не эффективно дискрет - ный класс р.п. множеств, любые две вычислимые нумерации которого эк - вивалентны, то есть верхняя полурешетка вычислимых нумераций этого класса является одноэлементной. Вопрос о существовании такого класса был поставлен в [4].

Пусть функции c, ℓ, r осуществляют канторовскую нумерацию всех упорядоченных пар натуральных чисел ([2], стр. 63–65) - $\ell(c(x, y)) = x$, $r(c(x, y)) = y$. Для всех x $\ell(x) \leq x$, $r(x) \leq x$. Буквой N обозначим множество всех натуральных чисел, ϕ - пустое множество.

π - двойная вычислимая нумерация класса всех р.п. множеств, такая, что для произвольной вычислимой нумерации β произвольного класса р.п. множеств найдется такое i, что для всех x $\beta(x) = \pi(i, x)$ [1]. Пусть для всех x $\pi_0(x) = \pi(j_0, x)$, где j_0 - такое, что π_0 является нумерацией класса всех р.п. множеств. $\pi^n(x, y)$ - конечная или пустая часть множества $\pi(x, y)$, построенная за n шагов вычисления множества $\pi(x, y)$ тем способом, который задает вычислимую нумерацию π, $\pi^0(x, y) = \phi$.

Нумерация α некоторого класса называется позитивной, если множество $\{c(x, y) | \alpha(x) = \alpha(y)\}$ рекурсивно-перечислимо. Позитивная нумерация является минимальной [3].

ТЕОРЕМА 1. Существует вычислимый класс р. п. множеств, для любой вычислимой нумерации β которого сущест -

вуют вычислимые нумерации γ_1 и γ_2 этого класса, такие, что $\gamma_1 \not\leq \gamma_2$, $\gamma_2 \not\leq \gamma_1$ и $\beta \equiv \gamma_1 \oplus \gamma_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Укажем конструкцию искомого класса р.п. множеств и его вычислимой нумерации α. Одновременно мы будем строить вычислимую нумерацию δ некоторого класса р.п. множеств, функции h_1, h_2, f и р.п. множество L. Для каждого x на шаге n будут определены конечные или пустые части $\alpha^n(x)$, $\delta^n(x)$ множеств $\alpha(x)$, $\delta(x)$ соответственно, и значения $h_1(x,n)$, $h_2(x,n)$. На шаге n также определяется конечная или пустая часть L^n множества L.

ШАГ 0. Для всех x определим $h_1(x,0)=3x$, $h_2(x,0)=3x+1$, $\alpha^0(x)=\{h_1(x,0),\ h_2(x,0)\}$, $\delta^0(x)=\varnothing$, $L^0=\varnothing$.

ШАГ $n\ (n\geq 1)$. Пусть $\ell(n)=m$. Рассматриваем один из четырех случаев, исключающих друг друга.

СЛУЧАЙ 1. На предыдущих шагах значение $f(m)$ еще не было определено и существует такое $y\leq n$, что $h_1(m,n-1)\in\pi^n(\ell(m),y)$.

В таком случае определим $f(m)=y_0$, где y_0 – наименьшее такое y. Переходим к (*).

СЛУЧАЙ 2. На одном из предыдущих шагов значение $f(m)$ было определено, и $f(m)\in\pi_0^n(z(m))$.

В таком случае определим $L^n=L^{n-1}\cup\{h_1(m,n-1)\}$. Переходим к (*).

СЛУЧАЙ 3. На одном из предыдущих шагов значение $f(m)$ было определено, $f(m)\notin\pi_0^n(z(m))$,

$$h_2(m,n-1)\in\pi^n(\ell(m),f(m)),\quad \pi^n(\ell(m),f(m))\cap L^{n-1}=\varnothing.$$

В таком случае определим $h_1(m,n)=h_2(m,n-1)$, $h_2(m,n)=Z$, где Z – наименьшее число вида $3k+2$, не принадлежащее ни одному из множеств $\alpha^{n-1}(x)$ (это число находится эффективно), $\alpha^n(m)=\alpha^{n-1}(m)\cup\delta^{n-1}(\ell(m))\cup\{Z\}$, $\delta^n(\ell(m))=\delta^{n-1}(\ell(m))\cup\{h_1(m,n-1)\}$. Переходим к (*).

СЛУЧАЙ 4. Случаи 1–3 места не имеют.

В этом случае переходим к (*).

(*) Для всех x, если $\alpha^n(x)$ еще не определено, то определим $\alpha^n(x)=\alpha^{n-1}(x)$, если $\delta^n(x)$ ещё не определено, то определим $\delta^n(x)=\delta^{n-1}(x)$, при $j=1,2$, если значение $h_j(x,n)$ ещё не определено, то определим $h_j(x,n)=h_j(x,n-1)$. Если L^n еще не определено, то определим $L^n=L^{n-1}$. Переходим к шагу $n+1$. На этом описание конструкции закончено.

Для всех x $\alpha(x)=\bigcup_{n\geq 0}\alpha^n(x)$, $\delta(x)=\bigcup_{n\geq 0}\delta^n(x)$. $L=\bigcup_{n\geq 0}L^n$. Пусть $\mathfrak{A}=\{\alpha(x)\mid x\geq 0\}$. Из эффективности построения следует, что α – вычислимая нумерация класса $\mathfrak{A}$.

Следующие утверждения 1) – 3) указывают некоторые элементарные свойства конструкции, которые будут использоваться в дальнейшем.

1) Для всех x, n $\alpha^n(x)-\delta^n(\ell(x))=\{h_1(x,n), h_2(x,n)\}$, для любого $y\neq x$ $h_1(x,n), h_2(x,n)\notin\alpha^n(y)$. Если значение $f(x)$ было определено на шаге, не превосходящем n, то $h_1(x,n)\in\pi^n(\ell(x), f(x))$.

Это утверждение легко доказать индукцией по n.

2) Пусть x, n_0 такие, что при всех n, таких, что $n\geq n_0$ и $\ell(n)=x$, случай 3 места не имеет на шаге n. Тогда при всех $n\geq n_0$ $h_1(x,n)=h_1(x,n_0)\in\alpha(x)$, $h_2(x,n)=h_2(x,n_0)\in\alpha(x)$, а для всякого $y\neq x$ будет $h_1(x,n_0)\notin\alpha(y)$.

Пусть имеется бесконечное множество шагов n, таких, что $\ell(n)=x$, на каждом из которых имеет место случай 3. Тогда $\alpha(x)=\delta\ell(x)$.

Это утверждение легко следует из 1) и из конструкции.

И, наконец, непосредственно следует из конструкции следующее утверждение.

3) Для всех x, y, n, если $h_1(x,n)\in\alpha(y)$, то $\ell(y)=\ell(x)$.

ЛЕММА 1. *Пусть $L\cap\alpha(x)\neq\varnothing$. Тогда существует такое n, что $\ell(n)=x$ и случай 2 имеет место на шаге n.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $y\in L\cap\alpha(x)$. Тогда по конструкции множества L существуют такие m, n, что $y=h_1(m,n)=h_1(m,n-1)\in L^n$, $\ell(n)=m$, и случай 2 имеет место на шаге n. В этом случае значение $f(m)$ было определено на меньшем шаге и $f(m)\in\pi_0^n(z(m))$. Так как при всех $t\geq n$ будет $f(m)\in\pi_0^t(z(m))$, на всех шагах t, таких, что $t\geq n$ и $\ell(t)=m$, случай 3 места не имеет. Тогда из 2) следует, что при всех $z\neq m$ будет $y\notin\alpha(z)$. Отсюда следует, что $m=x$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. *Пусть i такое, что $\mathfrak{A}=\{\pi(i,y)\mid y\geq 0\}$. Тогда a) для каждого k $f(c(i,k))$ опре-*

делено;

б) если k такое, что $L \cap \alpha C(i,k) = \emptyset$, то имеется бесконечное множество шагов n, таких, что $\ell(n) = C(i,k)$, на каждом из которых имеет место случай 3, и $\alpha C(i,k) = \delta(i)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть k произвольное. Допустим, что $f(C(i,k))$ не определено. Тогда случай 3 не может иметь места ни на одном шаге n, таком, что $\ell(n) = C(i,k)$. Тогда, по 2), при всех $n \geqslant 0$ будет $h_1(C(i,k),n) = h_1(C(i,k),0)$. Так как $\mathfrak{A} = \{\pi(i,y) \mid y \geqslant 0\}$, существует такое y_0, что $\pi(i,y_0) = \alpha C(i,k)$. По построению, $h_1(C(i,k),0) \in \alpha C(i,k)$. Тогда существует такое n, что $n > 0$, $\ell(n) = C(i,k)$, $h_1(C(i,k),n-1) = h_1(C(i,k),0) \in \pi^n(i,y_0)$ и $y_0 \leqslant n$. На шаге n имеет место случай 1 и значение $f(C(i,k))$ будет определено. Противоречие. Значит, для всех k $f(C(i,k))$ определено.

Пусть k такое, что $L \cap \alpha C(i,k) = \emptyset$. На некотором шаге n_0 значение $f(C(i,k))$ будет определено. Допустим, что существует такое n_1, что $n_1 > n_0$ и на всех шагах $n \geqslant n_1$, $\ell(n) = C(i,k)$, случай 3 места не имеет. Тогда из 2) следует, что при всех $n \geqslant n_1$ будет $h_2(C(i,k),n) = h_2(C(i,k),n_1)$, при всех $t \neq C(i,k)$ будет $h_1(C(i,k),n_1) \notin \alpha(t)$. Так как значение $f(C(i,k))$ было определено на шаге, меньшем, чем n_1, то из 1) следует, что $h_1(C(i,k),n_1) \in \pi(i,f(C(i,k)))$. $\pi(i,f(C(i,k))) \in \mathfrak{A}$, поэтому $\pi(i,f(C(i,k))) = \alpha C(i,k)$. По построению, $h_2(C(i,k),n_1) \in \alpha C(i,k)$. Тогда существует такое n, что $n > n_1$, $\ell(n) = C(i,k)$ и $h_2(C(i,k),n-1) =$

$$= h_2(C(i,k),n_1) \in \pi^n(i,f(C(i,k))).$$

По выбору k $L \cap \alpha C(i,k) = \emptyset$. Значит, $L^{n-1} \cap \pi^n(i,f(C(i,k))) = \emptyset$. $f(C(i,k)) \notin \pi_0^n(k)$, так как в противном случае на шаге n имел бы место случай 2 и тогда было бы $L \cap \alpha C(i,k) \neq \emptyset$. Поэтому на шаге n имеет место случай 3. Так как $n > n_1$, получаем противоречие с предположением. Отсюда немедленно следует первая часть утверждения б). Применяя 2), получаем, что $\alpha C(i,k) = \delta(i)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пусть β – вычислимая нумерация класса $\mathfrak{A}$, i такое, что $\beta(x) = \pi(i,x)$ для всех x. Тогда $\delta(i) \in \mathfrak{A}$ и $\beta^{-1}(\delta(i))$ не р.п.

множество.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть s_0 такое, что $\pi_0(s_0)=\varnothing$. Тогда случай 2 не может иметь места ни на одном шаге n, таком, что $\ell(n)=c(i,s_0)$. Тогда из леммы 1 следует, что $L\cap\alpha c(i,s_0)=\varnothing$, и, по лемме 2, будет $\alpha c(i,s_0)=\delta(i)$. Значит, $\delta(i)\in\mathfrak{A}$ и $L\cap\delta(i)=\varnothing$.

Допустим, что $\beta^{-1}(\delta(i))$ – р.п. множество. Тогда существует такое k, что $\beta^{-1}(\delta(i))=\pi_0(k)$. Предположим, что $L\cap\alpha c(i,k)\neq\varnothing$. Тогда, по лемме 1, на некотором шаге n, где $\ell(n)=c(i,k)$, имеет место случай 2. Так как в этом случае значение $f(c(i,k))$ было определено на меньшем шаге, из 1) следует, что $h_1(c(i,k),n)\in\pi(i,f(c(i,k)))$. По случаю 2, $f(c(i,k))\in\pi_0^n(k)$. Так как при $t\geq n$ $f(c(i,k))\in\pi_0^t(k)$, на всех шагах $t\geq n$, $\ell(t)=c(i,k)$, случай 3 места не имеет, и из 2) следует, что при всех $x\neq c(i,k)$ будет $h_1(c(i,k),n)\notin\alpha(x)$. $\pi(i,f(c(i,k)))\in\mathfrak{A}$, значит, $\pi(i,f(c(i,k)))=\alpha c(i,k)$. Так как $L\cap\delta(i)=\varnothing$, будет $\alpha c(i,k)\neq\delta(i)$. Следовательно, $\beta f(c(i,k))\neq\delta(i)$ и $f(c(i,k))\in\pi_0(k)$. Получаем противоречие с $\beta^{-1}(\delta(i))=\pi_0(k)$. Значит, нам остается рассмотреть предположение $L\cap\alpha c(i,k)=\varnothing$.

По а) леммы 2, значение $f(c(i,k))$ будет определено на некотором шаге n_0. $f(c(i,k))\notin\pi_0(k)$, так как в противном случае на некотором шаге $n>n_0$, $\ell(n)=c(i,k)$, будет $f(c(i,k))\in\pi_0^n(k)$, то есть будет выполнен случай 2, и тогда $L\cap\alpha c(i,k)\neq\varnothing$, что противоречит предположению. $\pi(i,f(c(i,k)))\in\mathfrak{A}$, значит, $\pi(i,f(c(i,k)))=\alpha(x)$ для некоторого x. Из 1) следует, что $h_1(c(i,k),n_0)\in\pi(i,f(c(i,k)))$. Тогда, применяя 3), получаем, что $\ell(x)=i$. Допустим, что $L\cap\alpha(x)\neq\varnothing$. Тогда для всех достаточно больших n будет $L^{n-1}\cap\pi^n(i,f(c(i,k)))\neq$ $\neq\varnothing$, вследствие чего на всех достаточно больших шагах n, таких, что $\ell(n)=c(i,k)$, случай 3 не будет иметь места. Так как $L\cap\alpha c(i,k)=\varnothing$, получаем противоречие с утверждением б) леммы 2. Значит, $L\cap\alpha(x)=\varnothing$. Тогда, по б) леммы 2, будет $\alpha(x)=\delta(i)$. Итак, получаем, что $\beta f(c(i,k))=\delta(i)$ и $f(c(i,k))\notin\pi_0(k)$. Вместе с $\beta^{-1}(\delta(i))=\pi_0(k)$ это приводит к противоречию. Следовательно, исходное предположение неверно, то есть $\beta^{-1}(\delta(i))$ не р.п. множество. Лемма доказана.

Докажем, что класс $\mathfrak{A}$ удовлетворяет условию теоремы. Пусть β – произвольная вычислимая нумерация класса $\mathfrak{A}$, i_1, i_2 такие, что $i_1\neq i_2$ и при $k=1,2$ $\beta(x)=\pi(i_k,x)$ для всех x.

Нумерация π , определенная в [1], обладает тем свойством, что для всякой вычислимой нумерации β существует бесконечно много таких i , что $\beta(x)=\pi(i,x)$ для всех x .)

По лемме 3, $\delta(i_1), \delta(i_2) \in \mathfrak{A}$. Пусть k равно 1 или 2 . Если x такое, что для каждого j при $\ell(j) \neq i_k$, $3j \notin \alpha(x)$, то, так как $3x \in \alpha(x)$, будет $\ell(x)=i_k$. Если к тому же $L \cap \alpha(x) = \emptyset$, то, по утверждению б) леммы 2, будет $\alpha(x)=\delta(i_k)$. Как замечено в доказательстве леммы 3, $\delta(i_k) \cap L = \emptyset$ и $\delta(i_k)=\alpha c(i_k, s_0)$ для некоторого s_0 . Тогда, из 3), следует, что для всякого j при $\ell(j) \neq i_k$ будет $3j \notin \delta(i_k)$. Из всего этого следует, что $\mathfrak{A}-\{\delta(i_k)\} = \{X \mid X \in \mathfrak{A} \ \& \ (L \cap X \neq \emptyset \vee \exists j(\ell(j) \neq i_k \ \& \ 3j \in X))\}$.

$\beta^{-1}(\mathfrak{A}-\{\delta(i_k)\})=\{x \mid L \cap \beta(x) \neq \emptyset \vee \exists j(\ell(j)\neq i_k \ \& \ 3j \in \beta(x))\}$ - непустое р.п. множество. Пусть общерекурсивная функция f_k перечисляет это множество. Определим общерекурсивную функцию g_k и вычислимую нумерацию γ_k класса $\mathfrak{A}$ следующим образом:

$$g_k(x)=\begin{cases} \alpha_k & \text{, при } x=0, \\ f_k(x \dot{-} 1) & \text{, при } x \geqslant 1 \text{, где } \beta(\alpha_k)=\delta(i_k), \end{cases}$$

$\gamma_k(x)=\beta g_k(x)$ для всех x . По лемме 3, $\beta^{-1}(\delta(i_k))$ не р.п. множество. $\gamma_k^{-1}(\delta(i_k))$ - одноэлементное множество. Следовательно, $\beta \not\leq \gamma_k$.

Из определения $\gamma_1 \oplus \gamma_2 \leq \beta$. Докажем, что $\beta \leq \gamma_1 \oplus \gamma_2$. Пусть $h(x)=\mu i(x=f_1(i) \vee x=f_2(i))$ (определение μ -оператора см. в [2]). Так как $\exists c(i_1,s_0) \in \delta(i_1)-\delta(i_2)$, $\delta(i_1)\neq\delta(i_2)$, тогда $\beta^{-1}(\mathfrak{A}-\{\delta(i_1)\}) \cup \beta^{-1}(\mathfrak{A}-\{\delta(i_2)\})=N$. Значит, функция h является общерекурсивной. Нетрудно проверить, что функция

$$t(x)=\begin{cases} 2h(x)+2 & \text{, если } x=f_1(h(x)), \\ 2h(x)+3 & \text{, если } x\neq f_1(h(x)) \end{cases}$$

сводит β к $\gamma_1 \oplus \gamma_2$. Следовательно, $\beta \equiv \gamma_1 \oplus \gamma_2$. Так как $\beta \not\leq \gamma_1$ и $\beta \not\leq \gamma_2$, то $\gamma_1 \not\leq \gamma_2$ и $\gamma_2 \not\leq \gamma_1$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. С у щ е с т в у е т в ы ч и с л и м ы й к л а с с р. п. м н о ж е с т в, к о т о р ы й н е и м е е т м и н и м а л ь н ы х н у м е р а ц и й.

ЗАМЕЧАНИЕ. На самом деле по всякой вычислимой нумерации β построенного класса $\mathfrak{A}$ можно эффективно построить вычислимую нумерацию γ этого класса, такую, что $\gamma \leq \beta$ и $\beta \not\leq \gamma$. Пусть h - частично рекурсивная функция, такая, что для всякого i $h(i,x)$ определено для всех x и множество значений функции $\lambda x h(i,x)$ есть

$$\{y \mid L \cap \pi(i,y) \neq \phi \vee \exists j(\ell(j) \neq i \;\&\; 3j \in \pi(i,y))\},$$

если последнее множество не пусто, и $h(i,x)$ не определено для всех x в противном случае.

$$g(i,x)=\begin{cases} f(c(i,s_0)) & \text{, если } x=0 \text{ и } f(c(i,s_0)) \text{ определено,} \\ h(i,x\dot{-}1) & \text{, если } x>0 \text{ и } h(i,x\dot{-}1) \text{ определено,} \\ \text{не определено – в противном случае,} \end{cases}$$

где f – функция из конструкции, s_0 такое, что $\pi_0(s_0)=\phi$. Существует общерекурсивная функция s, такая, что для всех x, i, для которых $g(i,x)$ определено, будет $\pi(i,g(i,x))=\pi(s(i),x)$. Нетрудно теперь проверить, что если β – нумерация $\mathfrak{A}$ и $\beta(x)=\pi(i,x)$ для всех x, то нумерация γ, определенная $\gamma(x)=\pi(s(i),x)$ для всех x, является нумерацией класса $\mathfrak{A}$ и для неё $\gamma \leq \beta$ и $\beta \not\leq \gamma$. *)

Для всякого $n \geqslant 2$ существуют максимальные множества $M_1^n, M_2^n, \ldots, M_n^n$, такие, что при $i \neq j$ $M_i^n \cup M_j^n = N$. Эти множества можно построить следующим образом. Пусть M – максимальное множество. Для $j=1,2,\ldots n$ пусть $E_j^n=\{nx+j-1 \mid x \geqslant 0\}$. $\bigcup_{j=1}^{n} E_j^n = N$. Легко видеть, что все множества E_j^n, кроме одного, содержатся, за исключением, быть может, конечного множества элементов, в M. Пусть этим множеством является E_1^n. Пусть $\varphi_1^n(x)=x$ для всех x и при $j=2,3,\ldots n$

$$\varphi_j^n(x) = \begin{cases} x, & x \notin E_1^n \cup E_j^n, \\ x+j-1, & x \in E_1^n, \\ x-j+1, & x \in E_j^n. \end{cases}$$

$M_j' = \varphi_j^n(M)$, $j=1,2,\ldots n$, M_j' – максимальное множество. Нетрудно проверить, что при $i \neq j$ $N-(M_i' \cup M_j')$ конечно или пусто. Легко теперь видеть, что, добавляя, если это необходимо, к множествам M_i' конечные множества элементов, получаем максимальные множества $M_1^n, M_2^n, \ldots M_n^n$, удовлетворяющие условию: при $i \neq j$ $M_i^n \cup M_j^n = N$.

*) Этот факт сообщил автору С.А.Бадаев.

Пусть при $n \geq 2$ $A_n = M_1^n \cap M_2^n \cap \ldots \cap M_n^n$, $\Gamma_1^n = M_2^n \cap M_3^n \cap \ldots \cap M_n^n, \ldots, \Gamma_i^n = M_1^n \cap \ldots \cap M_{i-1}^n \cap M_{i+1}^n \cap \ldots \cap M_n^n, \ldots, \Gamma_n^n = M_1^n \cap \ldots \cap M_{n-1}^n$.

Нетрудно проверить, что при $i \neq j$ $(\Gamma_i^n - A_n) \cap (\Gamma_j^n - A_n) = \emptyset$, $\bigcup_{i=1}^{n} \Gamma_i^n = N$, при $i = 1, 2, \ldots n$ $\Gamma_i^n - A_n$ сжато, так как совпадает с дополнением к M_i^n. При $n \geq 2$ определим класс $\mathfrak{A}_n = \{A_n \cup \{x\} \mid x \notin A_n\}$.

ТЕОРЕМА 2. При $m \geq 2$ верхняя полурешетка $L(\mathfrak{A}_2 m)$ содержит начальный сегмент, неизоморфный никакому начальному сегменту верхней полурешетки $L(\mathfrak{A}_x)$ при $2 \leq x \leq m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $i = 1, 2, \ldots n$ определим классы $\mathcal{T}_i^n = \{A_n \cup \{x\} \mid x \in \Gamma_i^n - A_n\}$ и их вычислимые нумерации

$$\alpha_i(x) = \begin{cases} A_n \cup \{a_i^n\}, f_i^n(x) \in A_n \\ A_n \cup \{f_i^n(x)\}, f_i^n(x) \notin A_n \end{cases} \qquad \alpha'_i(x) = \begin{cases} A_n \cup \{b_i^n\}, f_i^n(x) \in A_n, \\ A_n \cup \{f_i^n(x)\}, f_i^n(x) \notin A_n, \end{cases}$$

где f_i^n – общерекурсивная функция, такая, что f_i^n перечисляет Γ_i^n и при $x \neq y$ $f_i^n(x) \neq f_i^n(y)$, $a_i^n \neq b_i^n$, $a_i^n, b_i^n \in \Gamma_i^n - A_n$. Ясно, что

$\bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{T}_j^n = \mathfrak{A}_n$ и при $i \neq j$ $\mathcal{T}_i^n \cap \mathcal{T}_j^n = \emptyset$. $\alpha_i^{-1}(A_n \cup \{a_i^n\}) = \{x \mid f_i^n(x) \in A_n \cup \{a_i^n\}\}$ не рекурсивно, так как в противном случае его дополнение $\mathcal{D} = \{x \mid f_i^n(x) \in \Gamma_i^n - (A_n \cup \{a_i^n\})\}$ – р.п. множество, что влечет рекурсивную перечислимость $f_i^n(\mathcal{D}) = \Gamma_i^n - (A_n \cup \{a_i^n\})$, которое сжато. Аналогично $\alpha_i'^{-1}(A_n \cup \{b_i^n\})$ не рекурсивно. Все остальные множества в α_i имеют по одному номеру. То же самое верно для α'_i. Нумерации α_i, α'_i являются позитивными, $\alpha_i \not\equiv \alpha'_i$ – из свойств номерных множеств. Нумерация $\delta_1 \oplus \delta_2 \oplus \ldots \oplus \delta_n$, где $\delta_i \in \{\alpha_i, \alpha'_i\}$, $i = 1, 2, \ldots n$, является нумерацией всего класса $\mathfrak{A}_n$. Она является позитивной, как прямая сумма позитивных нумераций непересекающихся классов, следовательно, она минимальная. Всего существует 2^n таких нумераций. Разобьем их на пары вида $\gamma = \delta_1 \oplus \delta_2 \oplus \ldots \oplus \delta_n$ и $\gamma' = \delta'_1 \oplus \delta'_2 \oplus \ldots \oplus \delta'_n$, где

$$\delta_i' = \begin{cases} \alpha_i, & \text{если } \delta_i = \alpha_i', \\ \alpha_i', & \text{если } \delta_i = \alpha_i, \quad i = 1,2,\ldots n. \end{cases}$$

Пусть $\gamma_1, \gamma_1', \gamma_2, \gamma_2', \ldots \gamma_{2^{n-1}}, \gamma_{2^{n-1}}'$ – все такие пары, $\gamma_1 = \alpha_1 \oplus \alpha_2 \oplus \ldots \oplus \alpha_n$. Тогда $\gamma_1 \oplus \gamma_1' \equiv \gamma_2 \oplus \gamma_2' \equiv \ldots \gamma_{2^{n-1}} \oplus \gamma_{2^{n-1}}' \equiv \equiv \alpha_1 \oplus \alpha_1' \oplus \alpha_2 \oplus \alpha_2' \oplus \ldots \oplus \alpha_n \oplus \alpha_n'$. Из свойств номерных множеств нумераций α_i и α_i' следует, что все нумерации $\gamma_1, \gamma_1', \ldots$ $\ldots, \gamma_{2^{n-1}}, \gamma_{2^{n-1}}'$ попарно несравнимы.

Пусть теперь $n = 2^m$, $m \geq 2$. Докажем, что существуют m пар $\gamma_{i_1}, \gamma_{i_1}', \gamma_{i_2}, \gamma_{i_2}', \ldots, \gamma_{i_m}, \gamma_{i_m}'$, такие, что для всякой нумерации $\nu = \delta_1 \oplus \delta_2 \oplus \ldots \oplus \delta_m$, где $\delta_k \in \{\gamma_{i_k}, \gamma_{i_k}'\}$, $k = 1,2,\ldots m$, будет $\gamma_1 \not\leq \nu$. Пусть $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_{2^m}$ – все последовательности, состоящие из 0 и 1 длины m. Определим для $\ell = 1,2,\ldots,m$, $k = 1,2,\ldots,2^m$

$$\varepsilon_\ell^k = \begin{cases} \alpha_k', & \text{если на } \ell \text{ месте в } \sigma_k \text{ стоит } 0, \\ \alpha_k, & \text{если на } \ell \text{ месте в } \sigma_k \text{ стоит } 1, \end{cases}$$

$$\varepsilon_\ell = \varepsilon_\ell^1 \oplus \varepsilon_\ell^2 \oplus \ldots \oplus \varepsilon_\ell^{2^m},$$

$$\varepsilon_\ell'^k = \begin{cases} \alpha_k, & \text{если на } \ell \text{ месте в } \sigma_k \text{ стоит } 0, \\ \alpha_k', & \text{если на } \ell \text{ месте в } \sigma_k \text{ стоит } 1, \end{cases}$$

$$\varepsilon_\ell' = \varepsilon_\ell'^1 \oplus \varepsilon_\ell'^2 \oplus \ldots \oplus \varepsilon_\ell'^{2^m}.$$

Ясно, что пара нумераций $\varepsilon_\ell, \varepsilon_\ell'$ является одной из пар γ_i, γ_i', $i = 1,2,\ldots 2^{n-1}$. Пусть $\nu = \delta_1 \oplus \delta_2 \oplus \ldots \oplus \delta_m$, где $\delta_k \in \{\varepsilon_k, \varepsilon_k'\}$, $k = 1,2,\ldots m$. Пусть σ_{j_0} – такая последовательность, что на k-месте у неё стоит 0, если $\delta_k = \varepsilon_k$, и 1, если $\delta_k = \varepsilon_k'$. Тогда при $\ell = 1,2,\ldots,m$, если $\delta_\ell = \varepsilon_\ell$, будет $\varepsilon_\ell^{j_0} = \alpha_{j_0}'$, если $\delta_\ell = \varepsilon_\ell'$, будет $\varepsilon_\ell'^{j_0} = \alpha_{j_0}'$. Значит, $\nu \equiv \alpha_{j_0}' \oplus \beta$, где β – нумерация класса $\mathfrak{A}_n - \mathcal{T}_{j_0}^n$. Так как $\gamma_1 = \alpha_1 \oplus \ldots \oplus \alpha_{j_0} \oplus \ldots \alpha_n$, из $\gamma_1 \leq \nu$ следует $\alpha_{j_0} \leq \leq \alpha_{j_0}'$, что невозможно. Значит, $\gamma_1 \not\leq \nu$.

Допустим, что в $L(\mathfrak{A}_x)$, $2 \leq x \leq m$, имеется начальный сегмент, изоморфный начальному сегменту верхней полурешетки $L(\mathfrak{A}_n)$, определенному нумерацией $\alpha_1 \oplus \alpha_1' \oplus \alpha_2 \oplus \alpha_2' \oplus \ldots \oplus \alpha_n \oplus \alpha_n'$. Тогда существуют попарно несравнимые вычислимые нумерации класса $\mathfrak{A}_x$ $\beta_1, \beta_1', \beta_2, \beta_2', \ldots \beta_m, \beta_m', \mu$, такие, что μ – минимальная нумерация, $\beta_1 \oplus \beta_1' \equiv \beta_2 \oplus \beta_2' \equiv \ldots \equiv \beta_m \oplus \beta_m'$, $\mu \leq \beta_1 \oplus \beta_1'$, и для произвольных $\delta_i \in \{\beta_i, \beta_i'\}$, $i = 1,2,\ldots m$, будет $\mu \not\leq \delta_1 \oplus \delta_2 \oplus \ldots$

$\ldots \oplus \delta_m$. Соответствующий начальный сегмент в $L(\mathfrak{A}_x)$ определяется нумерацией $\beta_1 \oplus \beta_1'$.

Пусть $\mu(x) = (\beta_1 \oplus \beta_1')f(x)$ для всех x. Для того, чтобы не усложнять доказательства разбором случаев, будем считать, что оба множества $\{x \mid f(x)$ - чётно$\}$ и $\{x \mid f(x)$ - нечётно$\}$ непустые. Чтобы добиться этого, вместо f рассмотрим другую сводящую функцию g, определенную следующим образом: $g(0) = 2\alpha_0$, где $\beta_1(\alpha_0) = \mu(0)$, $g(1) = 2\alpha_1 + 1$, где $\beta_1'(\alpha_1) = \mu(1)$, и $g(x) = f(x)$ при $x \geq 2$. То же самое будем предполагать во всех аналогичных случаях в дальнейшем. Легко видеть, что существуют вычислимые нумерации μ_1 семейства $\{\mu(x) \mid g(x)$ - чётно$\}$ и μ_2 семейства $\{\mu(x) \mid g(x)$ - нечётно$\}$, такие, что $\mu \equiv \mu_1 \oplus \mu_2$ и $\mu_1 \leq \beta_1$, $\mu_2 \leq \beta_1'$. Из $\mu \leq \beta_2 \oplus \beta_2'$ следует, что $\mu_1 \leq \beta_2 \oplus \beta_2'$ и $\mu_2 \leq \beta_2 \oplus \beta_2'$. Аналогичным образом получим, что существуют вычислимые нумерации непустых подклассов $\mathfrak{A}_x$ μ_{11}, μ_{12}, μ_{21}, μ_{22}, такие, что $\mu_1 \equiv \mu_{11} \oplus \mu_{12}$, $\mu_2 \equiv \mu_{21} \oplus \mu_{22}$ и $\mu_{11}, \mu_{21} \leq \beta_2$, $\mu_{12}, \mu_{22} \leq \beta_2'$. Из предыдущего следует, что $\mu_{11}, \mu_{12} \leq \beta_1$, $\mu_{21}, \mu_{22} \leq \beta_1'$. Кроме этого, $\mu \equiv \mu_{11} \oplus \mu_{12} \oplus \oplus \mu_{21} \oplus \mu_{22}$. Продолжая рассуждения для $i = 3, 4, \ldots, m$, получаем, что существуют вычислимые нумерации $\mu_1', \mu_2', \ldots \mu_{2^m}'$ непустых подклассов $\mathfrak{A}_x$, такие, что $\mu \equiv \mu_1' \oplus \mu_2' \oplus \ldots \oplus \mu_{2^m}'$ и для всякой пары β_i, β_i', $i = 1, 2, \ldots m$, каждая из нумераций $\mu_1', \mu_2', \ldots \mu_{2^m}'$ сводится к β_i или к β_i'. Пусть $\mathcal{A}_i = \{\mu_i'(x) \mid x \geq 0\}$, $i = 1, 2, \ldots 2^m$. Для $i = 1, 2, \ldots x$ $\bigcup\{X \mid X \in \mathcal{T}_i^x\} = \Gamma_i^x$, $\Gamma_i^x - A_x$ сжато, поэтому при $k = 1, 2, \ldots 2^m$ $\mathcal{A}_k$ не может разделять $\mathcal{T}_i^x$ на два бесконечных подкласса (так как в противном случае р.п. множество $\bigcup_{2^m}\{X \mid X \in \mathcal{A}_k\}$ разделяло бы $\Gamma_i^x - A_x$ на два бесконечных подмножества). $\bigcup_{k=1}^{2^m} \mathcal{A}_k = \mathfrak{A}_x$. Отсюда следует, что для всякого $k = 1, 2, \ldots, x$ найдется такое i_k, что $\mathcal{T}_k^x$ содержится, за исключением, быть может, конечного множества элементов в $\mathcal{A}_{i_k}$. $\bigcup_{i=1}^{x} \mathcal{T}_i^x = \mathfrak{A}_x$, поэтому $\mu_{i_1}' \oplus \mu_{i_2}' \oplus \ldots \oplus \mu_{i_x}'$ является нумерацией всего $\mathfrak{A}_x$, за исключением, быть может, конечного множества элементов. Если таких элементов не существует, положим $\mu_{i_1}'' = \mu_{i_1}'$. Пусть такие элементы существуют и ими являются $B_0, B_1, \ldots, B_{t-1}$. Определим $\mu_{i_1}''(i) = B_i$ при $i = 0, 1, \ldots, t-1$, $\mu_{i_1}''(i) = \mu_{i_1}'(i \dot{-} t)$ при $i \geq t$. Тогда $\mu_{i_1}'' \oplus \mu_{i_2}' \oplus \ldots \oplus \mu_{i_x}'$ является нумерацией всего $\mathfrak{A}_x$, легко видеть, что она сводится к μ и для всякой пары β_k, β_k', $k = 1, 2, \ldots m$, каждая из нумераций $\mu_{i_1}'', \mu_{i_2}', \ldots \mu_{i_x}'$ сводится к β_k

или к β'_k. Так как μ – минимальная нумерация, $\mu \equiv \mu''_{i_1} \oplus \mu'_{i_2} \oplus \ldots$ $\ldots \oplus \mu'_{i_x}$. Пусть $\mu''_{i_1} \leq \delta_1$, где $\delta_1 \in \{\beta_1, \beta'_1\}$, и при $k = 2,3,\ldots x$ пусть $\mu'_{i_k} \leq \delta_k$, где $\delta_k \in \{\beta_k, \beta'_k\}$. Тогда $\mu \leq \delta_1 \oplus \delta_2 \oplus \ldots \oplus \delta_x$, $x \leq m$. Отсюда легко получаем противоречие с предположением. Значит, исходное предположение не верно. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Существует бесконечная последовательность вычислимых классов р.п. множеств $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n, \ldots$, такая, что при $i \neq j$ верхние полурешетки $L(\mathcal{L}_i)$ и $L(\mathcal{L}_j)$ неизоморфны.

Такой последовательностью является

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{Q}_2,\quad \mathcal{L}_1 = \mathcal{Q}_2^{2},\quad \ldots\ \mathcal{L}_n = \mathcal{Q}_2^{2^{\cdot^{\cdot^{2^n}}}}, \ldots .$$

Автору стало известно, что ранее Ю.Л.Ершов и И.А.Лавров получили аналогичное следствие для классов р.п. множеств, у которых начальные сегменты в верхних полурешетках вычислимых нумераций имеют одинаковое строение.

ТЕОРЕМА 3. Существует вычислимый не эффективно дискретный класс конечных множеств, все вычислимые нумерации которого эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть γ – строго вычислимая нумерация класса всех конечных множеств. Укажем конструкцию искомого класса, его вычислимой нумерации α и вспомогательной функции f. Через $\alpha^n(x)$ будем обозначать множество чисел (конечное или пустое), перечисленных в $\alpha(x)$ за n шагов конструкции. На шаге n число называется неиспользованным, если оно нечётно и на предыдущих шагах не было ещё перечислено ни в одно из множеств $\alpha(x)$. Мы будем использовать понятия правого и левого последователя. В ходе конструкции некоторые числа могут быть сделаны зависимыми от некоторых пар.

ШАГ 0. 0 делаем левым последователем 0. Число 0 засылаем в $\alpha(0)$. Переходим к следующему шагу.

Индукционное предположение. При $n \geq 1$ после того как были выполнены все инструкции шага $n-1$, каждое число, меньшее n, имеет хотя бы одного левого последователя и может иметь не более одного правого последователя, причём, если оно не имеет правого последователя, то левый последователь – единственный.

ШАГ $n(n\geq 1)$. Всегда имеет место один из четырех случаев, исключающих друг друга. Пусть $n=3k+t$, где $0\leq t\leq 2$.

СЛУЧАЙ 1. $n=3k$, число $\ell(k)$ не имеет ещё правого последователя, и существует такое $x\in\pi_0^n(\ell(k))$, что $\gamma(x)\subseteq\alpha^{n-1}(x_0)$, где x_0 – левый последователь $\ell(k)$ (если $\ell(k)$ не имеет правого последователя, то, по предположению индукции, $\ell(k)$ имеет единственного левого последователя, так как $\ell(k)<n$).

В этом случае делаем следующее. Наименьшее число z, которое не является ещё последователем, делаем правым последователем $\ell(k)$. Пусть y_1 и y_2 – наименьшие два неравных неиспользованных числа. y_1 засылаем в $\alpha(x_0)$. y_2 и $2\ell(k)$ засылаем в $\alpha(z)$. Если существует хотя бы одна пара $\langle i,j\rangle$, такая, что значение $f(i,j)$ было определено на одном из предыдущих шагов и $x_0=f(i,j)$, то делаем $\ell(k)$ зависимым от каждой такой пары. Переходим к $(*)$.

СЛУЧАЙ 2. $n=3k+1$, значение $f(\ell\ell(k),r\ell(k))$ ещё не было определено на предыдущих шагах и существует число z, которое является правым или левым последователем некоторого числа и для которого $\alpha^{n-1}(z)=\pi^n(\ell\ell(k),r\ell(k))$.

В этом случае определим $f(\ell\ell(k),r\ell(k))=z_0$, где z_0 – наименьшее такое z. Переходим к $(*)$.

СЛУЧАЙ 3. $n=3k+2$, число $\ell(k)$ имеет правого последователя и существует хотя бы одна пара $\langle i,j\rangle$, от которой зависит $\ell(k)$ и для которой $\alpha^{n-1}(z_0)=\pi^n(i,j)$, где z_0 – правый последователь $\ell(k)$.

В этом случае делаем следующее. Число $\ell(k)$ делаем независимым от каждой такой пары. Освобождаем z_0. Для каждого x, левого последователя $\ell(k)$, все элементы $\alpha^{n-1}(x)$ засылаем в $\alpha(z_0)$, все элементы $\alpha^{n-1}(z_0)$ засылаем в $\alpha(x)$. z_0 делаем левым последователем $\ell(k)$. Наименьшее число t, которое не является ещё последователем, делаем правым последователем $\ell(k)$. Наименьшее неиспользованное число и число $2\ell(k)$ засылаем в $\alpha(t)$. Переходим к $(*)$.

СЛУЧАЙ 4. Случаи 1–3 не имеют места. В этом случае переходим к $(*)$.

$(*)$ Наименьшее число y, которое не является ещё последователем, делаем левым последователем n. Число $2n$ засылаем в $\alpha(y)$. Переходим к шагу $n+1$.

На этом описание конструкции закончено. Легко проверить, что индукционное предположение выполнено.

Пусть $\mathfrak{A} = \{\alpha(x) \mid x \geqslant 0\}$. Из эффективности построения следует, что α - вычислимая нvмерация класса $\mathfrak{A}$, функция f - частично рекурсивная.

Число x называется постоянным левым (правым) последователем m, если на некотором шаге x было сделано левым (правым) последователем m и в дальнейшем оно не освобождается.

1) Всякое число является постоянным левым или постоянным правым последователем некоторого числа. Всякое число получает левого последователя и может иметь не более чем одного постоянного правого последователя.

Легко видеть, что всякое число становится последователем на некотором шаге. Число, являющееся левым последователем, освобождаться не может. Если на некотором шаге число, бывшее правым последователем, освобождается, то на том же шаге оно становится левым последователем. Отсюда следует первая часть утверждения 1). Вторая часть этого утверждения непосредственно следует из конструкции.

2) Если x и y - оба постоянные левые последователи одного числа, то $\alpha(x) = \alpha(y)$.

Это утверждение легко следует из конструкции в случае 3.

3) Рассмотрим конструкцию сразу после того, как были выполнены все инструкции шага n. Пусть число m имеет левого последователя x. Тогда если m не имеет правого последователя, то $\alpha^n(x) = \{2m\}$. Если m имеет правого последователя, скажем y, то $\alpha^n(x)$ и $\alpha^n(y)$ имеют хотя бы по одному нечетному элементу каждое и $\alpha^n(x) \cap \alpha^n(y) = \{2m\}$. Если x, y - последователи различных чисел, то $\alpha^n(x) \cap \alpha^n(y) = \emptyset$.

Это утверждение легко доказать индукцией по n.

4) Пусть x, y - постоянные левый и правый последователи m. Тогда $\alpha(x) \cap \alpha(y) = \{2m\}$ и $\alpha(x) \neq \alpha(y)$. Если x и y - какие-либо постоянные последователи различных чисел, то $\alpha(x) \cap \alpha(y) = \emptyset$.

Это утверждение легко следует из 3).

5) Всякое нечётное число может быть элементом не более чем одного множества из $\mathfrak{A}$.

Из 1), 2) и 4) следует, что пересечение любых двух неравных множеств из $\mathfrak{A}$ либо пусто, либо состоит из одного чётного числа.

6) Пусть x - постоянный последователь m. Тогда $2m \in \alpha(x)$, а при $y \neq m$ $2y \notin \alpha(x)$.

Это утверждение легко следует из конструкции.

7) Нумерация α является позитивной.

$\alpha(x) = \alpha(y) \iff (x = y) \vee$ (на некотором шаге x и y - оба левые последователи одного числа).

ЛЕММА 4. Для каждого x множество $\alpha(x)$ конечно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть на некотором шаге n_0 число x становится постоянным левым (постоянным правым) последователем m. $2m \in \alpha(x)$, значит, $\alpha(x) \neq \phi$. Если x - постоянный правый последователь m, то на шагах, больших n_0, $\alpha(x)$ не будет получать новых элементов. Пусть на шаге n_0 x становится постоянным левым последователем m. Если на шаге $n > n_0$ $\alpha(x)$ получает новые элементы, то $n = 3k$ или $n = 3k+2$, $\ell(k) = m$, и имеет место случай 1 или 3. Если на некотором шаге число m теряет правого последователя, то на том же шаге получает нового. Поэтому случай 1 может иметь место на не более чем одном шаге $n = 3k$, $\ell(k) = m$. Если на шаге $n = 3k+2$, $\ell(k) = m$, имеет место случай 3, то в начале этого шага должна существовать хотя бы одна пара, от которой зависит m, а на шаге n число m будет сделано независимым по крайней мере от одной из таких пар. Число m может быть сделано зависимым от некоторых пар только по случаю 1 на шаге $n = 3k$, $\ell(k) = m$. Как доказано, может существовать не более чем один такой шаг. На этом шаге имеется не более чем конечное множество пар, от которых m может быть сделано зависимым. Из этого следует, что имеется не более чем конечное множество шагов n, таких, что $n = 3k+2$ и $\ell(k) = m$, на каждом из которых имеет место случай 3. Значит, $\alpha(x)$ конечно. Лемма доказана.

ЛЕММА 5. Класс $\mathfrak{A}$ не эффективно дискретный.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное. Тогда для некоторого m классы $\{\gamma(x) \mid x \in \pi_0(m)\}$ и $\mathfrak{A}$ удовлетворяют условиям а) и б) определения эффективно дискретного класса. На некотором шаге n_0 $(n_0 = m)$ число m впервые получит левого последователя, обозначим его x_0. Из условия а) определения эффективно дискретного класса следует, что существует такое $y \in \pi_0(m)$, что $\gamma(y) \subseteq \alpha(x_0)$. Тогда найдется такое n, что $n > n_0, n = 3k$, $\ell(k) = m$, $y \in \pi_0^n(m)$ и $\gamma(y) \subseteq \alpha^{n-1}(x_0)$. Тогда если m не имеет ещё правого последователя, то на шаге n имеет место случай 1, по которому m получит правого последователя. Значит, на некотором шаге $n_1 > n_0$ будет иметь место случай 1, по которому m получит в первый раз правого последователя. В этом случае для некоторого $x \in \pi_0(m)$ будет $\gamma(x) \subseteq \alpha^{n_1-1}(x_0)$. Из 3) следует, что $\alpha^{n_1-1}(x_0) = \{2m\}$. Значит, $\gamma(x) \subseteq \{2m\}$. Если m теряет правого последователя на шаге n, то $n = 3k+2$, $\ell(k) = m$, на этом шаге имеет место случай 3, при этом m получает нового правого последователя. Как замечено в доказательстве леммы 4, имеется не более чем конечное множество таких шагов. Поэтому m получает постоянного правого последователя, обозначим его z_0. Из 4) следует, что $\alpha(x_0) \neq \alpha(z_0)$ и $\gamma(x) \subseteq \{2m\} = \alpha(x_0) \cap \alpha(z_0)$. Получаем противоречие с условием 6) определения эффективно дискретного класса. Следовательно, класс $\mathfrak{A}$ не эффективно дискретный. Лемма доказана.

ЛЕММА 6. *Для каждой вычислимой нумерации β класса $\mathfrak{A}$ существует такое m, что при всех x $f(m,x)$ определено и $\beta(x) = \alpha f(m,x)$, то есть $\beta \leq \alpha$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть β – произвольная вычислимая нумерация $\mathfrak{A}$. Существует такое m, что при всех x $\beta(x) = \pi(m,x)$.

Пусть x – произвольное натуральное число. Так как $\pi(m,x) \in \mathfrak{A}$, существует такое z, что $\pi(m,x) = \alpha(z)$. Так как множество $\alpha(z)$ конечно, для всех достаточно больших n будет $\alpha^{n-1}(z) = \pi^n(m,x)$. Для всех достаточно больших n в начале шага n число z будет последователем. Из этого легко получаем, что существует такой шаг $n_0 = 3k+2$, $\ell(k) = c(m,x)$, на котором будет иметь место случай 2, по которому значение $f(m,x)$ будет определено. По случаю 2, по окончании шага $n-1$ число $f(m,x)$ является правым или левым последователем некоторого y. Пусть число y имело по окончании шага n_0-1 правого последователя. Тогда из 3) следует, что $\alpha^{n_0-1}(f(m,x))$ содержит нечётный элемент. В случае 2 $\alpha^{n_0-1}(f(m,x)) = \pi^{n_0}(m,x)$. По 5), нечётное число может быть элементом не более чем одного множества из $\mathfrak{A}$. Поэтому $\alpha f(m,x) = \pi(m,x) = \beta(x)$.

Пусть число y не имело по окончании шага n_0-1 правого последователя. Тогда в начале шага n_0 число $f(m,x)$ является левым последователем y и в дальнейшем не перемещается. Из 3) следует, что $\alpha^{n_0-1}(f(m,x)) = \{2y\}$. Значит, $2y \in \pi(m,x)$, $\pi(m,x) \in \mathfrak{A}$, значит, $\pi(m,x)=\alpha(i)$ для некоторого i. По 1), число i является левым или правым постоянным последователем некоторого числа. Так как $2y\in\alpha(i)$, из 6) следует, что i – постоянный (правый или левый) последователь y. Если i – постоянный левый последователь y, то из 2) следует, что $\alpha f(m,x)=\alpha(i)$. Тогда

$$\alpha f(m,x)=\pi(m,x)=\beta(x).$$

Докажем, что число i не может быть постоянным правым последователем y. Допустим противное. Тогда на некотором шаге $n_1>n_0$ число y впервые получает правого последователя, по случаю 1. На этом шаге число y будет сделано зависимым от пары $\langle m,x\rangle$. Существует такое $n>n_1$, что $n=3k+2$, $l(k)=y$, $\alpha^{n-1}(i)=\pi^n(m,x)$ и в начале шага n число i является правым последователем y и в дальнейшем не освобождается. Тогда если в начале этого шага y зависит от $\langle m,x\rangle$, то, по случаю 3, число i будет освобождено, что противоречит предположению. Значит, на некотором шаге $n_2>n_1$ имеет место случай 3, по которому y будет сделано независимым от $\langle m,x\rangle$. Число z_0 из случая 3 было правым последователем y по окончании шага n_2-1. Поэтому, по 3), $\alpha^{n_2-1}(z_0)$ содержит нечётный элемент. $\alpha^{n_2-1}(z_0)=\pi^{n_0}(m,x)$. Из 5) следует, что $\alpha(z_0)=\pi(m,x)=\alpha(i)$. По конструкции число z_0 будет постоянным левым последователем y. Так как по предположению, i – постоянный правый последователь y, получаем противоречие с 4). Значит, i не может быть постоянным правым последователем y. Следовательно, для всех x $f(m,x)$ определено и $\beta(x)=\alpha f(m,x)$. Лемма доказана.

По 7), нумерация α является позитивной и, следовательно, минимальной. Из этого замечания и леммы 6 следует, что все вычислимые нумерации класса $\mathfrak{A}$ эквивалентны α. Теорема доказана.

Автор благодарен С.А.Бадаеву за ценные замечания.

Литература

1. Ю.Л.ЕРШОВ, Теория нумераций, Новосибирск, 1969.

2. А.И.МАЛЬЦЕВ, Алгоритмы и рекурсивные функции, Наука, 1965.

3. А.И.МАЛЬЦЕВ, Позитивные и негативные нумерации, ДАН, 160, № 2 (1965), 278–280.

4. А.Б.ХУТОРЕЦКИЙ, О мощности верхней полурешетки вычислимых

нумераций, Алгебра и логика, 10, № 5 (1971), 561–569.

Поступило 26 июня 1973 г.