В. В. Вьюгин, Об инвариантных по Тьюрингу множествах, *Докл. АН СССР*, 1976, том 229, номер 4, 790–793

Доклады Академии наук СССР
1976. Том 229, № 4

УДК 517.11 *МАТЕМАТИКА*

В. В. ВЬЮГИН

ОБ ИНВАРИАНТНЫХ ПО ТЬЮРИНГУ МНОЖЕСТВАХ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 10 III 1976)

Все неопределенные и используемые в этой статье понятия имеются в ([1], [2]). Ω — множество всех бесконечных двоичных последовательностей. Символами $\leqslant_T$, $\equiv_T$ обозначаем сводимость и эквивалентность по Тьюрингу. Пусть $\mathscr{D}$ — класс всех множеств $A\subseteq\Omega$, которые T-инвариантны (т. е. из $\omega\in A$ и $\omega'\equiv_T\omega$ следует, что $\omega'\in A$) и измеримы по универсальной перечислимой (полувычислимой) мере ([2]) (что эквивалентно тому, что для любого эффективного оператора G множество $G^{-1}(A)$ измеримо по Лебегу). Множество $A\in\mathscr{D}$ называется пренебрежимым, если универсальная перечислимая мера A равна 0 (т. е. мера Лебега множества $\{\omega\in\Omega\,|\,\exists\alpha(\alpha\in A\;\&\;\alpha\leqslant_T\omega)\}=\bigcup G^{-1}(A)$, где объединение берется по всем эффективным операторам, равна 0) *. На $\mathscr{D}$ вводим предпорядок: «$A\leqslant B\leftrightarrow$ множество $A\setminus B$ пренебрежимо» и отношение эквивалентности: «$A\equiv B\leftrightarrow A\leqslant B\& B\leqslant A$». Факторизацией $\mathscr{D}$ по этому отношению эквивалентности получим булевскую алгебру L, операции которой индуцируются теоретико-множественными пересечением и объединением. Идея рассматривать такую структуру принадлежит Л. А. Левину. Он также отметил существование в L двух атомов: a-элемента, определенного всеми вычислимыми последовательностями, и b-элемента, определенного всеми случайными по Колмогорову — Мартин-Лёфу ([3], [4]) по мере Лебега и им T-эквивалентными последовательностями, и поставил вопрос о существовании элементов L, отличных от 0, 1, a и b (в частности, других атомов). Этот вопрос эквивалентен вопросу о независимости аксиомы 4.2 из ([5]). Существование еще одного элемента L будет следовать из теоремы ниже.

Если $B\subseteq\Omega$ измеримо, $\mu(B)$ — мера Лебега B. Заметим, что если считать $A\in\mathscr{D}$ пренебрежимым, когда $\mu(\bigcup G^{-1}(A))=0$, где объединение берется лишь по всем всюду определенным эффективным операторам, то из теоремы 4,3 работы ([2]) вытекает, что аналогичным образом определенная структура состоит только из 0, 1, a и b.

Теорема. *Существуют эффективный оператор F и множество $B\subseteq\Omega$ такие, что B содержится в области определения F (и совпадает с ней за исключением множества меры 0), $\mu(B)>0$ и $\mu(G(F(B)))=0$ для любого эффективного оператора G, причем $F(B)$ не содержит вычислимых последовательностей.*

Доказательство. Нам будет удобно естественным образом отождествлять бесконечные двоичные последовательности с последовательностями вида $x_1x_2\ldots x_n\ldots$, где $0\leqslant x_n<2^n$ при $n\geqslant1$; далее считаем, что Ω состоит из таких последовательностей. Если $\omega\in\Omega$, то ω_i — i-член ω; $(\omega)_n=\omega_1\omega_2\ldots\omega_n$. Кортеж — это конечная последовательность $\alpha=\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$, где $0\leqslant\alpha_i<2^i$ при $1\leqslant i\leqslant n$, его длина $l(\alpha)=n$; α определяет интервал $\{\omega\in\Omega\,|\,\alpha\subset\omega\}$ меры Лебега $2^{-n(n+1)/2}\leqslant2^{-n}$. Задана также эффективная однозначная нумерация всех кортежей, $\tau(\alpha)$ — номер кортежа α. $\{F_i\}$ —

* Элементы $\mathscr{D}$ можно считать идеализациями свойств природных массивов информации. Они T-инварианты, так как естественно считать, что две T-эквивалентные последовательности содержат одинаковую информацию.

Пренебрежимые множества — аналоги таких свойств, что практически невозможно возникновение массивов информации с этими свойствами ни в каких комбинациях алгоритмических и случайных процессов.

рекурсивная последовательность всех эффективных операторов такая, что для любого эффективного оператора G имеется бесконечно много таких i, что $G=F_i$. $\{F_i^*\}$ — вычислимая последовательность общерекурсивных функций такая, что $F_i(\omega)=\lim\limits_n F_i^*((\omega)_n)$. p — такая общерекурсивная функция, что для любого n имеется бесконечно много таких i, что $p(i)=n$. К множеству всех натуральных чисел добавим символ ∞ и будем считать, что $\infty>k$ для любого натурального k, $p(\infty)=\infty$. Малые латинские буквы обозначают натуральные числа или целые, если это специально указано. Нам потребуются функции

$$\beta_n(\alpha)=\min\{\beta\,|\,l(\beta)=n-1\,\&\,\alpha\subset\beta\,\&\,l(F^*_{p(n)}(\beta))\geqslant p(n)+\tau(\alpha)\}$$

($\beta_n(\alpha)$ неопределенно, если это множество пусто),

$$T_n(\gamma)=\gamma'\leftrightarrow l(\gamma')=l(\gamma)\geqslant n\geqslant 1\,\&\,\gamma_n+1=\gamma_n'<2^n\,\&\,\forall\, k(\gamma_k'\neq\gamma_k\to k=n).$$

В конструкции определяются рекурсивные функции F^* и M.

Шаг 1. Определим $F^*(k)=k$, $M(k)=\infty$ при $k=0$, 1.

Шаг n ($n>1$). Конструкция разветвляется на три случая:

Случай 1. $p(M(\gamma))\neq p(n)$ для каждого γ, $l(\gamma)=n-1$. Определим $M(\gamma 0)=n$, $M(\gamma k)=\infty$ для всех γ и k таких, что $l(\gamma)=n-1$, $p(M(\gamma))>p(n)$ и $0<k<2^n$.

Случай 2. Существует хотя бы один кортеж γ такой, что

$l(\gamma)=n-1$, $p(M(\gamma))=p(n)$ и $\beta_n(F^*(\gamma))$, $T_{M(\gamma)}(\gamma)$ определены. (1)

Для каждого $k<2^n$ и для каждого γ, удовлетворяющего (1), определим $M(\gamma k)=\infty$, $M(T_{M(\gamma)}(\gamma)k)=M(\gamma)$, $F^*(\gamma k)=\beta_n(F^*(\gamma))k$; для каждого γ такого, что $l(\gamma)=n-1$ и $p(M(\gamma))>p(n)$, определим $M(\gamma k)=\infty$, если это значение не было определено выше.

Случай 3. Случаи 1 и 2 не имеют места. В этом случае ничего не делаем.

После того как инструкции соответствующего случая выполнены, для всех γ, $l(\gamma)=n-1$, $k<2^n$ определим $M(\gamma k)=M(\gamma)$, $F^*(\gamma k)=F^*(\gamma)$, если значение левой части равенства не было определено ранее. Переходим к шагу $n+1$.

По конструкции $F^*(\alpha)\subset F^*(\beta)$ при $\alpha\subset\beta$. Определим эффективный оператор F: $F(\omega)=\lim\limits_n F^*((\omega)_n)$ для $\omega\in\Omega$.

Свойства 1)—6) приводятся без доказательства. Их нетрудно проверить по шагам конструкции.

1) Для любых m и γ существует не более чем одно целое k такое, что $M(T_m^k(\gamma))=m$.

2) Если $\gamma\subset\gamma'$ и $M(\gamma)=M(\gamma')<\infty$, то $F^*(\gamma)=F^*(\gamma')$.

3) Если $k\geqslant 0$ и $M(T_m^k(\gamma))=m$, то найдется $\alpha\subset\gamma$ такое, что $l(\alpha)\geqslant m$ и $M(\alpha)=m$.

4) Если $\gamma\subset\gamma'$ и $M(T_m^k(\gamma))=M(T_m^{k'}(\gamma'))=m$, то $k'\geqslant k$ (k, k' целые).

5) Пусть $M(\gamma)<\infty$, $k\geqslant 1$ и $T^k_{M(\gamma)}(\gamma)$ определено. Тогда $F^*(T_{M(\gamma)}(\gamma))=$ $=F^*(T^k_{M(\gamma)}(\gamma))$ и $M(T_{M(\gamma)}(\gamma))=M(T^k_{M(\gamma)}(\gamma))$.

6) Пусть γ — минимальный кортеж такой, что $M(\gamma)=m$, $k\geqslant 0$ и $T_m^k(\gamma)$ определено. Тогда $F^*(\gamma)=F^*(T_m^k(\gamma))$.

Мы будем говорить, что кортеж α стабилизирует i, если либо $p(M(\alpha'))\neq i$ для всех α' таких, что $\alpha\subset\alpha'$, либо $M(\alpha')=M(\alpha)$ для всех таких α'.

Лемма 1. *Любое число стабилизируется всеми кортежами, кроме конечного числа.*

Доказательство. Допустим противное: пусть i — наименьшее, для которого утверждение леммы не выполнено. Пусть n — наименьшее такое, что $p(n)=i$ и каждое $i'<i$ стабилизировано каждым кортежем α, $l(\alpha)\geqslant n$. По выбору n на шаге n имеет место случай 1, для каждого $m\geqslant n$ сущест-

вует γ такое, что $l(\gamma)=m$ и $M(\gamma)=n$, для любого β, если $l(\beta)\geqslant n$ и $p(M(\beta))=i$, то $M(\beta)=n$. Пусть $\omega\in\Omega$. Если $p(M((\omega)_{n-1}))<p(n)$, то по выбору n будет $M(\gamma)=M((\omega)_{n-1})$ для любого γ такого, что $(\omega)_{n-1}\subset\gamma$. Если $p(M((\omega)_{n-1}))>p(n)$, по свойству 1) для любого $m\geqslant n$ найдется единственное целое k такое, что $p(M(T_n^k((\omega)_m)))=i$. Из свойства 4) следует, что для всех m, начиная с некоторого, существует общее такое k. Отсюда следует, что ω имеет фрагмент, стабилизирующий i. Поэтому функция $f(\omega)=\min\{n|(\omega)_n$ стабилизирует $i\}$ определена на всем компакте Ω. Она непрерывна и, следовательно, ограничена некоторым числом s. Все кортежи длины, большей s, стабилизируют i. Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 2. *Пусть $M((\omega)_n)=\infty$ для бесконечного числа различных n, для любого n существует $\gamma\in\Omega$ такая, что $F^*((\omega)_n)\subset\gamma$ и $F_i(\gamma)$ определено. Тогда найдется n такое, что $p(n)=i$, на шаге n имеет место случай 2 и $(\omega)_{n-1}$ удовлетворяет условию (1) этого случая.*

Доказательство. Пусть n наименьшее такое, что $p(n)=i$ и каждое $i'<i$ стабилизировано каждым кортежом α, $l(\alpha)\geqslant n$. m выбирается так же, только i заменяется на $i+1$. Эти числа существуют по лемме 1. По определению m найдется единственное целое k такое, что $M(T_n^k((\omega)_s))=n$ для всех $s\geqslant m$. Пусть $k<0$, a — наименьшее такое, что $n\leqslant a\leqslant m$ и $M(T_n^k((\omega_s))=n$ для всех $s\geqslant a$. По 6) $F^*(T_n^k((\omega)_a))=$ $=F^*((\omega)_a)\subset\gamma$. где γ из условия леммы. По 2) $F^*(T_n^k((\omega)_s))=$ $=F^*(T_n^k((\omega)_a))$ для всех $s\geqslant a$, поэтому $\beta_s(F^*(T_n^k((\omega)_s)))$ определено для всех достаточно больших s; тогда для одного из таких $s>m$, $p(s)=i$, на шаге s имеет место случай 2, что противоречит выбору m. Значит, $k\geqslant 0$. Тогда по 3) найдется $s\geqslant n$ такое, что $M((\omega)_s)=n$. По условию леммы можно выбрать наименьшее $b>s$ такое, что $M((\omega)_b)=\infty$. По выбору n, $p(b)=i$, на шаге b имеет место случай 2 и $(\omega)_{b-1}$ удовлетворяет условию (1), что и требовалось доказать.

A — область определения оператора F.

Лемма 3. $\mu(G(F(A)))=0$ *для любого эффективного оператора* G.

Доказательство. Пусть i такое, что $G=F_i$, U_i — объединение всех интервалов $\{\omega|F_i^*(\beta_s(F^*(\gamma)))\subset\omega\}$, где $p(s)=i$, на шаге s выполнен случай 2 и γ удовлетворяет условию (1).

$\mu(\{\omega|F_i^*(\beta_s(F^*(\gamma)))\subset\omega\})\leqslant 2^{-(i+\tau(F^*(\gamma)))}$, поэтому $\mu(U_i)\leqslant\sum\limits_{\alpha}2^{-(i+\tau(\alpha))}\leqslant$ $\leqslant 2\cdot 2^{-i}$. Докажем, что $G(F(A))\subseteq U_i$. Пусть $\omega'=G(F(\omega))$, где $\omega\in A$. Так как $F(\omega)$ определено, по случаю 2 $M((\omega)_n)=\infty$ для бесконечного числа различных n. $F_i(F(\omega))$ определено, значит, условие леммы 2 выполнено и найдется n такое, что $\omega'\in\{\gamma|F_i^*(\beta_n(F^*((\omega)_{n-1})))\subset\gamma\}\subseteq U_i$. Так как имеется бесконечно много таких i, $\mu(G(F(A)))=0$.

Лемма 4. $\mu(A)\geqslant 1/2$.

Доказательство. Предварительно покажем, что если $M((\omega)_n)=\infty$ для бесконечного числа различных n, то $F(\omega)$ определено (обратное утверждение легко следует из конструкции в случае 2). Пусть i такое, что F_i всюду определенный оператор. Тогда по лемме 2 найдется n такое, что $p(n)=i$, на шаге n имеет место случай 2 и $(\omega)_{n-1}$ удовлетворяет (1), поэтому $l(F^*((\omega)_n))>l(F^*((\omega)_{n-1}))$. Так как таких i бесконечно много, $F(\omega)$ определено. Пусть $U=\{\omega|M((\omega)_n)<\infty$ для всех n, кроме конечного числа$\}$. $V_n=\{\omega|M((\omega)_n)<\infty\}$. Тогда $U=\bigcup\limits_m\bigcap\limits_{n\geqslant m}V_n$. $\mu(U)=$ $=\sup\mu(\bigcap\limits_{n\geqslant m}V_n)\leqslant\sup\mu(V_m)$. $\mu(V_1)=0$, если на шаге $n+1$ имеет место случай 1, то $\mu(V_{n+1})\leqslant\mu(V_n)+2^{-(n+1)}$; если имеет место случай 2 или 3, то $\mu(V_{n+1})\leqslant\mu(V_n)$. Отсюда $\mu(V_n)\leqslant 1/2$ для всех n и $\mu(U)\leqslant 1/2$. $A=\Omega\diagdown U$. Следовательно, $\mu(A)\geqslant 1/2$.

Пусть α — вычислимая последовательность и пусть $g(\gamma)=\alpha_{l(\gamma)+1}$, если на шаге $l(\gamma)+1$ имеет место случай 2 и кортеж γ удовлетворяет условию (1), и $g(\gamma)$ неопределено в противном случае. Тогда из конструкции следует, что если $F(\omega)=\alpha$, то имеется бесконечно много таких n, что $g((\omega)_n)$ определена и для всех таких n, $g((\omega)_n)=\omega_{n+1}$, т. е. ω не является коллективом Мизеса. Мера множества всех коллективов Мизеса равна 1. Пусть $B=A\setminus\{\omega\in A \mid F(\omega)$ вычислима$\}$. $\mu(B)=\mu(A)$. Тогда F и B удовлетворяют заключению теоремы. Теорема доказана.

Пусть F и B из теоремы, $C=\{\omega \mid \exists\alpha(\alpha\in F(B)\ \&\ \alpha\equiv_T\omega\}$, $c\in L$ такое, что $C\in c$. $C\subseteq\{\omega \mid \exists\alpha(\alpha\in F(B)\ \&\ \omega\leqslant_T\alpha)\}=\bigcup\limits_i F_i(F(B))$, поэтому $\mu(C)=0$.

$$B\subseteq\bigcup_i F_i^{-1}(F(B))=\{\omega \mid \exists\alpha(\alpha\in F(B)\ \&\ \alpha\leqslant_T\omega)\}=\{\omega \mid \exists\alpha(\alpha\in C\ \&\ \alpha\leqslant_T\omega)\},$$

поэтому последнее из этих множеств имеет положительную меру. Отсюда следует, что $c\neq 0$. $a\neq c$, так как C не содержит вычислимых последовательностей; $b\neq c$, так как $\mu(C)=0$, тогда как мера всех случайных последовательностей равна 1. Значит, $c\notin\{0, 1, a, b\}$.

Отметим еще одно свойство конструкции. Нетрудно показать, что любая $\omega\in\bigcap\limits_i F_i(F(B))$ не является случайной. Если к B добавить каждую последовательность, которая отличается от одной из последовательностей B в конечном числе знаков, по теореме из ([6]), стр. 117 (закон 0 или 1), получим множество меры 1. Отсюда получаем, что для почти-любой последовательности α существует эффективный оператор G такой, что последовательность $G(\alpha)$ невычислима и не T-эквивалентна никакой случайной. Можно также построить счетное множество атомов L, а также такой ненулевой элемент $d\in L$, что для любого $x\in L$, если $x\leqslant d$, то x не атом.

Автор глубоко благодарен Л. А. Левину за постановку задачи и за помощь в изложении результатов.

Башкирский государственный университет
им. 40-летия Октября
Уфа

Поступило
3 III 1976

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Х. Роджерс*, Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, М., Мир, 1972. [2] *А. К. Звонкин, Л. А. Левин*, УМН, т. 25, № 6, 85 (1970). [3] *А. Н. Колмогоров*, Проблемы передачи информации, т. 1, № 1, 3 (1965). [4] *P. Martin-Löf*, Information and Control., v. 9, N 6, 602 (1966). [5] *Л. А. Левин*, ДАН, т. 227, № 6, 1289 (1976). [6] *А. Н. Колмогоров*, Основные понятия теории вероятностей, М., Наука, 1974.