Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования Московский физико-технический институт (государственный университет)

МФТИ

ТРУДЫ 60-Й ВСЕРОССИЙСКОЙ НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ МФТИ

60

60-Я НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ МФТИ

20-26 ноября 2017 года

Прикладная математика и информатика

Москва, Долгопрудный, Жуковский 2017

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (государственный университет)»

Труды
60-й Всероссийской научной конференции МФТИ

20 - 26 ноября 2017 года

Прикладная математика и информатика

Москва Долгопрудный Жуковский
МФТИ
2017

УДК 51+004
ББК 22.1+32.81
Т78

Т78 **Труды 60-й Всероссийской научной конференции МФТИ.**
20–26 ноября 2017 г. Прикладная математика и информатика. -
М.: МФТИ, 2017. - 320 с.
ISBN 978-5-7417-0652-7

Включены результаты оригинальных исследований студентов, аспирантов, преподавателей и научных сотрудников МФТИ и дружественных учебных и научных организаций. Статьи представляют интерес для специалистов, работающих в области прикладной математики и информатики.

УДК 51+004
ББК 22.1+32.81

ISBN 978-5-7417-0652-7

© Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(государственный университет)», 2017

Оглавление

Програмный комитет конференции……15
Организационный комитет конференции……...16

Секция математических основ управления 18

Була Аксел Катенди
Оптимизация формы множества Парето 18

Д.Н. Шиян, А.В. Колногоров
Применение алгоритма зеркального спуска для групповой обработки данных в случайной среде 20

К.Р. Чернышев
Одна мера дивергенции, основанная на энтропии Цаллиса, в статистической линеаризации..... 22

В.С. Мамонова, И.М. Якимов
Автоматизированная система облачного моделирования системы массового обслуживания M/M/5..... 25

П.А. Бирюкова
О модификациях необходимых условий оптимальности для гладких экстремальных задач 26

С.В. Гарбарь
Модификация модели авторегрессии — скользящего среднего для моделирования последовательностей с равномерным распределением 28

Б.В. Галицкий
Влияние введения в транспортный поток полностью автономных автомобилей на общие задержки, возникающие при преодолении управляемого перекрёстка..... 30

Секция математического моделирования в экономике, экологии и социологии 32

Г.К. Каменев, И.Г. Каменев
Методы многомерного метрического анализа социальных данных..... 32

М.С. Бачурин, Н.Н. Пантелеева, К.А. Клименко
Построение модели стоимости информации о заемщике кредитной организации..... 33

С.В. Новогородцев, К.А. Клименко
Поиск оптимальной стратегии манипуляции ценой биржевого актива путём прямого участия в торгах..... 34

М.А. Кириллова
Анализ факторов, влияющих на отношение к домашним животным в домохозяйствах России. 35

М.А. Лепская
Математическая модель функционирования пенсионных фондов и методы оценки их устойчивости..... 36

Секция экспериментальной экономики.....38

Т.С. Бабкина, А.О. Седуш, О.Р. Меньшикова, И С. Меньшиков
Характер изменения принятия решений под влиянием социального взаимодействия 38

А.Г. Пешковская, Т.С. Бабкина
Характер движения глаз связан с принятием решений в экономических задачах 40
Д.М. Старков, И.С. Меньшиков
Информационные каскады в лаборатории.....42
А.О. Седуш, О.Р. Меньшикова, И.С. Меньшиков
Особенности функционального состояния участников лабораторных экспериментов 44
Д.А. Смаль
Исследование зависимости возникновения парадокса Браесса от различных условий методами экспериментальной экономики 45
В.А. Дьяченко, И.С. Меньшиков
Модель поведения участников двойного аукциона с закрытыми ставками.....47
Н.В. Изутин, И.С. Меньшиков
Исследование информационных каскадов в лабораторных условиях.....49
А.Р. Шарафутдинов
Анализ мирового рынка редких металлов (тантала), с точки зрения стандартных моделей конкуренции 50
А.Р. Шарафутдинов
От рынка лимонов к управляемому рынку на примере интернет-магазинов.....52
Р.М. Яминов
Взаимосвязь между психологическими характеристиками участников экспериментов и их стратегиями в игре в Дилемма заключенного 54
А.И. Шилова
Игра «Собственник – Директор – Агент». Нахождение потенциальных равновесий в случае повторяющейся игры при помощи нейронных сетей 55
Секция информатики.....57
П.В. Стогний, Д.И. Петров
Численное моделирование объектов антиклинальной формы сеточно-характеристическим методом 57
В.В. Рыков
Когнитивные модели в информатике.....58
С.А. Смаль
Многошаговый процесс построения сетевых структур с учетом различных ограничений и начальных условий оптимальным способом.....60
В.И. Голубев, Н.И. Хохлов, Д.П. Григорьевых
Оценка последствий воздействия интенсивного сейсмического возмущения на купольное сооружение.....62
А.А. Луканин, В.В. Рязанов
Прогнозирование на базе решения набора задач классификации с учителем 62
А.А Ружанская, Н.И. Хохлов
Использование иерархических сеток при расчетах задач сейсморазведки 65
А.М. Иванов, Н.И.Хохлов
Моделирование волновых возмущений в упругих средах с осевой симметрией методом FDTD.....66

Р. Делла Пиетра, Г.С. Степанов
Решение уравнений акустики с помощью метода интегральных уравнений на графических процессорах ... 69
Д. А. Подлесных
Автоматизация проверки результатов машинного обучения ... 69
В.В. Рязанов
О распознавании пропущенных значений признаков при решении задач классификации ... 70
Н.Н. Ефанов
Формальная грамматика системных вызовов Linux ... 71
И.Т. Кадощук
Математика, информатика, информационные технологии ... 72
И.Т. Кадощук
Что находится за перечислительной теоремой Пойа? ... 74
Б.М. Якупов, Н.И. Хохлов
Использование методов неразрушающего контроля на основе инструментов машинного обучения для обнаружения дефектов в рельсах ... 75
Д.Ю. Дербышев
Моделирование движения поезда в туннеле ... 76
Секция проблем интеллектуального анализа данных, распознавания и прогнозирования ... 78
А.В. Пенко, М.В. Сулима
Система выявления плагиата – подход на основе кооперации нескольких методов ... 78
А.В. Нигоян
Анализ треков частиц в пиксельных детекторах на основе микросхем Timepix ... 80
И.О. Гусев, Д.Г. Анастасьев
Морфологический анализ текста на русском языке со снятием неоднозначностей при разборе предложения с использованием нейронных сетей ... 82
В.А. Алексеев, В.Г. Булатов
Внутритекстовая когерентность как мера интерпретируемости тематических моделей текстовых коллекций ... 84
М.О. Рогожин
Фильтр шумов на цифровых изображениях на основе искусственных нейронных сетей ... 87
А.К. Шолохов
Метод условного градиента со спецификацией данных для задач статистического оценивания большой размерности ... 89
М.С. Селезнева, А.К. Шолохов, А.В. Белый
Агрегирование гетерогенных текстовых коллекций в иерархической тематической модели русскоязычного научно-популярного контента ... 90
А.А. Лактионов
Применение меры близости максимального правдоподобия для рекомендательной системы в реальном времени. ... 91

Секция систем математического обеспечения 95

А.Д. Григорьев

Разработка алгоритма определения одинаковых отелей 95

Ф.И. Сергеев, К.Б. Теймуразов

Задача об оптимальном распределении педагогической нагрузки среди преподавателей 97

Д.А. Малахов

Формализация задачи семантического поиска 98

Д.А. Сайранов

Использование вопросно-ответных систем в задаче поиска информации по корпусу математических текстов 101

Секция системного программирования и программной инженерии 103

А.В. Рыбаков, Е.В. Иванов, Р.Е. Овсянников, Д.С. Седов

О повышении защищенности объектов экономики от обычных средств поражения 103

А.В. Рыбаков, С.Л. Очетов, А.В. Петрухин

О методике расчета пространственного распределения энергии осколков вследствие возникновения чрезвычайных ситуаций техногенного характера 105

А.Ю. Герасимов

Об ограничениях метода классификации дефектов в программах, найденных методами статического анализа программ при помощи динамического символьного исполнения 106

А.В. Спиридонов, В.В. Савченко

Оценка вероятности истинности предупреждений статического анализатора 108

В.А. Петрухин, А.С. Джус, С.Х. Шайхлисламов, Е.В. Нечепуренко, Д.П. Бельдий

Реализация программного комплекса интерактивной работы с трехмерными объектами 111

В.А. Петрухин, С.Х. Шайхлисламов, М.С. Селезнева, А.В. Зухба

Управление состоянием человека с помощью освещения в режиме реального времени 111

Д.И. Крикунов, А.Г. Кульков, Р.С. Ранский, В.А. Петрухин

Исследование влияния резонансов Шумана на состояние человека с помощью приложения Cardiomood 112

И.В. Ганусевич, А.В. Зухба, В.А. Петрухин, С.Х. Шайхлисламов, Д.И. Крикунов, Р.С. Ранский

Зависимость физиологического состояния человека от времени года 113

Д.И. Крикунов, А.Н. Ляхов

Создание инструмента для определения зависимости двух временных рядов на основе теории вероятностей в пакете Matlab 114

Секция вычислительной математики 115

С.А Асрян, С.С. Гайсарян, Ш.Ф. Курмангалеев, А.М. Агабалян, С.С. Саргсян

Обнаружение ошибок типа «использование памяти после освобождения» в бинарных файлах с применением динамического анализа программ 115

Р.С. Соломатин

Валидация вычислительных алгоритмов SA-модели турбулентности и пристеночных функций для течения над пластиной и в диффузоре 116

М.Д. Брагин, Б.В. Рогов
Диссипативно-дисперсионные свойства бикомпактных схем четвертого порядка аппроксимации ... 119

Т.С. Казакова, П.С. Уткин, С.В. Фортова
Математическое моделирование развития неустойчивости контактной границы двух сред при высокоскоростном соударении ... 120

И.А. Брынза, И.В. Сафонов, И.В. Якимчук
Ключевые проблемы создания трехмерной модели пористой среды по данным FIB-SEM ... 122

Д.С. Крахмалёв
Использование теории графов для решения разреженных систем линейных алгебраических уравнений ... 124

Н.С. Смирнова
Сравнение схем с расщеплением потока для численного решения уравнений Эйлера сжимаемого газа ... 124

В.В. Андрияшен, Д.А. Кожевников
Быстрая модификация алгоритма FDK компьютерной томографии с потенциалом оптимизации количества потребляемой памяти ... 126

Mohammad S. Alkousa
Zipper family of algorithms for numerically conformal mapping and welding ... 128

Н.А. Егоров, Ю.Д. Шевелёв
Моделирование осесимметричного обтекания купола парашютной системы с упругим звеном ... 129

И.К. Коптелов
Численное моделирование волновых процессов в горном массиве с помощью разрывного метода Галёркина в двумерной постановке ... 131

Л.Б. Маркеева
Решение дифференциальных уравнений эллиптического типа на сложных областях при помощи Quantized Tensor Train Decomposition ... 132

К.Л. Клименок, А.Ю. Демьянов
Теоретические основы и моделирование многомерных потоковых пропагаторов ... 133

М.Ю. Немцев, И.В. Семенов
Численное моделирование волновых процессов при горении модульных метательных зарядов в матерчатых картузах ... 134

Секция динамики и управления движением космических аппаратов ... 137

А.С. Горожанкина, А.С. Филиппов
Анализ возможностей различных схем ориентации для КА технологического назначения ... 137

А.С. Охитина, Я.В. Маштаков, С.С. Ткачев
Оптимизация расположения двигателей коррекции для обеспечения разгрузки маховиков ... 138

Ю.А. Худайбердиев, С.П. Трофимов
Глобальная оптимизация космических траекторий с помощью кривых, заполняющих пространство ... 139

У.В. Монахова, Д.С. Иванов
Децентрализованное управление группой спутников для поддержания тетраэдральной конфигурации с помощью аэродинамической силы 141

А.А. Целоусова, М.Г. Широбоков
Прямые методы оптимизации траекторий перелета с малой тягой 142

Я.В. Маштаков, С.С. Ткачев
Применение прямого метода Ляпунова для обеспечения разворота космического аппарата при наличии ограничений 143

А.В. Сорокин, М.Г. Широбоков
Управление орбитальным движением космических аппаратов с использованием искусственных нейронных сетей 144

Б.А. Корнеев, В.Д. Левченко
Моделирование динамики газа в процессе лазерного плавления металлической поверхности с помощью разрывного метода Галёркина на графических ускорителях 145

Ю.К. Наумкина, Д.С. Иванов
Исследование алгоритма определения движения космического аппарата с помощью обработки изображения лимба планеты 146

А.Б. Нуралиева
Включение колебаний гибких элементов в математическую модель движения спутника 147

Секция математического моделирования и вычислительного эксперимента 149

И.М. Никольский
О суперкомпьютерном моделировании сенсорных сетей. 149

А.В. Юденков, Л.П. Римская
Стохастическая математическая модель первой основной задачи плоской теории упругости для анизотропного тела 150

К. М. Ву
Численный метод в задаче микромеханического гироскопа 151

И.С. Французова
Математическое моделирование процессов новообразований 153

Р.И. Романенко
Расчет осаждения струи капельной влаги моментным методом 155

Б.А. Худаяров, О.Р. Кучаров
Математическое моделирование колебательных процессов газонефтепроводов с учетом вязкоупругого основания грунта 157

А.А. Люпа
Модель двухфазной фильтрации с релаксацией потока на примере задачи вытеснения нефти водой 160

С.В. Ким
Что есть вектор PageRank для Интернета? 162

В.А. Гущин, В.Г. Кондаков
Моделирование методом КАБАРЕ задачи взаимодействия пары вихрей со свободной поверхностью 164

О.А. Костюк
Особенности фильтрационных процессов в пластах переменной смачиваемости 165
А.И. Жигалова
3D-моделирование современных конструкций 165
А.В. Параскевов, Д.К. Зендриков
О дистанционной активации очага эпилепсии 167
И.В. Мурашкин
Численное решение модельной задачи о взрывах, расположенных в вершинах правильного тетраэдра, гексаэдра, октаэдра 169
Секция теории вычислений 171
М.Н. Вялый
Оценка коммуникационной сложности знака перестановочной матрицы 171
А.В. Селиверстов
Эффективная унирациональность кубической гиперповерхности 173
А.А. Рубцов
Автоматы со структурой данных и сложность вычислений 175
Е.В. Мелихова
О числе граней многогранников Гельфанда–Цетлина 176
С.П. Тарасов, А.А. Шананин
Эффективное вычисление класса формы спроса по дискретным данным для однородной сильной аксиомы 177
Д.А. Голубенко
Автоматные группы: краткий обзор 178
Секция вычислительных технологий и моделирования 180
Н.Р. Лёзина, Т.О. Шелопут, В.И. Агошков
Численное решение задачи о восстановлении граничных функций на «внешних и внутренних жидких границах» 180
Д.В. Ануприенко
Повышение эффективности решения нелинейных задач при моделировании ненасыщенной и безнапорной фильтрации 181
М.Ю. Христиченко
Управление моделями вирусных инфекций на основе оптимальных возмущений 183
О.Г. Орлова
Детерминистический и стохастические подходы к моделированию внутриклеточной репликации ВИЧ 184
Д.С. Гребенников
Двумерная модель передвижения клеток иммунной системы в лимфоузле 185
А.М. Катруца
Оптимизация параметров двухсеточного метода с помощью глубоких нейронных сетей 186
М.В. Рахуба, А.В. Новиков, И.В. Оселедец
Метод решения задачи на собственные значения в тензорных форматах с использованием графических ускорителей 188

Р.А. Прямоносов
Графический интерфейс для построения графа коронарных сосудов с КТ снимков 188
П.А. Останин
Двумерная модель F-слоя земной ионосферы 191
А.В. Чаплыгин, Н.А. Дианский , А.В. Гусев
Параллельное моделирование нелинейных уравнений мелкой воды 192
П.А. Пережогин
Анализ параметризаций двумерной турбулентности в задаче моделирования неустойчивой баротропной струи 194
Г.С. Гойман
Исследование алгоритмов численного решения линейных уравнений мелкой воды на редуцированной широтно-долготной сетке 196
Секция теоретической и прикладной информатики 198
И.Н. Пономарёв
Реализация быстродействующего табличного элемента управления для отображения записей базы данных 198
В.В. Конычев, Ю.С. Овчинников, А.Б. Корякин
Технология динамической модификации кода 200
К.В. Соболев
Современные подходы к автоматическому извлечению кратких выдержек из текстов 201
Д.В. Копырин
Получение карты блоков файла на диске 202
А.А. Переберина, А.В. Костюшко
Проектирование программно-аппаратного комплекса для сбора данных о поведении вредоносного программного обеспечения 202
Секция флюидодинамики и сейсмоакустики 205
А.С. Волошин
Полностью усреднённая модель Кондаурова неравновесного двухфазного течения в средах с двойной пористостью с тонкими трещинами 205
Ю.И. Скалько, В.А. Мазепов
Вычислительные алгоритмы, основанные на решении обобщенной задачи Римана о распаде разрыва 206
С.И. Сергеев, Д.Н. Михайлов
Исследование особенностей акустического шума при фильтрации газа через сухие и насыщенные образцы горных пород 207
Н.В. Мутовкин, Д.Н. Михайлов, И.Л. Софронов
Моделирование акустического волнового поля в системе скважина–пласт, обусловленного генерацией шума флюидом вне скважины 208
Е.В. Колдоба, С.А. Жуков
Метод построения термических констант фазового равновесия многокомпонентных растворов 210

Г.С. Щелик
Расчет градиента целевого функционала при решении обратной задачи акустического каротажа для скважин с некруговым сечением ствола в анизотропных породах 211
В.В. Янаева, Ю.И. Скалько, С.Ю. Гриднев
Численное моделирование конструктивно-нелинейных колебаний упруго опертого стержня 212
Е.И. Фирсов
Численное моделирование парогравитационной технологии добычи высоковязких нефтей 214
Секция проблем передачи информации, анализа данных и оптимизации 215
А.Д. Кулакова, Б.Т. Поляк
Исследование неасимптотического поведения многошаговых итеративных методов оптимизации 215
А.С. Аникин, О.А. Большакова, А.В. Гасников, А.Ю. Горнов, Д.В. Макаренко, Б.О. Нетеребский, П.А. Яковлев
Об одном численном методе минимизации OPLS force field 216
Д.А. Пасечнюк
Поиск индексных стратегий для маршрутизации трафика базовой станции 220
Ф.С. Стонякин, А.А. Титов
Метод зеркального спуска в задачах условной минимизации при условии неограниченности градиента целевой функции 222
А.В. Рогозин
Использование градиентных методов в задачах распределённой децентрализованной оптимизации 224
М.Б. Кубентаева
Задача поиска стохастических равновесий в транспортных сетях 225
П.Е. Калошин
Решение задачи переноса обучения с применением автокодировщика 227
Л.М. Тепляков
Отслеживание множества похожих объектов в видеопотоке при наличии взаимных окклюзий на основе нейросетевой аппроксимации оптического потока ... 229
Секция физико-технической информатики 231
К.А. Абрамова, Е.В. Карелина, В.И. Протасов
Иерархические самоуправляемые системы коллективного интеллекта 231
А.Г. Асташкин, К.В. Чувилин
Генерация описания синтаксиса с помощью методов машинного обучения 233
А.С. Башков, С.В. Клименко
Выявление проблем портала государственных услуг на основе анализа текстов обращений пользователей 234
В.И. Берзин, М.И. Судейкин
Разработка методов компьютерного зрения для навигации мобильных роботов 235
Р.А. Бурхонов, С.В. Клименко
Применение методов глубокого обучения в задаче распознавания медицинских изображений 237

С.В. Клименко, В.А. Киселев
Проектирование и разработка жестового интерфейса взаимодействия для работы с инструментом визуализации цифровых голограмм в виртуальной реальности.....240
Д.В. Кудрявцев, В.П. Алешин
Разработка методов статистического анализа данных для оценки характеристик «визуального восприятия – действия» в системе виртуального окружения тренажеров.....242
Е.В. Луничкин, В.П. Алешин
Разработка программ на мобильных устройствах для анализа эффективности тренажеров и систем виртуального окружения 244
М.К. Мавлютов, Ю.Н. Орлов
Методы оценки NAIRU и кривая Филлипса для России в 2002–2016 гг.....246
А.С. Максимов, М.А. Берберова
Сравнительная оценка доз внешнего и внутреннего облучения и оценка ущерба населению, проживающему вокруг АЭС с реакторами типа ВВЭР (на примере Ростовской и Калининской АЭС).....248
Н.А. Меркурьева, М.М. Шарнин, Е.А. Слободюк, В.В. Цыганов
Построение визуальных карт предметной области для разведочного поиска (exploratory search) 251
Секция дискретной математики.....253
И.В. Родионов
О различении классов хвостовых распределений.....253
A.B. Skopenkov, M. Tancer
Hardness of almost embedding simplicial complexes in R^d 254
А.В. Гавриков
Алгоритм поиска гамильтонова цикла методом перебора гамильтоновых подграфов.....254
П.И. Ахтямов, И.В. Родионов
Оценка параметров сдвига и масштаба хвоста распределения.....257
Н.Р. Попов, И.В. Родионов
Скорость сходимости в теореме Фишера-Типпета-Гнеденко.....258
Д.А. Шабанов, А.Э. Хузиева
Онлайн предписанное хроматическое число многодольных гиперграфов 259
О.Д.Фролкина
Дикие канторовы гребенки в $\boldsymbol{R^n}$ 259
М.П. Савелов
Свойства статистики критерия хи-квадрат в неоднородной полиномиальной схеме.....261
А.В. Леонидов, Е.Е. Серебрянникова
Модель эндогенного роста капиталовооруженности фирм 262
А.В. Куликов, К.С. Бальхаев
Об оптимальном моменте продажи актива при наличии коридора колебаний цены.....264

В.В. Слюсарев
Системы полиномов, порождаемые обобщенными автоморфизмами Шакона..... 265
М.Б. Абросимов
О графах, удовлетворяющих условию Гудмана–Хедетниеми 266
А.А. Приходько, Е.С. Ракчеев, М.Ю. Тихонин
Комбинаторика некоммутативных случайных блужданий на графах Кэли..... 267
А.А. Асанов
Некорректность определения связной суммы зацеплений..... 268
Н.О. Малых, И.Д. Измайлов
Расчет поправки к форвардной LIBOR ставке при ее ранней поставке в однофакторной модели Халла–Уайта..... 269
Г.С. Стратилов, Н.О. Малых
Американские деривативы. Расчет цены ОФЗ-н и риска корпоративного банка при возврате ОФЗ-н..... 269
Секция когнитивных технологий.....271
Е.И. Панфилова, И.А. Кунина
Детектирование линий разметки в задаче распознавания дорожной разметки..... 271
О.О. Петрова, В.В. Шихеева, К.Б. Булатов
Оценка достоверности распознавания символа в видеопотоке 273
Е.И. Андреева, Т.В. Манжиков, О.А. Славин
Сравнение отсканированных изображений документов с использованием OCR Tesseract..... 275
Ю.С. Чернышова, А.В. Шешкус
Определение ориентации машиночитаемой зоны документа при помощи искусственной нейронной сети 278
Д.П. Маталов, В.В. Арлазаров, С.А. Усилин
Детектирование печатей на изображении документа с помощью каскадного алгоритма классификации на примере паспорта гражданина РФ 279
Д.В. Тропин, Д.П. Николаев, Д.В. Полевой, Д.Г. Слугин
Совмещение изображений максимизацией функционала резкости усредненного изображения..... 281
Секция концептуального анализа и проектирования.....285
И.Р. Борисов
О подходе к автоматизации сквозного проектирования систем организационного управления 285
К.В. Федосеев
Рефлексия освоения концептуального метода как диалектического..... 286
И.В. Емельянов
Рефлексия освоения концептуального метода как позитивистского..... 288
Д.Ф. Идрисов
Концептуализация и построение разнообразия механизмов выбора путем голосования..... 289
А.И. Никитин
Проблема понимания сущности криптовалют и их места в современной экономике..... 290

И.А. Самсонов

Цифровая экономика. Блокчейн, как инструмент устранения посредников в сделках 291

Секция наукоемких проектов и инноваций 293

П.И. Ахтямов, А.Н. Юшманов, Н.А. Зинов, И.В. Сошилов

Проверка применимости нейросетей для распознавания рентгеновских изображений с интроскопов 293

В.В. Слюсарев, Н.А. Зинов, Н.В. Волков, П.С. Кошкин, Е.С. Ракчеев, И.В. Пилюгин, Е.А. Адаменко, Е.Л. Ухлинова

Алгоритмы компьютерной обработки и изучения импульсно-тональных сигналов афалин 294

А.И. Кисленко

Адаптация топологии и параметров обучения традиционных нейронных сетей для создания спайковых нейронных сетей 296

Н.И. Кривчанский, А.А. Жарков, И.С. Гавенко, Д.С. Зверева, М.Д. Ивахненко, И.В. Холопов, П.М Воропаев, О.А. Сопильняк,С.В. Вручтель, Е.А. Шишкин, Е.В. Бояркина

Анализ методов кластеризации произвольных текстовых коллекций 297

Д.А. Шафигуллин

Феномен «Долина смерти» и особенности перехода инновационного проекта через эту стадию 298

Секция высшей математики 300

В.В. Мартынов, В.В. Мартынов (мл.)

Резонансы линейных дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами и многомерным временем 300

П.А. Сипайло

О естественности операции взятия следа в классе интегральных операторов Фурье 301

Н.Р. Изварина

Об эллиптичности операторов, ассоциированных с диффеоморфизмами 303

Д.В. Завадский

Алгоритм построения трансляционно-инвариантных мер на бесконечномерных пространствах и свойства интегрируемых функций 303

А.Ю. Головко

Аддитивные и мультипликативные анизотропные оценки интегральных норм функций из пространств Соболева на нерегулярных областях 304

Р.Р. Булатова

Уравнения магнитогидродинамического пограничного слоя нелинейно вязкой жидкости в модификации О.А. Ладыженской [1] 306

Д.Е. Стародубцев

О свойствах функциональных систем k-значной логики специального вида 307

А.Н. Соколова

Собственные значения фундаментальной матрицы системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами 309

М.К. Турцынский

Об устойчивости решений системы уравнений газовой динамики в поле силы Кориолиса 311

М.Г. Зайденберг, А.Ю. Перепечко, А.О. Регета
Группы автоморфизмов аффинных многообразий, состоящие из алгебраических элементов 312
Ю.О. Беляева
Стационарные решения системы уравнений Власова–Пуассона под действием внешнего магнитного поля в полупространстве 313
Н.А. Гусев
О нарушении принципа суперпозиции для знакопеременных решений уравнения неразрывности 314
М.С. Лопушански
Аппроксимативно-геометрические свойства слабо выпуклых множеств в пространствах с несимметричной полунормой 315
В.Ж. Сакбаев
Пространства Соболева обобщенных функций на гильбертовом пространстве с трансляционно-инвариантной мерой 316

Программный комитет конференции

Н.Н. Кудрявцев, ректор МФТИ – председатель

В.А. Баган, директор по развитию – заместитель председателя

А.А. Воронов, проректор по учебной работе и довузовской подготовке

А.В. Дворкович, директор ФРКТ

В.В. Киселев, директор ФФПФ

С.С. Негодяев, директор ФАКТ

В.В. Иванов, директор ФЭФМ

А.М. Райгородский, директор ФПМИ

С.В. Леонов, директор ФБМФ

П.К. Кашкаров, директор ИНБИКСТ

Организационный комитет конференции

М.В. Милов, руководитель направления «Образование» ЦУП – председатель

С.О. Русскин, представитель ФРКТ

Е.Ю. Чиркина, представитель ФФПФ

Ю.О. Алексеева, представитель ФАКТ

В.Б. Макарова, представитель ФАКТ

В.А. Яворский, представитель ФЭФМ

С.А. Зайцев, представитель ФЭФМ

Е.Г. Молчанов, представитель ФПМИ

В.Н. Логинов, представитель ФПМИ

К.А. Коньков, представитель ФПМИ

К.И. Агладзе, представитель ФБМФ

В.Г. Орлов, представитель ИНБИКСТ

М.В. Костелева, представитель УНЦ ГСН

А.С. Гупаисова, начальник пресс-службы

Е.Д. Жебрак, директор аналитического центра

Секция математических основ управления

УДК 517.9

Оптимизация формы множества Парето

Була Аксел Катенди

Московский физико-технический институт (государственный университет)
Университет Лубумбаши (ДР Конго)

Рассмотрим многокритериальную математическую модель, полная версия которой приведена в [1].

Пусть $\mathbf{x} \equiv \left\| x_1\, x_2 \ldots x_n \right\|^{\mathrm{T}} \in E^n$ – вектор независимых переменных, а $\mathbf{u} \equiv \left\| u_1\, u_2 \ldots u_p \right\|^{\mathrm{T}} \in \Theta \subseteq E^l$ – вектор фиксированных параметров следующей задачи: максимизировать по $\mathbf{x}$ функции:

$$f_k(\mathbf{x}, \mathbf{u}),\ k = [1, N], \tag{1}$$

при условиях: $y_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \le 0,\ i = [1, m]$ и при некотором фиксированном $\mathbf{u} \in \Theta$.

Следуя стандартной версии метода целевой точки (см., например, [2]), для задачи (1) сформулируем однокритериальные оптимизационные задачи *первого уровня* следующего вида:

$\forall k = [1, N]$ найти максимум по $\mathbf{x}$ функции

$$f_k(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \tag{2}$$

при условиях: $y_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \le 0,\ i = [1, m]$.

Пусть оптимальные значения целевых функций задач (2) – f_k^*, тогда стандартный вариант метода целевой точки [2] заключается в нахождении допустимой точки задачи (1) $\mathbf{x} \in \Omega$ такой, что величина $\max\limits_{k=[1,N]} \left\{ f_k^* - f_k(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \right\}$ оказывается минимальной. Это приводит к оптимизационной задаче вида:

максимизировать ρ по совокупности $\{\rho, \mathbf{x}\}$

при условиях: $\rho \ge 0$;

$$y_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \le 0,\ i = [1, m]\ ; \tag{3}$$

$$f_k(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \ge f_k^* - \rho\,, \quad k = [1, N].$$

Пусть $\{\rho^{**}; \mathbf{x}^{**}\}$ – решение задачи (3), а вектор $\mathbf{x}^{**}$ *целевая* (или *ссылочная*) точка множества Парето. Величина ρ^{**} дает оценку минимально возможного рассогласования (отклонения от неулучшаемых «идеалов» f_k^*) по всей совокупности значений критериев на множестве Парето для задачи (1). Саму задачу (3) мы будем именовать задачей *второго уровня*, поскольку в ее формулировку входят величины f_k^* – решения задач первого уровня.

Наконец, отметим, что решение $\{\rho^{**}; \mathbf{x}^{**}\}$, характеризующее свойства модели (1) в целом и, в частности, свойства ее множества Парето, зависит также и от вектора $\mathbf{u}$. Если отказаться от предположения о том, что вектор $\mathbf{u}$ фиксированный, то возникает постановка оптимизационной задачи *третьего уровня*:

$$\text{минимизировать } \rho^{**} \text{ по } \mathbf{u} \in \Theta, \tag{4}$$

которую естественно назвать задачей *третьего уровня* или задачей *оптимизации формы множества Парето*, исследование методов решения которой является основной целью данной работы.

Из условий задач (2) и (3) следует, что для решения задачи (4) потребуется информация о зависимостях $f_k^*(\mathbf{u}); \rho^{**}(\mathbf{u})$ и $\mathbf{x}^{**}(\mathbf{u})$. Понятно, что рассчитывать на получение их явных представлений из формул для функций $f_k(\mathbf{x},\mathbf{u}), k=[1,N\}$ и $y_i(\mathbf{x},\mathbf{u}), i=[1,m]$ (за исключением, быть может, некоторых простейших случаев), не приходится.

Однако и в случае использования численных методов для решения задачи третьего уровня возникают следующие затруднения:

- во-первых, зависимости $f_k^*(\mathbf{u}); \rho^{**}(\mathbf{u})$ и $\mathbf{x}^{**}(\mathbf{u})$ могут существовать не для любого $\mathbf{u} \in \Theta$;
- во-вторых, эти зависимости могут не быть функциональными (то есть не иметь единственного значения $\forall \mathbf{u} \in \Theta$) ;
- наконец, даже в случае их функциональности $f_k^*(\mathbf{u}); \rho^{**}(\mathbf{u})$ и $\mathbf{x}^{**}(\mathbf{u})$ могут не обладать свойствами достаточной гладкости, при которых существуют, например, разложения по формулам Тейлора.

Преодоление этих затруднений возможно либо путем использования при решении задачи (4) специальных вычислительных алгоритмов типа методов недифференцируемой оптимизации, либо при помощи достаточно гладких функциональных аппроксимаций зависимостей $f_k^*(\mathbf{u}); \rho^{**}(\mathbf{u})$ и $\mathbf{x}^{**}(\mathbf{u})$, близких к ним по значениям там, где последние существуют. В данной работе используется второй подход.

В качестве аппроксимаций зависимостей $f_k^*(\mathbf{u}); \rho^{**}(\mathbf{u})$ и $\mathbf{x}^{**}(\mathbf{u})$ предлагается использовать $f_k^+(\tau,\mathbf{u}); \rho^+(\tau,\mathbf{u})$ и $\mathbf{x}^+(\tau,\mathbf{u})$ (для малых положительных значений параметра τ), являющихся соответственно решениями задач (2) и (3), получаемых методом гладких штрафных функций [2]. Как показано в [3], эти аппроксимации при условиях достаточной гладкости, регулярности и локальной выпуклости модели (1) определены $\forall \mathbf{u} \in \Theta$, достаточно гладкие для использования формулы Тейлора и гарантируют условия: $\lim\limits_{\tau \to +0} f_k^+(\tau,\mathbf{u}) = f_k^*(\mathbf{u}) \ \ \forall k=[1,N]$; $\lim\limits_{\tau \to +0} \rho^+(\tau,\mathbf{u}) = \rho^{**}(\mathbf{u})$; $\lim\limits_{\tau \to +0} \mathbf{x}^+(\tau,\mathbf{u}) = \mathbf{x}^*(\mathbf{u})$, где $\mathbf{x}^+(\tau,\mathbf{u}) = \arg\max\limits_{\mathbf{x}} A(\tau,\mathbf{x},\mathbf{u})$, для *вспомогательной* функции следующего вида: $A(\tau,\mathbf{x},\mathbf{u}) = f_k(\mathbf{x},\mathbf{u}) - \sum\limits_{i=1}^{m} P[\tau, y_i(\tau,\mathbf{x},\mathbf{u})]$.

При использовании численных методов поиска $\mathbf{x}^+(\tau,\mathbf{u}) = \arg\max\limits_{\mathbf{x}} A(\tau,\mathbf{x},\mathbf{u})$ может возникнуть необходимость в нахождении частных производных функции $A(\tau,\mathbf{x}^+(\tau,\mathbf{u}),\mathbf{u})$.

Поскольку вектор-функция $A(\tau,\mathbf{x}^+(\tau,\mathbf{u}),\mathbf{u})$ определена неявно уравнениями – условиями стационарности вспомогательной функции:

$$\frac{\partial A}{\partial x_j} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial f_k}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial P}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} = 0, \quad \forall j=[1,n], \tag{5}$$

то для компонент градиента, существование которых по теореме о неявных функциях вытекает из гладкости функций $f_k(x,u), y_i(x,u)$ и $P(\tau,\alpha)$, мы имеем $A'_{u_s} = \frac{\partial A}{\partial u_s} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial A}{\partial x_j} \frac{\partial x_j^+}{\partial u_s}$, $\forall s = [1,l]$, а в силу (5) получаем $A'_{u_s} = \frac{\partial A}{\partial u_s}$, $\forall s = [1,l]$.

Компоненты матрицы Гессе рассчитываются аналогично: $A''_{u_s u_p} = \frac{\partial^2 A}{\partial u_s \partial u_p} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 A}{\partial x_j \partial u_s} \frac{\partial x_j^+}{\partial u_p}$. Необходимые в этом случае значения производных $\frac{\partial \xi_j^+}{\partial u_p}$, $\forall j = [1,n]$, $\forall p = [1,l]$ можно найти, решив систему линейных уравнений: $\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 A}{\partial x_j \partial x_h} \frac{\partial x_j^+}{\partial u_p} = -\frac{\partial^2 A}{\partial x_h \partial u_p}$, $\forall h = [1,n]$, $p = [1,l]$, которая получается при дифференцировании (5) по всем компонентам $u \in E^l$.

Литература

1. *Умнов А.Е., Умнов Е.А.* Параметрический анализ задач многокритериальной оптимизации // Труды Института системного анализа. Динамика неоднородных систем. − М.: ИСА РАН, 2006. – Вып. 10 (2). С. 246−253.
2. *Жадан В.Г.* Методы оптимизации. Ч. II. Численные алгоритмы: учебное пособие. – М.: МФТИ, 2015.

УДК 519.865

Применение алгоритма зеркального спуска для групповой обработки данных в случайной среде

Д.Н. Шиян, А.В. Колногоров

Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого

Рассматривается оптимизация алгоритма зеркального спуска для групповой обработки данных в двухальтернативной среде.

Пусть есть некоторая случайная среда, в которой $X = \{1, 2\}$ это множество доступных действий. В каждый момент времени $t = 1, 2, \ldots$ можно выбрать только одно из доступных действий $x_t \in X$. Применение определенного действия может принести доход (1) или ничего не принести (0). Основная задача – максимизация дохода за фиксированный промежуток времени при условии, что распределение вероятностей выигрыша заранее неизвестно, но не изменяется со временем.

Вводится функция потерь

$$L_T = \max(\rho_1, \rho_2) \cdot T - \eta_T,$$

где η_T – общий полученный доход за время T, ρ_1, ρ_2 – вероятности выигрыша при выборе первого и второго действия соответственно.

Исследование алгоритмов производится с помощью метода Монте-Карло с количеством итераций, равным 10 000. Вероятности выигрыша при моделировании имеют следующее распределение:

$$\overline{\rho} = (\rho_1; \rho_2) = (\rho + d\sqrt{D/T}; \rho - d\sqrt{D/T}),$$

где ρ – некоторая фиксированная вероятность, $D = 0.25$ – максимальная возможная дисперсия, T – горизонт управления, d – параметр, характеризующий величину различия между вероятностями.

Алгоритмы имеют настраиваемый параметр $\beta_0 > 0$, оптимальное значение которого вычисляется экспериментально. При моделировании используются значения нормализованной функции потерь, которая определена как

$$L'_T(\beta_0, \rho, d) = (DT)^{-1/2} L_T(\beta_0, \rho, d).$$

Базовый вариант алгоритма (Алгоритм 1), обрабатывающий данные по одному основан на оригинальном алгоритме зеркального спуска [1] с некоторыми модификациями.

Введем вектор вероятностей $\overline{p}_n = (p_1; p_2)$, $p_1, p_2 > 0$ и $p_1 + p_2 = 1$, двойственный вектор $\overline{\zeta}_n = (\zeta_1; \zeta_2)$ и вектор стохастического градиента $\overline{u}_n = (u_1; u_2)$. Для всех алгоритмов полагается $\overline{p}_0 = (0.5; 0.5)$ и $\overline{\zeta}_0 = (0; 0)$. Распределение Гиббса $\overline{G}_\beta$ определяется следующим образом:

$$\overline{G}_\beta(\overline{\zeta}) = S_\beta^{-1}(\overline{\zeta}) \cdot \left(e^{-\zeta^{(1)}/\beta}; e^{-\zeta^{(2)}/\beta}\right),$$

где $S_\beta(\overline{\zeta}) = e^{-\zeta^{(1)}/\beta} + e^{-\zeta^{(2)}/\beta}$. Теперь Алгоритм 1 можно записать в следующей форме:

Алгоритм 1

Для всех *n* от 1 до *N* выполняем следующие действия:

1) Выбираем действие y_n, по вектору $\overline{p}_{n-1}$: $P(y_n = l) = p_{n-1}^{(l)}$, $l = 1,2$;
2) Рассчитываем доход ξ_n: $P(\xi_n = 1 \mid y_n = l) = \rho_l$, $P(\xi_n = 0 \mid y_n = l) = 1 - \rho_l$;
3) Вычисляем стохастический градиент $\overline{u}_n(\overline{p}_{n-1})$:

$$\overline{u}_n(\overline{p}_{n-1}) = \left\{\left(\frac{1-\xi_n}{p_{n-1}^{(1)}}; 0\right), \textit{при } y_n = 1,\right\}, \left\{\left(0; \frac{1-\xi_n}{p_{n-1}^{(2)}}\right), \textit{при } y_n = 2\right\};$$

4) Обновляем вектора $\overline{\zeta}_n$ и $\overline{p}_n$: $\overline{\zeta}_n = \overline{\zeta}_{n-1} + \overline{u}_n(\overline{p}_{n-1})$, $\overline{p}_n = \overline{G}_{\beta_n}(\overline{\zeta}_n)$, где $\beta_n = \beta_0 \sqrt{D(n+1)} = \beta_0 \cdot 0.5\sqrt{n+1}$.

Для данного алгоритма при $\rho = 0.1$ и $\beta_0 = 2.25$ была получена численная оценка $r_1 = \inf\limits_{\beta_0 > 0} \max\limits_{1 \le d \le 10,\ 0.1 < p < 0.9} L'_N(\beta_0, \rho, d) \approx 2.0.$

Пакетный вариант (Алгоритм 2) [2] предполагает более глубокую модификацию. Для пакетного алгоритма $N = TM$, где *M* – размер пакета, а *T* – количество этапов. Оказывается, если разделить все данные на пакеты (группы) определенного размера, то можно повысить скорость работы алгоритма без падения его эффективности. Для пакетного алгоритма время обработки зависит не от общего объема данных, а от количества групп, на которые эти данные разбиты.

Алгоритм 2

Для всех *t* от 1 до *T* выполняем следующие действия:

1) Вычисляем, для какой части пакета следует использовать первое действие, а для какой второе: $M_t^{(l)} = p_{t-1}^{(l)} \times M$, $l = 1,2$;
2) Применяем *l*-е действие $[M_t^{(l)}]$ раз и получаем вектор $\overline{\eta}_t : \eta_t^{(l)} = \sum\limits_{n=(t-1)M+1}^{tM} (1 - \xi_n \mid y_n = l)$;
3) Вычисляем стохастический градиент $\overline{u}_t(\overline{p}_{t-1})$: $\overline{u}_t(\overline{p}_{t-1}) = \left(\eta_t^{(1)} / p_{t-1}^{(1)}; \eta_t^{(2)} / p_{t-1}^{(2)}\right)$;
4) Обновляем вектора $\overline{\zeta}_t$ и $\overline{p}_t$: $\overline{\zeta}_t = \overline{\zeta}_{t-1} + \overline{u}_t(\overline{p}_{t-1})$, $\overline{p}_t = \overline{G}_{\beta_t}(\overline{\zeta}_t)$, где $\beta_t = \beta_0 \sqrt{DM(t+0.5)} = \beta_0 \cdot 0.5\sqrt{M(t+0.5)}$.

Оценка r_2, полученная для пакетного алгоритма примерно в два раза лучше оценки r_1.

Однако пакетный алгоритм имеет определенный недостаток при работе с пакетами достаточного большого размера и небольшом количестве этапов $T < 100$. Причиной этого

является так называемый «эффект начального пакета», который связан с начальным распределением $\bar{p}_0 = (0.5; 0.5)$. Для минимизации этого эффекта разработан комбинированный алгоритм (Алгоритм 3) [2], который на начальном этапе получает оценки параметров $\bar{p}_{M_0}$ и $\bar{\zeta}_{M_0}$ с помощью базового алгоритма, а затем использует их для работы пакетного алгоритма.

Алгоритм 3

1) Определяем размер начального этапа M_0. Пусть $N = TM$, $0 \le \alpha \le 1$, тогда $M_0 = \alpha \cdot T$;
2) Применяем базовый алгоритм для $n = 1, \ldots, M_0$ и получаем значения $\bar{p}_{M_0}$ и $\bar{\zeta}_{M_0}$;
3) Применяем пакетный алгоритм для $n = M_0 + 1, \ldots, N$.

Комбинированный алгоритм сохраняет скорость обработки пакетного алгоритма и обеспечивает сходимость при достаточно больших размерах пакета и небольшом количестве этапов обработки.

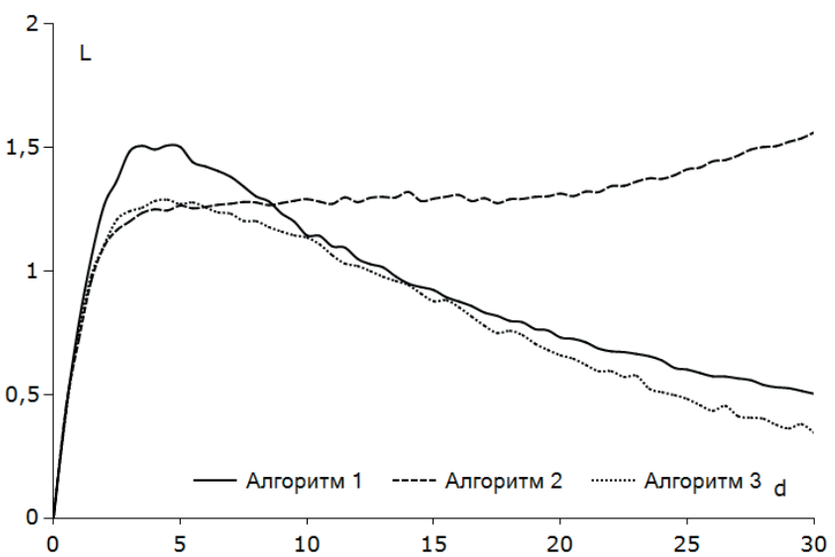


Рис. 1. Значения нормализованной функции потерь для различных алгоритмов при N = 10000 и M = 500

Литература

1. *Juditsky A*., *Nazin A.V*., *Tsybakov A.B*., *Vayatis N*. Gap-free Bounds for Stochastic Multi-Armed Bandit. // Proc. 17th World Congress IFAC (Seoul, Korea, July 6 – 11). 2008. P. 11560–11563.
2. *Kolnogorov A*., *Nazin A*., *Shiyan D*. Two-Armed Bandit Problem, Data Processing, and Parallel Version of the Mirror Descent Algorithm. // arXiv:1705.09977v1 [math.ST] 28 May 2017

УДК 519.71

Одна мера дивергенции, основанная на энтропии Цаллиса, в статистической линеаризации

К.Р. Чернышев

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

Начало применения теоретико-информационных подходов к задачам управления в СССР традиционно принято связывать с научными результатами Б.Н. Петрова и его коллег

[1–4]. Среди работ XXI века нельзя не отметить целый ряд публикаций [5–10], включая учебное пособие [9], в которых представлены попытки как применения теоретико-информационных методов в задачах идентификации систем, так и обобщения собственно понятия энтропии. Подходы, представленные в [5–10], содержат множество заблуждений, детально и всесторонне рассмотренных и проанализированных в [11–20].

В настоящей работе рассмотрен подход к статистической линеаризации входо-выходных отображений нелинейных дискретно-временных стохастических динамических систем с белошумным гауссовским входным процессом. Такой подход основан на применении квадратической дивергенции Йенсена–Цаллиса [21] при построении критерия статистической линеаризации. Когда одна из плотностей распределения вероятностей представляет собой совместную плотность распределения пары случайных величин (векторов), а вторая – произведение их маргинальных плотностей, дивергенция принимает вид соответствующей меры зависимости, в данном случае такую меру естественно называть *квадратической взаимной* информацией (*КВИ*) *Йенсена–Цаллиса*. В рамках данного подхода критерий статистической линеаризации представляет собой условие совпадения математических ожиданий выходного процесса системы и выходного процесса модели, и условие совпадения КВИ Йенсена–Цаллиса выходного и входного процессов системы и КВИ Йенсена–Цаллиса выходного и входного процессов модели. Получены соотношения для определения коэффициентов весовой функции линеаризованной модели. При этом полученные выражения основаны на КВИ Йенсена–Цаллиса и определяют меру стохастической зависимости случайных величин, являющейся состоятельной в смысле Реньи.

Замечание. По терминологии А.Н. Колмогорова [22] мера зависимости между парой случайных величин называется *состоятельной* (по Колмогорову), если она обращается в нуль тогда и только тогда, когда данные случайные величины стохастически независимы. Соответственно меру зависимости между двумя случайными величинами естественно называть состоятельной в смысле Реньи, если она удовлетворяет аксиоме Реньи [23], за исключением, быть может, аксиомы об инвариантности к взаимнооднозначным преобразованиям этих случайных величин. Ясно, что класс мер зависимости, состоятельных по Реньи, существенно уже класса мер зависимости, состоятельных по Колмогорову, а конструирование мер зависимости, состоятельных по Реньи, представляет собой специальную задачу, решение которой не является очевидным.

Кроме основы для построения критерия статистической линеаризации, в настоящей работе квадратическая дивергенция Йенсена–Цаллиса использована для конструирования анизотропийной нормы случайного вектора для определения адекватности свойств входного процесса исходной системы предположениям собственно постановки задачи, а именно – белошумности и гауссовости. В отличие от хорошо известной анизотропийной нормы [24] данная норма является симметричной (построения в [24] основаны на несимметричной дивергенции Кульбака–Лайблера) и накладывает менее жесткие ограничения на входной процесс (чем выше допустимое значение анизотропийной нормы, тем шире класс допустимых входных процессов), а также наиболее удобна для применения в условиях, когда плотность распределения вероятностей исследуемого вектора не известна и должна быть оценена на основе наблюдений выборочных данных. При неизвестной плотности распределения использование гауссовских ядер исключает необходимость численного интегрирования при построении оценки анизотропийной нормы, основанной на квадратической дивергенции Йенсена–Цаллиса.

Литература

1. *Петров Б.Н., Петров В.В., Уланов Г.М., Агеев В.М., Запорожец А.В., Кочубиевский И.Д., Май В.П., Усков А.С.* Начала информационной теории управления // Итоги науки и техники. Техническая кибернетика. М.: ВИНИТИ, 1970. С. 221–352.
2. *Петров Б.Н., Петров В.В., Уланов Г.М., Агеев В.М., Запорожец А.В., Кочубиевский И.Д., Май В.П., Усков А.С.* Начала информационной теории управления // Итоги науки и техники. Техническая кибернетика. М.: ВИНИТИ, 1971. С. 5–88.

3. *Петров Б.Н., Петров В.В., Уланов Г.М., Агеев В.М., Запорожец А.В., Кочубиевский И.Д., Козмин А.Г., Усков А.С.* Начала информационной теории управления // Итоги науки и техники. Техническая кибернетика. М.: ВИНИТИ, 1972. С. 5–128.
4. *Петров Б.Н., Уланов Г.М., Гольденблат И.И., Ульянов С.В.* Теория моделей в процессах управления. Информационный и термодинамический аспекты. М.: Наука, 1978.
5. *Durgaryan I.S., Pashchenko F.F.* An Information Theory Approach to Identification // IFAC Proceedings Volumes. 1982. Vol. 15, N 4. P. 731–735.
6. *Durgaryan I.S., Pashchenko F.F.* Identification of Objects by the Maximal Information Criterion // Automation and Remote Control. 2001. V. 62, N 7. P. 1104–1114.
7. *Пащенко Ф.Ф.* Метод функциональных преобразований и его применение в задачах моделирования и идентификации систем / Автореф. дис. на соиск. учен. степ. д.т.н.: Спец.05.13.18: Спец.05.13.01. М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2001.
8. *Пащенко Ф.Ф.* Определение и моделирование закономерностей по экспериментальным данным // Системные законы и закономерности в электродинамике, природе и обществе. М.: Наука, 2001. Гл. 7. С. 411–521.
9. *Пащенко Ф.Ф.* Введение в состоятельные методы моделирования систем / Учеб. пособие: В 2-х ч. Ч. 2. Идентификация нелинейных систем. М.: Финансы и статистика, 2007.
10. *Durgaryan I.S., Pashchenko F.F., Pikina G.A., Pashchenko A.F.* Information method of consistent identification of objects // 8th IEEE Conference on Industrial Electronics and Applications (ICIEA), 2013. P. 1325-1330. DOI: 10.1109/ICIEA.2013.6566572.
11. *Чернышев К.Р.* Эссе о некоторых заблуждениях в идентификации систем // Труды II Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления» SICPRO ‘03. Москва, 29-31 января 2003 г. М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2003. С. 2660–2698.
12. *Чернышев К.Р.* Вопросы идентификации: состоятельные меры зависимости. М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2003. 60 с.
13. *Chernyshov K.R.* Information Theory within Identification and Control Problems: an Unexpected Review // Stability and Control Processes – SCP ‘2005. Saint Petersburg, Russia, June 28-30, 2005, Saint Petersburg State University, 2005. P. 1000–1009.
14. *Chernyshov K.* Theses on entropy // International Conference: Physics and Control, 2005. Proceedings. P. 691-696. DOI: 10.1109/PHYCON.2005.1514072.
15. Чернышев К.Р. К обеспечению образовательного процесса в области стохастического моделирования (Эссе № 2) // Труды VI Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления» SICPRO ‘07. Москва, 29 января – 1 февраля 2007 г. М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2007. С. 1632–1671.
16. *Чернышев К.Р.* Стохастические системы и теоретико-информационные методы: анализ некоторых подходов // Труды IX Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления» SICPRO ‘12. Москва, 30 января - 2 февраля 2012 г. М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2012. С. 1140–1164.
17. *Chernyshov K.R.* Delusions in System Identification: Professor Pashchenko's School // IFAC Proceedings Volumes. 2013. Vol. 46, N 9. P. 939–944.
18. *Chernyshov K.R.* Information theory within system identification: Revising some approaches // IEEE 9th Conference on Industrial Electronics and Applications (ICIEA), 2014. P. 95–100. DOI: 10.1109/ICIEA.2014.6931138.
19. *Chernyshov K.R.* Towards the Knowledge-Based Multi-Agent System Identification // IEEE 10th Conference on Industrial Electronics and Applications (ICIEA), 2015. P. 399–404. DOI: 10.1109/ICIEA.2015.7334146.
20. *Chernyshov K.R.* Information-Theoretic Statistical Linearization // IFAC-PapersOnLine. 2016. Vol. 49, N 12. P. 1797–1802.
21. *Anguloa J.C., Antolín J., López-Rosa S., Esquivel R.O.* Jensen-Tsallis divergence and atomic dissimilarity for ionized systems in conjugated spaces // Physica A. 2011. V. 390. P. 769–780.
22. *Сарманов О.В., Захаров Е.К.* Меры зависимости между случайными величинами и спектры стохастических ядер и матриц // Математический сборник. 1960. Т. 52(94), N 4. С. 953–990.
23. *Rényi A.* On measures of dependence // Acta Math. Hung. 1959. V. 10, N 3–4. P. 441–451.
24. *Владимиров И.Г., Курдюков А.П., Семенов А.П.* Анизотропия сигналов и энтропия линейных стационарных систем // ДАН. 1995. Т. 342, № 3. С. 583–585.

УДК 519.876.5

Автоматизированная система облачного моделирования системы массового обслуживания M/M/5

В.С. Мамонова, И.М. Якимов

Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева

Разработка имитационной модели системы массового обслуживания M/M/5

Для исследования систем реальных объектов существует множество подходов и различных точек зрения. Наиболее распространенным типом формализации систем реальных объектов являются системы массового обслуживания (СМО).

Для моделирования СМО в данной работе используются имитационные модели.

При моделировании открытых СМО, к которым и относится СМО M/M/5, задаётся закон распределения времени между поступлением заявок, имитация поступления которых обеспечивается генератором транзактов. Для процессов обслуживания также задаётся закон распределения времени обслуживания. Помимо этого возможно задать дисциплину выбора обслуживающих аппаратов (ОА) для каждой новой поступившей заявки.

В качестве программного продукта для создания имитационной модели (ИМ) была выбрана среда имитационного моделирования GPSS World [1]. Структурная модель СМО M/M/5, созданная в программе GPSS World, представляет собой модель СМО с входным потоком и потоком обслуживания, распределенными по экспоненциальному закону, и с пятью обслуживающими аппаратами.

Сравнение результатов имитационного моделирования с аналитическим

Имитационное моделирование имеет определенные преимущества перед аналитическим моделированием в плане возможности использования любых законов функционирования элементов СМО и сложных логических условий [2]. Но ИМ является численным методом и нуждается в оценке достоверности результатов, полученных в ходе этого моделирования. Оценка достоверности моделей осуществляется путем сравнения результативных показателей ИМ с результатами эталонных аналитических моделей параметрическими и непараметрическими методами оценки. В данном докладе рассматриваются один параметрический и непараметрический методы сравнения результатов, а именно параметрический метод сравнения по критерию Стьюдента и непарамерический метод сравнения по Кендаллу. [3]

1) Оценка различия средних значений параметров СМО, полученных при имитационном и аналитическом моделированиях (АМ) для *i*-го параметра СМО. Оценка производится по критерию Стьюдента и вычисляется по формуле:

$$t_i = \sqrt{n}\,\frac{\left|m_i^* - m_i\right|}{\sigma_i}. \qquad (2)$$

Величина n – количество реализаций, равное 100 для проведенных имитационных экспериментов, m_i^* – значение среднего времени *i*-го параметра СМО по результатам ИМ, m_i – значение среднего времени для *i*-го параметра СМО по результатам АМ. Переменная σ_i определяется оценкой стандартного отклонения *i*-го параметра СМО по результатам АМ. Если вычисленное значение t_i не превышает критическое значение критерия Стьюдента, найденного по статистическим таблицам t_{krit} = 1.960, при рекомендуемом значении доверительной вероятности β = 0.95 для количества степеней свободы $df = n - 1 = 100 - 1 = 99$, тогда можно считать, что полученные при ИМ результаты достоверны [4].

2) Коэффициент корреляции рангов Кендалла.

Для определения тесноты связи как между количественными, так и между качественными признаками, характеризующие однородные объекты и ранжированные по

одному и тому же принципу можно использовать коэффициент корреляции рангов Кендалла, вычисляемый по формуле:

$$\tau_{âé÷} = \frac{2\sum_{i=1}^{n} (P_i - Q_i)}{n(n-1)}, \quad (2)$$

где P_i – количество случаев для i-го варианта (по которым производится сравнение), ранг которых превышает i-е значение; Q_i – количество случаев для i-го варианта, ранг которых не превышает i-е значение; n – количество реализаций, равное 100 в рамках данной работы.

Облачное моделирование

Для реализации данной автоматизированной системы создано клиент-серверное приложение для проверки соответствия работы имитационной модели с ее эталоном. Порядок работы внутри приложения:[5]

1. Клиент отправляет через приложение на сервер информацию для сравнения.
2. Информация передаются в диспетчер, который распределяет задачу соответствующему сервису.
3. Сервис, назначенный диспетчером, для решения поставленной задачи производит вычисления.
4. Сервис выкладывает результат на сервер обмена данными.
5. Диспетчер отсылает клиенту сообщение о готовности результата.
6. Клиент скачивает результат сравнения с сервера обмена данными и выводит результат пользователю.

Заключение

Необходимость разработки данной автоматизированной системы облачного моделирования обусловлено ситуациями, когда возникает необходимость проверить и исключить некорректные модели для использования в имитации экспериментов над реальными объектами доступным способом через «облако». В рамках разработки системы были решены следующие задачи:

- создание эталонной имитационной модели открытой системы массового обслуживания M/M/5 и проведение имитационного моделирования;
- реализация процесса сравнения результативных показателей моделей параметрическими и непараметрическими методами;
- реализация клиент-серверного приложения для обращения к серверу через «облако» и для осуществления проверки моделей пользователей ИС.

Литература

1. ООО «Элина – компьютер». Учебное пособие по GPSS World. Перевод с английского // Казань: «Мастер Лайн», 2002. 272с
2. *Якимов И.М., Кирпичников А.П., Зайнуллина Г.Р., Яхина З.Т*. Оценка достоверности результатов имитационного моделирования по результатам аналитического моделирования // Казань: Вестник Казан. технол. ун-та. 2015. Т. 18, № 6. С. 173–178.
3. *Кирпичников А.П.* Методы прикладной теории массового обслуживания // Казань: Изд-во Казанс. гос. ун-та, 2011. 200 с.
4. *Р.А. Шмойлова, В.Г. Минашкин, Н.А. Садовникова, Е.Б. Шувалова.* Теория статистики // Учебник. М.: Финансы и статистика, 2004. 656 с.
5. *Девятков В.В., Девятков Т.В.* Облачное моделирование – история, концепции, состояние // Информационно-измерительные и управляющие системы. 2016. Т. 14, № 12. С. 30–37.

УДК 519.8

О модификациях необходимых условий оптимальности для гладких экстремальных задач

П.А. Бирюкова

Московский физико-технический институт (государственный университет)

В работе рассматриваются необходимые условия оптимальности для экстремальной задачи вида:

$$\text{найти } \min f(x), \text{ если } x \in \mathbb{R}^n;\ \varphi_i(x) \le 0,\ i=\overline{1,m};\ h_j(x)=0,\ j=\overline{1,l}. \tag{1}$$

Предполагается, что решение задачи x^* существует, а функции $f, \varphi_i, i=\overline{1,m};\ h_j, j=\overline{1,l}$ непрерывно дифференцируемые. Пусть регулярная функция Лагранжа задачи (1) имеет вид:

$$L(x,\lambda,\mu) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(x) + \sum_{j=1}^{n} \mu_j h_j(x), \tag{2}$$

где $\lambda_i \ge 0,\ i=\overline{1,m}$ и $\mu_j, j=\overline{1,l}-$ множители Лагранжа. Известные необходимые условия (НУ) экстремума имеют вид [1]:

$$\begin{aligned} &\nabla_x L(x,\lambda,\mu) = \nabla_x f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla_x \varphi_i(x) + \sum_{j=1}^{l} \mu_j \nabla_x h(x) = 0, \\ &h_j(x)=0, j=\overline{1,l},\ \lambda_i \varphi_i(x)=0,\ \lambda_i \ge 0,\ i=\overline{1,m}. \end{aligned} \tag{3}$$

Модификации НУ оптимальности, рассматриваемые в данной работе, основаны на преобразовании НУ в методе штрафных функций (ШФ) решения задачи (1) следующего вида:

$$\text{Найти } \min F(x,\tau) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} P(\tau,\varphi_i),\ x \in \mathbb{R}^n,\ h_j(x)=0,\ j=\overline{1,l}, \tag{4}$$

где $P(\tau,\varphi_i),\ i=\overline{1,m}-$ штрафные функции, а $\tau-$ коэффициент штрафа, $\tau \to 0_+$ [1].

НУ экстремума задачи (4) имеет вид

$$\nabla_x \tilde{L}(x,\lambda,\mu,\tau) = \nabla_x f(x) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial P(\tau,\varphi_i)}{\partial \varphi_i} \nabla_x \varphi_i(x) + \sum_{j=1}^{l} \mu_j \nabla_x h_j(x) = 0;\ h_j(x)=0, j=\overline{1,l}. \tag{5}$$

Если в (5) обозначить $\lambda_i = \dfrac{\partial P(\tau,\varphi_i)}{\partial \varphi_i},\ i=\overline{1,m},$ то $\nabla_x L(x,\lambda,\mu)=0$ и $\nabla_x \tilde{L}(x,\lambda,\mu)=0$ совпадают по форме записи. Известно, что $\lim\limits_{\tau\to 0} \dfrac{\partial P(\tau,\varphi_i)}{\partial \varphi_i} = \lambda_i,\ i=\overline{1,m},$ где λ_i- множители Лагранжа в (3) [1].

Пусть функции штрафа $P(\tau,\varphi_i)$ и $\dfrac{\partial P(\tau,\varphi_i)}{\partial \varphi_i} > 0,\ i=\overline{1,m}$ строго монотонно возрастающие по φ_i функции, причем $\dfrac{\partial P(\tau,\varphi_i)}{\partial \varphi_i} = \lambda_i$ имеет обратную функцию $R(\tau,\lambda_i)$, т.е. имеет место представление $\varphi_i = R(\tau,\lambda_i), i=\overline{1,m}.$ Преобразование равенств $\lambda_i = \dfrac{\partial P(\tau,\varphi_i)}{\partial \varphi_i} > 0,\ i=\overline{1,m}$ к виду $\varphi_i = R(\tau,\lambda_i)$ назовем *R*-преобразованием ШФ. Применяя *R*-преобразование к системе уравнений (5) для всех $\dfrac{\partial P(\tau,\varphi_i)}{\partial \varphi_i},\ i=\overline{1,m},$ получим

$$\nabla_x f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla_x \varphi_i(x) + \sum_{j=1}^{l} \mu_j \nabla_x h_j(x) = 0;\ h_j(x)=0, j=\overline{1,l};\ \varphi_i(x)=R(\tau,\lambda_i),\ i=\overline{1,m}. \tag{6}$$

Примером функции $P(\tau,\varphi)$ является $P(\tau,\varphi) = \tau e^{\frac{\varphi}{\tau}},\ \dfrac{\partial P}{\partial \varphi} = e^{\frac{\varphi}{\tau}},\ R(\tau,\lambda) = \tau \ln \lambda.$

В системе (6) $n+m+l$ уравнений и $n+m+l$ переменных. $R-$ преобразование в системе можно применять не обязательно ко всем $\frac{\partial P(\tau,\varphi_i)}{\partial \varphi_i}$, $i=\overline{1,m}$, а к любому их набору.

Таким образом возможно получить 2^m эквивалентных модификаций системы уравнений (5), которые являются специальной формой, зависящей от $\tau>0$, НУ оптимальности задачи (1). Число этих уравнений и переменных варьируется от $n+l$ до $n+m+l$. Если для задачи (1) построить другую функцию $F(x,\tau)$ из (4), то можно получить модификации НУ другого вида. Если решить систему (6), то получим приближенное решение задачи (1) $x(\tau)$, $\lambda(\tau)$, $\mu(\tau)$. При выполнении определенных условий решение задачи (1): $x^*=\lim\limits_{\tau\to 0}x(\tau)$, $\lambda^*=\lim\limits_{\tau\to 0}\lambda(\tau)$, $\mu^*=\lim\limits_{\tau\to 0}\mu(\tau)$ удовлетворяет системе (3).

Известен недостаток метода ШФ решения задачи (4), заключающийся в том, что в окрестности ее решения при $\tau\to 0$ число обусловленности γ матрицы $F''_{xx}(x,\tau)$ $\gamma\to+\infty$, что делает все методы решения задачи (4) неустойчивыми [1]. В отличие от (4) число обусловленности матрицы Якоби системы (6) слабо зависит от коэффициента штрафа τ, и методы решения системы (6) являются более устойчивыми по сравнению с методами ШФ.

В заключение заметим, что $R-$ преобразование для частного случая экстремальной задачи (1) применялось в работе [2]. Построение НУ оптимальности в [2] проводилось по другой схеме, названной «метод обратных связей».

Литература

1. *Измайлов А.Ф., Солодов М.В.* Численные методы оптимизации. М: Физматлит, 2003.
2. *Умнов Е.А., Умнов А.Е.* Параметрический анализ в задачах математического программирования // Труды МФТИ. 2014. Т.6, № 3(23). С.73 – 83

УДК 519.21

Модификация модели авторегрессии — скользящего среднего для моделирования последовательностей с равномерным распределением

С.В. Гарбарь

Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого

Моделирование стационарных случайных последовательностей используется при моделировании в радиотехнике, теории связи, механике жидкости и газа, метеорологии и т.д., могут быть использованы при проверке алгоритмов отыскания оптимальной стратегии в задачах управления.

Рассмотрим задачу моделирования стационарной последовательности стандартных равномерно распределённых случайных величин $\{Y(t)\}$ с заданным значением коэффициента корреляции между соседними членами (то есть заданным значением автокорреляционной функции в точке 1 — $R(1)$). Под стандартной равномерно распределённой случайной величиной понимается случайная величина, равномерно распределенная на отрезке [0; 1].

В работах [1, 2] был описан и исследован метод, который позволяет сохранить равномерность равномерного распределения в алгоритмах, основанных на моделях авторегрессии и скользящего среднего путём введения дополнительного линейного преобразования очередного члена генерируемой последовательности, то есть описан метод моделирования стационарной в узком смысле случайной последовательности с равномерным распределением.

Задачей данной работы является объединение предложенных ранее методов для построения модели авторегрессии — скользящего среднего и исследование параметров полученного алгоритма. В качестве подхода для этого объединения предлагается

использовать случайные коэффициенты по аналогии с подходом, использованным автором в [3] для моделирования строго стационарных случайных последовательностей с использованием алгоритмов авторегрессии.

Модель авторегрессии — скользящего среднего первого и первого порядков ARMA(1,1) задается уравнением

$$Y(t) = a_{AR} \cdot Y(t-1) + a_{MA} \cdot X(t-1) + b \cdot X(t) \quad (1)$$

при $a_{AR} \geq 0, a_{MA} \geq 0, b \geq 0, a_{AR} + a_{MA} + b = 1$ предполагает преобразование белого шума $\{X(t)\}$ в последовательность $\{Y(t)\}$ с корреляционной функцией вида $R(1) = a_{AR} + a_{MA}$, $R(\tau) = a_{AR}^{\tau}$ при $|\tau| \geq 2$.

Значение последовательности в момент времени t формируется как комбинация её значения в момент $(t–1)$ и двух независимых случайных составляющих в эти моменты времени. Полученная при этом последовательность $\{Y(t)\}$ будет стационарной в широком смысле.

Линейная комбинация $Y(t) = Z(t–1) + b_m \cdot X(t)$ двух стандартных равномерно распределённых случайных величин $Z(t–1)$ и $X(t)$ при $b_m \geq 1$ имеет плотность распределения вида

$$g^*(y) = \begin{cases} y/b_m, \text{при } y \in [0;1]; \\ 1/b_m, \text{при } y \in [1; b_m]; \\ \dfrac{b_m + 1 - y}{b_m}, \text{при } y \in [b_m; b_m + 1]; \\ 0, \text{при } y < 0 \text{ или } y > b_m + 1, \end{cases}$$

при условии, что $b_m \geq 1$.

Проведём преобразование полученной случайной величины $Y^*(t)$: если её значение $y^* \in [0; 0{,}5]$, то возьмём вместо него значение $1 – y^*$. Если же $y^* \in [b_m + 0{,}5; b_m + 1]$, то изменим его на $2b_m – y^* + 1$. Назовём это преобразование манипулированием участками функции плотности. В результате проведённого преобразования изменятся значения функции плотности на отрезках $[0; 1]$ и $[b_m; b_m + 1]$ и, соответственно, вероятности появления значений случайной величины в них. Полученная случайная величина $Y^{**}(t)$ равномерно распределена на отрезке $[0{,}5; b_m + 0{,}5]$. Взяв вместо полученного значения y^{**} линейно преобразованное $y = \dfrac{y^{**} - 0{,}5}{b}$, получим реализацию случайной величины $Y(t)$ со стандартным равномерным распределением.

Для получения наперёд заданного требуемого значения коэффициента корреляции следует подобрать соответствующее значение коэффициента b_m. Для этого следует найти совместную плотности соседних членов последовательности. Эта задача должна быть решена отдельно для модели авторегрессии и модели скользящего среднего.

При этом в случае если $Z(t–1)=Y(t–1)$, то последовательность $\{Y(t)\}$ описывается моделью авторегрессии. Если же $Z(t–1)=X(t–1)$, то реализуется модель скользящего среднего.

После нахождения совместной плотности распределения соседних членов последовательности в модели авторегрессии, по определению найден коэффициент корреляции между ними

$$R_{AR}(1) = \frac{1}{b_m} - \frac{3}{8b_m^2}.$$

Максимальное значение $R_{AR}(1)$, которое может быть получено, равно 0,625.

Для модели скользящего среднего.

$$R_{MA}(1) = \frac{40b_m^5 - 15b_m^4 - 20b_m^3 + 15b_m^2 - 5b_m + 1}{40b_m^6}.$$

Максимальное его значение $R_{MA}(1) \approx 0{,}423194$ достигается при $b_m \approx 1{,}24855$.

Для получения комбинированной модели авторегрессии — скользящего среднего с манипулированием участками функции плотности предлагается использовать вместо детерминированных коэффициентов a_{AR}, a_{MA} случайные ортогональные двоичные, то есть на каждом шаге определять, которая из двух моделей. При использовании подхода, манипулирующего участками функции плотности, уравнение модели следует записать в виде

$$Y(t) = AY(t) + (1 - A)\, X(t) + b_m X(t - 1).$$

Коэффициент A случайный, принимающий значения 0 и 1 с вероятностями $P(A = 1) = p_{AR}$, $P(A = 0) = p_{MA} = 1 - p_{AR}$.

Соответственно, коэффициент корреляции между соседними членами последовательности может быть найден как

$$R_{ARMA}(1) = \frac{1}{b_m} - \frac{3}{8b_m^2} + (1 - p_{AR})\frac{-20b_m^3 + 15b_m^2 - 5b_m + 1}{40b_m^6}.$$

Коэффициент корреляции между отстоящими на большее расстояние членами последовательности

$$R(\tau) = p_{AR}^{|\tau|}\left(\frac{1}{b_m} - \frac{3}{8b_m^2}\right)^{|\tau|} \text{ при } |\tau| \geq 2\,.$$

Таким образом, следующий член последовательности либо равен линейной комбинации двух независимых равномерно распределённых на единичном отрезке случайных величин, либо равен линейной функции от данной линейной комбинации.

Литература

1. *Garbar S.V.* Manipulating intervals of probability density function in autoregression model for simulating strictly stationary random sequences // International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 2016. V. 10. P. 270–273. ISSN: 1998-0140.
2. *Гарбарь С.В.* Манипулирование участками функции плотности в модели скользящего среднего при моделировании случайных последовательностей с равномерным распределением // Вестн. Новг. гос. ун-та. Сер.: Технические науки. 2016. № 4 (95). С.37–40.
3. *Кирьянов Б.Ф., Кознов А.В.* Процессы авторегрессии со случайными коэффициентами и их применение при моделировании радиотехнических систем // Прикладная математика: Межвуз. сб. / под ред. Б. Ф. Кирьянова; Новгород: НовГУ, 1994. Вып. 1. С. 3–8.

УДК 519.872.6

Влияние введения в транспортный поток полностью автономных автомобилей на общие задержки, возникающие при преодолении управляемого перекрёстка

Б.В. Галицкий

Московский физико-технический институт (государственный университет)

В последнее время всё более популярной становится концепция «умного города» или «smart city», а в связи с быстрым развитием вычислительной техники вошли в обиход методы имитационного моделирования, позволяющие рассчитать рассматриваемые процессы более точно, чем упрощенные методы более крупных взаимодействий. В данной работе рассматривается модель транспортной сети, в которую введены полностью автономные автотранспортные средства (АТС).

В процессе развития теории введения в транспортный поток полностью автономных АТС возникло два основных подхода к этой задаче. Первый заключается в использовании для полностью автономных АТС отдельных полос. Второй подход рассматривает смешанный поток АТС.

Механизмы управления смешанным потоком АТС рассматриваются в основном в контексте того, что автономные автомобили полностью имитируют поведение обыкновенных автомобилей, иногда подразумевается, что автономный транспорт обладает

меньшим временем реакции «водителя» на обстановку. К примеру, в таких системах моделирования движения PRT (personal rapid transit), как VIPSIM или PRTSIM для микроскопического моделирования используются различные вариации модели разумного водителя Трайбера.

Движение смешанных и сепарированных потоков АТС на перекрёстках и обычных дорогах с макроскопической точки зрения почти не освещено в литературе. Автором предлагается решение задачи о задержках, возникающих при преодолении управляемого перекрёстка, с точки зрения теории систем массового обслуживания. Полагается, что время обслуживания автономного АТС на перекрёстке может быть получено делением времени обслуживания обычного АТС на некий коэффициент эффективности (больший 1), связанный с более быстрой реакцией водителя.

Исследование проведено для Т-образного перекрёстка в случае потока с фиксированным процентом автономных автомобилей.

Литература

1. *Babicheva*. *T.S.* The Use of Queuing Theory at Research and Optimization of Traffic on the Signal-controlled Road Intersections // 3rd International Conference on Information Technology and Quantitative Management, ITQM 2015. 2015. V. 55. P. 469–478.
2. *Helbing D., Hennecke A., Shvetsov V., Treiber M*. Micro-and macro-simulation of freeway traffic // Mathematical and computer modelling, 2002. V. 35, N 5–6. P. 517–547. 292.
3. *Rouphail N., Tarko A., Li Jing*. Traffic flow at signalized intersections // TRB Special Report 165: Traffic Flow Theory. 1975.

Секция математического моделирования в экономике, экологии и социологии

УДК 519.86

Методы многомерного метрического анализа социальных данных

Г.К. Каменев[1], И.Г. Каменев[1,2]

[1]Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН
[2]НОЧУ ВО «Синергия»

Многие теоретические и прикладные задачи в общественных науках сегодня сводятся к анализу многомерных множеств. В общем виде элементы таких множеств могут быть описаны как набор количественных характеристик субъектов (потребителей, избирателей, работников, предприятий, сообществ и др.). Исходя из различных сочетаний характеристик, субъекты подразделяются на категории (классы), каждому из которых приписывается определенная модель поведения. Подобным образом могут изучаться потребительское поведение, модели стратегического управления, свойства человеческого капитала, политические предпочтения и т.д. [1, 2]. Поскольку возможности сбора массовой статистики ограничены, для построения таких моделей используются данные выборочных обследований. Подходы к сбору первичных данных включают в себя работу с данными сплошных и выборочных социологических исследований, рандомизированную модельную генерацию данных, работу с большими объемами данных естественного происхождения (big data).

Таким образом, становится актуальной разработка математических методов метрического анализа и статистической надежности социологических совокупностей модельной или выборочной генерации в многомерном пространстве, которые бы учитывали, как частотность, т.е. меру, так и удаленность, т.е. метрику. В настоящей работе предлагается проводить метрический анализ надежности многомерных социологических выборок с помощью построения для генеральной совокупности (ε,δ)-сетей (К. Э. Шеннон [3]) методами аппроксимации и визуализации неявно заданных множеств [4 – 6], в частности, с помощью фильтрации большого потока данных методом глубоких ям [7].

Рассмотрим теперь вопрос о построении и визуализации многомерных генеральных совокупностей (Statistical population), лежащих в основе многомерных множеств модельной или выборочной генерации. В качестве генеральной совокупности мы будем рассматривать случайную векторную величину $a=(a_1,...,a_m)\in\mathbf{R}^m$, принимающую конечное, возможно очень большое число различных значений из множества $A=(a^1,...,a^L)\subset\mathbf{R}^m$. Пусть на совокупности A задана некоторая многомерная случайная величина Ξ, в самом общем виде отражающая процесс получения социологической информации. Нас будет интересовать не закон распределения этой величины, а способ метрического восстановления генеральной совокупности A по некоторому подмножеству из A и независимой выборке объема N.

Универсальным средством аппроксимации сложных метрических объектов являются метрические ε-сети. Пусть A и U – непустые подмножества метрического пространства **R**. Множество U называется *метрической ε-сетью для A*, если любая точка A расположена на расстоянии не большем, чем ε, от некоторой точки U. Если конечное U является метрической ε-сетью для A, то множество A имеет *аппроксимацию* в виде *ε-покрытия*, состоящего из системы шаров радиуса ε с центрами в точках U. В настоящей статье будет использован подход, разработанный в [7] для стохастически заданных множеств, т.е. для множеств с заданной на них вероятностной мерой. Предполагается, что

имеется возможность получения независимых выборок значительного объема, т.е. случайных точек, принадлежащих ограниченному носителю в заданном метрическом пространстве. Заметим, что при стохастическом подходе к построению метрических сетей и покрытий возникает дополнительная проблема надежности оценок точности и качества.

Пусть в пространстве **R** задано некоторое конечное множество $T \subset \mathbf{R}$, которое мы будем в дальнейшем называть *базой* сети или покрытия. Обозначим через $[T]_\varepsilon$ его замкнутую ε-окрестность. Пусть на борелевской σ-алгебре $\mathbf{B}(A)$ задана вероятностная мера $\mu(\cdot)$. Множество T называется (ε, δ)-*сетью* для A (в смысле определения К. Э. Шеннона), если $\mu(A/[T]_\varepsilon) < \delta$, т.е. любая точка A, за исключением множества меры δ, расположена на расстоянии не большем, чем ε, от некоторой точки T [3]. Методы построения (ε, δ)-сетей для стохастически заданных множеств рассмотрены в [7]. В случае больших данных (тысячи и миллионы точек) эти методы основаны на разделении выборки на базовую и тестовую часть, которая используется для оценки с заданной надежностью меры δ генеральной совокупности, лежащей вне ε-окрестности базовой части. В случае модельной генерации или big data (миллиарды точек и более), используется метод глубоких ям для фильтрации потока случайных точек с целью получить равномерное распределение отобранных базовых точек, ε-окрестность которых с заданной надежностью является (ε, δ)-сетью генеральной совокупности. При разделении на базу и тестовую выборки малого объема (сотни точек) могут быть использованы различные методы генерации статистического бутстрепа.

После построения аппроксимации социологической совокупности модельной или выборочной генерации в виде объединения метрических шаров, соответствующих заданной точности, анализ такого множества может проводиться средствами Диалоговых Карт Решений, разработанных в Вычислительном Центре РАН в рамках метода аппроксимации и визуализации неявно заданных множеств [4 – 6].

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, проект № 14-11-00432.

Литература

1. *Саганенко Г. И.* Структура эмпирического результата в социологии и проблема его надежности // Социология: методология, методы, математическое моделирование, 1994. № 3 – 4. С. 5–22.
2. *Каменев И.Г.* К вопросу о структуре инвестиций в человеческие ресурсы // Креативная экономика, 2014. №5 (89). С. 4–5.
3. *Шеннон К.* Математическая теория связи (1948), приложение 7. В кн. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. М.: Изд. Иностранной Литературы, 1963.
4. *V.A. Bushenkov, O.L. Chernykh, G.K. Kamenev, and A.V. Lotov.* Multidimensional Images Given by Mappings: Construction and Visualization // Pattern Recognition and Image Analysis, 1995. V. 5, N. 1. P. 35–56.
5. *Лотов А.В., Бушенков В.А., Каменев Г.К., Черных О.Л.* Компьютер и поиск компромисса. Метод достижимых целей. – М.: Наука, 1997.
6. *Lotov A.V., Bushenkov V.A., and Kamenev G.K.* Interactive Decision Maps. Approximation and Visualization of Pareto Frontier. Appl. Optimization. V. 89. Kluwer Academic Publishers. Boston / Dordrecht / New York / London. 2004.
7. *Kamenev G.K.* Approximation of Completely Bounded Sets by the Deep Holes Method // Comput. Maths. Math. Phys. 2001. V.41. N 11. P. 1667–1675.

УДК 330.47

Построение модели стоимости информации о заемщике кредитной организации

М.С. Бачурин[1], Н.Н. Пантелеева[1], К.А. Клименко[2]

[1]Московский физико-технический институт (государственный университет)
[2]Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

В последние несколько лет в банковской сфере активно развивается рынок больших данных, и классические задачи по сбору и анализу больших объемов информации о клиентах дополнились деятельностью по продаже и покупке датасетов, предназначенных для глубокой аналитики в отношении потенциальных заемщиков. С точки зрения банков эти данные могут быть полезны для определения кредитоспособности заемщика. Но для того, чтобы понять рентабельность инвестиций в данные, необходимо понимать экономический эффект от их использования.

Проблема оценки информации с точки зрения ее прикладного результата рассматривается в научных работах, начиная с 60-х годов XX века. Одними из первых авторов, уделивших внимание не только вероятностным характеристикам информации, но и следующей из них экономической ценности, были:

– Джордж Дж. Стиглер, в работе “Economics of information” [1], рассмотревший проблему поиска покупателем наилучшей цены.

– Рональд А. Ховард, в работе “Information value theory” [2], рассмотревший проблему тендерных закупок и определения участником оптимальной цены для выставления предложения.

В настоящей работе построена модель оценки стоимости информации о заемщике кредитной организации. Вначале сформулированы основные параметры депозитно-кредитного процесса, определяющие его экономическую сторону. Затем, на основе этой модели, рассчитана экономическая ценность информации о заемщике в зависимости от того, насколько она снижает ошибку в определении истинного значения вероятности дефолта заемщика. Решена задача для различных случаев, каждый из которых имеет свои преимущества на практике.

Литература

1. *Stigler G.J.* The Economics of Information // The Journal of Political Economy. 1961. V. 69. I. 3. P. 213–225.
2. *Howard R.A.* Information Value Theory // IEEE Transactions on Systems Science and Cybernetics. 1966. V. ssc-2, N 1. P. 22–26.

УДК 519.86

Поиск оптимальной стратегии манипуляции ценой биржевого актива путём прямого участия в торгах

С.В. Новогородцев, К.А. Клименко

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Моделирование процесса ценообразования финансовых активов является одной из наиболее востребованных задач прикладной математики.

Данная работа посвящена проблеме исполнения крупного заказа на покупку или продажу акций на бирже методом размещения публичных ордеров. Для таких заказов не применимы законы эффективного рынка, поскольку из-за своего размера они оказывают непосредственное влияние на цену актива. Прогноз степени этого влияния и выбор оптимальной стратегии реализации заказа требуют построения модели неэффективного рынка.

Современные подходы к моделированию неэффективного рынка в основном сводятся к моделированию динамики "биржевого стакана" [1] с некоторыми допущениями – в дискретном или непрерывном случае трейдер выбирает оптимальную стратегию торговли по входным данным: число сделок, временные промежутки и объемы торгов и т.п.

Помимо моделирования неэффективного рыночного механизма, ряд исследований направлен на поиск возможностей его улучшения. Например, в работе [2] авторы

предлагают проводить внебиржевые клиринговые сессии перед каждым раундом биржевого аукциона.

В настоящей работе мы модифицируем модель неэффективного рынка, опираясь на результаты [1] и [2], но используем ее для решения обратной им задачи – поиска оптимальной стратегии для намеренной манипуляции рыночной ценой актива.

Литература

1. *Obizhaeva A. A., Wang J.* Optimal trading strategy and supply/demand dynamics // Journal of Financial Markets. 2013. V. 16, N 1. P. 1–32.
2. *Duffie D., Zhu H.* Size discovery // The Review of Financial Studies. 2017. V. 30, N 4. P. 1095–1150.

УДК 330.16

Анализ факторов, влияющих на отношение к домашним животным в домохозяйствах России.

М.А. Кириллова

Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации
Московский физико-технический институт (государственный университет)

В работе исследуются две модели, характеризующие отношение домохозяйств (д/х) России к питомцам. Предположение, проверяемое в обеих моделях, состоит в том, что главную роль в отношениях с питомцами играют дети. Так, маленькие дети возрастом до двух лет являются заменителями питомцев по ряду причин (например, ради безопасности ребенка или нехватки времени на животное). Дети старше являются комплементами, так как животное помогает развивать чувство ответственности и т.д.

В первой модели рассмотрены факторы, влияющие на решение о приобретении питомца:

$$A_i = \beta c_i + \gamma I_i + \varepsilon_{1i},$$

где A_i – бинарная переменная, принимающая значение 1, если в д/х есть домашние животные и 0, если их нет; c_i – количество детей в домохозяйстве; I_i – доход д/х.

Во второй модели рассмотрены факторы, влияющие на время, которое тратят взрослые члены д/х ради заботы о питомцах:

$$B_i = \alpha w_i + \delta k_i + \varepsilon_{2i},$$

где B_i – количество минут в день по уходу за питомцами; w_i – количество минут в день для основной работы; k_i – время по уходу за детьми.

Для более подробного анализа и проверки правильности оценок коэффициентов модели включаются также переменные, характеризующие количество детей младше двух лет и старше двух лет; бинарные переменные наличия собственного жилья, проживания в городе, пола, развода/вдовства, высшего образования и другие. Д/х с семьями-одиночками и супружескими парами рассматриваются отдельно.

Получены результаты, подтверждающие гипотезу о маленьких детях-субститутах и старших детях-комплементах. Кроме того, замечено, что городские жители менее склонны заводить питомцев, но уделяют им больше времени; женщины заводят их чаще, чем мужчины (что не влияет на время, проведенное с питомцем); доходы д/х не влияют на решение о приобретении питомца, что может говорить о «дешевизне» содержания домашних животных в России. Также результаты позволяют сравнить отношение к питомцам в России и в США. Основные отличия заключаются в более высоких тратах на питомцев и большей значимостью наличия собственного жилья в США (наличие питомца ограничивает жителей США в выборе места для проживания).

В исследовании используются данные выборочного наблюдения использования суточного фонда времени населением, собранные федеральной службой государственной статистики в 2014 году [2].

Литература

1. *Schwarz P.M.* [et al.]. Animal house: Economics of pets and the household // The BEJournal of Economic Analysis Policy. 2007. V. 7, N 1. P. 35.
2. http://www.gks.ru/free_doc/new_site/population/urov/sut_fond/survey0/index.html

УДК 519.8, 519.7

Математическая модель функционирования пенсионных фондов и методы оценки их устойчивости

М.А. Лепская

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Представим пенсионный фонд как некий финансовый механизм, который пополняется за счет ежегодных выплат работающих участников (тех, кто уже вступил в пенсионную систему, но еще не достиг пенсионного возраста), и расходуется на периодическую выплату пенсий всем пенсионерам системы. В результате введения различных актуарных функций (дожития, ставки заработной платы, прогнозируемой ставки пенсионных выплат, количества участников пенсионной схемы, актуарной настоящей стоимости страхового аннуитета, уровня пенсионных выплат), модель функционирования пенсионных фондов сводится к двум уравнениям баланса для фонда работающих участников (так называемый *фонд накопленных обязательств*) и фонда пенсионеров, наполняемый взносами, рассчитанными по методу конечного финансирования, и инвестиционными доходами, и расходуемый на выплату пенсий. Разделение пенсионного фонда на две части позволяет более наглядно увидеть определенный денежный баланс, который соблюдается для фонда работающих участников и для фонда пенсионеров. При допущении, что экономическая ситуация на рынке может измениться, наибольший интерес представляет определение условий, при которых риск разорения фонда работающих участников велик, и каким образом его можно уменьшить.

В данной статье рассматривается задача поиска вероятности разорения пенсионного фонда на конечном временном интервале. В качестве базовой модели рассматривается стандартная модель Крамера–Лундберга, которая претерпевает модификацию в данной работе в результате задания параметров поступления и выплат в фонд в виде случайных величин. Существует ряд факторов, которые можно рассматривать в качестве случайных величин в модели: время смерти участников пенсионной схемы, заработную плату участников, количество участников схемы, финансовые показатели (ставки дисконтирования и инвестиционного дохода, коэффициент инфляции, рост уровня заработной платы). Каждый из этих факторов с учетом задания их в виде случайных величин влияет на недетерминированность параметров поступлений и выплат в пенсионной схеме. В данной статье в качестве случайных факторов в постановке задачи рассматриваются количество человек, вступающие в пенсионную схему в год рассмотрения, и случайная смертность.

В настоящей работе была предложена стохастическая модель процесса изменения возрастного состава участников фонда, использование которой позволяет описать пенсионный фонд с любыми условиями вступления/выхода и сколь угодно сегментированным составом участников. На основе этой модели, с использованием методов актуарной математики может быть произведена оценка будущих финансовых потоков фонда и спрогнозирована динамика процесса его накопления. Предложенные имитационные алгоритмы могут быть использованы для оценки влияния на устойчивость фонда параметров формирования пенсионных взносов и выплат, а также стратегий

управления резервами, исследования чувствительности результатов деятельности пенсионного фонда к изменениям внешних факторов и макроэкономических показателей.

Литература

1. *Бауэрс Н., Гербер Х., Джонс Д., Несбитт С., Хикман Д.* Актуарная математика. – М.: Янус – К, 2001. 656 с.
2. *Бойков А.В*. Модель Крамера–Лундберга со стохастическими премиями // Теория вероятностей и её применение. 2002. Т. 47, № 3. С. 549–553.
3. *Виноградов О.П.* Об одном элементарном методе получения оценок вероятности разорения // Обозрение прикладной и промышленной математики. 1998. Т. 5, № 1. С. 134–149.
4. *Глухова Е.В., Змеев О.А., Ливщиц К.И.* Математические модели страхования. – Томск: Изд-во Томского университета, 2004. 180 с.
5. *Королев В.Ю., Бенинг В.Е., Шоргин С.Я.* Математические основы теории риска. – М.: Физматлит, 2007. 542 с.

Секция экспериментальной экономики

УДК 519.865, 330.16

Характер изменения принятия решений под влиянием социального взаимодействия

Т.С. Бабкина[1,3], А.О. Седуш[1], О.Р. Меньшикова[1], И С. Меньшиков[1,2]

[1]Московский физико-технический институт (государственный университет)
[2]Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН
[3]Национальный исследовательский Томский государственный университет

В мире все является взаимосвязанным. Каждое решение, принимаемое в настоящий момент, имеет отклик в будущем, хотим мы этого или нет. Поэтому мысли о сохранности имеющегося появлялись даже в зарождающих цивилизациях. Но примеры нерационального использования ресурсов из мировой истории говорят о том, что проблемы общественных благ все еще остаются актуальными и не изучены полностью. В связи с этим возникает вопрос, как можно решить эту проблему? Для общества важной задачей является переход от личностных стратегий к общественно полезным. Возможно ли это? Какие механизмы могут быть задействованы в этом процессе? Ранее в нашей Лаборатории Экспериментальной Экономики (ЛЭЭ) МФТИ было обнаружено, что введение социального взаимодействия между участниками (мы назвали этот этап социализацией) повышает уровень кооперации в игре Дилемма Заключенного [1]. Нам стало интересно посмотреть, будет ли социализация влиять на поведение и принятие решений в социальных дилеммах. Для этого нами была выбрана проблема исчерпаемости общественных ресурсов. Впервые эта задача была представлена как модификация игры Public Goods [2] и получила название Collective-Risk Social Dilemma. Идея заключается в том, что группе испытуемых сначала дается некий ресурс, из которого на первом этапе игры можно постепенно набирать себе баллы, но на втором этапе игры надо вернуть некоторое количество набранных баллов обратно, иначе можно потерять все баллы с некоторой долей вероятности. В этом состоит коллективный риск.

Описываемые эксперименты проводились в ЛЭЭ МФТИ. В эксперименте приняли участие студенты МФТИ. Набор на эксперименты осуществлялся через объявления в социальной сети https://vk.com в группе https://vk.com/ee_phystech, которая называется «Экспериментальная экономика на физтехе». Всего было проведено восемь экспериментов в течение весеннего учебного семестра 2016 года. В каждом эксперименте было задействовано 12 участников – в основном изначально незнакомых друг с другом студентов. Для этого при наборе испытуемых учитывались факультет, курс, номер группы и родной город участника. В итоге получилась база данных для 96 участников (62 из них мужчины).

Игра, предъявляемая участникам, повторяла дизайн [3] и делилась на две фазы и представляла следующее:

1) в фазе 1 у группы из P участников изначально имеется общая касса, в которой находится X баллов. В течение N периодов участники имеют возможность изымать из общей кассы 0, 1, 2, 3 или 4 балла;

2) после фазы 1 каждый участник имеет некий суммарный выигрыш, равный количеству баллов, которые он изъял в течение N периодов фазы 1. А также известна сумма полного изъятия всеми участниками – Y баллов;

3) в фазе 2 участники имеют возможность вернуть (инвестировать) обратно в общую кассу из тех сумм, которые каждый из участников получил после фазы 1. В течение N периодов участники могут вкладывать в общую фазу 0, 1, 2, 3 или 4 балла. Цель группы участников – вернуть (инвестировать) 53% от суммы полного изъятия в фазе 1 – Y. Если требуемый

уровень вложений (0,53Y) достигнут, то все участники получают суммы баллов, которые остались у них по окончании фазы 2, то есть разницы между индивидуальным изъятием и индивидуальным вложением участника в общую кассу. Если же группа не достигла требуемого уровня вложений (0,53Y), то с некоторой долей вероятности она не получит ничего. Вероятность все потерять определяется в зависимости от того, сколько процентов от X составляет Y.

В наших экспериментах каждая группа состояла из $P = 6$ участников. Количество периодов в первых четырёх экспериментах составляло $N = 10$ периодов, в оставшихся четырёх экспериментах $N = 5$ периодов. Соответственно, в игре с 10 периодами начальная сумма баллов в общей кассе X равнялась 240 баллам, в игре с пятью периодами $X = 120$ баллов.

В первых четырёх экспериментах участники играли в одну игру, затем социализировались и играли в еще одну игру в социализированных группах. В следующих четырёх экспериментах, в которых в игре было 5 периодов, участники играли подряд в две игры, затем социализировались и играли в еще две игры в социализированных группах. Удвоение игр было сделано для того, чтобы отследить эффект изменения стратегий именно за счет социализации.

Оказалось, что социализация сильнее влияет на мужчин, чем на женщин. Для мужчин две игры до социализации не отличаются друг от друга по характеру принятия решений, не различимы и две игры после социализации. Однако последняя игра до социализации и первая игра после нее статистически различны. Для женщин игры до социализации различаются, то есть имеют разный характер принятия решений.

Если смотреть на общие результаты, то всего было сыграно 24 игры до социализации и 24 игры после социализации. Процент неуспешных игр до социализации, т.е. игр, в которых участники не смогли достичь требуемого уровня вложений, равен 42%. Процент неуспешных игр после социализации равен 8%. При этом, если рассматривать игры с пятью периодами, то процент неуспешных игр до социализации в играх, которые шли первыми по счету – 38%, и вторыми по счету – 38%, то есть в среднем до социализации участникам не удавалось собирать требуемую сумму баллов, что приводило к коллективному риску.

Помимо этого, был проведен анализ количества так называемых условных кооператоров (conditional cooperators) и «халявщиков» (free-riders). Для этого использовался следующий метод. Можно считать, что участник оценивает средний уровень вложений других участников его группы на предыдущем шаге. Эта информация может влиять или не влиять на его текущий ход. Тогда, если посчитать корреляцию между средним уровнем вложений других участников группы на предыдущем шаге с вложением участника на текущем шаге, можно получить индикатор влияния вложений остальных участников. Считаем, что если эта корреляция больше или равна 0.5, то этот участник – положительный условный кооператор, а если меньше или равна –0.5, то отрицательный условный кооператор. Для подсчета количества халявщиков сравнивается средний требуемый уровень вложений на каждом ходе со средним вложением участника на каждом ходе. Если участник в среднем вкладывает меньше, чем это требуется, то он считается халявщиком. В играх с 10 периодами число положительных условных кооператоров увеличивается после социализации, а число отрицательных условных кооператоров уменьшается, при этом число халявщиков увеличивается после социализации.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантом РФФИ 16-01-00633А.

Литература

1. *Babkina T., Myagkov M., Lukinova E., Peshkovskaya A., Menshikova O., Berkman E.T.* Choice of the Group Increases Intra-Cooperation // Third Workshop on Experimental Economics and Machine Learning co-located with the 13th International Conference on Concept Lattices and Their Applications (CLA 2016). 2016. V. 1627. P. 13–23.
2. *Milinski M. [et al.].* The collective-risk social dilemma and the prevention of simulated dangerous climate change // Proceedings of the National Academy of Sciences. 2008. V. 105, N 7. P. 2291–2294.

3. *Kline R. [et al.].* Causal responsibility, asymmetric opportunity and inequality in anthropogenic climate change // Working Paper. 2014.

УДК 519.865, 330.16

Характер движения глаз связан с принятием решений в экономических задачах

***А.Г. Пешковская*[1,3], *Т.С. Бабкина*[1,2]**

[1]Томский Государственный Университет
[2]Московский физико-технический институт (государственный университет)
[3]Научно-исследовательский институт психического здоровья, Томский национальный исследовательский медицинский центр РАН

На данный момент известно, что глаза отражают некоторые процессы, происходящие в головном мозге [1]. Запись движения глаз (eye tracking) открывает широкие возможности для изучения принятия решений, поскольку позволяет регистрировать данные, характеризующие процесс принятия решения, а не фокусироваться только на его результате. Сопоставление реальных действий (выборов) испытуемого и характеристик глазодвигательной активности даст возможность строить модели поведения с учетом физиологии, что сделает их более точными.

Ранее [2, 3] было обнаружено, что в экспериментах с социальными дилеммами участники кооперируют на уровне 20% в группах с незнакомцами. Однако непродолжительное социальное взаимодействие и разделение на группы по предпочтениям позволяет выйти на уровень кооперации, сравнимый с уровнем кооперации группы с долгосрочными социальными связями. Уровень кооперации измерялся с помощью инструмента теории игр – игры «Дилемма заключенного (ДЗ)». Значения матрицы выигрышей были выбраны следующие: если оба участника кооперируют, то оба получают по 5 баллов, если оба предают – по 1 баллу. Если один участник кооперирует, а другой предает, то предатель получает 10 баллов, а кооператор 0 баллов. То есть участники каждый период игры выбирают между двумя стратегиями: кооперировать или предать. В зависимости от уровня кооперативности участники были разделены на кооператоров (выше 20% кооперативных ходов) и предателей (ниже 20%). Таким образом, задачей исследования было определить изменения в глазодвигательной активности в зависимости от социального контекста и принятия решений в ДЗ.

На данный момент было проведено две серии экспериментов. В первой серии количество участников равнялось 108 [4], во второй – 168. На каждый эксперимент приглашалось 12 человек. Из группы случайным образом выбирался один респондент, который экипировался мобильной системой трекинга глаз «SMI Eye Tracking Glasses» v.1.8. В итоге были получены характеристики движения глаз во время принятия решений от 23 респондентов.

Каждый эксперимент включал в себя три фазы.

1. Участники играли 20 раундов в ДЗ в группе незнакомцев. Оппонент менялся каждый раунд случайным образом.
2. Социализация или социальное взаимодействие: участники знакомились и делились на две группы по шесть человек по выбору.
3. Участники играли 22 раунда в ДЗ внутри социализированных групп по шесть человек. Оппонент также менялся каждый раунд игры случайным образом.

Для определения характеристик движения глаз матрица выигрышей ДЗ было разделена на области интереса (рис. 1).

Области интереса разделяются на выигрыши, реализуемые при различных стратегиях участника и его оппонента.

Для сравнения характеристик глазодвигательной активности участников использовались следующие показатели:

- Fixation Count – количество фиксаций на выделенной области в секунду;
- Dwell Time – процент просмотра выделенной области от просмотра всей области;
- Fixation Time – процент времени фиксации на выделенной области от общего времени просмотра этой выделенной области;
- Average Fixation Duration – среднее время фиксации на выделенной области.

Были получены следующие результаты.

1. Процесс принятия решений до социализации сопровождается большим суммарным временем просмотра и большим временем фиксаций на областях некооперативных выборов.
2. Процесс принятия решений после социализации сопровождается увеличением частоты фиксаций и снижением их продолжительности, а также большей частотой согласованных движений глаз и меньшей суммарной длиной всех перемещений взгляда в пути взора.
3. Участники, чаще выбирающие стратегию кооперировать, более подробно изучают матрицу выигрышей, демонстрируя большее количество фиксаций и возвратов к уже просмотренным областям.
4. Участники, чаще выбирающие стратегию предавать, демонстрируют устойчивые паттерны глазодвигательной активности при просмотре матрицы выигрышей на протяжении всего эксперимента. При этом они затрачивают меньше времени на просмотр области кооперативных исходов и больше – на область выбора некооперативных.

В исследовании установлено, что в первой фазе игры участники эксперимента проходят этап ознакомления с матрицей выигрышей, поэтому каждый раунд воспринимается ими как новая задача. На групповом этапе участники подходят к раундам как к серии, затрачивая на принятие решений меньше времени. Существуют различия в изучении задачи и принятии решений в зависимости от характера выбираемых стратегий: кооперировать или предавать. Всё это говорит о многогранности природы принятия решений. А также о возможности использования систем трекинга глаз в групповых экспериментах и о возможностях данного метода в исследовании и моделировании процессов принятия решений.

Рис. 1. Области интереса на матрице выигрышей ДЗ

Выполнено при поддержке Программы повышения конкурентоспособности Томского государственного университета.

Литература

1. *Pfeiffer U., Vogeley K., Schilbach L.* From gaze cueing to dual eye-tracking: novel approaches to investigate the neural correlates of gaze in social interaction // Neuroscience & Biobehavioral Reviews. 2013. V. 37, N 10. P. 2516 – 2528.
2. *Babkina T., Myagkov M., Lukinova E., Peshkovskaya A., Menshikova O., Berkman E.T.* Choice of the Group Increases Intra-Cooperation // Third Workshop on Experimental Economics and Machine

Learning co-located with the 13th International Conference on Concept Lattices and Their Applications (CLA 2016). 2016. V. 1627. P. 13 – 23.
3. *Berkman E., Lukinova E., Menshikov I., Myagkov M.* Sociality as a natural mechanism of public goods provision // PloS one. 2015. V. 10, N 3. P. e0119685.
4. *Peshkovskaya A., Babkina T., Myagkov M., Kulikov I., Ekshova K., Harriff K.* The socialization effect on decision making in the Prisoner's Dilemma game: An eye-tracking study // PloS one. 2017. V. 12, N 4. P. e0175492.

УДК 519.83

Информационные каскады в лаборатории

Д.М. Старков[1], И.С. Меньшиков[1,2]

[1]Московский физико-технический институт (государственный университет)
[2]Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН

В целях исследования процесса формирования общественного мнения по какому-либо событию в лаборатории экспериментальной экономики (ЛЭЭ) среди студентов МФТИ была проведена серия экспериментов, воспроизводящих модель информационных каскадов в контролируемых условиях.

Описание эксперимента. Лабораторная игра описывается следующим образом. Есть две урны: A, в которой 3 красных и 2 белых шара, и B, в которой 2 красных и 3 белых шара. До начала каждой попытки случайным образом определяется, из какой урны будут доставаться шары. Участники знают только, что урны равновероятны. В каждой попытке участники упорядочиваются случайным образом. Каждому участнику приватно показывается, какого цвета шар вынут из урны, после чего шар в урну возвращается. Участник должен угадать урну: A или B. Кроме приватного сигнала (цвет шара) участник видит все выборы урн всех участников до него. Все, кто правильно угадал урну, в конце периода получают по 50 очков, а кто не угадал – 0 очков. Очки по попыткам суммируются. По итогам участникам выплачивается вознаграждение по сумме заработанных очков.

Равновесие Нэша и каскады

В игре с приватной информацией о своем сигнале (шаре) игрок вынужден выработать некоторое отношение к мнению тех, кто сделал ход до него. Если он считает, что единственной целью любого другого участника (как и его самого) является максимизация собственного ожидаемого выигрыша, то мы приходим к концепции совершенного по подыграм равновесия Нэша (в этой игре для краткости будем его называть просто равновесием Нэша или сокращенно РН).

Нетрудно убедиться [1], что РН диктует выбор, согласованный с мнением большинства ранее высказанных мнений и своего сигнала. В случае равенства равновесной будет любая смешанная стратегия с вероятностью выбора по своему сигналу более ½.

Равновесная траектория после нескольких начальных колебаний между A и B будет представлять собой информационный каскад: стоит некоторому мнению повториться три раза, как всем последующим участникам РН диктует повтор сложившегося общественного мнения при возможном игнорировании собственной приватной информации. Так, например, если первые два шара белые и участники, следуя естественной логике, оба выбирают A, то, сколько бы потом красных шаров не выпало, все участники в равновесии будут выбирать A. Корректировки общественного мнения, как в случае игры с полной информацией, не произойдет.

Участники экспериментов весьма редко следуют равновесию Нэша. При этом каскады (три и более повторения одинакового мнения) встречаются, но не так часто. Более того, сформированный каскад может разрушиться, если участник проигнорирует мнение большинства и сформирует мнение (A или B) на основе приватной информации (своего шара).

QRE (равновесие дискретного отклика)

QRE (см. [2]) – это одна из популярных в экспериментальной экономике концепций, основанная на смягчении принципа наилучшего ответа Нэша. В данном случае чем лучше ответ, тем больше вероятность его выбрать. При этом в концепцию QRE входит свободный параметр λ, который настраивается по результатам эксперимента, исходя из принципа максимального правдоподобия. При $\lambda \to \infty$ получается обычное РН, а при $\lambda = 0$ – равновероятный выбор A или B. Траектории, порождаемые смешанными стратегиями, образующими QRE, как правило, достаточно близки к наблюдаемым траекториям мнений.

Как вариант предлагается рассматривать также концепцию QRE-BRF [1], в которой вводится параметр α, характеризующий в данном случае степень доверия к общественному мнению. При $\alpha = 1$ QRE-BRF совпадает с QRE. При $\alpha > 1$ общественное мнение недооценивается (по сравнению с правилом Байеса), а при $\alpha < 1$ оно переоценивается.

Результаты экспериментов. Приведем значения параметров для QRE и QRE-BRF по всем 8 экспериментам, проведенным в ЛЭЭ с 10 участниками в каждом.

Отметим, что для QRE параметр λ получается в приемлемом диапазоне от 2.2 до 6.5. Его величина может служить мерой близости результатов эксперимента к РН. Концепция QRE-BRF по сути провалилась для экспериментов 21.04.2017 и 15.09.2017, показав $\alpha >> 1$. В этих экспериментах некоторые участники действовали весьма оригинально, делая выбор не в соответствии с мнением большинства, но и против своей приватной информации.

В таблице 1 приведены средние длины каскадов по каждому эксперименту. Под длиной каскада мы понимаем число повторений одинаковых мнений минус 2. Обычно участники эксперимента мало знакомы друг с другом, однако на эксперимент 28 апреля была приглашена группа друзей, в результате чего средняя длина каскада оказалась выше. В последних трех экспериментах до начала игры проводилась процедура социализации участников разными способами. Социализация 6 октября оказалась успешной.

В таблице 1 приведены также средние точки начала каскадов. Точкой начала каскада считаем третий одинаковый выбор. Видна некоторая зависимость между длиной каскадов и их началом: более короткие каскады в среднем начинаются позже.

В последней колонке приведены средние за период суммарные выигрыши участников. Наименьшим оказался выигрыш 246 в эксперименте 21 апреля, длина каскада там тоже наименьшая. Наибольшие выигрыши 343 и 340, напротив, получились в экспериментах с хорошей социализацией участников и наибольшей длиной каскада, из чего можно заключить, что социализация в целом оказывает положительную роль.

Таблица 1

		lambda	alpha	Количество периодов	Средняя длина каскада	Среднее начало каскадов	Средний суммарный выигрыш
31.03.2017	QRE	3,47	1	10	3,18	5,09	295
	QRE-BRF	2,16	2,28				
07.04.2017	QRE	6,49	1	15	2,38	5,44	266
	QRE-BRF	4,56	1,9				
14.04.2017	QRE	4,61	1	12	3,62	5,54	291
	QRE-BRF	3,26	1,84				
21.04.2017	QRE	3,69	1	15	1,94	5,81	246
	QRE-BRF	1,19	83,33				
28.04.2017	QRE	3,9	1	15	4,07	4,73	340
	QRE-BRF	2,74	1,86				
15.09.2017	QRE	2,24	1	15	2,39	6,06	270
	QRE-BRF	0,82	85,96				
22.09.2017	QRE	2,87	1	15	2,18	6,41	286
	QRE-BRF	0,89	12,34				

29.09.2017	QRE	3,64	1	15	2,45	6,23	293
	QRE-BRF	1,69	3,96				
06.10.2017	QRE	3,21	1	15	4,63	4,75	343
	QRE-BRF	1,72	3,13				

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 16-01-00633А.

Литература

1. *Bikhchandani S., Hirshleifer D., and Welch I.* A Theory of Fads, Fashion, Custom, and Cultural Change as Information Cascades // Journal of Political Economy. October, 1992. P. 100.
2. *McKelvey R.D., Palfrey T.R.* Quantal response equilibria for normal form games // Games and economic behavior. 1995. 10. P. 6–38.

УДК 519.865, 330.16

Особенности функционального состояния участников лабораторных экспериментов

А.О. Седуш[1], О.Р. Меньшикова[1], И.С. Меньшиков[1,2]

[1]Московский физико-технический институт (государственный университет)
[2]Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН

Современные методы исследования позволяют объединить и проанализировать данные, поступающие по различным каналам. В Лаборатории экспериментальной экономики МФТИ проведение эксперимента организуется так, что имеется возможность анализировать поведенческие характеристики, полученные из протокола игры, результаты психологического тестирования (MBTI [1], Enneagram [2], Big Five [3]), а также данные стабилограммы, представляющие собой запись перемещения общего центра давления (ОЦД) по трем координатам.

Особые трудности возникают при обработке и анализе физиологических данных. Это связано с их объемом: измерение изменения ОЦД происходит с частотой 50 Гц, а игровая часть эксперимента длится не менее 30 минут, т.е. имеем 90 000 троек координат для одного участника. Для устранения этой трудности мы использовали агрегированные показатели: энергия, энтропия и индекс Хёрста [4] по периодам. Кроме того, во время измерений участникам приходится совершать физические действия, например, нажимать кнопку мыши при выборе того или иного действия в игре. При анализе возникает вопрос, как различить перемещение ОЦД из-за вынужденных действий в процессе игры и его перемещение, вызванное внутренними процессами организма (дыхание, сердечные ритмы, движение жидкостей в организме и проч.). Для разрешения этой трудности было принято методологическое решение: во время игры участникам давалось 10 секунд на то, чтобы увидеть результаты или принять решение. В этот период возможности нажать на кнопку просто не было, поэтому участники сидели спокойно и анализировали информацию, которую видели на экране без «лишних» движений. Данный способ организации эксперимента позволяет анализировать именно момент принятия решения с минимальными, насколько это возможно, посторонними шумами.

Рассмотрим для примера эксперимент «Информационные каскады». Участникам сообщалось, что имеется две урны А и Б. В первой урне три красных шарика и два белых, а во второй – два красных и три белых. Случайным образом компьютер выбирает урну, достает из нее шарик и показывает его первому участнику, который должен решить, какая урна была выбрана. Затем шарик возвращается в урну, второй участник выбирает из урны шарик и видит на экране его цвет (больше этого не видит никто), а также выбор первого игрока и т.д. Последний участник (десятый) видит, какие решения приняли все остальные игроки и цвет того шарика, который компьютер показывает только ему. В процессе всего эксперимента измерялось функциональное состояние участников, причем, как уже было

сказано выше, в момент, когда на экране появлялась информация, участнику не предоставлялась возможность нажать на кнопку, ему надо было подождать фиксированное время, и только после этого на экране появлялась кнопка.

В ходе исследования были получены следующие результаты.

1. Среднее значение индекса Хёрста по всем участникам данного эксперимента составляет 0,68, что довольно близко к значениям индекса Хёрста в природных явлениях (0,72–0,73). Такой уровень этого показателя означает, что это временной ряд с долговременной положительной автокорреляцией.
2. Среднее значение энергии у мальчиков – 0,24 – более чем в два раза выше, чем у девочек – 0,11.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантом РФФИ 16-01-00633А.

Литература

1. *Isabel Briggs Myers, Peter B. Myers.* Gifts Differing: Understanding Personality Type. 1995.
2. *Don Richard Riso, Russ Hudson.* Discovering your personality type. The essential introduction to the Enneagram. Boston – New York: Houghton Mifflin Company, 2003.
3. *Barrick M. R., Mount M. K.* The big five personality dimensions and job performance: a meta-analysis //Personnel psychology. 1991. Т. 44, N 1. P. 1–26.
4. *Лукьянов В.И., Максакова О.А., Меньшиков И.С., Меньшикова О.Р., Чабан А.Н.* Функциональное состояние и эффективность участников лабораторных рынков // Изв. РАН. ТиСУ. 2007. № 6. С. 202–219.

УДК 519.8

Исследование зависимости возникновения парадокса Браесса от различных условий методами экспериментальной экономики

Д.А. Смаль

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Парадокс Браесса – один из самых известных парадоксов, связанных с транспортной сетью и индивидуальным поведением участников передвижения, влияющим на общий исход игры. Парадокс описывает эффект, при котором дополнительная дуга сети может привести к ухудшению условий в равновесии Нэша. Большое количество исследований было выполнено на основе классической транспортной сети Браесса – ориентированный взвешенный граф, представленный на рис.1. Каждому участнику необходимо добраться из пункта 1 в пункт 4 с наименьшими затратами. При корреспонденции в 6 тыс. участников в час, в силу симметрии, равновесием Нэша является деление потоков поровну по двум имеющимся путям для случая 1, при этом время передвижения составляет 83 мин. При строительстве дополнительной дороги из пункта 3 в пункт 2 (случай 2) равновесным распределением является $x_{124} = x_{134} = x_{1324} = 2$, где x_{1k4} – число участников, выбравших *k*-ый путь, и кажется, что общие затраты должны уменьшиться, однако, полное время в пути составляет T = 92 мин [1]. Данный пример описывает классический парадокс Браесса.

Классическая транспортная сеть слишком простая и не отражает реальную транспортную ситуацию, поэтому многие исследователи считают, что парадокс Браесса – это чисто теоретическое явление. В связи с этим в лаборатории экспериментальной экономики МФТИ были проведены эксперименты с топологически более сложной транспортной сетью с асимметричными затратами, основанные на работе [2]. Данная транспортная сеть представлена на рис.2. По сравнению с классической сетью Браесса количество возможных путей передвижения было увеличено до трех для первой игры и до пяти для второй игры после добавления двух мостов с нулевыми затратами перемещения по ним для участников эксперимента. Важно отметить, что затраты на перемещения по путям стали асимметричными, что также приблизило проделанный эксперимент к реальной транспортной ситуации. Для проведения игры создана программа, использующая

оболочку z-Tree (университет Цюриха, Швейцария [3]). По итогам экспериментов было доказано, что парадокс Браесса выполняется и для топологически более сложной транспортной сети с асимметричными затратами.

Однако только ли от сети зависит выполнение парадокса Браесса? Влияют ли на исход игры поведение участников эксперимента, их мотивация, знания и прочие условия. Частично ответы на данные вопросы будут представлены в данной работе.

В работе будут отражены результаты проведенных экспериментов для участников, знакомых с методами теории игр и экспериментальной экономики, и участников, не обладающих данными знаниями, а также результаты игр с различными видами мотивации участников. В стандартной игре по исследованию парадокса участникам сперва предлагается игра без дополнительных маршрутов, а после с вновь построенными дугами/мостами. В данном исследовании будет показано влияние порядка игр во время проведения эксперимента, проанализирована способность участников оценивать и применять свой предыдущий опыт.

Для каждого эксперимента с особым условием будет проведено сравнение его результатов с итогами стандартного эксперимента и будет выявлено влияние данного условия на выполнение парадокса Браесса.

В качестве дополнительного исследования планируется исследование влияния эффекта этапа социализации участников на результаты лабораторной игры.

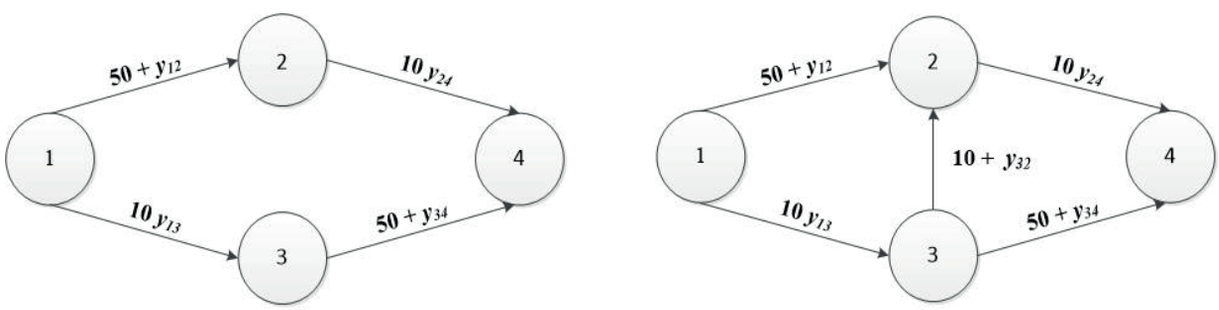


Рис. 1

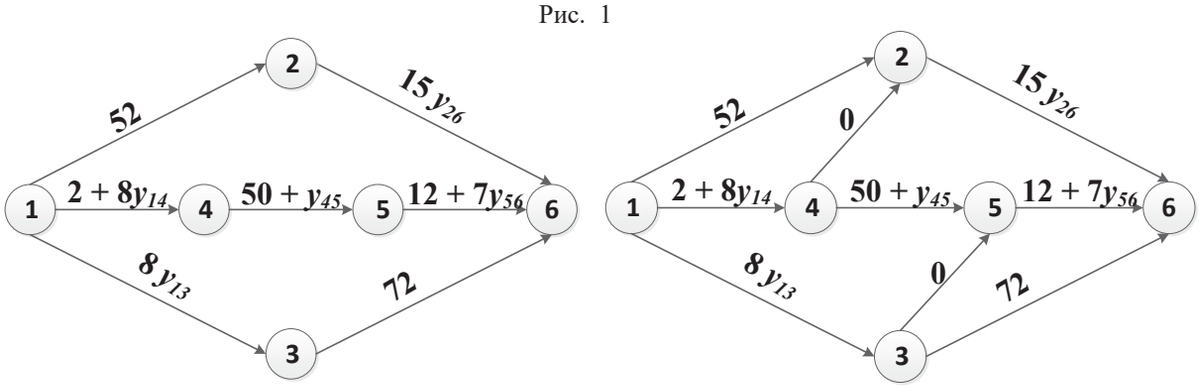


Рис. 2

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 16-01-00633А.

Литература

1. *Гасникова Е.В.* Моделирование динамики макросистем на основе концепции равновесия. Дисс. к.ф.-м.н. – М.: МФТИ. 2012. 90 с.
2. *Rapoport A., Kugler T., Dugar S., Gisches E.J.* Braess Paradox in the Laboratory: Experimental Study of Route Choice in Traffic Networks with Asymmetric Costs // Decision Modeling and Behavior in Complex and Uncertain Environments. 2005. V. 21. P. 309–337.
3. *Fischbacher U.* z-Tree: Zurich toolbox for ready-made economic experiments // Experimental Economics. 2007. P. 171–178.

УДК 519.83

Модель поведения участников двойного аукциона с закрытыми ставками

В.А. Дьяченко[1,3], И.С. Меньшиков[1,2]

[1]Московский физико-технический институт (государственный университет)
[2]Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН
[3]Институт системного программирования им. В.П. Иванникова РАН

Для изучения отклонений индивидуального поведения от соответствующих равновесию Байеса–Нэша стратегий было проведено моделирование поведения участников двойного аукциона на основе короткой серии повторений эксперимента, проведенных в рамках лаборатории.

Описание эксперимента

Приведем описание лабораторной игры. В каждом раунде участники случайным образом делятся на пары, в каждой из которых один игрок получает роль продавца, а второй — покупателя. У обоих есть индивидуальные предпочтения v_s (для продавца) и v_b (для покупателя) (в рамках проведенного эксперимента принималось, что v_s и v_b равномерно распределены на [0;60] и [40;100] соответственно). Агентам известно собственное предпочтение и общая функция распределений предпочтений для других участников. Игроки одновременно (не зная заявки другого участника) делают заявки: $p_s \in [v_s;100]$ и $p_b \in [0;v_b]$. Если $p_s \le p_b$, то сделка заключается по цене: $p = \frac{p_s + p_b}{2}$, и выигрыши игроков равны $p - v_s$ и $v_b - p$ соответственно, в противном случае выигрыши равны нулю. Для каждого участника результаты всех раундов суммируются. В лабораторных условиях эксперимент состоял из 30 периодов.

Равновесие Байеса–Нэша

Поскольку игрокам известны только собственные ставки до подведения итогов раунда, каждому агенту необходимо найти приемлемый компромисс между вероятностью совершения сделки и ожидаемым выигрышем в случае её заключения. Теоретические рассуждения приводят к выявлению равновесия Байеса–Нэша (РБН). В работе [1] это равновесие находится для рассматриваемого случая в классе кусочно-линейных стратегий:

$$\left[\max\left(\frac{2}{3}v_S + 25;35\right), \min\left(\frac{2}{3}v_B + \frac{25}{3};65\right)\right].$$

Однако данный профиль стратегий является оптимальным для каждого участника при условии того, что все игроки будут его придерживаться. Стратегии агентов в рамках лабораторного эксперимента ощутимо отличались от стратегий, входящих в РБН. Таким образом возникают следующие задачи:

1. Оценить удачность выбранного профиля стратегий каждого игрока.
2. Оценить эффективность самого РБН в реальных условиях.

Анализ исходных результатов не позволит успешно решить поставленные задачи, т.к. в лабораторных условиях не представляется возможным провести достаточно широкую серию экспериментов, в которой влияние случайности на этапе генерирования предпочтений и пар в каждом раунде удалось бы свести к неощутимой величине.

Описание подхода к решению поставленных задач

Чтобы получить результаты, более независимые от случайного фактора в виде сгенерированных предпочтений и пар участников, использовалось формирование нового эксперимента на основе старого. Пользуясь симметричностью ролей продавца и покупателя в правилах игры и предполагая, что эта же симметричность будет наблюдаться и в поведении игроков, мы имеем в качестве исходной информации 30 значений реакций участников на различные предпочтения. Правила игры остались неизменны, а ставка

игрока бралась как ставка при самом близком предпочтении в исходной игре (если же при этом ставка в исходной игре оказывалась меньше собственной ценности для покупателя (или больше для продавца), то за ставку в вычислительном эксперименте бралась стоимость товара для участника).

Результаты вычислительных экспериментов

Приведем результаты исходного лабораторного эксперимента (столбец I) и различных сессий моделирования. При моделировании эксперименты запускались на 30000 раундах, в связи с этим все результаты соответствующим образом отнормированы для возможности сравнения с исходным экспериментом.

Столбцы bot1 и bot2 соответствуют игрокам-роботам, реализующим стратегии из РБН, а bot3 – стратегию вида $p = \begin{cases} 40, & v \le 40 \\ v, & v > 40 \end{cases}$, на которую походили стратегии нескольких игроков с хорошими результатами (участники 8 и 10) в исходном эксперименте

Стратегии участников 3, 4, 5 и 11 были более агрессивными, чем РБН, и именно они показали себя как наиболее успешные во всех проведенных сеансах моделирования, даже в случае устранения из моделирования самых миролюбивых игроков 1 и 2, ставки которых были близки к их предпочтениям. В то же время ни роботы, моделировавшие поведение участников 8 и 10, ни роботы, использовавшие при определении своего поведения РБН, во всех сеансах не показывали сравнимых результатов.

Данный подход к моделированию поведения участников экспериментов в дальнейшем может быть обобщен для других лабораторных игр с неполной информацией.

Таблица 1.

№	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
1	90.2	77.8	77.5	76.9	77.5	78.4	78.2	–	–
2	82.9	79.1	80.5	79.4	79.8	80.7	80.5	–	–
3	101.4	116.3	117.3	115.9	114.9	116.4	116.3	111.8	111.3
4	116.5	117.7	117.6	116.7	116.4	118	118.4	112.4	112.3
5	103.8	117.4	117.3	117.4	116.1	117.4	116.8	112.5	112.8
6	68.4	103.5	103.8	102.3	101.9	104	103.9	96.5	96
7	93.9	109.4	108.5	110.8	108.1	110.9	110.5	105.4	104.2
8	120.5	102.5	103.3	101.8	101.6	102.8	103.6	97.6	97.6
9	77.6	110.4	110.9	109.5	109.2	111.3	110.9	107.5	106.7
10	117.7	114.1	113.2	112.2	112.4	113.3	114.4	108.8	108.8
11	78	115.5	116.1	114.6	114.8	115.8	115.8	111.2	111.1
12	113.3	102.9	104.2	104	101.8	104.1	104.3	97.1	97.1
13	88.4	108.2	108.2	106.4	107.5	109.1	108.8	103	102.1
14	111.5	102.7	103	101.4	102.5	102	103.4	98.3	98.8
bot1	–	–	–	113.1	112.4	113	113.6	108.7	108.9
bot2	–	–	–	112.9	113.2	–	–	109.3	109
bot3	–	–	–	–	–	114.6	113.3	–	–
avg	97.4	105.5	105.8	106	105.6	107	107	105.7	105.5

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта № РФФИ 16-01-00633А.

Литература

1. *Меньшиков И.С., Милякин С.Р.* Равновесные стратегии в двойном аукционе с закрытыми ставками: теория и эксперимент // Моделирование процессов обработки информации. М.: МФТИ, 2014. С. 52–61.

УДК 519.83

Исследование информационных каскадов в лабораторных условиях

***Н.В. Изутин*[1], *И.С. Меньшиков*[1,2]**

[1]Московский физико-технический институт (государственный университет)
[2]Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН

Информационным каскадом называется последовательность одинаковых решений индивидов (выбор предшествующих участников – открытая информация) вопреки или согласно своим конфиденциальным данным [1, 2]. В лаборатории экспериментальной экономики была проведена серия экспериментов со студентами МФТИ для построения информационных каскадов с последующим изучением и построением модели, описывающей данное явление. На основе полученных результатов, с учетом поведения моделей Байеса и Нэша на данных, смоделированных компьютером в экспериментах, была предложена модель поведения конформист/нонконформист.

Описание эксперимента: есть две урны $\{A, B\}$, в каждой по пять шаров (конфиденциальных сигналов), три соответствующие названию урны, два – нет (так, в урне A лежат три шара a и два шара b). В начале игры равновероятно выбирается одна из урн, и случайно выстраивается последовательность участников. Участники последовательно получают приватный сигнал (случайный шарик из урны), и должны дать прогноз (угадать урну). При этом участник видит все решения игроков, отвечавших перед ним. В конце игры участнику сообщается, верным ли был его ответ и денежное вознаграждение за данный период: 50 очков, если прогноз оказался верным и 0, если нет. Игра разыгрывается несколько раз.

Модель конформист/нонконформист. Конформистом назовем участника, который полностью игнорирует свой сигнал (основывается только на информации о решениях предшествующих участников), нонконформистом – полностью игнорирующего предшествующие решения. Данные два случая являются крайними, а для нас представляют интерес промежуточные состояния индивида. Введем коэффициент доверия $\theta \in [0,1]$, которому при $\theta = 1$ соответствует конформист, при $\theta = 0$ – нонконформист. Было смоделировано поведение группы участников с одинаковым θ для каждого участника. Коэффициент θ выбирался в интервале $[0,1]$ с шагом 0.01 для случайных реализаций урн и шаров, соответствующих серии лабораторных экспериментов.

Пусть до участника было n решений в пользу урны A и m решений в пользу урны B. Тогда участник-бот с коэффициентом θ принимает решение по следующему правилу:

1) если $n + m \le 2$, то участник следует своему сигналу, выбирая A при a и B при b;
2) если $n + m > 2$ и $n \ge \theta m$, то при сигнале a принимается решение A, иначе B;
3) если $n + m > 2$ и $m \ge \theta n$, то при сигнале b принимается решение B, иначе A.

Выяснилось, что средний совокупный выигрыш в серии из восьми экспериментов зависит от параметра θ так, как показано на рис. 1.

Таким образом, максимум совокупного выигрыша игроков достигается не на границе отрезка, а при промежуточном значении $\theta^0 = 0.42$.

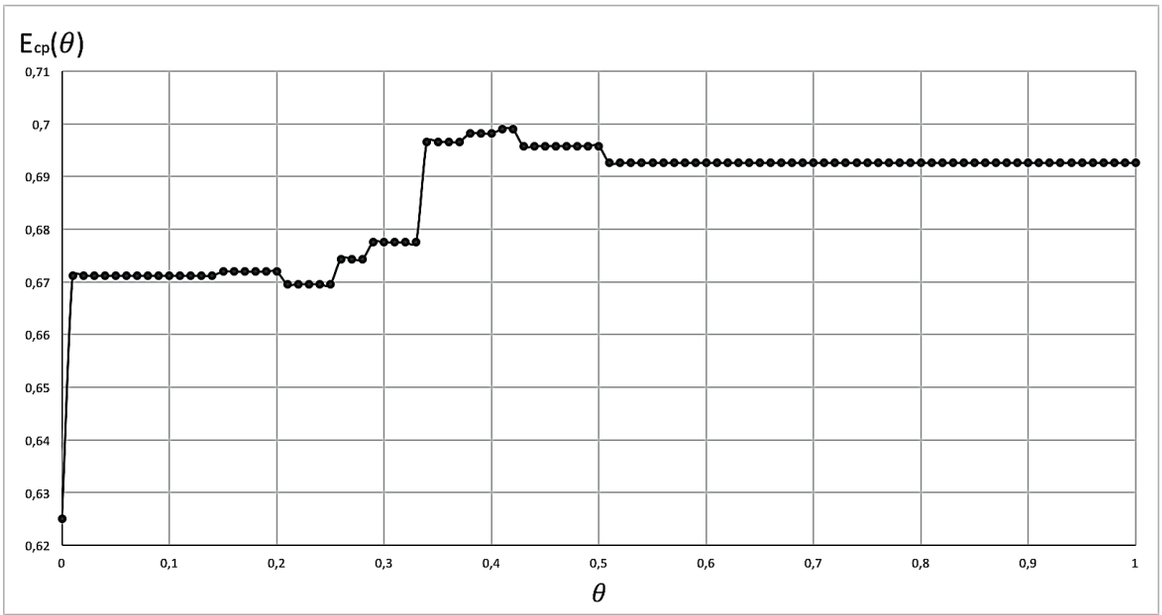


Рис. 1. Зависимость совокупного выигрыша участников-ботов от коэффициента доверия θ

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 16-01-00633А.

Литература

1. *Bikhchandani, S., Hirshleifer D., and Welch I.* A Theory of Fads, Fashion, Custom, and Cultural Change as Information Cascades // Journal of Political Economy. October, 1992. P. 100.
2. *Anderson, L.R., Holt, C.A.* Information Cascades in the Laboratory // The American Economic Review. 1997. V. 87, N 5. P. 847–862.

УДК 338.001.36

Анализ мирового рынка редких металлов (тантала), с точки зрения стандартных моделей конкуренции

А.Р. Шарафутдинов

Московский физико-технический институт (государственный университет)
Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации

Рассмотрим период 1995 – 2005 гг. Сделаем предположение: первая фирма выбирает свой выпуск первой, как и в модели Штакельберга, а оставшиеся фирмы конкурируют между собой и выбирают выпуск одновременно, как в модели Курно. Для всех следующих моделей предполагаем линейную функцию спроса $P = a - bQ$ и постоянные предельные издержки $MC = c$. Решим задачу максимизации прибыли:

$$\pi = \left(a - b\left(q_1 + q_2 + q_3\right)\right)q_1 - cq_1 \to \max,$$
$$\pi = \left(a - b\left(q_1 + q_2 + q_3\right)\right)q_2 - cq_2 \to \max,$$
$$\pi = \left(a - b\left(q_1 + q_2 + q_3\right)\right)q_3 - cq_3 \to \max.$$

Получаем решение данной задачи:

$q_1 = \left(a - 3c\right)/6b,\ \ q_2 = \left(5a - 3c\right)/30b$ и $q_3 = \left(5a - 3c\right)/30b.$

Теперь находим долю рынка лидера:

$$\frac{q_1}{(q_1+q_2+q_3)}=\frac{(5a-15c)}{(15a-21c)}.$$

Однако, подставив $c=0$, получаем, что доля лидера составляет всего 33%, а при $a=7$ и $c=1$ вообще 24%. Из этого следует, что данная модель отвергается, поскольку реальная доля рынка лидера составляет 74 – 69% в этом периоде.

Сделаем следующее предположение: пусть первой свой выпуск выбирает Австралия, затем следующая и так далее, т.е. предполагаем, что фирмы конкурируют по Штакельбергу. Воспользуемся известным результатом решения данной задачи при одинаковых издержках и линейном спросе:

$$q_1=\frac{a-c}{2b},$$

$$q_2=\frac{a-c}{4b},$$

$$q_3=\frac{a-c}{8b}.$$

Тогда становится возможным определить долю рынка первой фирмы $\frac{q_1}{\Sigma q_i}$. Если на рынке две фирмы, то доля первой получается $\frac{2}{3}=67\%$, а для трех фирм получим $\frac{4}{7}=57\%$, а в пределе при $n\to\infty$ доля первой фирмы сходится к 50%.

Как видим, указанная модель в этот период максимально подходит к нашим данным. Стоит заметить, что в этот период первая страна, выбирающая свой выпуск, – Австралия, а последующие фирмы в этот период меняются, так, Канада к 2005 году ушла с рынка, а ее место заняла Мозамбик, сохранив конкуренцию.

Сделаем следующее предположение в 2010 году: 4 основные фирмы на данном этапе конкурируют по модели Курно. А разница в выпуске может быть связана с различными предельными издержками у стран (стоимость рабочей силы в данной стране, сложности в разработке шахт). Функцию спроса, как и раньше, предполагаем линейной $P=a-bQ$, а предельные издержки равны c, αc, βc и γc для Бразилии, Мозамбика, Руанды и Австралии соответственно.

Решим поставленную задачу:

$$\pi=\left(a-b\left(q_1+q_2+q_3+q_4\right)\right)q_1-cq_1\to\max,$$

$$\pi=\left(a-b\left(q_1+q_2+q_3+q_4\right)\right)q_2-\alpha cq_2\to\max,\ \alpha>1,$$

$$\pi=\left(a-b\left(q_1+q_2+q_3+q_4\right)\right)q_3-\beta cq_3\to\max,\ \beta>\alpha>1,$$

$$\pi=\left(a-b\left(q_1+q_2+q_3+q_4\right)\right)q_4-\gamma cq_4\to\max,\ \gamma>\beta>\alpha>1.$$

Запишем полученное решение:

$$q_1=\left(a-c\left(4-\alpha-\beta-\gamma\right)\right)/5b,$$

$$q_2=\left(a-c\left(-1+4\alpha-\beta-\gamma\right)\right)/5b,$$

$$q_3=\left(a-c\left(-1-\alpha+4\beta-\gamma\right)\right)/5b,$$

$$q_4=\left(a-c\left(-1-\alpha-\beta+4\gamma\right)\right)/5b.$$

Можно попробовать решить эту систему относительно α, β и γ, считая известными доли рынка $\frac{q_j}{\Sigma q_i}$. Решение будет возможно при дальнейшем исследовании, а пока оставим ее в таком виде. Также возможны сдвиги теоретических данных относительно

практических из-за наличия неучтенных 25% всего рынка тантала, добываемого другими странами.

В 2015 году можно наблюдать конкуренцию по модели Штакельберга. Примечательным в данный период является совпадение теоретических результатов расчета данной модели при увеличении количества стран, добывающих тантал, с реальными данными. Как было рассчитано ранее при $n \to \infty$ доля первой фирмы сходится к 50%, а для последующих фирм составляет 25%, 12.5% и 6.25%, тогда как в реальности доли распределены по убыванию следующим образом: Руанда – 50%, Конго – 17%, Бразилия – 13%, Китай – 5%. Небольшое отличие реальных от теоретических результатов может быть связано с различием в предельных издержках и неучтенных 12%, добываемых другими странами.

В результате исследования нам удалось увидеть в динамике, как рынок тантала побывал минимум в 3 состояниях. Длительное время конкуренция происходила по Штакельбергу, затем по Курно и вновь по Штакельбергу. Что самое интересное – лидер не сохранился, а, более того, стал 5-м в цепочке выбора выпуска. Такие изменения могут быть связаны с издержками на производство, разработкой новых технологий по добыче, а также объему разведанных запасов тантала в разных странах. Также были выявлены основные возможные причины таких перемен на рынке тантала.

Литература

1. *Varian, H.*, Microeconomic analysis // New York: Norton. 1983.
2. *Tirole, J.*, Theory of industrial organization // Cambridge, Mass.: M.I.T. Press. 1988

УДК 334.027

От рынка лимонов к управляемому рынку на примере интернет-магазинов

А.Р. Шарафутдинов

Московский физико-технический институт (государственный университет)
Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации

В работе проведен анализ обстановки интернет-магазинов с точки зрения теории контрактов. Была рассмотрена проблема возможного появления рынка «лимонов» в интернет-маркетинге и способы предотвращения этого на примере компании eBay. Реальными статистическими данными подтверждено, что система обратной связи повышает эффективность функционирования рынка через уменьшение асимметрии информации и снижение морального риска агента-продавца, тем самым позволяя повысить полноту заключаемых контрактов.

Почему интернет-магазины являются потенциальными рынками «лимонов»? Потому что на них выполняются такие предпосылки неблагоприятного отбора, как отсутствие эффективного сигналинга и наличие асимметрии информации, поскольку в данной ситуации стороны договора зачастую совершают сделку лишь однократно и находятся далеко друг от друга. При интернет-торговле агентом является продавец, поскольку, получив деньги за заказ, может запросто отправить товар более низкого качества, чем было заявлено или предполагалось, тем самым проявляя оппортунистическое поведение по отношению к покупателю, который в данной ситуации является принципалом, в силу того, что он практически никак не может проконтролировать действия продавца. Таким образом, можно сказать, что продавец подвержен моральному риску, имея возможность отклониться от условий контракта.

Аналогично рынку подержанных автомобилей в интернет-торговле продавцы товаром высокого качества несут убытки, поскольку покупатели корректируют сумму денег к уплате с учетом возможного предоставления им товара низкого качества. Выигрывают же в данной ситуации только продавцы низкокачественных товаров,

поскольку цена, установившаяся на рынке, выше минимальной цены, по которой они готовы были бы продать свой товар. Можно заметить, что подобная игра будет повторяться снова и снова, вызывая, тем самым все большее и большее снижение цен на рынке, на котором в конечном итоге останутся лишь товары низшего качества.

Обратная связь, в различных ее проявлениях, есть основной метод борьбы с моральным риском и неблагоприятным отбором. При этом у покупателей, являющихся принципалами, появляется возможность прояснить для себя продает ли агент товары высокого качества, вследствие чего покупатель будет готов предложить ему более высокую цену, чем та, которая устанавливается на рынке «лимонов». Тем самым предотвращается утечка продавцов товара высокого качества и появление неэффективного рынка.

В 2009 году интернет-аукцион eBay внедряет систему под названием eBay Top Rated Seller (сокр. eTRS), определяющую надежных продавцов на основе отзывов о них и количества продаж. После чего в сентябре 2010 года eBay представляет систему eBay Buyer Protection (сокр. eBP) по защите покупателя от получения товара ненадлежащего качества и возврата денег за соответствующий заказ, что, в результате, привело к росту качества доставляемого товара.

Система eTRS каждый месяц составляет рейтинг «хороших» продавцов, удовлетворяющих жестким требованиям, таким образом, наличие eTRS-статуса у продавца является четким сигналом, подтверждающим его надежность и высокое качество предоставляемого им товара. По предполагаемой модели получение eTRS-статуса должно было привести к росту цен. Подтвердить это позволяет регрессия средней относительной цены на количество дней до и после получения продавцом eTRS-статуса (рис. 1) выявленная исследователями Zeqian Shen и Neel Sundaresan. В результате получения продавцом eTRS-статуса цены на его товары в среднем выросли на 3%, что соответствует сделанным предположениям о положительном эффекте от снижения асимметрии информации.

Что же касается внедренной в 2010 году системы eBP, то ее появление привело к таким эффектам, как уменьшение неблагоприятного отбора и морального риска. Уменьшение неблагоприятного отбора происходит потому, что люди могут различать товары по качеству и готовы заплатить цену «хорошего» товара, поскольку теперь они могут просто вернуть деньги за товар ненадлежащего качества. Сокращение морального риска происходит в силу изменения стимулов продавца, иными словами, теперь он понимает, что если предоставит товар ненадлежащего качества, то просто не получит денег.

Несмотря на введение системы возврата товаров eTRS-статус остается действенным. Подтверждением тому является регрессия относительной цены при наличии eTRS-статуса и при отсутствии такого статуса у продавца в зависимости от времени в том периоде, когда была введена система возврата товаров(eBP) 10 сентября 2010 года, полученная упомянутыми выше исследователями (рис. 2). Стоит заметить, что произошло падение цен для обеих категорий продавцов, однако большее доверие к продавцам с eTRS-статусом по-прежнему приводит к большим ценам, по которым покупатели готовы покупать у них товар, по сравнению с продавцами без статуса.

Подобные системы, обеспечивающие обратную связь, позволили eBay и многим другим гигантам интернет-торговли предотвратить появление рынка «лимонов» и соответствующего провала и тем самым сделать заключаемые контракты более полными, подтверждая свою действенность с учетом того, что покупки в интернете становятся все более и более популярны.

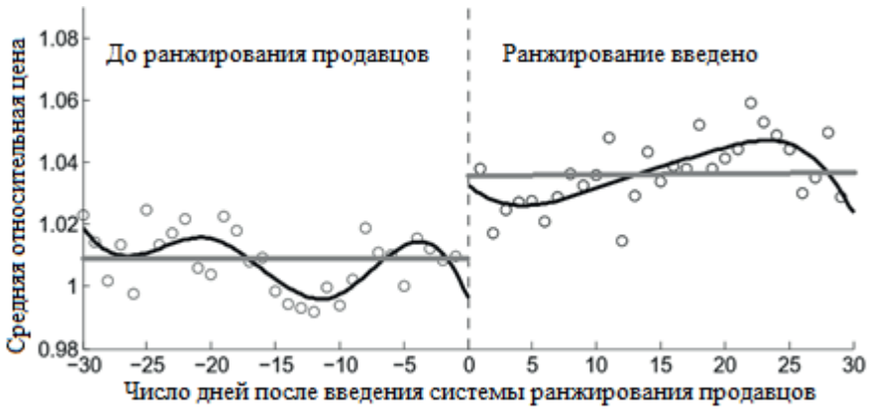


Рис.1. Источник [1], Средняя относительная цена сделки до и после введения системы ранжирования продавцов

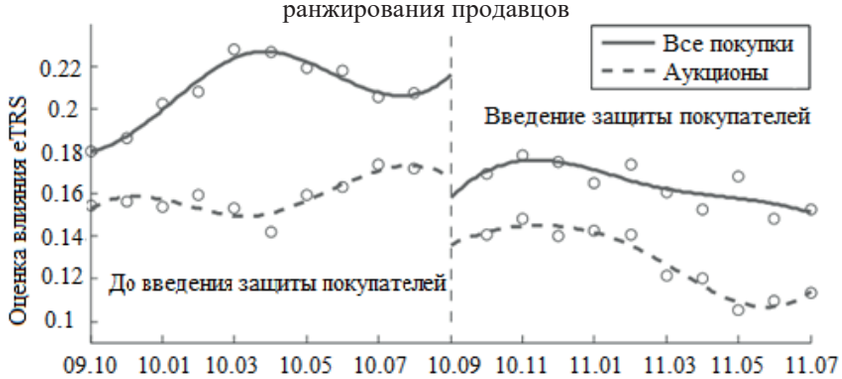


Рис. 2. Источник [1]. Оценка зависимости относительной цены от eTRS, очищенная от влияния характеристик товаров

Литература

1. *Hui, X.-A., Saeedi, M., Sundaresan, N., and Shen, Z.*, From lemon markets to managed markets: the evolution of ebay's reputation system. 2014.
2. *Pavlou, P. A., Liang, H., Xue, Y.*, Understanding and Mitigating Uncertainty in Online Exchange Relationships: A Principal Agent Perspective, 2007.

УДК 534.222.2

Взаимосвязь между психологическими характеристиками участников экспериментов и их стратегиями в игре в Дилемма заключенного

Р.М. Яминов

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН

В работе анализировались лабораторные эксперименты, проведенные в лаборатории экспериментальной экономики МФТИ, которые состояли из двух частей, в каждой из которых проводилась одна и та же серия игр, но перед второй частью проводился этап социализации [1]. После первой серии игр экспериментатор делил участников на две группы по 6 человек в каждой, после этого во время этапа социализации происходило знакомство участников внутри группы под контролем организаторов эксперимента (этап социализации), далее игры составлялись таким образом, чтобы оба участника в паре выбирались из одной «социализированной» группы. После этапа социализации наблюдалось изменение стратегий игроков и рост кооперативных исходов [2], более того, в некоторых экспериментах наблюдались 100-процентные кооперативные исходы даже без единичных отклонений. Под кооперативными исходами здесь и далее называются исходы, в которых максимальна суммарная прибыль игроков.

Участникам предлагалась сыграть в «Дилемму заключенного» со следующей матрицей:

	Cooperate	Defect
Cooperate	5, 5	0, 10
Defect	10, 0	1, 1

Для проведения игры использовался специализированный инструмент для конструирования и проведения групповых экспериментов в экспериментальной экономике z-Tree, разработанный в университете Цюриха.

По результатам экспериментов была разработана динамическая модель коллективных действий. Действия игроков по экспериментальным данным апроксимировались в смешанные стратегии, зависящие от действий игроков в прошлом раунде. В результате получились по две стратегии для игрока (до социализации и после). Если для определения стратегии было мало данных (три и менее), то есть игрок редко сталкивался с определенными действиями оппонентов, то для дальнейшего анализа считалось, что стратегия не может быть определена достаточно достоверно, и такие стратегии исключались из анализа.

Целью разбиения на группы было выявление зависимости между поведенческими и психологическими характеристиками, полученными при прохождении тестов MBTI и Эннеаграмма. Была установлена зависимость между результатами психологических тестов и стратегиями игроков после социализации, а также изменением стратегий в результате социализации.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №16-01-00633А.

Литература

1. *Berkman E. T., Lukinova E., Menshikov I., & Myagkov. M.* Sociality as a Natural Mechanism of Public Goods Provision // PLoS ONE, 2015. 10(3). e0119685.
2. *Меньшикова О.Р., Меньшиков И.С., Седуш А.О.* Влияние трех видов социализации на поведение мужчин и женщин в социально-экономических экспериментах с учетом психологических типов. // Моделирование процессов обработки информации: сб. науч. тр. / МФТИ. – М., 2015. С. 56–65.

УДК 519.8

Игра «Собственник – Директор – Агент». Нахождение потенциальных равновесий в случае повторяющейся игры при помощи нейронных сетей

А.И. Шилова

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Исходная игра «Собственник – Агент» содержит «дилемму агентства». Дилемма заключается в том, что хотя собственник и отдает приказы, которые агент должен исполнять, но оба игрока действуют только в своих интересах в условиях асимметричной (несовершенной) информации. В данном случае агент (подчиненный) обладает большей информацией, чем собственник: собственник не знает точно, насколько хорошо агент выполняет его поручения. Теория рекомендует собственнику ввести такие стимулы, как бонусы и премии за хорошее исполнение обязанностей или установить контроль над действиями агентов (подробнее см. в [1]).

Также ранее была предложена новая модель, где появляется новый игрок «Совет директоров» (для краткости «Директор») [2–3]. Согласно [4], «Совет директоров», выполняя мониторинговую функцию, должен увеличить прибыль собственников и сгладить ассиметричность информации.

В работах [2–3] для игры «Собственник – Директор – Агент» было найдено несколько совершенных по подыграм равновесий Нэша. Также по данной игре были проведены эксперименты. Результаты экспериментов, а также одно из найденных совершенных по подыграм равновесий Нэша показывают, что введение нового игрока позволяет в целом улучшить выигрыш «Собственника». С другой стороны, сложность игры для игроков, а также множество вероятных ходов иногда порождали сложные, трудно интерпретируемые комбинации ходов реальных игроков в эксперименте. При этом помимо найденных равновесий существует также множество других равновесий, а в случае повторении игры их количество становится бесконечно.

В данной работе предлагается воспользоваться нейронными сетями, а также таким методом как Q-learning, описанный в [5], чтобы при помощи обученных агентов найти разные виды разумных стратегий в данной игре. В [6] было продемонстрировано, что глубокие нейронные сети могут вести себя на уровне с человеком по интеллекту, а в некоторых случаях превосходить его, поэтому возник интерес, смогут ли они проявить какие-то сложные модели поведения в данной игре и будут ли они походить на некоторые, выявленные в ходе экспериментов.

Литература

1. *Jean-Jacques Laffont, Martimort D.* The theory of incentives I: the principal-agent model // Princeton University Press, 2002. P. 1–360.
2. *Шилова А.И.* Проверка теории игры «Собственник-Директор-Исполнитель» на основе эксперимента: какими качествами должен обладать начальник для успешного функционирования фирмы // Труды 58-й научной конференции МФТИ, 2015. http://conf58.mipt.ru/static/reports_pdf/1163.pdf
3. *Шилова А.И.* Экспериментальное исследование игры «Собственник – Директор – Агент» // Труды 59-й научной конференции МФТИ, 2015. http://conf59.mipt.ru/static/reports_pdf/1572.pdf
4. *Thomas Rüdiger Smith.* Agency theory and its consequences. Master Thesis // Copenhagen Business School August, 2011. P. 1–133.
5. *Hu J., Wellman M. P.* Multiagent reinforcement learning: Theoretical framework and an algorithm // In Proceedings of the 15th International Conference on Machine Learning (ICML), 1998.
6. *Mnih V., Kavukcuoglu K., Silver D., Rusu A. A., Veness J., Bellemare M. G., Graves A., Riedmiller M., Fidjeland A. K., Ostrovski G., Petersen S., Beattie C., Sadik A., Antonoglou I., King H., Kumaran D., Wierstra D., Legg S., Hassabis D.* Human-level control through deep reinforcement learning // Nature, 2015.

Секция информатики

УДК 519.63

Численное моделирование объектов антиклинальной формы сеточно-характеристическим методом

П.В. Стогний, Д.И. Петров

Московский физико-технический институт (государственный университет)

На сегодняшний день одной из основных задач в области сейсморазведки [1] является исследование и разработка углеводородных месторождений в зоне Арктического шельфа. Данные месторождения часто расположены в ядрах антиклинальных структур, пример которых представлен на рис. 1.

Перед началом геологоразведочных работ в данных районах необходимо провести моделирование таких объектов, для их обнаружения при выполнении реальных работ.

Численное моделирование антиклинальных структур проводилось с помощью сеточно-характеристического метода [2], который позволяет ставить корректные контактные и граничные условия, а также учитывать основные геолого-геофизические параметры (характеристику сигнала источника, свойства геологических слоев и другие).

Геологические среды, моделируемые в данной работе, описываются системами уравнений для линейно-упругой (1, 2) и акустической (3, 4) сред:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} v = (\nabla \cdot \sigma)^{\mathrm{T}}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \sigma = \left(\rho {c_p}^2 - 2\rho {c_s}^2\right)(\nabla \cdot v) I + \rho {c_s}^2 (\nabla \otimes v + (\nabla \otimes v)^T), \tag{2}$$

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} v = -\nabla p, \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} p = -\rho c^2 (\nabla \cdot v). \tag{4}$$

В (1, 2) ρ — плотность материала, v — скорость движения, σ — тензор напряжений Коши, I — единичный тензор, c_p, c_s — скорости продольных и поперечных волн, соответственно.

В (3, 4) p — давление, c — скорость звука в идеальной жидкости.

На границах расчетных областей были установлены следующие граничные условия:
неотражающее граничное условие на нижней и боковых границах, свободная граница – на верхней.

В настоящей работе приведены результаты моделирования данных, полученных с помощью методики МНСП [3], которая подразумевает движение приемно-излучающей системы в воде. С целью получения сейсмических данных для профиля воды длиной 100 м с шагом 3 м, всего было проведено 34 статических расчета, в результате которых было получено 34 сейсмограммы общего пункта возбуждения. Пример такой сейсмограммы представлен на рис. 2.

После получения сейсмограмм производилась их обработка с помощью стандартного графа общей срединной точки (ОСТ).

В работе проведено 2D моделирование ядра антиклинальной структуры. Для получения более точной геометрии исследуемого объекта антиклинальной формы планируется проведение 3D моделирования.

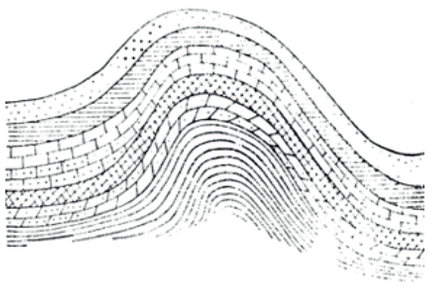


Рис.1. Антиклинальная складка

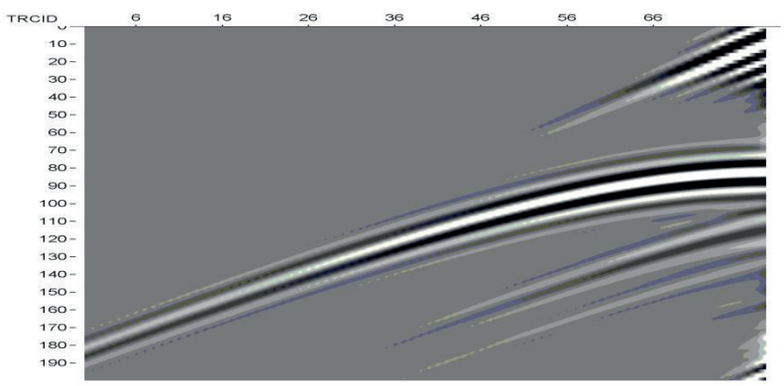


Рис. 2. Сейсмограмма общего пункта возбуждения (ОПВ), полученная для одного из выстрелов

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, код проекта 16-29-02018 офи_м.

Литература

1. *Фаворская А.В., Петров Д.И., Хохлов Н.И., Петров И.Б.* Численное решение упругоакустических задач с помощью сеточно-характеристического метода // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. Серия: Физико-Математические и технические науки. 2015, № 10. С. 7–12.
2. *Бирюков В.А., Миряха В.А., Петров И.Б., Хохлов Н.И.* Моделирование распространения упругих волн в геологической среде: сравнение результатов трех численных методов // Ж. вычисл. матем. и матем. Физ. 2016. Т.56, № 6. С. 1104–1114.
3. *Хаттон Л.* Обработка сейсмических данных. Теория и практика / перевод с англ. Малкина А.Л. – М.: Мир, 1989.

УДК 002.001

Когнитивные модели в информатике

В.В. Рыков

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Информационные процессы происходят в мире знаков. В них так или иначе соучаствуют люди. Это значит, что когнитивные модели, которые в них реализованы, базируются на семиотических, т.е. гуманитарных, технологиях или универсалиях. В последние годы, особенно с появлением социальных сетей, все большую значимость начинают играть модели и универсалии, основанные на науках о коммуникациях, и прежде

всего на древнейшей из них – риторике. Проблемы применимости этих моделей к информационной практике обсуждаются в данной статье.

В процессе своей жизнедеятельности при взаимодействии с различными объектами реального окружающего мира, а также идеальными объектами и объектами знаковой природы, люди придумали много приемов, технологий, теорий и инструментов для оптимизации этой деятельности. С середины XX века начала бурно развиваться информатика, которая резко повысила эффективность работы со знаковыми объектами. В последние годы все более часто стали применяться когнитивные модели и технологии, которые имеют дело с так называемыми когнитивными объектами или обрабатывают знание.

Знание имеет качественно другую природу по сравнению с информацией и требует построения принципиально новых систем его обработки. Элементарная система обработки знаний включает в себя как минимум две части – базу знаний (knowledge base – KB) и когнитивный процессор (cognitive processor – CP) который, ее обрабатывает. Результатом их совместной работы является знание, которого не существовало до сих пор и которое предназначено оптимизировать ту или иную сторону производственной деятельности. Очень часто составной частью когнитивной системы (КС) является человек, который не только запрашивает новое знание в соответствии со сложившейся ситуацией для дальнейшего использования, но и сам соучаствует в процессе порождения нового знания. Когнитивный эффект применения знания лучше всего продемонстрировать на некоторых существующих моделях [1, 2].

Итак, характерной особенностью современных информационных процессов в обществе являются:

1) обработка знания. Родовым признаком знания, отличающего его от информации, является способность к порождению нового знания. Информационная система не выдаст ни по какому запросу ни одного лишнего бита информации;

2) Участие человека в когнитивных процессах и системах. Это значит, что уже сейчас необходимо уметь строить его образ и распознавать его свойства.

Важно сразу отметить следующее. Для более полного и адекватного понимания логики работы описываемых моделей следует иметь в виду, что они базируются на многих традиционных и давно существующих в гуманитарных науках, таких как семиотика (наука о знаках), теориях взаимодействия текста и человека, а также теории эффективной знаковой деятельности, базирующейся на постулатах риторики. Природа знания и возможности его обработки всегда активно разрабатывалась различными философами. А алгоритмы порождения нового знания были разработаны еще Аристотелем (силлогизмы). Увидеть эти модели может только тот, кто знаком с ними. Этот первый используемый здесь когнитивный эффект называется видение, управляемое знанием (knowledge based vision – KBV).

Действительно, попав в лес, горожанин сумеет понять его жизнь из слышимых им звуков гораздо меньше, чем лесник или охотник. Это заставляет более четко и формально формулировать когнитивные модели, которые помогут лучше понимать происходящие процессы в современном информационном обществе.

Эффективность этих моделей, которые зачастую неявно использовались и ранее, можно продемонстрировать на примере информационной поддержки, принесшей победу на выборах Дональду Трампу. Рассылка избирателям была избирательной и базировалась на классической риторической модели образа автора [1].

Прежде всего требуется увидеть и осознать эти когнитивные модели (КМ). Начнем с модели, которая называется *Бритва Оккама*. Она гласит, что из многих моделей, объясняющих что-либо, истинной является самая простая. На этом принципе мы будем основываться в дальнейшем.

Следует в самом начале определить еще одну базовую метамодель – в какой форме формализуются или выглядят закономерности в мире информатики? Ответ: в форме универсалий. *Универсалия* – это значит, что эта закономерность допускает исключения, оставаясь при этом верной. Это так и есть, но не всегда это ясно осознают. Показательный

пример – универсалия, если прыгнуть из самолета с парашютом и он не раскроется, то парашютисту грозит смерть. Вопрос: опровергают ли эту универсалию достоверные сообщения о том, что каждый год десятки людей в таких случаях избегают смерти? Те, кто считают, что эта универсалия неправильная, будут ли прыгать без парашюта? Более сложные и плодотворные примеры универсалий будут приведены позже. А сейчас нам достаточно осознавать то, что мы живем в мире универсалий. Только в таких науках, как физика или математика появление исключений вызывает революцию. Так, например, обнаружение фотоэффекта в конце XIX века вызвало революцию в классической физике и появление квантовой механики и других подобных наук. Это не значит, что в информатике универсалии не корректируются. Но отдельные исключения там не смертельны.

Другая базовая КМ – это системный подход, который часто сводится к определению, что такое система и следующему за этим каскаду формул. Однако очень часто он эффективно работает и без формул. Достаточно рассмотреть, частью какой системы является проблемный объект. Например, никогда мы не поймем, почему кукушка откладывает свои яйца в чужие гнезда, как бы мы ни изучали ее биологию и повадки. А решение появляется, когда мы рассмотрим кукушку как часть системы, в которой она живет – а именно леса. А в лесу есть гусеницы с настолько острыми колючками, что ими невозможно кормить птенцов. Несложными системными рассуждениями нетрудно прийти к выводу о том, что лесу как системе пришлось выделить одну птичку для поддержания баланса, которая оказалась бы способна поедать таких гусениц. А ее птенцов взять на воспитание для сохранения ее рода. Рассуждение несложное, но нетривиальное.

На основе вышеизложенного мы можем прийти к следующим выводам.

1. Информационные процессы (ИП) происходят в мире знаков. Это задает определенные особенности и накладывает определенные требования на эти процессы, а также помогает лучше их понимать.
2. Строгие законы логики, математики, физики имеют непреходящее и неоспоримое значение. Но в знаковом мире, где реализуются ИП, действуют модели, имеющие свои отличительные особенности. Эти ИП реализуются в мире универсалий, частью которых зачастую является человек, и которые допускают исключения, не влияющие на их истинность.
3. В мире ИП очень эффективным и продуктивным является системный подход. Очень важно бывает понять и реализовать, в форме каких универсалий и других формализмов воплощается в жизнь данный ИП, который как правило и есть сам сам по себе сложная система и является частью не менее сложной системы.

Литература

1. *Рыков В.В.* Обработка нечисловой информации. Управление знаниями. М.: МФТИ, 2007.
2. *Рыков В.В*. Сервисные модели инновационной деятельности // Труды 59-й научной конференции МФТИ. М.: МФТИ, 2016.

УДК 519.8

Многошаговый процесс построения сетевых структур с учетом различных ограничений и начальных условий оптимальным способом

С.А. Смаль

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Целью данной работы является исследование задачи многошагового процесса создания сети связанных элементов оптимальным способом. Данная задача сформулирована весьма абстрактно, а результаты ее исследования могут быть

адаптированы и применены во многих областях. Суть задачи заключается в последовательном добавлении новых точек в существующую сеть-граф таким образом, чтобы это было оптимально (каждая добавленная точка имеет некоторую характеристику полезности, которую мы хотим максимизировать). Одним из важнейших свойств данной задачи является то, что шаги, предпринятые на предыдущих ходах, влияют на возможность выбора новых точек. А значит каждый ход влияет на оптимальность результата в целом.

В качестве примеров применения этой задачи можно предложить следующую интерпретацию. Некая компания занимается оказанием услуг по предоставлению сотовой связи. Связь обеспечивается некоторыми вышками, которые связаны друг с другом в единую сеть. Компания хочет расширить зоны покрытия путем добавления новых вышек в существующую сеть. Чтобы построить вышку, необходимо потратить время и деньги. В свою очередь построенная вышка начинает приносить некоторый доход в единицу времени. Новые вышки открывают возможности для построения других более далеких вышек. Очевидно, что чем раньше построена вышка, тем бóльший доход она принесет в результате. Однако вопрос о том, в какой последовательности их строить и какую топологию сети создавать, чтобы получить максимальную общую прибыль, остается открытым. Таким образом, главной задачей является нахождение оптимальной стратегии развития такой сети.

В данной работе предложена математическая формализация данного вопроса. Рассматриваются задачи с различными начальными условиями, ограничениями и другой спецификой:

- задача без ограничения на бюджет и топологию;
- задача с учетом топологии;
- задача с пропускной способностью;
- задача с наличием неопределенностей.

Стоит отметить, что предложенный алгоритм решения подобного рода задач учитывает множество важных для практического применения аспектов:

- различные возможные стратегии развития сети, т.е. наличие множества различных способов присоединения одного и того же узла к графу;
- экономическая составляющая (различные затраты и доход при построении разных путей при развитии сети);
- ограничения, диктуемые спецификой задачи (ограниченная пропускная способность, область покрытия, текущая конфигурация системы, бюджет компании и пр.);
- влияние принятых решений на последующее развитие сети.

Задачи подобного рода на развитие сети являются весьма трудными и решаются вручную, зачастую простым перебором возможных вариантов. Поскольку количество возможных стратегий растет экспоненциально с добавлением новых точек, то решение задачи «вручную» сводится к перебору не всех, а только наиболее вероятных с точки зрения эксперта стратегий. Такой подход является трудозатратным, медленным и зачастую неоптимальным.

Автором данной работы предлагается решение задач в автоматическом режиме с гарантированно оптимальным выбором стратегии, а также сравнение результатов с решением задачи полным перебором маршрутов.

Литература

1. *Белман Р.* Динамическое программирование. М: Издательство иностранной литературы, 1960. 401 с.
2. *Калихман И.Л., Войтенко М.А.* Динамическое программирование в примерах и задачах. М.: Высш. Школа, 1979. 129 с.
3. *Оре О.* Теория графов. М.: Наука, 1980. 338 с.

УДК 519.688

Оценка последствий воздействия интенсивного сейсмического возмущения на купольное сооружение

В.И. Голубев, Н.И. Хохлов, Д.П. Григорьевых

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Природные катаклизмы из года в год приводят к множественным разрушениям, финансовым потерям и человеческим жертвам по всему миру. Одной из естественных опасностей является инициация сейсмической активности в сейсмоопасных регионах. Для её минимизации применяются различные подходы как на этапе проектирования сооружения, так и на этапе выбора места его расположения. Они включают в себя использование технологий сейсмостойкого строительства, априорное картирование зон повышенной опасности и т.д. Особого внимания требуют стратегические объекты, такие как атомные электростанции, хранилища радиоактивных отходов.

Специалисты, работающие в области атомной энергетики, разработали несколько различных методов оценки сейсмостойкости строений атомного комплекса [1]. Наиболее распространённым является стержневой метод, или метод собственных частот [2]. Он основывается на том, что реальная геометрия АЭС заменяется системой стержней, пружин и т.д., т.е. элементов, составляющих упругую систему, для которой аналитически может быть получен спектр собственных частот. В дальнейшем на основе анализа записей сейсмических событий, произошедших ранее в регионе, делаются выводы о том, насколько далеко их частотный состав отходит от собственных частот сооружения. И соответственно определятся сейсмостойкость. Однако данный подход не обладает достаточной точностью, поскольку приходится значительно упрощать геометрию АЭС.

В настоящей работе используется полноволновое моделирование процесса инициации сейсмической активности в геологическом массиве [3]. В выполненных расчётах в качестве источника рассматривалась линейная низкочастотная нагрузка фундамента купольного сооружения. Диаметр конструкции составлял 20 м, толщина стен 2 м. Геометрия описывалась набором контактирующих гексаэдральных сеток. Инициация трещин осуществлялась при выполнении критерия по главному напряжению. Численно получены картины разрушения в последовательные моменты времени.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ, проект № 16-08-00212 А.

Литература

1. *Saakov E.S., Ryasnyi S.I., Kaznovskii P.S., Kas'yanov K.G., Emel'yanova A.D.*Comparative Analysis of Foreign and Russian Seismic Resistance Evaluation Methods for NPP Equipment // Atomic Energy, 2014. V. 115, N 6. P. 375–385.
2. Seismic design and qualification for nuclear power plants: safety guide. Vienna: International Atomic Energy Agency, 2003.
3. *Голубев В.И., Петров И.Б., Хохлов Н.И.* Моделирование волновых процессов внутри планеты с помощью гибридного сеточно-характеристического метода // Математическое моделирование. 2015. Т. 27, № 2. С. 139–148.

УДК 004.67

Прогнозирование на базе решения набора задач классификации с учителем

А.А. Луканин[1], В.В. Рязанов[1,2]

[1]Московский физико-технический институт (государственный университет)
[2]Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление"РАН

Создан новый подход к решению задачи прогнозирования. Начальной информацией является выборка признаковых описаний объектов $\{\mathbf{x}_i, y_i\}$, $i = 0,1, ..., m-1$, где $\mathbf{x}_i \in \mathrm{R}^n$, $y_i \in \mathrm{R}$, $x_{ij} \in M_j, M_j$ – множество допустимых описаний j-го признака. Для простоты считается, что M_j – числовые множества (т.е. признаки кодируются числами). Задача прогноза ставится как задача вычисления для признакового описания некоторого объекта $\mathbf{x}$ значения его вещественнозначной величины $y = f(\mathbf{x})$. Основная идея состоит в том, чтобы все проблемы, связанные с разнотипностью признаков, различной их информативностью, «переложить» на задачу классификации с учителем [1]. Вводится несколько разбиений N обучающей выборки на одно и то же число множеств l. Каждое разбиение порождает задачу классификации с учителем на число классов $l : K_\nu^j$, $j = 0, \ldots, N-1$, $\nu = 0, \ldots, l-1$. Выбирается модель распознавания, и для каждой задачи находится наилучший алгоритм модели. Новый объект распознается каждым из N алгоритмов, а значение прогнозируемой величины находится как коллективное решение.

В качестве модели распознавания выбрана модель алгоритмов вычисления оценок (АВО) [2]. В качестве функции близости предложено использовать как метрическую функцию, так и функцию для произвольных порядковых признаков (две модели) [3]:

$$B_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}_t) = \begin{cases} 1, & |\mathrm{x}_\alpha - \mathrm{x}_{t\alpha}| \le \varepsilon_\alpha, \ \forall \alpha \in \Omega, \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases} \tag{1}$$

$$\tilde{B}_\Omega(\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{x}, \mathbf{x}_\beta) = \begin{cases} 1, & (\mathrm{x}_{\alpha i} \le \mathrm{x}_i \le \mathrm{x}_{\beta i}) \vee (\mathrm{x}_{\beta i} \le \mathrm{x}_i \le \mathrm{x}_{\alpha i}), \forall i \in \Omega, \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases} \quad \forall \mathbf{x}_\alpha, \mathbf{x}_\beta \in K_\nu^j, \tag{2}$$

где Ω – опорное множество алгоритма, $\mathbf{x}$ – распознаваемый объект, $\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_\alpha, \mathbf{x}_\beta$ – некоторые эталонные объекты класса K_ν^j, $\boldsymbol{\varepsilon}$ – вектор точностей измерения признаков. Значение прогнозируемой величины в каждом разбиении предложено брать как выборочное среднее по классу, а коллективное решение вычислять как линейную комбинацию результатов прогноза. Коэффициенты находятся с помощью метода наименьших квадратов, где используется стохастический градиентный спуск:

$$\sum_{j=0}^{q-1} \left(y'_j - \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i y_j'^i \right)^2 \xrightarrow[\alpha_0, a_1, \ldots, \alpha_{N-1}]{} \min, \tag{3}$$

где q – размер контрольной выборки объектов, y'_j – значение зависимой величины для j-го контрольного объекта, $y_j'^i$ – результат его распознавания i-м алгоритмом, α_i, $i = 0, 1, \ldots, N-1$, – искомые коэффициенты (веса). Меняя параметры l и N, можно определять наилучшее решение (значение критерия (3)).

Проведено сравнение созданного метода с известными подходами восстановления зависимостей на двух задачах, связанных с репозиториями "Image Segmentation Data Set" и "Abalone Data Set". Результаты экспериментов подтвердили достоинства предложенного метода. На рис. 1 изображены графики зависимости среднеквадратичной ошибки прогноза от параметров метода N и l для каждой из задач. На рис. 2 отображены срезы графиков на

рис. 1 по оси l (зависимость среднеквадратичной ошибки прогноза от параметра N). Итоговые значения среднеквадратичной ошибки прогноза в случае обеих задач отмечены стрелками на рис. 2.

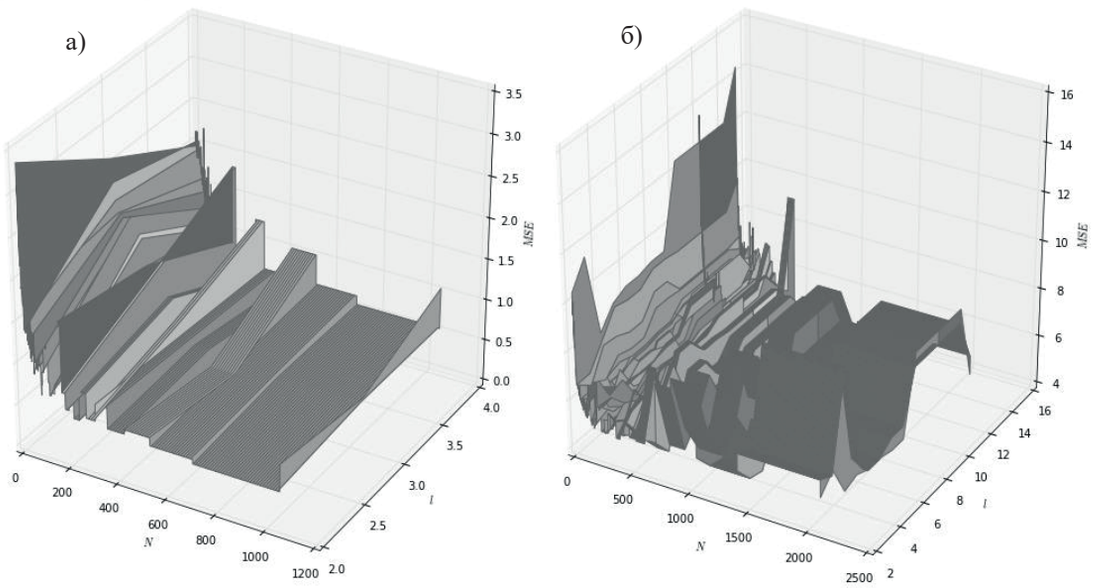
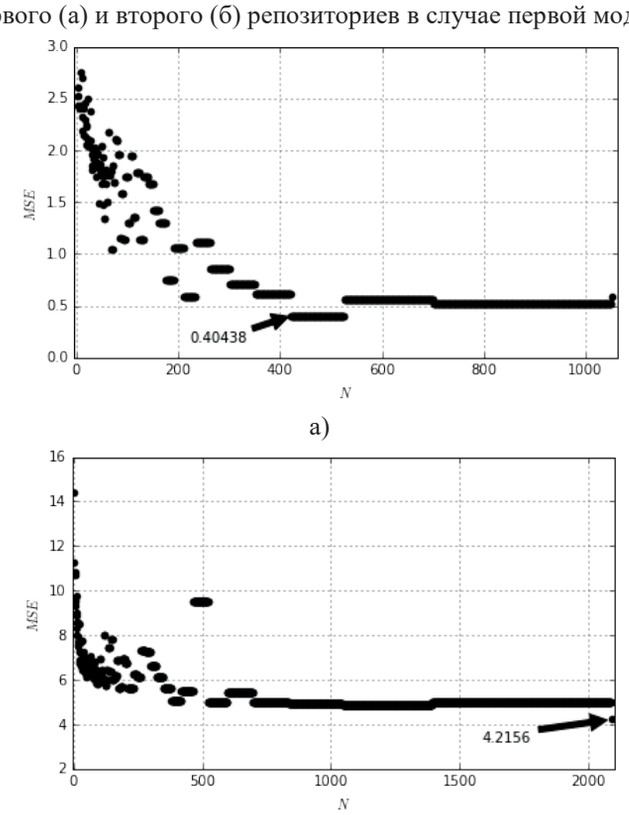


Рис. 1. Графики зависимости среднеквадратичной ошибки прогноза (MSE) от параметров N и l для первого (а) и второго (б) репозиториев в случае первой модели



а)

б)

Рис. 2. Графики зависимости среднеквадратичной ошибки прогноза (MSE) от параметра N при определенных значениях параметра l для первого (а) и второго (б) репозиториев в случае первой модели

Литература

1. *Ryazanov V.V.* Regression via Logic Supervised Classification // Lecture Notes in Computer Science.

2013. V. 7914. P. 242–253.

2. *Журавлев Ю.И.* Избранные научные труды.– М.: Магистр, 1998. 420 с.
3. *Журавлев Ю.И.*Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания или классификации // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1978. № 33. С. 5–68.

УДК 519.633

Использование иерархических сеток при расчетах задач сейсморазведки

А.А Ружанская, Н.И. Хохлов

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Одним из направлений математического моделирования в задачах сейсморазведки является исследование волнового отклика в местах нахождения микро-, мезо- и макро-трещин [1, 2]. В данной работе предложен алгоритм, позволяющий комбинировать сетки различной пространственной ориентации, размера, смещения друг относительно друга для расчета волнового отклика от трещины с различным углом наклона на структурных сетках [3]. Данный алгоритм построен на использовании «химерных сеток» [4]. Ранее такой подход широко применялся при решении задач гидродинамики, в рассматриваемой работе предложена его адаптация для расчета геологических трещиноватых неоднородностей, используя сеточно-характеристический метод. Время расчета значительно сокращается в силу использования структурированных сеток вместо криволинейных. Использовалась модель идеального изотропного линейно-упругого материала.

Алгоритм состоит из двух частей: отдельно происходит генерация списка точек для прямой и обратной интерполяции, а также коэффициентов, отдельно происходит обновление значений точек во время расчета, так как в основу алгоритма было заложено требование простоты хранения значений коэффициентов для интерполяции и единократного их вычисления.

При расчетах использовались газонасыщенные и флюидонасыщенные трещины, на каждую наклонную трещину накладывалась внутренняя расчетная сетка, ориентированная соответственно углу наклона. Осуществлялась интерполяция в узлах внешней и внутренней сетки.

Исследовалось влияние различного размещения сеток на отклонение значений от случая с нулевым углом поворота, а также на порядок схемы**.** Максимальное значение ошибки достигалось при угле поворота в 70–80 градусов, порядок соответственно оставался неизменным при значениях углов меньше 20 градусов, что является приемлемым в силу того, что в задаче рассматриваются субвертикальные трещины.

В итоговом расчете использовалась модель трещиноватого пласта: две среды с параметрами $V_p = 4500$ м/с, $V_s = 2500$ м/с, $rho = 2500$ кг/м^3, другая – $V_p = 5500$ м/с, $V_s = 3000$ м/с, $rho = 2600$ кг/м^3 (рис. 1). Область трещин находилась на глубине 2000 м в первой среде. Угол наклона – от $-10°$ до $10°$. Таким образом, продемонстрирована возможность решать уравнение при различном наклоне большого количества трещин (рис. 2).

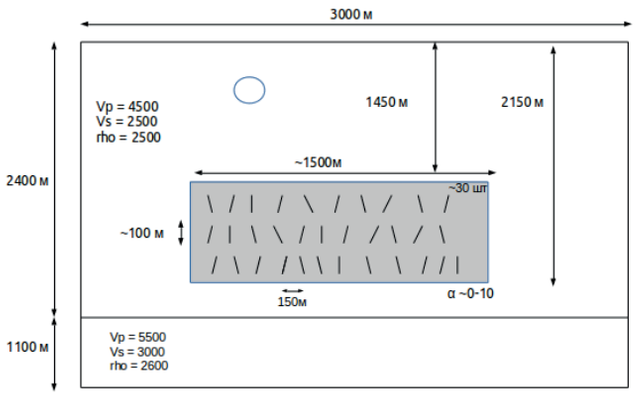


Рис. 1. Модель для расчета пласта из трещин

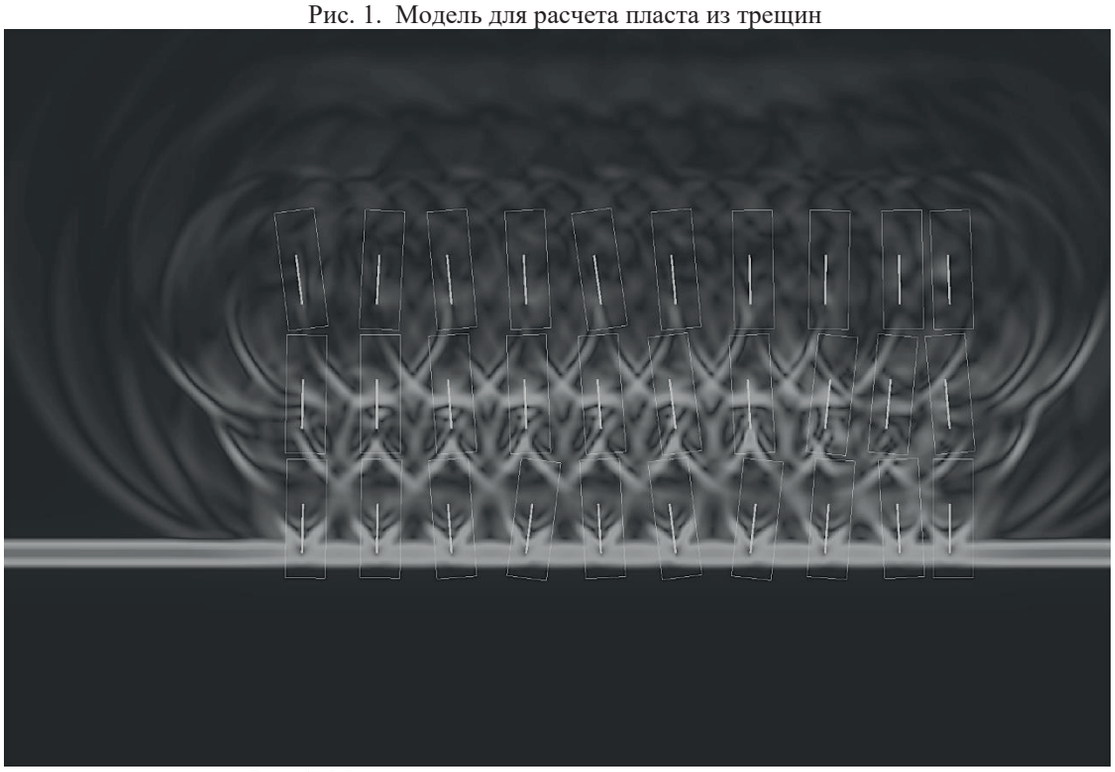


Рис. 2. Момент прохождения волны через пласт трещин

Литература

1. *Левянт В.Б., Квасов И.Е., Петров И.Б.* Оценка возможности обнаружения и картирования зон развития мезотрещин в пластах при использовании обменных рассеянных волн // Технологии сейсморазведки, 2016. С. 14-30.
2. *Левянт В.Б.*, *Петров И.Б.*, *Голубев В.И., Муратов М.В.* Численное 3D-моделирование объемного волнового отклика от систем вертикальных макротрещин // Технологии сейсморазведки 2014. С. 5–23.
3. *Berger M., Oliger J.* Adaptive Mesh Refinement for Hyperbolic Partial Differential Equations // Journal of Computational Physics, 1984. V. 53. P. 484–512.
4. *English R.E., Qiu L., Yu Y., Fedkiw R.* Chimera Grids for Water Simulation // Proceedings of the 12th ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation, 2013. P. 85–94.

УДК 519.633

Моделирование волновых возмущений в упругих средах с осевой симметрией методом FDTD

А.М. Иванов, Н.И.Хохлов

Московский физико-технический институт (государственный университет)

В работе рассматривается прямая задача моделирования волновых процессов в твердых деформируемых телах с осевой симметрией. Такие постановки возникают в ряде задач в сейсмологии и в разведочной геофизике [1].

Постановка задачи следующая: дана слоистая среда, каждый слой описывается тремя параметрами: плотностью среды ρ, скоростью S-волн c_s и скоростью P-волн c_p.На определенной глубине (достаточно глубоко, чтобы не учитывать границу воздух-земля) задается источник взрыва с сигналом, имеющим широкий спектр. Приемники располагаются в одной плоскости, параллельной слоям, с равным расстоянием между ними в виде квадрата N×N. В качестве результатов расчета необходимо получить сейсмограммы с приемников, а также волновые картины в определенные моменты времени.

Поскольку задача осесимметрична, ее целесообразно рассматривать как двумерную и решать в цилиндрических координатах. Это требует намного меньших вычислительных ресурсов по сравнению с расчетом задачи в трехмерном случае.

Математическая модель – линейно упругая среда. Распространение волновых возмущений в ней описывается уравнением движения и законом Гука [2]:

$$\begin{cases} \rho\ddot{\mathbf{u}} = \nabla \cdot \mathbf{T}, \\ \mathbf{T} = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} + \mu(\nabla \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \nabla), \end{cases} \tag{1}$$

где $\mathbf{u}$ – вектор смещения, ρ – плотность среды, λ, μ – параметры Ламе материала, $\mathbf{T}$ – тензор упругих напряжений, $\mathbf{I}$ – единичный тензор. В цилиндрических координатах r, z, θ, с учетом осевой симметрии данная система принимает следующий вид:

$$\rho u^r_{tt} = \frac{1}{r}(r\sigma^{rr})_r + \sigma^{rz}_z - \frac{1}{r}(r\sigma^{\theta\theta})_r + \sigma^{\theta\theta}_r, \tag{2}$$

$$\rho u^z_{tt} = \frac{1}{r}(r\sigma^{rz})_r + \sigma^{zz}_z, \quad \textbf{Ошибка! Закладка не определена.}$$

$$\sigma^{rr} = \lambda(\frac{1}{r}(ru^r)_r + u^z_z) + 2\mu u^r_r, \tag{3}$$

$$\sigma^{rz} = \mu(u^r_z + u^z_r), \quad \textbf{Ошибка! Закладка не определена.}$$

$$\sigma^{\theta\theta} = \lambda(\frac{1}{r}(ru^r)_r + u^z_z) + 2\mu\frac{1}{r}u^r, \textbf{ Ошибка! Закладка не определена.}$$

$$\sigma^{zz} = \lambda(\frac{1}{r}(ru^r)_r + u^z_z) + 2\mu u^z_z. \textbf{ Ошибка! Закладка не определена.}$$

Для моделирования на компьютере реализован метод FDTD для цилиндрического случая уравнения упругости. Используется сдвинутая декартовая сетка с постоянным пространственным шагом. Расчеты производятся со вторым порядком по времени и четвертым по пространству. На границах задаются поглощающие условия PML.

Импульс источника описывается фильтром Ормсби (Ormsby) [3]:

$$(\frac{f_4^2}{f_4 - f_3}\sin c^2(f_4 t) - \frac{f_3^2}{f_4 - f_3}\sin c^2(f_3 t)) - (\frac{f_2^2}{f_2 - f_1}\sin c^2(f_2 t) - \frac{f_1^2}{f_2 - f_1}\sin c^2(f_1 t)) \tag{4}$$

поскольку он позволяет задавать желаемую ширину спектра (трапеция, вершины которой задаются частотами f_1, f_2, f_3, f_4). Данный импульс имеет большую протяженность во времени, поэтому для численного расчета его необходимо ограничить. Во временной области он умножается на функцию Гаусса, что в частотной области ведет к свертке

сигналов и к сглаживанию спектра исходного импульса Ормсби. Тем не менее, для параметров среды и частот, используемых в сейсмических расчетах, данный эффект незначителен.

Для устранения неопределенности $1/r$ на оси в уравнениях (2)-(7), применяется правило Лопиталя, согласно которому на оси справедлива замена:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru) \to 2\frac{\partial u}{\partial r} \tag{5}$$

Сейсмограммы, полученные в результате моделирования волновых возмущений в слоистой среде, представлены на рис. 1. Плотность варьировалась в промежутке 2.4-2.6 г/см^3, скорости распространения волн – в промежутке 2400-5100 м/с. Источник (8) задавался четверкой частот 10-20-100-110 Гц.

Таким образом, эффективно реализован метод FDTD, в среднем расчет занимает порядка 5 минут (суммарно по всем шагам по времени – 2.2 млрд узлов), а вместе с конвертацией в трехмерное представление ив различные форматы для визуализации сейсмограмм, расчет занимает порядка 30 минут. При этом нет необходимости вручную проверять число куранта, число узлов на длину волны, размеры шагов по пространству и по времени. Необходимо лишь подобрать параметры среды, позиции источника и приемников, а также период снятия данных с приемников. На выходе получаются сейсмограммы и волновые картины в разные моменты времени.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 15-07-01931 А.

Рис. 1. Сейсмограммы с приемников в плоскости, перпендикулярной оси Y. Слева направо – компоненты вектора смещения: u^x, u^y, u^z

Литература

1. *Biryukov V.A., Miryakha V.A., Petrov I.B., Khokhlov N.I.* Simulation of elastic wave propagation in geological media: Intercomparison of three numerical methods // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2016. V. 56, N. 6. Pp. 1086-1095
2. *LeVeque R. J.* Finite volume methods for hyperbolic problems. Cambridge university press. 2002. 588 p.
3. *Ormsby J.F.A.* Design of numerical filters with applications to missile data processing //Journal of the ACM (JACM). 1961. V. 8. N. 3. Pp. 440-466.

УДК 004.94

Решение уравнений акустики с помощью метода интегральных уравнений на графических процессорах

Р. Делла Пиетра, Г.С. Степанов

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Данная работа посвящена применению метода интегральных уравнений для моделирования сейсмического волнового поля в акустическом приближении на архитектуре CUDA. Исследуются основные интегральные представления для скалярных волновых полей. Рассматриваются следующие интегральные приближения для решения данного уравнения: приближение Борна, квазианалитическое приближение (QA) и квазилинейное приближение (QL). Эти представления рассматриваются на примере исследования различных методик для получения распределения аномального волнового поля. В качестве уравнения для скалярного волнового поля используется уравнение Гельмгольца:

$$-\triangle p^s - \frac{\omega^2}{c^2} p^s = f.$$

Рассматриваемые методы построены на интегральной записи данного уравнения [1]:

$$p^s(r_j,\omega) = \omega^2 \iiint G(r_j|r,\omega) \triangle s^2(r)[p^i(r,\omega) + p^s(r,\omega)]dv,$$

где ω – частота источника, $\triangle s$ – разность медленности звука фона и аномалии, p^i – волновое поле от источника, p^s – аномальное поле, $G(r_j|r,\omega)$ – функция Грина для рассматриваемого уравнения.

Численная реализация данных методов сводится к решению СЛАУ с плотной матрицей. Ввиду симметрии функции Грина для однородной среды, свертка может быть вычислена более эффективно, используя быстрое преобразования Фурье (FFT). Ранее данный алгоритм был реализован на CPU [2]. Поскольку в алгоритме используются плотные вычисления и регулярный доступ к памяти, потенциально они должны хорошо параллелиться на системах с GPU.

В данной работе реализован перенос рассматриваемых алгоритмов численного решения уравнений акустики методом интегральных уравнений на GPU. Для реализации алгоритмов была применена архитектура CUDA для видеокарт от Nvidia и использованы библиотеки CUBLAS, CUFFT и Thrust. Первые тесты производительности показали ускорение решения уравнения до 20 раз при переходе от CPU-версии алгоритма на GPU. Идет работа по оптимизации QL- и QA-приближений с использованием FFT.

Литература

1. *Zhdanov M.S.* Geophysical Inverse Theory and Regularization Problems. Utah: Elsevier, 2002.
2. *Malovichko M., Khokhlov, N. Yavich N., Zhdanov M.* Approximate solutions of acoustic 3D integral equation and their application to seismic modeling and full-waveform inversion // Journal of Computational Physics. 2017. 346. P. 318–339.

УДК 004.855

Автоматизация проверки результатов машинного обучения

Д.* А. *Подлесных

Московский физико-технический институт (государственный университет)

В задачах машинного обучения результат работы, как правило, представляет собой не только программу и данные, но и набор готовых инструментов и библиотек, собранных для определённого параллельного вычислительного устройства (многоядерного процессора, ASIC, ПЛИС, графического ускорителя и т. п.). Как и обычные программы, такие комплексы надо тестировать и оценивать, чтобы результат был воспроизводимым, а гипотеза о применении того или иного метода – научной в смысле критерия фальсифицируемости Поппера. Всё это требует тестирования, которое нужно максимально автоматизировать и формализовать, а исследуемым методам давать идентичное аппаратное обеспечение. Использование автоматизированных проверяющих систем типа Ejudge налагает существенные ограничения на анализируемую программу из соображений безопасности.

Однако можно отказаться от традиционных для таких систем моделей «запуск исследуемых программ на проверяющем сервере» в пользу модели «анализ исследуемой программы как сервиса». Авторам систем машинного обучения предоставляется виртуализированная среда в виде контейнера или виртуальной машины в облаке (например, в облаке кафедры информатики и вычислительной математики). Аппаратное обеспечение идентично у всех, что важно для сравнения результатов. Проверящий сервер имеет доступ по ssh (с помощью пары открытого и закрытого RSA или DSA ключей) на все контейнеры разработчиков. При запросе на проверку разработчики отправляет серверу путь к разработанной программе. Проверяющая система копирует тестовые данные на контейнер, запускает программу и ожидает определённое техническим заданием время. После этого обработанные данные копируются (если готовы) на проверяющий сервер и там исследуются на близость к правильному ответу. При этом никакой код исследуемой программы не запускается на проверяющей машине, что обеспечивает как безопасность, так и кроссплатформенность (например, машинное обучение идёт на Xeon Phii, а проверка — на «Эльбрусе»).

Данный подход может быть применим для проведения хакатонов, соревнований по машинному обучению, а также в процессе разработки.

Литература

1. *Подлесных Д.А., Третьяков А.В., Уваров Н.Д.* Автоматический анализ стиля написания программ // Труды 58-й научной конференции МФТИ, 2015.

УДК 519.712

О распознавании пропущенных значений признаков при решении задач классификации

В.В. Рязанов

Московский физико-технический институт (государственный университет)

При решении задач классификации и регрессии часто встречается проблема отсутствия полного описания у ряда объектов в выборке. Существует множество причин, приводящих к данной проблеме: ошибки ввода, формирование выборки из разных баз данных, невозможность измерения какого-то признака. При решении задачи распознавания отсутствие какого-либо признака приводит к ухудшению качества классификации, а в случае некоторых алгоритмов и вовсе к отказу от работы. Проблема восстановления

пропущенных данных (NaN – not a number) в том или ином виде решается практически при каждой конкретной задаче распознавания.

На данный момент существует целый ряд подходов к восстановлению пропущенных данных. Самые простые из них основаны на тривиальной замене NaN на mean или meadian по данному признаку. Популярны и более сложные статистические, регрессионные или локальные модели [1]. В статье [2] описаны три алгоритма восстановления прочерков. Первый подход – локальный – основан на решении задачи локальной оптимизации, при которой происходит итеративное восстановление пропущенных данных, согласно близости к ближайшим соседям. Второй основан на решении оптимизационной задачи, в котором минимизируется разность попарных расстояний в полном пространстве признаков $\square^{n}$ и в частичном пространстве признаков $\square^{n'}$, где $n' < n$. Также описан алгоритм последовательного решения задач классификации, при котором диапазон возможных значений пропуска итеративно уменьшается. В качестве базового классификатора использовался алгоритм ABO [3].

В данной работе предлагается подробное исследование алгоритма оптимизации, сокращающего попарные расстояния между объектами в пространствах $\square^{n'}$ и $\square^{n}$. Исследованы различные значения метрик (Евклидова, Минковского) и зависимость качества восстановления данных от доли NaN в исходной выборке. Качество восстановления оценивается по нескольким критериям, таким как метрики MAE, RMSE между восстановленными значениями и изначальными, а также изменения итоговой классификационной метрики в зависимости от подхода к заполнению данных.

Литература

1. *Zloba E* Statistical methods of reproducing of missing data // Computer Modelling & New Technologies, 2002. V.6, N 1. P. 51-61.
2. *Ryazanov Vasily V., Ryazanov Vladimir V*. Classification of incomplete Data // Information Models and Analyses 2013. V. 2, N 3. P. 203-211.
3. *Журавлев Ю.И., Никифоров В.В.* Алгоритмы распознавания, основанные на вычислении оценок // Кибернетика. 1971. № 3. С. 1–11.

УДК 004.021

Формальная грамматика системных вызовов Linux

Н.Н. Ефанов

Московский физико-технический институт (государственный университет)

В работе рассмотрена задача восстановления Linux-процесса цепочками системных вызовов из пространства пользователя на основе анализа моментального снимка дерева процессов Linux. Данная задача имеет важное практическое приложение в Checkpoint/Restore-системах [1], и выработка строгого математического аппарата может помочь сконструировать эффективные способы восстановления состояния единицы исполнения – процесса, контейнера, виртуальной машины после остановки или живой миграции.

Проведен обзор профилирующих и эвристических решений, комбинаторная оценка числа генерируемых при прямом восстановлении различных деревьев процессов [2]. Ввиду значительной вычислительной сложности простой генерации деревьев и поиска, связанной с большим числом различных деревьев, предложено решение на основе разбора строчной записи дерева в специальной нотации, для которой построена формальная грамматика с выводящими правилами для системных вызовов fork(), setsid(), setpgid(), exit(). Построен прототип анализатора по данной грамматике, проведены экспериментальные сравнения с профилирующими решениями на базе strace и perf-интерфейса, сделаны выводы и отмечены пути дальнейшего развития.

Литература

1. https://www.criu.org [Электронный ресурс]
2. *Ефанов Н. Н., Емельянов П.В*. Построение формальной грамматики системных вызовов // Информационное обеспечение математических моделей. – М., 2017. С. 83–91

УДК 004 (51)

Математика, информатика, информационные технологии

И.Т. Кадощук

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Современное здание науки и технологий стоит в основном на математике, «в каждой естественной науке заключено столько истины, сколько в ней есть математики» (Эммануил Кант), а «Волга впадает в Каспийское море», мы все об этом всё знаем.

Ну, а если задуматься, что дала математика за последние пару-тройку десятилетий в фундамент «*IT*», то есть информационно-коммуникационных технологий (ИКТ), ну, или хотя бы, что дала математика своей ближайшей «дочке» информатике?... Окажется, что ответ не так очевиден.

Давайте попытаемся в целом выяснить влияние математики, теоретической алгоритмической информатики (далее «информатика») на технологическую сферу ИКТ за последние 20–30 лет? И поскольку ИКТ – область сугубо практическая и, по идее, должна давать стимул к развитию той же информатики в ту или иную область, давайте пытаемся понять, куда и как могут и будут развиваться математика и информатика в дальнейшем? Что их (и нас) ждет в будущем? Чего мы можем ожидать и/или требовать от математики и информатики?...

Методика этого анализа проста: попытаться понять логику влияния математики на информатику и технологическую сферу ИКТ за последние 20–30 лет и спроецировать эту логику в будущее, насколько возможно, для того чтобы попробовать угадать «магистральные направления» (с точки зрения технологий ИКТ) развития информатики и математики.

На мой взгляд, задачу анализа можно решать с двух точек зрения: во-первых, перечислить наиболее значимые достижения математики за выбранный временной период и оценить их вклад в информатику и технологии ИКТ сегодняшнего дня, то есть двигаться от математики к технологиям ИКТ, а во-вторых, можно, наоборот, двигаться от технологий к математике, т.е. перечислить все важнейшие классы технологий ИКТ и идентифицировать их математическую и алгоритмическую основу в математике (и в информатике, с учетом датировок), что, возможно, позволит указать достижения в математике (и информатике), оказавшие значительный вклад в технологии ИКТ сегодняшнего дня.

Достижения математики и информатики

Если взять за точку отсчета 30 лет, например, 1985–1987 гг. и попытаться перечислить только самые значительные математические достижения, то может получиться следующий список (возможно, не полный, но с определенного уровня «значительности» вполне приемлемый):

1. Доказательство великой теоремы Ферма (1995) [1].
2. Безусловно, доказательство Григорием Перельманом гипотезы (и обобщенной гипотезы) Пуанкаре и гипотезы Тёрстена (2002—2003) [2].
3. Доказательство тернарной гипотезы Гольдбаха Харальдом Гельфготтом (2013) [3].
4. Теорема Грина–Тао о существовании арифметических прогрессий произвольной длины в последовательности простых чисел (2008) [4].
5. Разработка теории параллельных алгоритмов; закон *Gustafson–Barsis* (1988) [5] и метрика *Karp-Flatt* (1990) [6].

О выдающихся результатах в области теоретической информатики (*Theoretical Computer Science*):

1. Квантовый алгоритм факторизации Шора для разложения числа на простые множители за полиномиальное время (1994) [7].
2. Теорема Иммермана–Шелепчени о линейно-ограниченных автоматах (*LBA Problem*) в теории вычислительной сложности (1987) [8], [9].
3. Теорема Тода о связи между классами сложности *PP* и *PH* (1991) [10].
4. Теорема о вероятностно проверяемых доказательствах (*PCP*) (1990) [11].
5. Разработка Матиасом и Сегеди поточных (1996) и полупоточных алгоритмов [12].
6. Разработка Бруксом и О'Хёрном многопоточной сепарационной логики (1999–2001).
7. Разработка Тимом Бернес-Ли всемирной паутины (1989), *URI*, *HTTP*, *HTML* (1991–1993), веб-сервера и веб-браузера (1990) [13].

Не так много, как хотелось бы. При этом только последний пункт среди достижений в математике непосредственно влияет на развитие современных ИКТ, а среди достижений в области информатики – пять пунктов из шести относятся к области сложности вычислений.

Если же резюмировать результаты разработок в области технологий, то ИКТ за это время не только «изменили мир», но и создали инструментарий совершенно нового качества (средства вычислительной техники, программное обеспечение, алгоритмическая база, пр.) для проведения любых исследований и разработок, в том числе для решения фундаментальных проблем.

В качестве очень разных примеров можно привести хотя бы то же доказательство великой теоремы Ферма и расшифровку генома человека (2001) [14]. Ни одно из перечисленных достижений невозможно было бы без средств ИКТ.

Вместе с тем детальный анализ датировок технологических областей ИКТ показывает, что подавляющее большинство популярных сегодня ИКТ имеют в своей основе теоретические корни в 60–70-х гг. прошлого века и даже более ранние.

Какие выводы можно сделать из этих фактов?

1. Даже не такое большое количество фундаментальных результатов может привести к росту многочисленных различных трендов развития в технологических сферах ИКТ.
2. 30-летний срок – слишком (возможно, только пока) короткий для того, чтобы фундаментальные математические результаты дали заметные ростки в технологической сфере.
3. Можно сказать, что все эти 30 лет мы только и делали, что осваивали применение широкого круга математических теорий в различных приложениях, в том числе с целью развития вычислительных мощностей.
4. Сложность, сложность и снова сложность! Поэтому – рост производительности вычислительных систем (закон Мура), поэтому – параллельные вычисления, поточные, полупоточные, многопоточные алгоритмы, грид-системы, многопроцессорные комплексы, суперкомпьютеры, поэтому – комбинаторная геометрия, поэтому – анализ сложности, *P/ PP/ NP* классы, и пр., и пр.
5. Помочь технологической сфере ИКТ в этой области есть, может быть, самая главная задача как информатики, так и математики.
6. Поскольку сфера охвата технологиями ИКТ сторон жизни человечества только расширяется, растет потребность в решении многочисленных задач информатики и математически. Они не могут развиваться порознь, тем более что теоретическая, алгоритмическая информатика давно является полноправной веткой математики, ни чуть не менее полноправной, чем, скажем, теория чисел.

Литература

1. *Wiles A.* Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem // Annals of Mathematics. 1995. V. 142, N 3. P.443–551.
2. *Perelman G.* The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications// arXiv:math.DG/ 0211159. 2002. 39 p.
3. *Helfgott H.A.* The ternary Goldbach conjecture is true// arXiv:1312.7748 . 2013. 79 p.

4. *Green B., Tao T.* The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions // Annals of Mathematics 2008. V. 167, N 2. P. 481–547.
5. *Gustafson J.L.* Reevaluating Amdahl's Law // Communications of the ACM. 1988. V. 31, N. 5. P. 532–533.
6. *Karp A.H., Flatt H.P.* Measuring Parallel Processor Performance// Communications of the ACM. 1990. V. 33, N 5. P. 539–543.
7. *Shor P.W.* Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring // Foundations of Computer Science : Conference Publications. 1994. P. 124–134.
8. *Szelepcsényi R.* The method of forcing for nondeterministic automata // Bulletin of the EATCS. 1987. N 33 P. 96–100.
9. *Immerman N.* Nondeterministic space is closed under complementation// SIAM J.on Comput. 1988. N 17. P. 935–938.
10. *Toda S.* PP is as hard as the polynomial-time hierarchy// SIAM Journal on Computing. 1991. N 20. P. 865–877.
11. *Babai L., Fortnow L., Lund C.* Nondeterministic exponential time has two-prover interactive protocols // SFCS '90: IEEE Computer Society. 1990. P. 16–25.
12. *.Alon N., Matias Y., Szegedy M.* The space complexity of approximating the frequency moments // Proceedings of the 28th ACM Symposium on Theory of Computing. 1996. P. 20– 29.
13. *Quittner J.* Tim Berners Lee – Time100 People of the Century// Time Magazine. 29.03.1999.
14. *.DeLisi C.* Genomes: 15 Years Later A Perspective by Charles DeLisi, HGP Pioneer// Human Genome News. 2001. N 11. P. 3–4.

УДК 519.111 (519.161)

Что находится за перечислительной теоремой Пойа?

И.Т. Кадощук

Московский физико-технический институт (государственный университет)

В этом году исполнилось 80 лет с момента публикации венгерским математиком Дьёрдем Пойа теоремы о перечислении классов эквивалентности в группах [1]. В первой же статье Пойа показал применимость доказанной теоремы к задаче перечисления химических соединений. Не думаю, что он предполагал, что через полвека множество результатов, которые возникнут вокруг этой теоремы, будут называть «перечислительной теорией Пойа», и в каждом учебнике, и в каждой достаточно полной книге по комбинаторике будет глава, посвященная «теории Пойа».

Просто напомню, что Пойа показал, как пересчитывать объекты множеств, образованных с помощью образующих и групп (групповые множества). Оказывается, пересчитывать такие объекты вычислительно проще, чем объекты канторовых множеств. Число объектов в групповых множествах определяется произведением числа образующих и мощности группы с точностью до числа разных представлений одного и того же объекта, тогда как во втором случае нет никакого другого способа, как все объекты канторового множества пересчитать.

В этом, очевидно, нет ничего удивительного, поскольку канторово множество не обладает никакой внутренней структурой, «это просто множество!…», как сказано у классика [2], тогда как групповые множества имеют некоторую структуру, определяемую группой. К тому же указанные вычислительные преимущества не кажутся такими значительными, ведь образующие тоже нужно пересчитывать.

Интереснее оказалась следующая задача: определение ближайших (с точки зрения некоторых метрик), точек в групповых множествах. Основные результаты содержатся в работах [3] и [4].

Результаты работы показали, что сложность такой задачи является полиномиальной, тогда как в случае с канторовыми множествами она имеет экспоненциальную сложность. И это было интересно. Почему?...

Потому что казалось, что не только удается найти вычислительно эффективный способ решения труднорешаемой задачи в некоторых частных случаях, что уже само по

себе очень неплохо, но и путь решения задачи «$P = NP$?», а это было даже более чем интересно.

Логика дальнейших размышлений была следующей: предположим, задано некоторое (канторово) множество точек M в пространстве размерности N с некоторой метрикой ρ_N. Требуется найти пару точек x и y таких, что для любой пары точек a и b множества M достигался «минимум близости» $\min\{\rho_N(a, b)\} = \rho_N(x, y)$.

Тогда для решения этой задачи множеству точек M ставим в соответствие групповое множество точек M' в пространстве, возможно большей размерности K с метрикой ρ_K так, чтобы первоначальное множество M полностью совпадало с проекцией множества точек M' из пространства размерности K в пространство размерности N.

Далее, решая задачу определения ближайших точек на множестве M' в пространстве размерности K, и, делая проекцию решения из пространства размерности K в пространство размерности N, получаем решение задачи ближайших точек на множестве M в пространстве размерности N за полиномиальное время.

Для реализации этого плана требуется как минимум два результата.

Первый результат, «Лемма множеств».

Доказать, для любого множества точек M в пространстве размерности N, существование группового множества точек M' в пространстве размерности K такого, что M является проекцией множества точек M' при переходе из пространства размерности K в пространство размерности N, где K не меньше N.

Этот результат получен путем прямого построения множества точек M' по множеству точек M, при этом для соответствующих размерностей выполнялось равенство: $K = N + 1$.

Второй необходимый результат, «Лемма метрик».

Доказать, что при проекции из пространства размерности K в пространство размерности N, где K не меньше N, «минимум близости» $\min\{\rho_N(a, b)\} = \rho_N(x, y)$ «сохраняется» в том смысле, что если точки являются самыми близкими среди точек некоторого множества M' в пространстве размерности K, то и их проекции являются самыми близкими среди точек проекции множества M' в пространство меньшей размерности N.

Очевидно, что этот результат имеет место при $K = N$. Но, оказалось, что при K строго больше N, выполняется другое утверждение, а именно:

для любого пространства размерности K и соотношения «минимум близости» $\min\{\rho_N(a, b)\} = \rho_N(x, y)$ для точек некоторого множества M' существует проекция на произвольное подпространство меньшей размерности, где указанное соотношение «минимум близости» для соответствующих проекций точек x и y не выполняется.

Ну что же, в данном случае «отрицательный результат – тоже результат» (Нильс Бор). Это предмет для дальнейших работ на групповых множествах. Например, разобраться в том, как должны быть связаны множества, метрики и проекции на подпространства, обладать какими свойствами и характеристиками так, чтобы соотношение «минимум близости» сохранялось? Этот результат позволил бы воспользоваться приведенными выше заключениями в практических целях.

Это некоторые из результатов, которые мне удалось найти «за перечислительной теоремой Пойа».

Литература

1. *Pólya G.* Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen // Acta Mathematica. December 1937. V. 68, N 1. P. 145–254.
2. *Кэрролл Л.* Приключения Алисы в стране чудес. Алиса в Зазеркалье (Пер. Н. М. Демуровой). – Минск: Юнацтва, 1990. 206 с.
3. *Журавлёв Ю.И., Кадощук И.Т.* Перечислительные задачи теории распознающих алгоритмов // Моделирование процессов управления и обработки информации. Междуведомственный сборник. 1994. М.: МФТИ. С. 95–111.

4. *Кадощук И.Т.* Комбинаторные вычисления метрик: вычисления экстремальных значений // Моделирование процессов управления и обработки информации. Междуведомственный сборник. 1994. М.: МФТИ. С. 112–124.

УДК 004.89

Использование методов неразрушающего контроля на основе инструментов машинного обучения для обнаружения дефектов в рельсах

Б.М. Якупов, Н.И. Хохлов

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Железнодорожные пути играют существенную роль как в области пассажирских, так и грузовых перевозок во всём мире. Ввиду этого актуальной задачей является обеспечение их безопасности и безаварийности. Поскольку в последнее время предъявляются повышенные требования к скорости движения подвижного состава и к осевым нагрузкам, важной задачей является разработка новых методов оценки безопасности движения в данных условиях. Существенным фактором при этом является наличие скрытых дефектов в рельсах. Для оценки влияния данных дефектов на путь одним из перспективных подходов является аналитический расчёт и компьютерное моделирование [1].

В данной работе было рассмотрено применение свёрточных нейронных сетей для получения двухмерного изображения дефектов в рельсе путем анализа ультразвуковых сигналов. Ранее такие алгоритмы уже применялись для поиска дефектов в композитных материалах [2]. Исследование проводилось на упрощенной двумерной модели рельса, являвшейся квадратом. Источник сигнала и приемник располагались на поверхности модели. Принятый сигнал проходил через пакетное вейвлет-преобразование. Из полученных коэффициентов формировалась матрица, которая поступала на вход свёрточной нейронной сети для кодирования и дальнейшего декодирования, в результате которого получалось двухмерное изображение модели.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и ОАО «РЖД» в рамках научного проекта № 17-20-03057 офи_м_РЖД.

Литература

1. *Khokhlov, N.I., Kotelnikov, S.A., Favorskaya, A.V., Petrov, I.B., Miryakha, V.A.* Numerical simulation of non-destructive ultrasonic railway control (2016) Civil-Comp Proceedings, 110 https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0 84964378664&partnerID=40&md5=d6e499c9583eff684aa 9b1ba45a749ac
2. *Min M.*, *Jacquelin Y.C.*, *Erwin W.*, Chin Peng K.O. Ultrasonic signal classification and imaging system for composite materials via deep convolutional neural networks // Neurocomputing. 2017. V. 257. P. 128–135.

УДК 004.94

Моделирование движения поезда в туннеле

Д.Ю. Дербышев

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Из-за широкой распространенности использования железнодорожного транспорта долгое время являются актуальными исследования, направленные на повышение износостойкости железнодорожных систем и выявление скрытых напряжений в отдельных конструкциях. Для расчета взаимодействия системы тоннеля и движущегося

железнодорожного состава и возникающих напряжений конструкции тоннеля необходимо моделирование процессов, возникающих в воздушной среде при взаимодействии ее с подвижными транспортными средствами, что освещено в работах [1, 2]. Целью данной работы является постановка и исследование задачи моделирования аэродинамических характеристик транспортных средств при перемещении в искусственных подземных сооружениях.

Для численного моделирования используется открытая платформа OpenFOAM версии 5.0. Модели поезда взяты из примера задачи расчета аэродинамических свойств движущегося поезда на открытой местности, представленной для OpenFOAM версии 3.0. Модель поезда представляет собой упрощенную модель товарного поезда и состоит из 4 вагонов (см. рис. 1): головного движущего локомотива, двух товарных составов посередине и вагона-цистерны в хвосте состава. Используется алгоритм PISO (pressure implicit with splitting of operators) решения, являющийся методом расчета скорости давления для уравнений Навье–Стокса, разработанный Issa в [3].

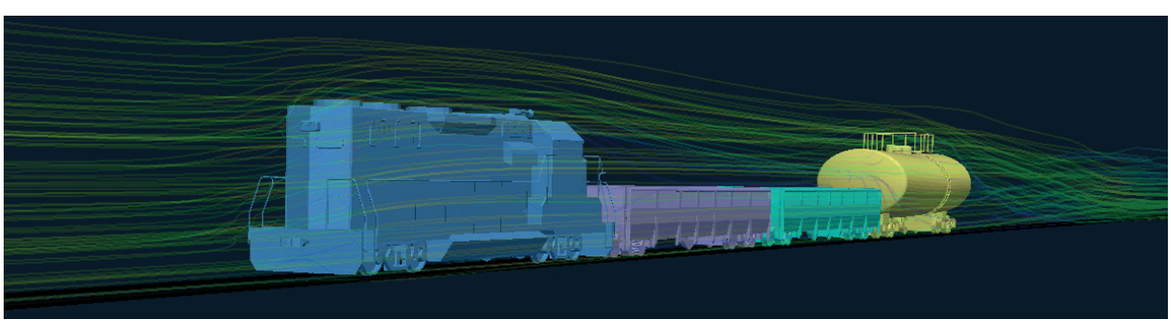


Рис. 1. Модель товарного состава вне тоннеля

Литература

1. *Грязнова С.А., Калкаманов С.А., Хворост Н.В.* Метод расчета аэродинмических характеристик «Тоннель – поезд» // Коммунальное хозяйство городов. 2011. №. 101. С. 520–527.
2. *Huang Y., Hong T.H., Kim C.N.* A numerical simulation of train-induced unsteady airflow in a tunnel of Seoul subway // Journal of mechanical science and technology. 2012. V. 26, N. 3. P. 785–792.
3. *Issa R. I.* Solution of the implicitly discretised fluid flow equations by operator-splitting //Journal of computational physics. 1986. V. 62, N 1. P. 40–65.

Секция проблем интеллектуального анализа данных, распознавания и прогнозирования

УДК 004.912

Система выявления плагиата – подход на основе кооперации нескольких методов

***А.В. Пенко*[1], *М.В. Сулима*[2]**

[1]Московский физико-технический институт (государственный университет)
[2]Одесский национальный политехнический университет

Предложена программная архитектура для выявления различных видов плагиата. Рассмотрены основные виды плагиата и характеризующие их параметры. Ввиду отсутствия универсального метода выявления плагиата предлагается подход на основе совместного использования нескольких взаимодополняющих методов.

В рамках разрабатываемой системы предлагается использовать следующие методы:

– метод на основе векторного представления документа исходя из частотного распределения термов корпуса текстов [1];

– метод на основе законов Зипфа [2];

– метод на основе векторного представления слов word2Vec [3].

В первом методе векторное представление документа строится на основе анализа частотного распределения термов в корпусе документов. Термом в частном случае является одиночное слово, в обобщенном – *N*-грамма произвольной длины. Первоначально определяется *DF*(*t*) – количество документов, использующих данный терм *t*.

Далее вычисляется инверсная логарифмическая частота как

$$IDF(\mathrm{t}) = 1 + \log\frac{N}{DF(t)}\ .$$

Эта характеристика играет роль веса для данного терма в дальнейших вычислениях.

На следующем этапе вычисляется матрица частоты терма *t* в документе $t - TF(t,d)$.

Окончательное векторное представление образуется в матрице

$$W(t,d) = TF(t,d) \cdot IDF(t).$$

Таким образом, частота терма в документе корректируется весом этого терма в корпусе документов.

Для выявления возможного плагиата далее вычисляется мера близости вектора проверяемого документа с векторами документов в корпусе. В вычислительных экспериментах использовалась традиционная для этих случаев косинусная мера близости.

Применение второго метода предполагает выполнение предварительного обучения на основе множества пар параллельных документов на двух языках.

Для каждого документа в паре строится распределение слов в соответствии с законом Зипфа. Далее каждое распределение подвергается логарифмическому преобразованию по обеим осям. В результате гиперболическая кривая Зипфа трансформируется в прямую. Экспериментально выявлена следующая закономерность – если тексты в паре являются параллельными в смысле их сходства друг с другом, то и прямые Зипфа оказываются параллельными. Для получения устойчивых результатов коэффициенты прямой Зипфа были определены путем применения метода наименьших квадратов по отношению к совокупности коэффициентов каждой пары документов в корпусе.

Третий метод основан на применении ставшего уже довольно популярным в задачах обработки естественного текста векторного представления word2Vec. Это представление позволяет получить после обучения на представительном корпусе текстов некоторого языка многомерное пространство, в котором расстояния между словами отражают их семантическую близость. При этом само векторное представление получено за счет статистической процедуры, определяющей частоту появления слова в разнообразных контекстах.

В контексте выявления плагиата векторное представление слов используется следующим образом. Для проверяемого текста и текстов, являющихся потенциальными источниками плагиата, строятся соответствующие пространства векторов-слов. Далее следует определить, существует ли аномальная близость векторов слов в проверяемом тексте с векторами слов в текстах-источниках плагиата.

В результате реализации описанных выше методов возникла возможность проведения вычислительных экспериментов с целью выявления их применимости в той или иной конкретной ситуации. Проведенная серия экспериментов не претендует на роль статистически значимой серии экспериментов, однако позволяет сделать несколько предварительных выводов:

– метод на основе векторного представления документа применим к задаче выявления внешнего плагиата для одноязыковых текстов небольшого размера. Лучшие результаты этот метод демонстрирует в случае использования триграмм в качестве термов;

– метод на основе законов Зипфа применим при выявлении внешнего плагиата для разноязыковых пар документов, но эффективно работает только для текстов достаточно большого размера. Можно рассчитывать на улучшение результатов метода в случае применения более точной модели регрессии для кривой Зипфа;

– наиболее перспективным выглядит метод на основе векторного представления слов. Во-первых, этот метод начинает успешно работать даже на сравнительно небольших текстах, что позволяет использовать его как инструмент для выявления внутреннего плагиата. Во-вторых, несмотря на то, что первоначально метод разрабатывался для выявления плагиата в одноязыковых текстах, вычислительные эксперименты демонстрируют весьма схожие топологии пространств слов, построенных для текстов на разных языках. Это означает, что данный метод может быть использован и для выявления плагиата в разноязыковых текстах.

Проведенные на основе описанных выше методов вычислительные эксперименты осуществлялись с помощью программного моделирования на языке Python. Применение нескольких специализированных пакетов позволило существенно снизить затраты на разработку и отладку программного кода. Наиболее полезным в этом смысле оказался пакет NLTK – специализированный пакет для решения задач обработки текстов на естественных языках.

Литература

1. *Akmal Jahan, Roshan G. Ragel* Plagiarism Detection on Electronic Text based Assignments using Vector Space Model MAC Jiffriya MAC // The 7th International Conference on Information and Automation for Sustainability (ICIAfS), 2014.
2. *Mehdi Mohammadi* Parallel Document Identification using Zipf's Law // 9th Workshop on Building and Using Comparable Corpora - Portorož (Slovenia), May 2016.
3. *Tomas Mikolov, Ilya Sutskever, Kai Chen Greg, Corrado Jeffrey Dean* Distributed representations of words and phrases and their compositionality Proceeding. NIPS'13 // Proceedings of the 26th International Conference on Neural Information Processing Systems Lake Tahoe – Nevada, December 05 - 10, 2013.

УДК 519.254

Анализ треков частиц в пиксельных детекторах на основе микросхем Timepix

***А.В. Нигоян*[1]**

[1]Московский физико-технический институт (государственный университет)
[2]Объединённый институт ядерных исследований

Введение

Гибридные пиксельные полупроводниковые детекторы излучения – одни из самых высокотехнологичных приборов для регистрации частиц и гамма-излучения, получающие в настоящее время все большее распространение как в области экспериментальной физики частиц, так и в рентгенографии. В работе исследуется возможность идентификации прямых треков с помощью полупроводникового детектора на базе микросхемы Timepix. Микросхемы Timepix обеспечивают считывание и оцифровку данных с 65536 независимых пикселей размером (55×55) мкм^2. Для каждого зарегистрированного сигнала определяется энергия, выделившаяся в данном пикселе, а совокупность сработавших вдоль трека частицы пикселей формирует изображение траектории. Это дает дополнительную возможность идентификации частиц по форме трека в таком детекторе.

Основная задача

Создание алгоритма и программы анализа формы треков частиц в пиксельном детекторе и выделения среди них прямых треков.

Описание детектора Timepix

Пиксельный детектор на базе микросхемы Timepix [1] (рис.1) состоит из полупроводникового сенсора и указанной микросхемы. Внешняя поверхность сенсора покрыта сплошным слоем металла, в то время как на внутренней стороне металлизация наносится в виде двумерной матрицы пикселей. Каждый из этих пикселей соединяется со входом микросхемы Timepix.

Анализируемые данные

Для настройки алгоритма использовались калибровочные данные, полученные при облучении детектора гамма-квантами и частицами различной энергии от радиоактивных источников и ускорителей. Программа используется для идентификации прямых треков при анализе данных системы ATLAS-GaAsPix [2], размещенной в шахте установки ATLAS [3] (CERN) с целью измерения карты радиационного фона.

Данные, получаемые с детектора, представляют собой кадры (фреймы) энерговыделения в пикселях детектора, зарегистрированного за время длительности фрейма (~100 мс). На рис. 2 приведен пример изображения одного фрейма. Эти данные анализируются соответствующими программами, с помощью которых в каждом кадре выделяются кластеры – последовательность пикселей, соприкасающихся друг с другом, в которых зарегистрирован ненулевой уровень сигнала. Необходимо было дополнить существующие программы анализа процедурой классификации кластеров по их форме для выделения, в частности, прямолинейных треков, формируемых, как правило, релятивистскими заряженными частицами.

Решение задачи

Для определения формы трека используется процедура, называемая *скелетонизацией.* На вход принимается некоторое изображение A объекта. Оно преобразуется в "черно-белое" изображение B по следующему принципу: белым цветом закрашиваются те пиксели, которые принадлежат исследуемому объекту, а остальным пикселям, соответственно, присваивается черный цвет. Далее, по изображению B формируется скелет объекта – множество точек (пикселей), равноудалённых от границ фигуры объекта. Пример результата работы описанной процедуры представлен на рис. 3. Данный алгоритм позволяет извлечь для анализа необходимую информацию о треке, которая определяет его форму (кривизну, число концов и пр.). В работе используется

реализация заданного алгоритма в библиотеке ITK (Insight Segmentation and Registration Toolkit).

В ходе обработки кластеров производится анализ каждого трека, зарегистрированного в детекторе. Концом скелета трека называется пиксель, к которому примыкает только один другой пиксель данного кластера. По количеству концов можно судить о том, сколько треков частиц было объединено в данный кластер. Кластер, имеющий ровно два конца, с большой вероятностью принадлежит одной частице. Кластеры с тремя концевыми точками представляют собой объединение трека от частицы, попавшей в детектор, со вторичным треком от новой частицы, чаще всего вторичным электроном. Для выделения кластеров, в которых есть пересекающиеся треки, отбираются кластеры с идентифицированными четырьмя и более концевыми точками.

С целью классификации треков по кривизне, вводится характеристика – «линейность» (linearity), определяемая как отношение расстояния S между началом и концом трека к полной длине L трека (параметры L и S определяются по скелету кластера). Чем ближе данный параметр к единице, тем менее искривлен трек, и наоборот. На рис. 4 приведены примеры набора кластеров с параметром «linearity» а) 0,8–1,0 — прямые треки, и б) 0,2–0,6 — прочие треки.

Результаты данной работы вошли в программу идентификации треков частиц в детекторах Timepix, используемую при анализе данных в проекте ATLAS-GaAsPix.

Границы применимости

1) Метод позволяет анализировать только частицы сформировавшие кластер, состоящий из достаточного (>10) числа пикселей;

2) Невозможно отличить примыкающие друг к другу (но не пересекающиеся) треки

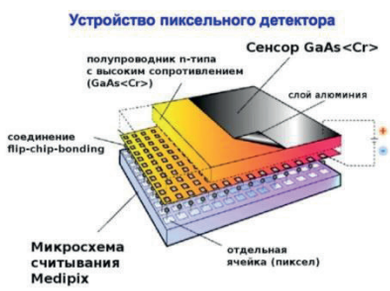


Рис. 1. Пиксельный детектор с микросхемой Timepix

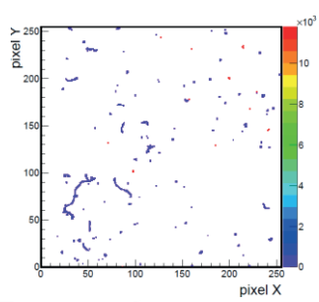


Рис. 2. Пример изображения одного фрейма

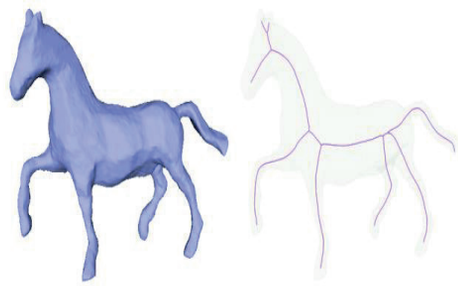


Рис. 3. Пример результата работы алгоритма (из [4])

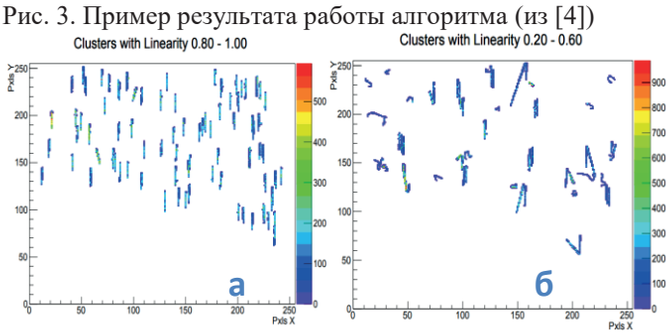


Рис. 4 Кластеры с линейностью а) 0,8-1,0 б) 0,2 – 0,6

Литература

1. *Llopart X, Ballabriga R., Campbell M., Tlustos L., Wong W.* Timepix, a 65 k programmable pixel readout chip for arrival time, energy and/or photon counting measurements // Nucl. Instr. and Meth. A. 2007. P. 485–494.
2. *Dedovich D. [et al.].* Proposal to Measure Radiation Field Characteristics, Luminosity and Induced Radioactivity in ATLAS with TIMEPIX detectors having GaAs:Cr sensors : Project GaAsPix // ATLAS Note ATL-COM- GEN-2016-001.
3. ATLAS Collaboration. ATLAS detector and physics performance: Technical Design Report, 1. Geneva: CERN, 1999. 460 p.
4. The CGAL Project. CGAL User and Reference Manual. CGAL Editorial Board, 4.11 edition, 2017.

УДК 81.322.2; 004.912

Морфологический анализ текста на русском языке со снятием неоднозначностей при разборе предложения с использованием нейронных сетей

И.О. Гусев, Д.Г. Анастасьев

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Рассмотрена задача определения полного грамматического значения слова на основе разбора по словарю, с последующим снятием неоднозначности с помощью рекуррентной нейронной сети, использующей контекст слова в предложении.

Разбор по словарю производился с помощью пакета pymorphy2 для языка программирования Python. Реализация нейронной сети производилась с помощью библиотеки Keras. В качестве признаков нейронная сеть использует грамматическое значение, полученное в результате взвешенного суммирования разборов pymorphy2, и символьный уровень слов.

На рис. 1 изображена архитектура сети. Важной особенностью сети являются её иерархическая структура: первый BiLSTM слой используется для получения представления слов на основе их символов, а работающий поверх него двухслойный BiLSTM

обрабатывает сразу целое предложение, используя представления слов как признаки. Общее количество обучаемых весов – около 800 тысяч.

Обучение производилось на подкорпусе ГИКРЯ с разметкой, сконвертированной в формат Universal Dependencies. На нем сеть научилась предсказывать 258 различных грамматических значений. Тестовая выборка была создана для соревнования MorphoRuEval-2017 и состояла из размеченных подкорпусов новостей (lenta.ru), прозы (magazines.russ.ru), социальных сетей (vk.com).

Результаты на тестовой выборке сравнивались с результатами участников MorphoRuEval-2017. Сравнение представлено в Таблице 1.

Полученная модель показала точность разметки выше, чем все модели, представленные в рамках закрытой дорожки MorphoRuEval-2017.

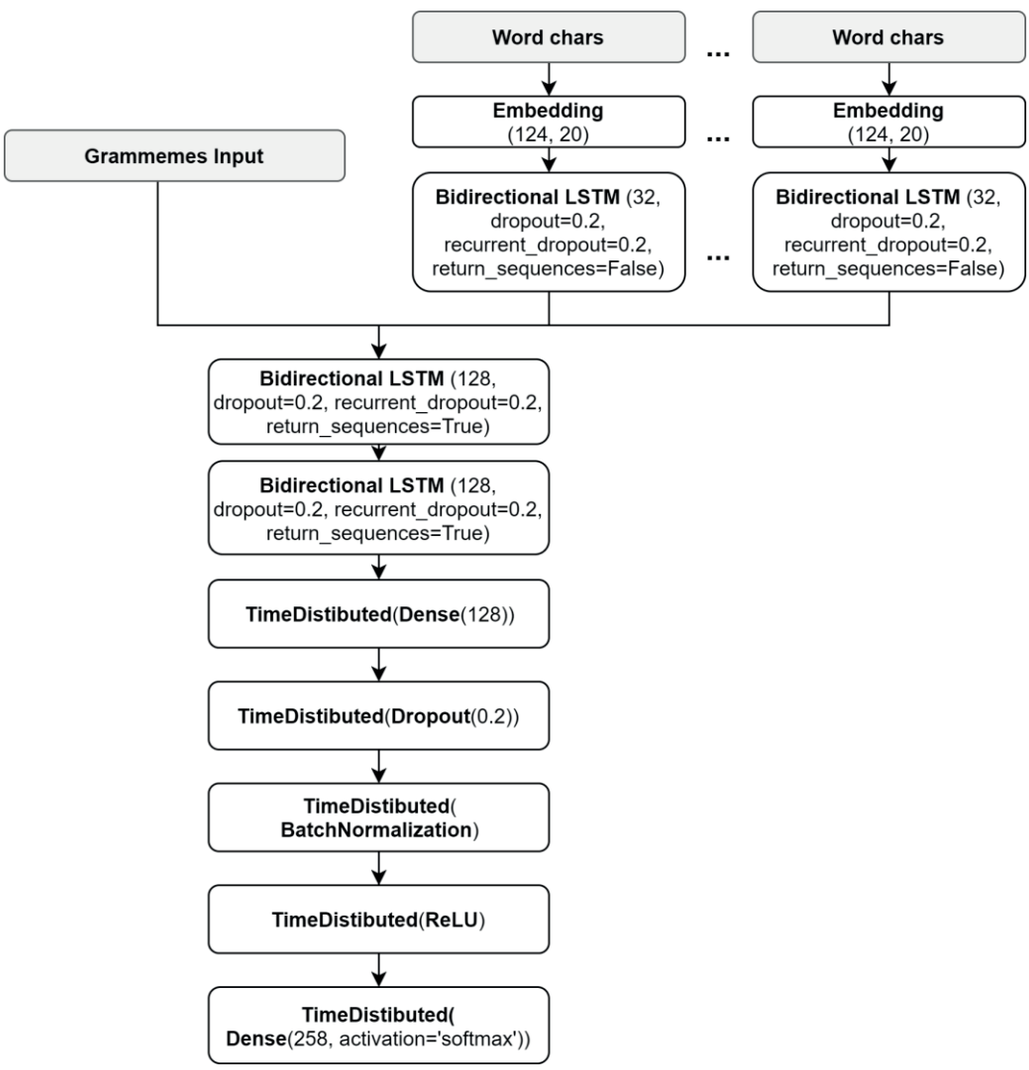


Рис. 1. Архитектура сети

Таблица 1

Сравнение с результатами закрытой дорожки на новостном подкорпусе

Название команды	**точность по меткам**	**точность по предложениям**	**лемматизация, точность по словоформам**	**лемматизация, точность по предложениям**
Гусев, Анастасьев	95.69	73.74	92.49	50.28
МГУ-1	93.71	64.8		

IQMEN	93.99	63.13	92.96	56.42
Sagteam	93.35	55.03	81.6	17.04
НИИ КВАНТ	93.83	61.45	93.01	54.19
Morphobabushka	90.52	44.41		

Литература

1. *Селегей Д.В., Шаврина Т.О., Селегей В.П., Шаров С.А.* Автоматическая морфоразметка корпусов русскоязычных социальных медиа: обучение и оценка качества // *Компьютерная лингвистика и интеллектуальные технологии. По материалам ежегодной конференции Диалог, Москва, 2016.*
2. *Korobov M.* Morphological Analyzer and Generator for Russian and Ukrainian Languages // Analysis of Images, Social Networks and Texts, 2015. P. 320–332.
3. *Chollet F.* Keras, GitHub repository // https://github.com/fchollet/keras. 2015
4. *Sorokin A., Shavrina T., Lyashevskaya O., Bocharov V., Alexeeva S., Droganova K., Fenogenova A., Granovsky D.* MorphoRuEval-2017: an Evaluation Track for the Automatic Morphological Analysis Methods for Russian // Computational Linguistics and Intellectual Technologies: Proceedings of the International Conference “Dialogue 2017”. 2017.
5. *Anastasyev D. G., Andrianov A. I., Indenbom E. M.* Part-of-speech Tagging with Rich Language Description // Computational Linguistics and Intellectual Technologies: Proceedings of the International Conference “Dialogue 2017”. 2017.
6. *Arefyev N. V., Ermolaev P. A.* MorphoBabushka: Simple and Fast Baselines your Granny would use for Part-of- speech Tagging of Russian // Computational Linguistics and Intellectual Technologies: Proceedings of the International Conference “Dialogue 2017”. 2017
7. *Horsmann T., Zesch T.* Do LSTMs really work so well for PoS tagging? – A replication study // Proceedings of the 2017 Conference on Empirical Methods in Natural Language Processing. 2017.
8. *Plank B., Søgaard A, Goldberg Y.* Multilingual Part-of-Speech Tagging with Bidirectional Long Short-Term Memory Models and Auxiliary Loss // Proceedings of the 54th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics, 2016. P. 412–418.

УДК 519.766.46

Внутритекстовая когерентность как мера интерпретируемости тематических моделей текстовых коллекций

В.А. Алексеев, В.Г. Булатов

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Тематическое моделирование — раздел машинного обучения, связанный со статистическим анализом текстов. В результате работы тематической модели с коллекцией текстовых документов D определяется набор тем T, затрагиваемых в документах, распределение тем по документам $p(t \mid d)$, совокупности слов, характеризующие каждую тему — $p(w \mid t)$ [1]. Слова $w \in W$ можно представлять как векторы в некотором пространстве [2]. Когерентность темы — это величина, вычисляющаяся по коллекции документов автоматически [3], по которой оценивается интерпретируемость темы.

Существующие на данный момент способы подсчёта когерентности, например по Ньюману и по Мимно [3, 4], опираются только на совстречаемости топ-слов темы. В данной работе представляются 3 новых способа подсчёта когерентности, при вычислении которых учитывается *весь текст* коллекции, определяется тематическая схожесть близко расположенных по тексту слов.

Каждому слову $w \in W$ сопоставляется его семантический вектор, компоненты которого соответствуют вероятностям тем на данном слове $p(t \mid w)$. Для обозначения этого вектора используется тот же символ w.

Первый предлагаемый в работе способ подсчёта когерентности — SemantiC (Semantic Closeness) — считает семантическую близость векторов близко расположенных в тексте слов

$$\text{SemantiC}\Big|_t = -\Big\langle \Big[\, \rho(w_i, w_j) < \text{window} \,\Big] \big\| w_i - w_j \big\| \Big\rangle, \tag{1}$$

где скобки $[\cdot]$ обозначают индикатор, $\rho(w_i, w_j) = |j - i|$ — расстояние между словами по тексту (i, j — позиции слов w_i и w_j в тексте), window — ширина окна (в словах), внутри которого должны находиться слова w_i и w_j, $\langle . \rangle$ — усреднение по всем измерениям. Знак «$-$» в формуле взят с тем, чтобы значения на похожих векторах при расчёте вносили больший вклад.

Следующий способ — TopLen (Topic Length) — считает среднюю продолжительность темы внутри текста. Осуществляются проход по словам текста. Когда встречается слово интересующей темы t, начинается исследование стоящих после него слов на принадлежность той же теме t. Чем меньше оценка близости к теме, тем больше штраф. Как только суммарный штраф дойдёт до определённого порога, подсчёт слов прекращается, запоминается общее число посчитанных слов и возобновляется поиск слова темы t. Потом все запомненные количества слов усредняются.

Последний предлагаемый способ — FoCon (Focus Consistency) — оценивает, как сильно в целом по всему тексту отличаются по тематике смежные слова

$$\text{FoCon}\Big|_t = \sum_{d \in D} \sum_{\substack{w_i, w_j \in W_d \\ |j-i|=1}} \big| w_i[t_1] - w_j[t_1] \big| + \big| w_i[t_2] - w_j[t_2] \big|, \tag{2}$$

где t_1, t_2 — доминирующие темы векторов w_i и w_j соответственно.

Работа проводится на коллекции полусинтетических документов. В распоряжении есть 3446 оригинальных статей по 19 темам из коллекции научно-популярного контента «ПостНаука», из которых 2118 монотематических. Исходные статьи разбиваются на сегменты, которые перемешиваются и объединяются в новые документы. Параметрами при создании нового датасета являются количество тем в документе, количество слов в сегменте, количество слов в документе. В итоге получается коллекция данных с известным общим числом тем и распределением тем в документах. Коллекция пересоздаётся несколько раз при разных значениях параметров, с тем чтобы можно было изучить, как от них зависит точность тематизации слов внутри сегментов. Эксперименты проводятся с помощью библиотеки BigARTM [5], которая позволяет совмещать разные тематические модели при помощи добавления взвешенной суммы регуляризаторов к критерию, по которому проводится оптимизация. Одна итерация работы модели соответствует одному обновлению значений матрицы вероятностей слов в темах $\Phi \equiv \big(p(w \mid t)\big)_{W \times T}$.

Качество способа оценки когерентности оценивается как мера его коррелированности с качеством сегментации текста тематической моделью. Качество сегментации вычисляется на основе известного распределения тем: для каждой темы считается сумма $p(t \mid d, w)$ по всем парам $d \in D, w \in W_d$, итоговый результат — сумма таких сумм по всем темам $t \in T$. Корреляция между когерентностью и качеством сегментации определялась по коэффициенту Спирмена.

Был поставлен ещё один эксперимент, в котором хотелось выяснить, как зависят когерентности от начальных данных в матрице слов-тем Φ. Для этого на одном датасете несколько раз, при разных начальных инициализациях Φ, обучалась тематическая модель, считались когерентности и качества сегментации. Дальше по разбросу полученных значений корреляций оценивалась устойчивость каждого метода.

Одна из предложенных когерентностей, TopLen, демонстрирует высокую корреляцию с качеством сегментации. При этом сам способ подсчёта качества сегментации можно считать адекватной мерой качества тематической модели, потому что его показатель монотонно возрастает с уменьшением перплексии [5]. Все предложенные способы оказались устойчивы по начальным данным в матрице Φ.

Представленные рисунки относятся к полусинтетическому датасету с размером сегмента 200 слов, в каждом документе используется по 5 тем.

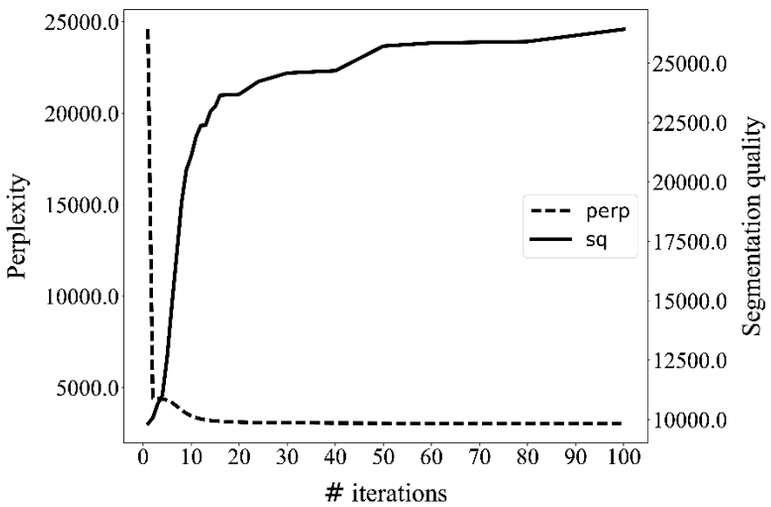


Рис. 1. Зависимость качества сегментации и перплексии от номера итерации

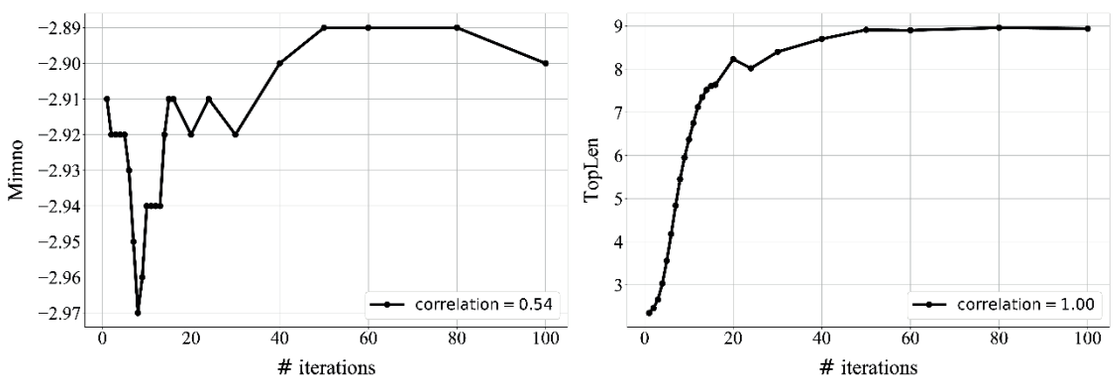


Рис. 2. Зависимость когерентностей Mimno и TopLen от номера итерации работы тематической модели

Литература

1. *Blei D.M.* Probabilistic topic models // Communications of the ACM, 2012. V. 55, N 4. P. 77–84.
2. *Aletras N., Stevenson M.* Evaluating Topic Coherence Using Distributional Semantics // IWCS, 2013. V.13. P. 13–22.
3. *Newman D.* [*et al.*]. Automatic evaluation of topic coherence // Human Language Technologies: The 2010 Annual Conference of the North American Chapter of the Association for Computational Linguistics. Association for Computational Linguistics, 2010. P. 100–108.
4. *Mimno D.* [*et al.*]. Optimizing semantic coherence in topic models //Proceedings of the conference on empirical methods in natural language processing. – Association for Computational Linguistics, 2011. P. 262–272.
5. *Vorontsov K., Potapenko A.* Additive regularization of topic models. Machine Learning, 2015. V. 101, N 1–3. C. 303–323.

УДК 004.932.2

Фильтр шумов на цифровых изображениях на основе искусственных нейронных сетей

М.О. Рогожин

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Существует множество шумоподавляющих алгоритмов, которые чаще всего успешно справляются только с определёнными видами простых шумов, но структура цифрового шума на реальных изображениях гораздо сложнее и применение подобных подходов для них малоэффективно. Одним из самых эффективных подходов для решения задач обработки цифровых изображений сейчас является применение искусственных нейронных сетей (ИНС). Существует ряд примеров успешного применения нейросетевых решений для шумоподавления [1–3]. Целью данной работы являлось создание программного шумоподавляющего фильтра на основе искусственных нейронных сетей для работы с цифровыми изображениями оптического диапазона.

Были рассмотрены две основные топологии искусственных нейронных сетей, применяемых в задачах подавления шумов: шумоподавляющие автоэнкодеры [2, 4] и свёрточные ИНС, построенные на принципах остаточного обучения (анг. residual learning) [3, 5]. Также была рассмотрена топология, основанная на комбинации этих моделей, – нейронная сеть, представляющая из себя шумоодавляющий свёрточный автоэнкодер для восстановления карты шума по принципам остаточного обучения. Модели обучались на выборке, составленной на основе 259 фотографий в формате raw из открытых источников и модели наложения шумов на цифровые изображения, представленной в [6].

Наилучшие результаты достигнуты с применением искусственной нейронной сети без сокращённых соединений, построенной на основе свёрточных слоёв с малым окном свёртки (рис. 1), далее по тексту ИНС-1 и свёрточного шумоподавляющего автоэнкодера (рис. 2), далее по тексту ИНС-2. К обеим ИНС применялся принцип остаточного обучения. Результаты работы шумоподавляющих ИНС на изображениях с наложенным аддитивным белым гауссовским шумом (АБГШ) приведены в таблице 1, где СКО – среднеквадратичное отклонение накладываемого шума, ПССШ – пиковое соотношение сигнал/шум. Результаты приведены усреднённо для нескольких изображений. В таблице 2 приведены результаты ПССШ-изображений, обработанных различными шумоподавляющими фильтрами, где ИНС-2 – рассматриваемый в данной работе нейросетевой фильтр шумов, БЛ и АФ – соответственно билатеральный и адаптивный шумоподавляющие фильтры, описанные в [7], Topaz – одноимённый фильтр-плагин для Photoshop. Также все вышеописанные фильтры тестировались на фотографиях с реальным шумом. Рассматриваемый нейросетевой фильтр показал результаты лучшие, чем билатеральный и адаптивный фильтр и сравнимые с полученными при обработке фильтром Topaz.

В работе предложен ряд топологий ИНС, подходящих для решения задачи шумоподавления, проведены численные эксперименты, результаты которых показали, что предложенные в работе методы фильтрации цифровых изображений в ряде задач сравнимы или превосходят по качеству обработки некоторые распространённые фильтры шумов. Применение комбинации шумоподавляющего автоэнкодера и принципов остаточного обучения для фильтрации АБГШ позволило получить результаты лучшие, чем были получены в [3].

Работа выполнена при поддержке фонда содействия развитию малых форм предприятий в научно-технической сфере.

Таблица 1

Результаты работы шумоподавляющих ИНС

СКО шума	ПССШ для зашумлённого изображения	ПССШ для ИНС-1	ПССШ для ИНС-2
25	20,578	30,488	30,635
35	17,578	27,438	27,558
50	14,95	26,136	26,35

Таблица 2

Результаты работы шумоподавляющих фильтров

ПССШ зашумлённого изображения	ПССШ ИНС-2	ПССШ БЛ	ПССШ АФ	ПССШ Topaz
16,408	21,249	20,049	19,796	26,761

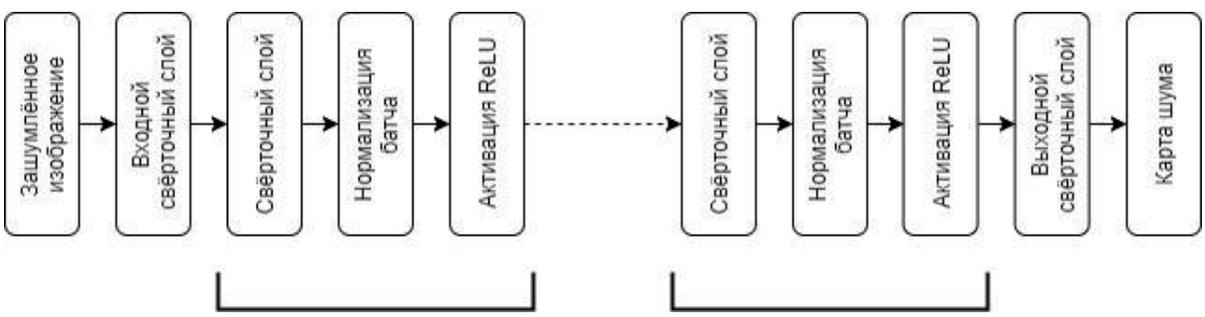


Рис. 1. Схема шумоподавляющей ИНС

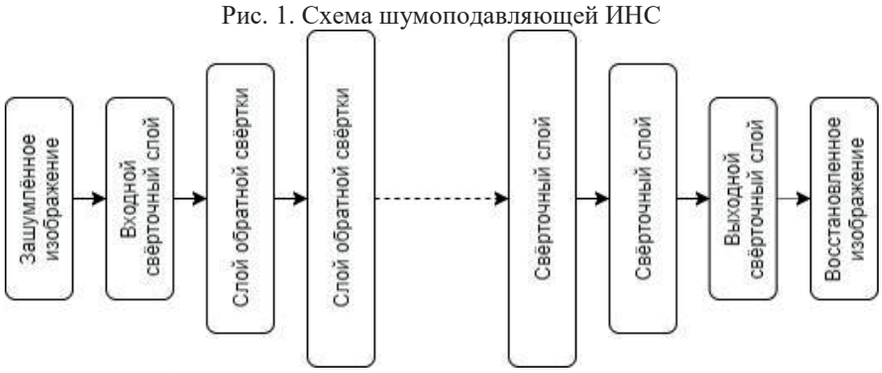


Рис. 2. Схема шумоподавляющего автоэнкодера

Литература

1. *Vincent P.* [*et al.*]. Extracting and Composing Robust Features with Denoising Autoencoders // Proceedings of the Twenty-fifth International Conference on Machine Learning. 2008. P. 1096–1103.
2. *Vincent P.* [*et al.*]. Stacked Denoising Autoencoders: Learning Useful Representations in a Deep Network with a Local Denoising Criterion // The Journal of Machine Learning Research, 2010. V. 11. P. 3371–3408.
3. *Zhang K.* [*et al.*]. Beyond a Gaussian Denoiser: Residual Learning of Deep CNN for Image Denoising // Transactions on Image Processing, 2016. V. 26, N 7. P. 3142–3155.
4. *Bengio Y.* Learning Deep Architectures for AI // Foundations and Trends in Machine Learning. 2009.
5. *He K.* [*et al.*]. Deep Residual Learning for Image Recognition // Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. 2016. P. 770–778.
6. *Рогожин М.О.* Реалистичная модель цифрового шума для создания и тестирования алгоритмов обработки изображений // Труды 59-й научной конференции МФТИ. М.: МФТИ, 2016.
7. *Gonzales R.C., Woods R.E.* Digital Image Processing. 2 ed. // PH. 2001.

УДК 519.7

Метод условного градиента со спецификацией данных для задач статистического оценивания большой размерности

А.К. Шолохов

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Рассматриваются методы быстрой оптимизации задач Ridge Regression и LASSO над данными больших размерностей ($n = 10^7 - 10^8$). Работа является развитием идей [1]: предлагается метод, сочетающий в себе итеративную спарсификацию исходной матрицы данных с оптимизацией на симплексе и покоординатным обновлением вектора решения.

Постановка задачи LASSO:

$$\theta = \operatorname{argmin} \frac{1}{n}\|y - X\theta\|_2^2 + \lambda\|\theta\|_1,$$

где X: матрица $[m \times n]$, $m, n \sim 10^7 - 10^8$, y: $[m \times 1]$ – вектор ответов, θ: $[1 \times n]$ – искомое решение задачи. Подобные размеры пространства чаще всего присутствуют в задачах анализа текстов (матрицы совстречаемости слов) и в задачах оптимизации на графе (матрицы смежности графа).

Решать задачу предлагается модифицированным методом Франка–Вульфа (см. [1]):

$$\nabla f(z) = \bar{A}^T \bar{A} z, \; y_k = \arg\min_{y \in S} \nabla f(z_k)^T y, \; z_{k+1} = (1 - \gamma_k) z_k + \gamma_k y_k, \; \gamma_k = \frac{1}{k+2}.$$

Задача работы – расширение области применения метода с дважды разреженных матриц на произвольные или слабо разреженные. Исследуются различные стратегии спарсификации матриц [3], показывается ускорение сходимости по отношению к [2, 4].

Преимущества предлагаемого метода:

- нет требования к разреженности данных: метод может быть применен к матрицам с неравномерной разреженностью;
- обновление вектора ответа происходит покоординатно, что позволяет применить эффективные структуры данных для его хранения (Heap, Fibonacci Heap) и сохранить все преимущества метода координатного спуска.
- в случае дважды разреженных матриц происходит резкое ускорение сходимости в терминах итераций по отношению к прямым градиентным методам, что характерно метода условного градиента Франка–Вульфа.

Литература

1. *Аникин А.С., Гасников А.В., Горнов А.Ю., Камзолов Д.И., Максимов Ю.В., Нестеров Ю.Е.* Эффективные численные методы решения задачи PageRank для дважды разреженных матриц // Труды 58-й научной конференции МФТИ. – М.: МФТИ, 2015. P. 74–94.
2. *Nutini J., Schmidt M., Laradji I., Friedlander M., Koepke H.* Coordinate descent converges faster with the Gauss-Southwell rule than random selection // International Conference on Machine Learning, 2015. P. 1632–1641.
3. *Arora S., Hazan E., Kale K.* A fast random sampling algorithm for sparsifying matrices // APPROX-RANDOM, Springer, 2006. V. 6. P. 272–279.
4. *Drineas P., Mahoney M.W., Muthukrishnan S., Sarlós T.* Faster least squares approximation // Numerische mathematik, 2011. V. 117(2). P. 219–249.

УДК 004.85

Агрегирование гетерогенных текстовых коллекций в иерархической тематической модели русскоязычного научно-популярного контента

М.С. Селезнева[1], А.К. Шолохов[1], А.В. Белый[2]

[1]Московский физико-технический институт (государственный университет)
[2]Университет ИТМО

Вероятностное тематическое моделирование — это раздел машинного обучения, решающий задачу поиска тем в коллекции документов. В больших текстовых коллекциях темы часто образуют иерархии, в которых каждая тема делится на более специфичные подтемы. Моделью такой ситуации являются тематические иерархии. Они удобны для навигации пользователей по коллекциям, поэтому являются подходящей моделью для агрегирования контента. В работе используется подход аддитивной регуляризации тематических моделей (ARTM) [1], позволяющий с помощью регуляризаторов накладывать на тематическую модель множественные дополнительные условия. Модель hARTM [2] — это развитие идеи ARTM для задачи построения тематических иерархий.

Цель данной работы — построение и оценка качества иерархической тематической модели русскоязычного научно-популярного контента, собранного из различных источникв, в рамках модели hARTM. Построение модели по объединенной коллекции источников, различных по объему и тематической структуре, не решает поставленной задачи, так как темы, уникальные для меньшего из источников, теряются. В работе предлагается дополнять существующую модель одного источника выборками документов из новых источников. Дополнение происходит в два этапа: сначала выбираются документы нового источника, наиболее подходящие для добавления в коллекцию; затем выбранные документы добавляются в коллекцию и строится дополненная модель. При этом в силу стратегии инициализации и регуляризации модели, существующие темы сохраняются, а добавленные документы уточняют соответствующие им темы на первом уровне иерархии. На втором уровне добавленные документы могут порождать подтемы, характерные только для нового источника.

Эксперименты в данной работе проводятся на коллекциях ПостНауки и Хабрахабра, существенно отличающихся по размеру и тематической структуре. Для оценки предлагаемых решений вводятся внешние критерии качества иерархических тематических моделей.

Для проведения экспериментов используется BigARTM [3] — библиотека для тематического моделирования с открытым исходным кодом.

Результаты работы планируется интегрировать в систему разведочного тематического поиска Rysearch (http://rysearch.space), разрабатываемую для агрегации и визуализации больших научных и научно-популярных текстовых коллекций.

Рис. 1. Система разведочного тематического поиска Rysearch

Литература

1. *Vorontsov K., Potapenko A.*. Additive regularization of topic models // Machine Learning. 2015. V. 101. N 1–3. P. 303.
2. *Chirkova N., Vorontsov K.*. Additive regularization for hierarchical multimodal topic modeling // JMLDA. 2016. V. 2, N 2. P. 187.
3. *Vorontsov K., Frei O., Apishev M., Romov P., Dudarenko M.*. BigARTM: Open source library for regularized multimodal topic modeling of large collections // Analysis of Images, Social Networks and Texts. 2015.

УДК 004.852

Применение меры близости максимального правдоподобия для рекомендательной системы в реальном времени.

А.А. Лактионов

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Рассмотрена модель для построения персонализированных рекомендаций с учётом последних предпочтений посетителей. Реализована архитектура и проведено А/Б-тестирование против имеющейся рекомендательной системы на сайте объявлений недвижимости на карточке объекта в блоке «похожие объявления».

В задачах рекомендаций, решаемых с помощью коллаборативной фильтрации, для определения релевантных объектов учитываются интересы пользователей, похожих на данного. Известно, что стратегии, учитывающие последние просмотренные пользователем объекты вместе с информацией о просматриваемом в данный момент, обеспечивают на порядок более высокие метрики конверсии. Чтобы пользоваться информацией об истории пользователя в реальном времени и сформировать множество рекомендуемых объектов, нужно поставлять данные в быстрые хранилища, позволяющие агрегировать большие объемы информации по ключу. Отвечать на запрос в случае высоконагруженных систем требуется очень быстро, поэтому математическая модель и архитектура сервиса должны быть одним целым и учитывать временную сложность алгоритма.

Преимущество рассматриваемого метода - скорость обработки запросов. При обучении модели список объектов, коррелирующих с данным, записывается как документ в поисковую систему elasticsearch. Благодаря этому, после получения истории пользователя и составления документа из идентификаторов объектов, есть возможность быстро получить отранжированный список объектов по убыванию пересечения (TF-IDF) их документов.

Пусть есть m пользователей и n объектов, которые нужно порекомендовать. Данные о просмотрах объектов пользователями хранятся в виде матрицы индикаторов M = (m_{ij}) размерности (m, n), где

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } user_i \text{ смотрел объект } item_j \\ 0 \text{ иначе} \end{cases}$$

$$u_i = (m_{i1}, m_{i2}, \dots, m_{in})$$

$$v_j = (m_{1j}, m_{2j}, \dots, m_{mj})$$

Таким образом, строка u_i матрицы M – вектор истории пользователя. С другой стороны, столбец v_j - вектор истории объекта. В качестве значений индикаторов рассматриваются и отличные от 1 величины, такие как продолжительность просмотра страницы объекта.

Рассмотрим произведение матриц A = (M^t M) = (a_{ij}) размерности (n, n). Элемент a_{ij} является результатом скалярного произведения векторов v_i и v_j. Эта величина - мера близости объектов: чем она больше, тем большее количество одних и тех же пользователей посмотрело данные объекты совместно. По вектору u = u_i составим вектор r размерности n для пользователя:

$$r = (M^t M)u$$

Координаты вектора r, где находятся наибольшие значения, будут соответствовать самым релевантным пользователю объектам. На данном подходе основана большая часть персонализированных рекомендательных систем, так как релевантность объектов друг другу коррелирует с количеством общих посетителей. Однако существуют другие меры похожести векторов, отличные от скалярного произведения. Другая проблема заключается в том, что здесь нет нормировки - значит популярный объект, имеющий много общих пользователей с данным, будет так же близок, как и непопулярный. Это является проблемой, так как для первого это может быть очень малая доля от общего количества просмотров, а для второго - большая. Таким образом мы переходим к рассмотрению частотности совместных просмотров.

Среди мер сходства векторов (similarity measures) встречаются TF-IDF, мера Жаккарда и многие другие[1]. На практике в подобном подходе лучше остальных оказывается log-likelihood ratio (LLR)[2-3]. Рассмотрим эту меру.

Зафиксируем некоторые индексы объектов j_1 и j_2, ведём множества L($item_k$):

$$L(i) = A = \{i \mid v_{j_1} > 0\},$$

$$L(j) = B = \{i \mid v_{j_2} > 0\}$$

Они содержат идентификаторы пользователей, просматривавших соответственно объекты i и j. Рассмотрим матрицу:

$$K = \begin{pmatrix} |A \cap B| & |A \setminus B| \\ |B \setminus A| & |\overline{A \cup B}| \end{pmatrix}$$

и векторы, полученные из элементов этой матрицы следующим образом:

$$V_K = (K_{0,0}, K_{0,1}, K_{1,0}, K_{1,1})$$

$$V_{rsum} = (K_{0,0} + K_{0,1}, K_{1,0} + K_{1,1})$$

$$V_{csum} = (K_{0,0} + K_{1,0}, K_{0,1} + K_{1,1})$$

Определим функцию энтропии Шеннона для вектора v, являющуюся скалярным произведением

$$H(\bar{v}) = \left(\frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}, \ln\frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}\right)$$

и рассмотрим меру близости объектов i и j, которым соответствуют множества пользователей A и B:

$$LLR = 2\left(\sum_{i,j} K_{ij}\right)(H(V_K) - H(V_{rsum}) - H(V_{csum}))$$

В процессе обучения модели с помощью Mahout cooccurrence[4] вычислим LLR для всех пар объектов. Подберём гиперпараметр модели $LLR_{threshold}$ и оставим для объекта i только те объекты j, для которых $LLR_{ij} > LLR_{threshold}$. Таким образом, получим сопоставление для объектов вида many-to-one:

$$Recs(item_i) = \{\, item_j \mid LLR_{ij} > LLR_{threshold} \,\}$$

Многие подходы к решению задачи онлайн-рекомендаций основаны на том, чтобы сделать некоторый предподсчёт похожих в смысле коллаборативной фильтрации объектов. В дальнейшем, получив информацию об истории пользователя, модель рассматривает множества объектов, похожих на те, с которыми пользователь взаимодействовал, и формирует рекомендации.

Возникающие проблемы делятся на два типа: высоконагруженность и распределенность. Для того, чтобы в реальном времени у сервиса была возможность быстро получить $Recs(item_i)$, необходимо записать это сопоставление по ключу объекта в быструю и индексируемую базу данных. Не стоит также забывать о репликации и отказоустойчивости. Подходящим кандидатом является поисковый движок elasticsearch, хранящий сущности в виде документов с возможностью индексации. Представим каждый документ и его индекс в следующем виде:

$$\{\, j \rightarrow doc_j = [\, j, Recs(item_j)\,]\,\}$$

Остается только решить, каким образом для истории пользователя будут подбираться рекомендации. Обусловленность выбора elasticsearch в качестве хранилища данных заключается в том, что он обладает возможностью индексации документов по содержанию. Строится инвертированный индекс для слов, составляющих документ, после чего для каждого слова можно быстро найти документы, его содержащие.

Пусть мы получили вектор истории пользователя u_i. Составим к базе данных поисковый запрос по этой истории. Результаты будут отсортированы в порядке убывания по мере пересечения множества слов из запроса с содержанием документов:

$$Response(u_i) = (doc_{j_1}, doc_{j_2}, \ldots, doc_{j_m}),$$

$$\forall\, p < q :\ |\, doc_{j_p} \cap L(i)\,| \geq |\, doc_{j_q} \cap L(i)\,|$$

Результатом рекомендательной системы будем считать набор индексов $\{j_1, j_2, \ldots, j_m\}$, являющийся перестановкой множества объектов. Отсекая только первые l индексов, получим самые релевантные пользователю рекомендации.

Проведено А/Б-тестирование среди посетителей крупного российского сайта объявлений недвижимости в рамках отдельно взятого региона. Разбиение пользователей 50/50, группа А - рассматриваемая и реализованная в данной работе модель, В - модель подрядчика, основанная на близости свойств и описаний объявлений. В результате было выявлено значимое увеличение конверсии в клик по рекомендательному блоку из его отображения(Рис.1)

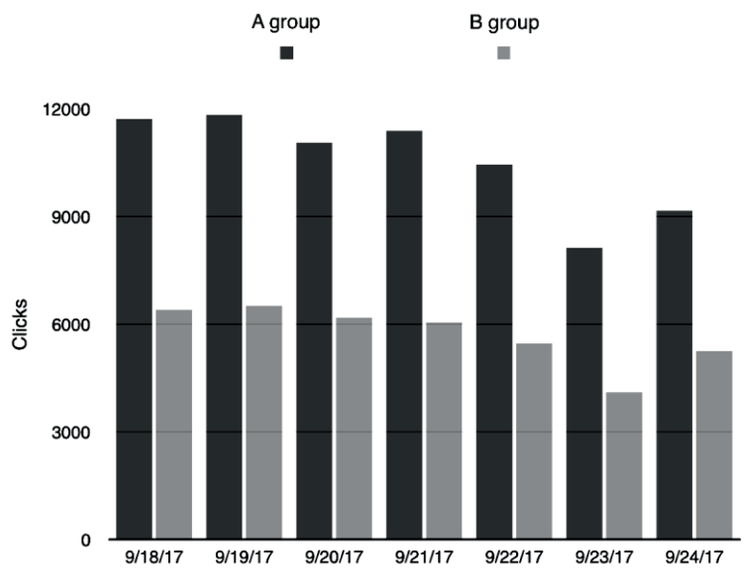


Рис.1 Результаты А/Б-теста. А - рассматриваемая модель, В - контентные рекомендации

Литература

1. *Art B. Owen*. Lectures on Probability Theory and Statistics, Stats-314 - Stanford University.
2. *Bagnall A.J., Janacek G.J., Powell M.* A likelihood ratio distance measure for the similarity between the fourier transform of time series. //DOI 10.1.1.63.4079
3. *Huiru Zheng et.al.* Cluster Analysis of Regulatory Sequences with a Log Likelihood Ratio Statistics-based Similarity Measure//DOI 10.1109/BIBE.2007.4375719 - 2014
4. *Owen S., el.al.* Mahout in action. - Manning – 2012

Секция систем математического обеспечения

УДК 51-77

Разработка алгоритма определения одинаковых отелей

А.Д. Григорьев

Московский физико-технический институт (государственный университет)

В настоящее время становится особо востребована сфера туризма, в связи с этим особый спрос имеют организации, предоставляющие услуги в этой области. Однако сегодня особо актуальна проблема большого количества информации, что делает сложным выбор наиболее выгодного предложения. В связи с этим предпринимаются попытки сортировки всей имеющейся информации с целью упрощения работы с ней. Одним из решений данной проблемы является создание баз, содержащих в себе информацию о предложениях в этой сфере, предоставляемых разными туроператорами. На этом этапе одной из главных задач является идентификация одинаковых отелей по их признакам у разных туроператоров. Именно решению этой задачи посвящена данная работа.

Цель работы – создание алгоритма определения одинаковых отелей на основе общих признаков.

Для достижения цели необходимо было решить следующие задачи:

1. Выявить схожие признаки для отелей в транзакции.
2. Оценить встречаемость и уникальность выделенных признаков.
3. Выявить наиболее достоверные признаки для выделения одинаковых отелей.
4. Кластеризовать отели по выявленным признакам, оценить корректность выборки.
5. Создать алгоритм поиска.

Данные об отелях взяты с сайтов таких туроператоров, как «Tui», «Coral Travel», «Anex», «Pegas» и «1001 тур» путем создания и применения парсера. Данные включали в себя отели курортов: Барселона, Коста-Брава, Коста-Дорада, Дубаи, Пхукет, Крит и Гавана. В транзакцию вошло 2859 отелей, позднее объём данных был расширен до 4273 отелей. Для отелей был сформирован массив признаков на основе информации, полученной с сайтов туроператоров, и были сформированы кластеры по различным комбинациям признаков на основе применения алгоритма поиска ассоциативных правил [1, 2] в исходной транзакции, проведена оценка корректности полученной кластеризации путем создания ручной выборки, которая была принята за эталонную. На основе эталонной выборки были сформированы достоверные признаки определения одинаковых отелей. Была проведена работа по анализу названий отелей, в ходе которой производилось сравнение строк названий отелей. Для этой цели создан словарь слов, присутствующих в названиях отелей, из которого были выделены стоп-слова. Была произведена обработка строк названий на основе стоп-слов, меры Жаккара [3] и правила Хэмминга [4]. В работе применялась свободно распространяемая библиотека GeoPy, с помощью которой проводился поиск одинаковых отелей по запросам к Google Maps API, по результатам которых рассчитывалось расстояние между отелями. На основе анализа названий отелей и достоверных признаков был создан модельный поиск одинаковых отелей.

На основе полученной информации для отелей в транзакции были определены характерные признаки: название, курорт, месторасположение – населенный пункт, количество звезд, веб-сайт, номер телефона, географические координаты, дата постройки, дата реконструкции, расстояние до моря и ряд услуг, предоставляемых отелем его клиентам. Эти признаки были отобраны как наиболее встречаемые для отелей в транзакции.

Была создана кластеризация отелей по курортам, потому что этот признак присутствовал в описании каждого из отелей в транзакции. Для кластеров был применен

алгоритм поиска ассоциативных правил на основе набора: название, звезды, веб-сайт, номер телефона, координаты. В сумме для всех кластеров было получено 345 ассоциативных правил. Самыми частыми признаками в образованных правилах были название отеля и количество звезд. Отметим, что 206 правил из 345, то есть примерно 60%, содержат в себе название отеля. На основании этого было выдвинуто предположение о том, что в одном кластере название однозначно определяют одинаковые отели при условии совпадения вспомогательных признаков, прежде всего, количества звезд, населенного пункта, сайта или номера телефона, года постройки или реновации. Была проведена поверка данных из описаний отелей, которые были приняты за одинаковые по итогам полученных ассоциативных правил, и получено распределение несовпадений, включающих в себя противоречия и отсутствие данных. Из этого был сделан вывод о том, что в количестве звезд отелей ошибки наименее вероятны и наиболее встречаемы в перечне услуг, предоставляемых отелем.

Была проведена обучающая выборка, принятая за эталонную. На этом этапе выделим ряд «достоверных» признаков: название, количество звезд, населенный пункт, дата постройки отеля и его реновации, номер телефона, сайт, расстояние до пляжа. На основе чего был применен алгоритм поиска ассоциативных правил, которые, как показала ручная проверка этих правил путем создания эталонной выборки, не приводили к получению желаемого результата. Это может быть связано, с разрозненностью информации, представленной на разных сайтах, а также с недостаточной уникальностью выбранных признаков. В ходе ручной выборки был сделан вывод о том, что правило – наиболее достоверный и уникальный признак, среди выбранных. Возвращаясь к сделанному ранее предположению, была предпринята попытка обработки строк названий отелей.

На данном этапе работы был создан перечень слов, из которого выделили наиболее часто встречаемые слова. Они исключаются из названий отелей при дальнейшем рассмотрении. На этом этапе производится проверка наличия одинаковых слов в названиях отелей, а также их обработка при помощи меры Жаккара и функции Хэмминга. Данные методы показали себя хуже, чем запрос к Google API, содержащий в себе название отеля и курорта. На основании этих результатов было принято решение, что отели могут считаться одинаковыми в случае положительного исхода обращения к Google API и совпадении количества звезд для этих отелей, в противном случае отели считаются разными. Отдельно были разобраны случаи, в которых информация об отелях в Google API отсутствовала, то есть поиск не давал результатов. Для этих пар отелей были подсчитаны коэффициенты Жаккара, на основе которых отели могли быть приняты одинаковыми или разными. Для полученной кластеризации был подсчитан коэффициент сходства с «эталонной» кластеризацией, значение которого было принято удовлетворительным. Далее предпринимаются шаги по улучшению результатов кластеризации и оптимизации текущего алгоритма поиска.

Были получены следующие промежуточные результаты.

1. Выявлены схожие признаки в описании отелей: название, количество звезд, курорт, населенный пункт, сайт, номер телефона, расстояние до пляжа, дата постройки и дата реновации, перечень услуг, предоставляемых отелем.
2. Все выделенные признаки обладают приемлемой встречаемостью, наиболее уникальным признаком является название.
3. Выявлено, что наиболее достоверным признаком является название отеля при совпадении ряда вспомогательных признаков: количества звезд, населенного пункта, сайта или номера телефона, года постройки или реновации.
4. Получена кластеризация отелей, где в один кластер попали отели, которые были приняты за одинаковые, и проведена оценка корректности данной кластеризации путем ее сравнения с «эталонной» кластеризацией.

Литература

1. *Han J., Pei H., Yin Y.* Mining Frequent Patterns without Candidate Generation. New York: ACM Press, 2000.
2. *Borgelt Christian.* Keeping Things Simple: Finding Frequent Item Sets by Recursive Elimination. New York: ACM Press, 2005
3. *Tan P., Steinbach M., Kumar V.* Introduction to Data Mining. Boston: Addison-Wesley Longman Publishing Co., 2005.
4. *Roth R.* Introduction to Coding Theory. Cambridge: Cambridge University Press, 2006. P. 298

УДК 519.168

Задача об оптимальном распределении педагогической нагрузки среди преподавателей

***Ф.И. Сергеев*[1], *К.Б. Теймуразов*[1,2]**

[1]Московский физико-технический институт (государственный университет)
[2]Вычислительный центр РАН

Преподаватель, работающий на кафедре, занимает некоторую должность, которая определяет число учебных часов h_j, которое он обязан вести в неделю, и ставку s_j. Также у каждого преподавателя есть предпочтительные и не предпочтительные предметы. Предпочтительность предмета для преподавателя зададим неотрицательным коэффициентом c_j. Чем меньше c_j, тем предпочтительнее предмет.

Для каждого предмета известно количество учебных часов в неделю H_i, которое необходимо распределить, и количество групп g_i, для которых проводится занятие.

Пусть на кафедре работает J преподавателей и ведётся I предметов. Обозначим количество часов предмета за номером i, которое ведёт преподаватель номер j как f_{ij}.

Задача состоит в оптимальном распределении всей учебной нагрузки по преподавателям с учётом их предпочтений для их полной занятости. Переформулируем её в виде потоковой задачи на замкнутой сети.

Для каждого ребра из сети будем вводить тройку чисел (M, m, c), где M – максимальный поток по этому ребру, m – минимальный поток, c – стоимость единицы потока.

Исходная задача свелась к следующей: минимизировать $\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} f_{ij}\cdot c_{ij}$ при ограничениях $\forall i \in \overline{0,I}\ \ \sum_{j\in J} f_{ij} = H_i$ (все учебные часы распределены), $\forall j \in \overline{0,J}\ \ \sum_{i\in I} f_{ij} = h_j \cdot s_j$ (все преподаватели заняты), $f_{ij} \geqslant 0$.

Построенная сеть – замкнутая, имеющая ограниченную пропускную способность. Для неё задана циркуляция, удовлетворяющая условию сохранения потока. К такой сети применим алгоритм дефекта нахождения минимального потока.

Проверка корректности входных данных и применение этого алгоритма позволяет получить требуемое распределение учебных часов f_{ij} по преподавателям, или определить, что такого распределения не существует.

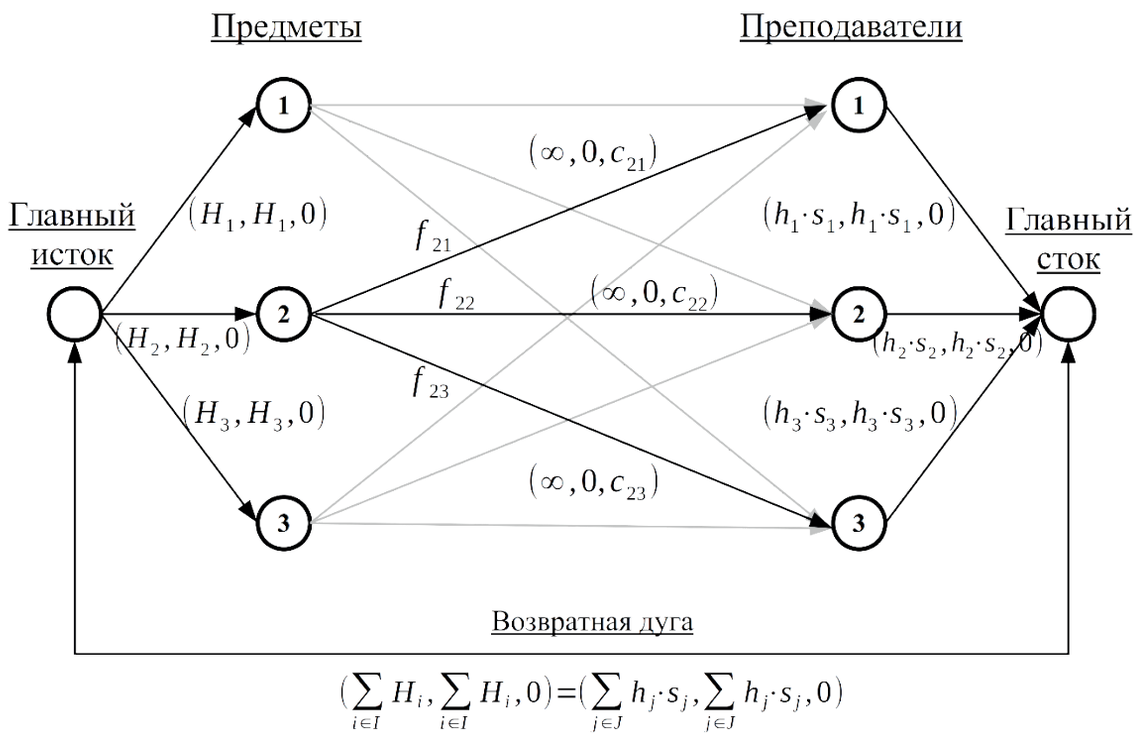


Рис.1

Литература

1. *Филлипс Д., Гарсиа-Диас А.* Методы анализа сетей. – М.: Мир, 1984. 496 с.
2. *Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р.* Алгоритмы: построение и анализ. – М.: МЦНМО, 200. 960 с

УДК 004.02

Формализация задачи семантического поиска

Д.А. Малахов

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Поиск информации является ключевой задачей в веке информационных технологий. Потребность в качественном удовлетворении информационной потребности человека растет так же быстро, как и объемы данных, с которыми приходится сталкиваться. Было проведено немало исследований для повышения качества поиска, были разработаны различные поисковые системы, но до сих пор задача является актуальной, и ее решением занимаются ученые и инженеры по всему миру.

Одними из первых решений задачи поиска стали методы полнотекстового поиска, использующие только синтаксическую структуру текста, игнорируя смысл отдельных частей текста. Проект Semantic Web [1] был создан, чтобы исследовать возможности использования не только синтаксиса документа, но и семантики. В рамках проекта были разработаны такие стандарты, как язык OWL онтологий, формат представления знаний RDF, язык семантических запросов SPARQL и другие. К сожалению, несмотря на проделанную работу, на данный момент в прикладных системах, как правило, используется полнотекстовый поиск. Видимо, технологии, разработанные в рамках проекта Semantic

Web, не получили пока достаточного распространения из-за сложности построения поисковых запросов SPARQL и представления данных в формате RDF [2].

Несмотря на отсутствие явного прогресса в создании востребованной системы семантического поиска, стандарты, разработанные проектом Semantic Web, стали основой для исследований в смежных областях. Одной из таких областей является семантическое аннотирование, которое на данный момент активно исследуется и развивается [3, 4]. Семантическое аннотирование позволяет привязывать к разным частям текста понятия из онтологии. В результате процесса семантического аннотирования можно получить модель документа в терминах заданной онтологии. Результаты семантического аннотирования могут быть использованы в системе полнотекстового поиска для повышения качества поиска. Таким образом, на данный момент исследования направлены в сторону поиска гибридного решения, использующего как компоненты семантического поиска, так и компоненты полнотекстового поиска.

Данная работа посвящена формализации задачи семантического поиска. Семантическим поиском, как правило, называется процесс поиска документов по их содержанию. Нетрудно увидеть, что понятие семантического поиска недостаточно формально определено [5]. В частности, понятие содержания или смысла является многозначным. Далее будет предложена модель семантического поиска, основанная на использовании L-тегов. Модель L-тега является частным случаем модели S-тегов [6].

Пусть задан алфавит A, где алфавитом является любое конечное непустое множество.

Пусть задано множество терминов T, где термин является упорядоченным мультимножеством элементов из A.

Пусть задано множество L-тегов LT, где L-тег является упорядоченным мультимножеством элементов из T.

Пусть задано некоторое множество объектов O. Можно определить функции семантики и похожести:

$$semantic\colon (O, LT) \to R \quad (2)$$

$$similarity\colon (LT, LT) \to R \quad (1)$$

Функция семантики (1) оценивает то, насколько смысл терминов L-тега отражает смысл объекта, например, текстового документа. Функция схожести (2) оценивает то, насколько смысл первого L-тег обобщает смысл второго L-тега. Чем более общим является первый L-тег по отношению ко второму L-тегу, тем меньше функция схожести (2).

Пусть функция семантики (1) известна в некоторых точках P.

Пусть функция схожести известна всюду.

Тогда мы можем интерполировать функцию семантики (1):

$$\begin{cases} semantic(O, LT),\ (O, LT) \in P \\ \max_{(O,LT1)\in P}(semantic(O, LT1) * similarity\ (LT1,\ LT)), (O, LT) \notin P \end{cases} \quad (3)$$

Модель семантического поиска по объектам из множества O:

- Пусть поисковой запрос Q представляет собой L-тег.
- Пусть задана функция семантики (1) для некоторых пар $(o, lt) \in P$.
- Пусть задана функция схожести (2) между L-тегами из LT.
- Результатом исполнения запроса Q является множество L-тегов, с привязанными к ним функцией семантики (1) документами, отсортированное по значениям интерполированной функции семантики (3) для пар (o, Q), где $o \in O$.

Использование представленной модели позволяет свести задачу семантического поиска к решению задачи определения функции схожести (2) между небольшими текстами и задаче определения функции семантики (1) между небольшим текстом и объектом/документом. Это позволяет заранее выделить/присвоить отражающие смысл объекта L-теги, рассчитав функцию семантики (1), и использовать результаты при поиске.

В качестве интерпретации модели семантического поиска рассмотрим поиск по хэштегам.

Любой хэштег является термином и L-тегом, образуя множество LT. Хэштеги привязываются к документам из множества O. Пусть заданы пары документов и привязанных к ним хэштегов P. Можно определить функцию схожести (2) и семантики (1):

$$similarity\ (LT1,\ LT1) = \begin{cases} 0, & LT1 \neq LT2 \\ 1, & LT1 = LT2 \end{cases}$$

$$semantic\,(O,\ LT) = \begin{cases} 0, & (O,LT) \in P \\ 1, & (O,LT) \notin P \end{cases}$$

Модель хэштега достаточно тривиальна и не позволяет использовать все возможности функции схожести и семантики, но позволяет продемонстрировать универсальность модели.

Можно рассмотреть более сложные интерпретации модели L-тега:

- Словосочетание;
- Предложение;
- Абзац.

В этом случае поисковой запрос на естественном языке также является L-тегом.

Функцию схожести (2) можно определить как релевантность первого L-тега ко второму L-тегу. Таким образом, для оценки функции схожести (2) можно использовать различные алгоритмы определения релевантности.

Функция семантики (1) определяется через выделение/привязку L-тегов. При ручной привязке L-тегов значение функции семантики (1) задает человек. Например, автор описывает ключевые слова статьи и оценивает их значимость. Для автоматического выделения L-тегов характерно:

- Получение кандидатов в L-теги. Кандидаты могут быть получены как из самого текста, так и из заданного набора, например, тезауруса.
- Вычисление функции семантики (1). Может использоваться информация о контексте и тезаурусы.
- Фильтрация кандидатов. Может быть задано некоторое ограничение на количество L-тегов или на минимальное значение функции семантики (1).

При выборе интерпретации модели L нужно понимать, что чем больше терминов содержит L-тег, тем больше смысла он в себе несет. Чем больше смысла в L-теге, тем большему количеству запросов он будет удовлетворять. От этого появляется больше потенциальных ложноположительных результатов. С другой стороны, увеличивается полнота поиска. Не существует универсальной интерпретации L-тега. Интерпретации модели L-тега должна быть подобрана под конкретную задачу.

Литература

1. *Berners-Lee T.* [et al.]. The semantic web // Scientific American. 2001. V. 284. P. 28–37.
2. *Малахов Д.А.* Проблемы семантического поиска // Труды 58-й научной конференции МФТИ. 2015.
3. *Alahmari F., Magee L.* Linked Data and Entity Search: A Brief History and Some Ways Ahead // Australasian Web Conference 2015. 2015. V. 27. P. 29.
4. *Berlanga R., Nebot V., Pérez M.* Tailored semantic annotation for semantic search //Web Semantics: Science, Services and Agents on the World Wide Web. 2015. V. 30. С. 69–81.
5. *Серебряков В. А.* Что такое семантическая цифровая библиотека // RCDL. 2014. С. 21–25.
6. *Малахов Д.А., Сидоренко Ю.А., Атаева О.М., Серебряков В.А.* Что такое семантическая цифровая библиотека // DAMDID/RCDL. 2016. С. 148–155.

УДК 004.822

Использование вопросно-ответных систем в задаче поиска информации по корпусу математических текстов

Д.А. Сайранов

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Вопросно-ответные системы – системы, задача которых – генерировать или извлекать ответы на вопросы, сформулированные на естественном языке. Условно их можно разделить на узкоспециализированные (работающие в каких-либо конкретных областях) и общие (работа с информацией по всем областям знаний). Основной проблемой при реализации таких систем, является сложность выделения и использования вычислительной техникой семантической структуры текста. С момента появления вопросно-ответных систем их структура существенно усложнилась, что позволило увеличить точность генерируемых ответов, однако такой точности бывает недостаточно, даже для узкоспециализированных систем. В докладе рассмотрены некоторые способы повышения качества получаемых ответов.

Постановка задачи

Имеется корпус математических текстов. Необходимо построить систему, которая после обработки коллекции документов будет способна генерировать ответы приемлемого качества на вопросы, заданные по теме документов. Вопросы задаются в свободной форме на естественном языке.

Существующие подходы к решению задачи

Вопросно-ответные системы можно разделить на два типа: примитивные текстоориентированные системы и более сложные системы с собственной базой знаний. В первом случае осуществляется поиск ключевых фраз/слов по текстам и ранжирование результатов поиска. Во втором случае система предварительно обрабатывает текст, формируя некоторые таблицы вида “сущность – параметр”, объединяя их в базу данных, которая в дальнейшем используется для генерации ответа.

Для конструируемых систем, прежде чем искать ответ на вопрос, необходимо понять, что именно от них требуется. Это приводит к идее о том, что в зависимости от типа вопроса поиск информации может существенно различаться, а значит, первым этапом генерации ответа будет классификация вопроса. К тому же при работе с корпусом математических текстов появляется необходимость «понимания» формул, графиков, таблиц и т.д. Таким образом, были разработаны различные алгоритмы, позволяющие системе определять информацию, требующую представления не в текстовом виде. Среди этих методов и алгоритмов: G-Aligner, связывающий текстовую постановку задачи с ее геометрической интерпретацией с помощью NLP и методов оптимизации для распознавания примитивов; адаптивные методы извлечения информации из статистических таблиц, реализованные на основе алгоритма динамического обучения RIF.
Следующим этапом генерации ответа является применение инструментов по извлечению необходимой информации. Логично предположить, что для каждого классификатора разрабатываются свои инструменты.

Категории вопросов и методы, позволяющие найти нужную информацию для определенной категории:

- Вопросы о каких-либо фактах. Используется IR, осуществляющий поиск по ключевым словам/фразам.
- Алгебраические текстовые задачи. В данном случае требуется обработка естественного языка (NLP) для корректного определения последовательности событий в задачах, после чего задача преобразуется в некоторое дерево уравнения с помощью ILP (Integer linear programming), которое далее достаточно просто решается системой.

● Геометрические задачи. Вопросы такого типа существенно сложнее остальных. Для генерации ответа на них требуется “понимание” как схематической части задачи, так и арифметической. Для решения таких задач был спроектирован GeoS инструмент, который осуществляет это в два шага. Первый шаг – использование G-Aligner для выравнивания и преобразования растровой графики в более удобный для системы формат, после чего используется NLP для обработки текста задачи. На втором шаге задействуется SAT (Satisfiability solver), который делает вывод по задаче.

Исходя из всего вышесказанного, можно сделать вывод, что вопросно-ответные системы, как правило, задействуют не какой-либо один классификатор и инструмент, а целое множество. В качестве примера можно привести структуру ARISTO (рис. 1). При этом обработка вопроса и текста осуществляется одновременно несколькими классификаторами и инструментами, после чего оценивается точность полученных ответов и генерируется итоговый ответ, содержащий информацию от одного или нескольких инструментов.

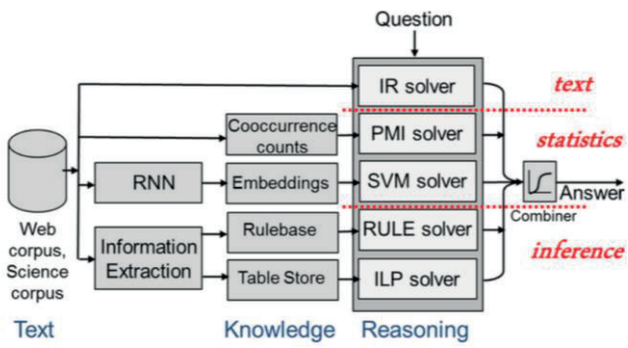


Рис.1. Структура ARISTO

Литература

1. *Arindam B.* A Survey of Question Answering for Math and Science Problem, 2017.
2. *Hosseini M. J., Hajishirzi H., Etzioni O., Kushman N.* Learning to Solve Arithmetic Word Problems with Verb Categorization, Proceedings of the 2014 Conference on Empirical Methods in Natural Language Processing (EMNLP), 2014. P. 523–533.
3. *С. Юдин.* Как устроены вопросно-ответные системы.

Секция системного программирования и программной инженерии

УДК 699.85

О повышении защищенности объектов экономики от обычных средств поражения

А.В. Рыбаков, Е.В. Иванов, Р.Е. Овсянников, Д.С. Седов

Академия гражданской защиты Министерства Российской Федерации по делам гражданской обороны, чрезвычайным ситуациям и ликвидации последствий стихийных бедствий

Военные действия в настоящее время, несмотря на усилия организаций, призванных обеспечивать соблюдение норм Международного гуманитарного права, продолжают уносить тысячи жизней мирных граждан ежегодно. Во многом это связано с нахождением целей огневого поражения вблизи объектов городской застройки и сетецентричным характером ведения современных войн.

Одним из направлений выполнения задач гражданской обороны в случае огневого воздействия на объекты, расположенные в городах, является обеспечение их устойчивого функционирования, что должно достигаться за счет обеспечения устойчивости функционирования организаций, необходимых для выживания населения в военных конфликтах [1]. Для решения задачи по оценке защищенности таких объектов и ее повышения предложен показатель и шкала защищенности объекта.

Основой для нахождения значений показателя защищенности стали предложенные группой британских ученых, базирующиеся на результатах экспериментальных данных, энергетические методы, сущность которых состоит в определении положения точки, характеризующей ударно-волновую нагрузку на <P> – <i> диаграмме (рис. 1), относительно гиперболической кривой [2]. Для удобства предложено разделить диаграмму на четверти [3]:

I и IV – области совместного действия давления и импульса (I – полных разрушений, IV – незначительных разрушений);

II – область импульсного воздействия ударной волны;

III – область квазистатического воздействия ударной волны.

Под показателем защищенности понимается величина, позволяющая характеризовать способность объекта противостоять угрозам с сохранением возможности выполнять свои основные функции и задачи в условиях воздействия обычных средств поражения. Отношение характеристик текущего состояния объекта, к характеристикам его состояния, при которых он будет устойчиво функционировать, является численным выражением показателя защищенности (рис. 2, формула (1)) [3]

$$k = \frac{S_2}{S_1}. \qquad (1)$$

Для получения качественной оценки значений показателя защищенности было осуществлено соотнесение его значений со значениями отклонения конструктивных элементов зданий, полученных в результате моделирования ударно-волновой нагрузки на промышленный объект методом конечных элементов.

Построение трехмерной модели здания осуществлялось на основании проектной документации, отражающей его основные конструктивные характеристики. По результатам эксперимента получены значения перемещений для каждого значения давления и импульса, действующих на здание. В соответствии со СНиП 2.01.07-85 рассчитывается предельное значение горизонтальных перемещений здания. На основании

ГОСТ Р 42.2.01-2014 «Гражданская оборона. Оценка состояния потенциально опасных объектов, объектов обороны и безопасности в условиях воздействия поражающих факторов обычных средств поражения» производится градуировка степеней разрушения здания и сопоставление данных степеней с перемещениями конструктивных элементов здания и их коэффициентами защищенности. По сопоставленным значениям создается шкала степеней разрушения с указанием предельных перемещений и коэффициента защищенности объектов (рис. 3).

Таким образом, полученные для конкретного сценария применения обычных средств поражения, значения показателя защищенности, могут быть интерпретированы с целью определения степени разрушения объекта. Кроме того, после рассмотрения основных сценариев поражения конкретного опасного производственного объекта на стадии проектирования можно решить задачу выбора оптимальных параметров конструктивных элементов, максимизирующих значение показателя защищенности, что позволит обеспечить сохранение устойчивого функционирования объекта при воздействии обычных средств поражения.

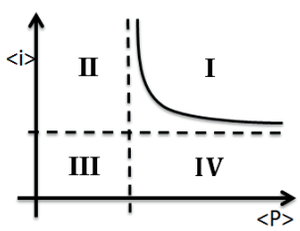


Рис. 1. <P>-<i> - диаграмма

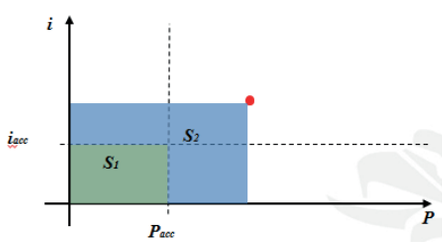


Рис.2. Геометрическая интерпретация показателя защищенности

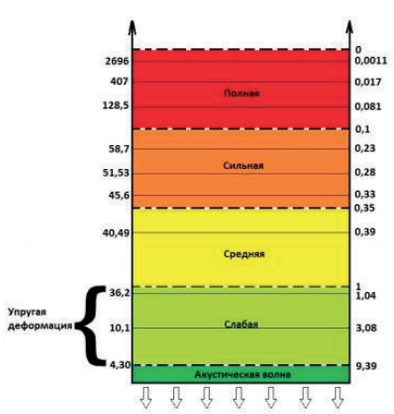


Рис. 3. Качественная шкала оценки показателя защищенности

Литература

1. Федеральный закон от 12.02.1998 № 28-ФЗ «О гражданской обороне»;
2. *Бейкер У., Кокс П., Уэстайн П.* Взрывные явления. Оценка и последствия. Т.1. URSS, 1986. С. 320.
3. *Рыбаков А.В., Иванов Е.В., Савинов А.М., Геккель И.Я.* О подходе к определению показателя защищенности зданий и сооружений опасного производственного объекта // Научные и образовательные проблемы гражданской защиты. 2017. № 2. С. 33–40.;

4. *Рыбаков А.В., Иванов Е.В., Седов Д.С., Овсянников Р.Е.* О подходе к определению показателя и построение шкалы оценки защищенности опасного производственного объекта // Научно-технический вестник Брянского государственного университета. 2017. № 3. С. 344–352.

УДК 614.8

О методике расчета пространственного распределения энергии осколков вследствие возникновения чрезвычайных ситуаций техногенного характера

А.В. Рыбаков, С.Л. Очетов, А.В. Петрухин

Академия гражданской защиты МЧС России

Статья посвящена разработке методики, позволяющей оценить разлет осколков зданий и сооружений при взрыве. Также методика позволяет построить пространственное распределение энергии для оценки последствий воздействия осколков на людей и строительные конструкции. Существенным является учет физических особенностей разлета осколков от строительных конструкций. Приводятся расчеты по оценке пространственного распределения осколков.

Взрыв – процесс выделения энергии за короткий промежуток времени, связанный с мгновенным физико-химическим изменением состояния вещества, приводящим к возникновению скачка давления или ударной волны, сопровождающийся образованием сжатых газов или паров, способных производить работу [1].

На опасных производственных объектах взрывы возникает из-за нарушения условий эксплуатации оборудования, поломок, разрушений или выхода из строя различных механизмов, емкостей с хранением опасных веществ, трубопроводов. Нарушение человеком необходимого технологического процесса (температуры, давления) также приводит к возникновению детонации. Бытовые случаи, сопровождающиеся утечкой газа, чаще всего являются причинами взрывов в жилых домах. Природные катаклизмы, приводящие к нарушениям целостности газового оборудования, а также удары молний, падение космических тел крайне редко, но все же способны приводить к взрывоопасным ситуациям. Последствия и действие взрыва на здания и сооружения, ударная волна, поток осколков, летящие предметы, воздействие высокой температуры и отравляющих продуктов процесса горения относят к поражающим факторам взрыва. Под их воздействие в первую очередь попадают сооружения, здания и, конечно же, работающий персонал и население. Наиболее значительным разрушениям подвергаются высокие строения, имеющие легкие несущие элементы. Низкие или подземные сооружения, произведенные из тяжелых конструкций, обладают хорошей устойчивостью к поражающим факторам и имеют меньше разрушительных последствий. В зависимости от воздействия воздушной ударной волны взрыва на здания и сооружения выделяются следующие степени их разрушения:

— полная, когда восстановление здания из-за уничтожения несущих конструкций невозможно;

— сильная, когда разрушения затрагивают большую часть здания;

— средняя – уничтожению или повреждению подверглись большей частью лишь второстепенные части (крыши, двери, перегородки, оконные проемы). Иногда возникают трещины в стенах, подвал сохранен.

— слабая степень характеризуется незначительными разрушениями, которые устраняются в течение короткого времени. [2]

Все типы взрывов приводят к образованию ударного, вибрационного и теплого воздействия на окружающую среду. Масштаб разрушений зависит от места возникновения процесса детонации и его мощности. Рассмотрим поражающее действие и последствия взрывов для человека.

Поражающим фактором чрезвычайной ситуации называют явление и процесс, который оказывает негативное влияние на все живые организмы (человека, животных и растения). У этих факторов бывают физические, химические и биологические проявления.

[3] Поражающие факторы ЧС классифицируют по нескольким признакам. По генезису (происхождению) их подразделяют на две группы – первичные и вторичные. Первичные, или факторы прямого действия, – это факторы, непосредственно вызываемые возникновением источника ЧС. Вторичные факторы (факторы побочного действия) вызываются изменением объектов окружающей среды под действием первичных поражающих факторов. К примеру, при теракте первичным поражающим фактором является взрыв, а вторичным факторы – разрушения зданий, разлет осколков взрывчатого вещества и прочее. Для людей, находящихся в зоне взрыва, угрозу представляет не только масса взрывчатого вещества, но также давление и энергия при взрыве.

Предлагаемая в статье методика позволяет построить пространственное распределение энергии для оценки последствий воздействия осколков на людей и строительные конструкции. Существенным отличием разработанных моделей, составляющих основу методики, является учет физических особенностей разлета осколков от строительных конструкций. Пространственное распределение энергии осколков позволит с высокой степенью достоверности оценить значения техногенного риска, обусловленного ударными и осколочными воздействиями, кроме этого, разработать и обосновать инженерно-технические мероприятия гражданской обороны при разработке проектной документации, деклараций промышленной безопасности и паспортов безопасности опасных производственных объектов. А также разработанная пространственная модель позволит разработать защитные мероприятия, направленные на снижение воздействия поражающих факторов осколочного типа на высотные здания.

Литература

1. ГОСТ Р22.0.8.-96 «Безопасность в чрезвычайных ситуациях. Техногенные чрезвычайные ситуации. Взрывы. Термины и определения»; Введ. с 29.05.1996. М.: Изд-во стандартов, 1996.
2. https://fireman.club/statyi-polzovateley/vzryiv-deistviya-ygroza-i-poragaushie-faktori/
3. Словарь терминов МЧС России, 2010. Режим доступа: http://www.mchs.gov.ru/dop/terms

УДК 004.052

Об ограничениях метода классификации дефектов в программах, найденных методами статического анализа программ при помощи динамического символьного исполнения

А.Ю. Герасимов

Институт системного программирования им. В.П. Иванникова РАН

Современные инструменты статического анализа программ на наличие дефектов имеют ограничения, связанные с компромиссом между обеспечением точности, производительности и масштабируемости анализа. В связи с этими ограничениями инструменты не могут гарантировать 100%-ную точность результатов анализа, поэтому возникает задача классификации предупреждений о дефектах в программе, обнаруженных в процессе анализа, на истинные и ложные. Известно несколько различных подходов к решению данной задачи [1, 2]. Одним из них является применение динамического символьного, или конкретно-символьного (concolic), исполнения, в процессе которого показывается реализуемость дефекта в программе путём генерации входных данных, которые демонстрируют достижимость ошибочного состояния в программе и могут быть использованы для создания теста для ошибочной ситуации и отладки программы.

Как правило, предупреждения о дефектах в программе, приводящих к критическим сбоям времени исполнения программы или уязвимостям безопасности, представляются в виде тройки $\boldsymbol{D}$ <$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{p}$>, где $\boldsymbol{D}$ – предупреждение о дефекте в программе, $\boldsymbol{i}$ – точка инициализации ошибочной ситуации, $\boldsymbol{s}$ – точка реализации ошибочной ситуации, $\boldsymbol{p}$ – путь в программе, представленный в виде последовательности условных переходов и результата вычисления условных выражений, который будем называть *трассой реализации дефекта*.

Как указано в работе [3, с. 13], среди причин невозможности реализации дефектов, найденных методами статического анализа, в процессе исполнения программы можно выделить такие, как

- наличие недостижимого кода;
- условное выражение в операции условного перехода, которое всегда вычисляется в истину или ложь;
- расположение дефекта на недостижимом пути.

В связи с этим в первом приближении к решению задачи классификации можно рассматривать решение задач определения достижимости точек инициализации ошибочной ситуации, реализации ошибочной ситуации и совместности условий в трассе реализации дефекта непосредственно в процессе исполнения программы. Один из подходов к решению данной задачи заключается в применении анализа потока помеченных данных в процессе направленного итеративного динамического символьного исполнения для вычисления входных данных программы с целью направления исполнения программы по пути, проходящему в конечном итоге по трассе реализации дефекта, найденного методом статического анализа программы. В ИСП РАН создан прототип инструмента [4, 5], реализующий данный подход. В процессе анализа результатов, полученных для оценки предложенного подхода, были выделены следующие ситуации:

- Входные данные, приводящие к реализации ошибочной ситуации в программе, вычислены. Данная ситуация соответствует подтверждению дефекта в программе и позволяет классифицировать предупреждение статического анализатора как истинное.
- Входные данные, приводящие к реализации ошибочной ситуации в программе, подобрать не удалось в связи с несовместностью условий трассы дефекта. Данная ситуация позволяет классифицировать предупреждение статического анализатора как ложное.
- Входные данные, приводящие к реализации ошибочной ситуации в программе, подобрать не удалось в связи с несовместностью условий трассы дефекта и предусловий рассмотренных путей, приводящих к точке инициализации ошибочной ситуации. Данная ситуация не позволяет классифицировать предупреждение статического анализатора ни как истинное, так как не удалось вычислить входные данные, приводящие к реализации ошибочной ситуации, ни как ложное. Обсуждению причин невозможности классифицировать предупреждение как ложное или истинное посвящена заключительная часть статьи.

В результате проведенных экспериментов подтвердилась гипотеза, что в общем случае процесс классификации дефектов методами анализа потока помеченных данных подвержен проблемам перепомеченности (overtainting) и недопомеченности (undertainting) потока данных программы [6]. В случае перепомеченности потока данных программы происходит резкое увеличение размера символьной формулы ограничений пути, что приводит к увеличению вычислительной сложности решения формулы с целью вычисления входных данных и в конечном итоге к значительному падению производительности анализа в целом. На недопомеченность потока данных программы влияет несколько факторов:

- Неявные зависимости по управлению. Например:
  - Наличие в программе переходов по вычисляемым адресам (использование виртуальных функций, указателей на функции и др.), значение которых невозможно определить в процессе статического анализа, приводит к неполноте графа потока управления, полученного путём статического анализа исполняемого кода, что в конечном итоге приводит к неполноте дерева путей, доступных для анализа методом направленного динамического символьного управления.
  - Наличие в программе операций над переменными, находящимися в базовых блоках, управление в которые попадает в зависимости от значения помеченных данных. Яркий пример подобной ситуации – всевозможные синтаксические анализаторы, преобразующие поток входных данных в некоторую модель.
- Неявные зависимости по данным. Например, табличные преобразования, в которых в индекс доступа к табличным данным является помеченным, а данные, получаемые из

таблицы, – нет.

Применение перепомеченности потока данных программы не представляется практически применимым из-за высокой вычислительной сложности задачи определения выполнимости ограничений пути в этом случае. Решение задачи повышения точности классификации предупреждений о дефектах в программах, найденных методами статического анализа программ при помощи динамического анализа потока помеченных данных программы, напрямую зависит от решения задачи минимально достаточной помеченности потока данных программы, и именно эта задача представляется наиболее актуальной для исследования в области динамического анализа программ в ближайшее время.

Литература

1. *Герасимов А.Ю.* Обзор подходов к улучшению качества результатов статического анализа программ. // Труды института системного программирования РАН. – М.: 2017. Т. 29. В. 3. С. 75–98.
2. *Muske T., Serebrenik A.* Survey of Approaches for Handling Static Analysis Alarms // Proceedings of IEEE 16th International Working Conference on Source Code Analysis and Manipulation (SCAM). 2016. P. 157–166.
3. *Бородин А.Е.* Межпроцедурный контекстно-чувствительный статический анализ для поиска ошибок в исходном коде программ на языках C и C++: диссертация на соискание степени кандидата физико-математических наук. – М., 2016.
4. *Герасимов А.Ю., Круглов Л.В.* Вычисление входных данных для достижения определенной функции в программе методом итеративного динамического анализа // Труды института системного программирования РАН. – М.: 2016. Т. 28. В. 5. С. 159–174.
5. *Gerasimov A., Kruglov L.* Reachability confirmation of statically detected defects using dynamic analysis. // Proceedings of the 11th International Conference on Computer Science and Information Technologies. Yerevan: 2017, P. 148–151.
6. *Schwartz E.J., Avgerinos T., Brumley D.* All You Ever Wanted to Know about Dynamic Taint Analysis and Forward Symbolic Execution (but Might Have Been Afraid to Ask) // Proceedings of the 2010 IEEE Symposium on Security and Privacy. Oakland: 2010. P. 317–331.

УДК 004.416

Оценка вероятности истинности предупреждений статического анализатора

А.В. Спиридонов[1], В.В. Савченко[2]

[1]Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
[2]Институт системного программирования им. В.П. Иванникова РАН

Один из способов улучшения качества программного продукта — внедрение статического анализатора в процесс разработки. При этом количество предупреждений, выдаваемых статическим анализатором, для крупных проектов может быть настолько большим, что разбирать их все становится нерентабельно. Но это не значит, что такой способ контроля качества кодовой базы нужно прекратить использовать. Среди множества этих предупреждений нужно выделять только те, которые соответствуют действительной ошибке в ПО, тогда количество предупреждений не будет мешать использованию статического анализатора в проекте.

Целью работы является исследование и улучшение методов ранжирования предупреждений статического анализатора. Среди работ в данной области превалируют методы, основанные на статистике и машинном обучении. Предлагаемый метод основан на работе Yu и др. [1], основным отличием которого является использование внутренних структур статического анализатора.

В данной работе мы делим срабатывания на четыре класса: достоверно истинные, истинные, неизвестного типа и ложные. Оценка вероятности принадлежности предупреждения каждому классу производится при помощи обученной нейронной сети. Особенностью данной работы, является использование внутренних структур статического

анализатора. Было выполнено встраивание в ядро clang static analyzer, для сбора данных во время анализа. Впоследствии статистики на основе этих данных использовались как признаки предупреждений. Ранжирование осуществляется на основе вероятностей, полученных в результате работы нейронной сети.

Используемые признаки предупреждений:

1. длина пути предупреждения(*),
2. имя чекера(*),
3. категория предупреждения(*),
4. число переходов между функциями(*),
5. максимальная вложенность вызовов(*),
6. AST вершина последнего элемента пути,
7. было ли ограничение на глобальную переменную,
8. была ли смена ограничения на переменную,
9. были ли ограничения, которые позже снимаются,
10. были ли ограничения на переменную с неизвестным местом положения,
11. окружение последнего элемента пути (несколько AST вершин, до и после элемента).

Используемые признаки элементов пути:

1. вложенность вызовов,
2. тип элемента пути(*),
3. AST вершина элемента пути.

Признаки, помеченные выше символом «*», в дальнейшем мы будем называть базовыми.

Так как путь предупреждения имеет переменную длину, то для обработки признаков его элементов используется рекуррентная сеть [2], выход которой конкатенируется с выходом сети прямого распространения, обрабатывающей признаки предупреждения в целом. После чего объединённый выход сетей направляется на выходной уровень.

Из-за особенностей clang static analyzer (небольшое число предупреждений) было решено, с помощью метода ensemble neural network[3], в автоматическом порядке разметить несколько проектов. Предупреждения, размеченные автоматически, будут использоваться только для этапа обучения. На этапе тестирования используются только вручную размеченные предупреждения.

Тестирование производилось на предупреждениях нескольких, заранее размеченных проектов (в скобках указано число предупреждений по классам, в порядке, в котором они вводились): profanity(10, 15, 0, 1), vim(22, 10, 25, 20), nnabla(0, 0, 0, 12). opencv(126, 27, 35, 38).

Проекты, размечаемые автоматически (в скобках указано общее число предупреждений): bash(230), postgres(313), git(68), nginx(10).

В качестве результатов приводятся True Positive rate и график функции потерь. Функция потерь при обучении с базовыми (рис. 1), со всеми (рис. 2) признаками. True positive rate в сравнении (рис. 3).

Результаты показывают, что использование внутренних структур статического анализатора улучшает ранжирование. В дальнейших планах основным направлением является увеличение обучающей выборки, что возможно на основании следующих подходов:

1. Реализовать изложенные методы ранжирования для промышленного статического анализатора, генерирующих намного больше предупреждений.
2. Использовать расширение обучающей выборки (data augmentation).

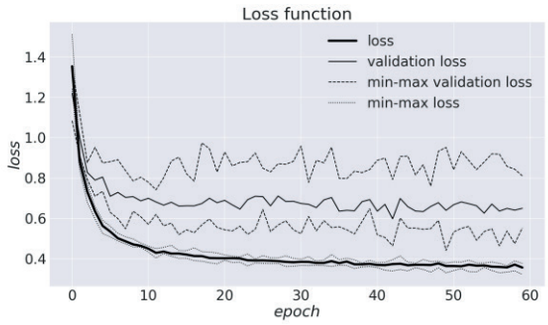


Рис. 1

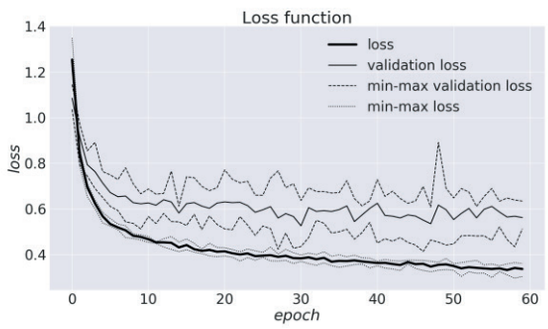


Рис. 2

Рис. 3

Литература

1. *Yu L., Tsai W.-T., Zhao W., Wu W.* Predicting defect priority based on neural networks. // Advanced Data Mining and Applications. 2010. P. 356–367.
2. *Hochreiter S, Schmidhuber J.* LSTM can solve hard long time lag problems. // Advances in neural information processing systems. 1997. P. 473–479.
3. *Zhou Z.-H., Jiang Y.* Medical diagnosis with c4. 5 rule preceded by artificial neural network ensemble // IEEE Transactions on information Technology in Biomedicine. 2003. V. 7, N 1. P. 37–42.

УДК 004.457

Реализация программного комплекса интерактивной работы с трехмерными объектами

В.А. Петрухин, А.С. Джус, С.Х. Шайхлисламов, Е.В. Нечепуренко, Д.П. Бельдий

Московский физико-технический институт (государственный университет)

В работе рассматриваются вопросы реализации программного решения для оптимизации процессов моделирования и изучения трехмерных объектов с помощью интерактивного управления контентом на любой ровной поверхности. Целью работы является реализация программного комплекса, позволяющего синхронизировать изображение, проецируемое проектором на поверхность, и нажатия человека на эту поверхность, а также моделировать соответствующее поведение отображаемых объектов на интерактивное нажатие. Дополнительной целью работы является объединение изображений от нескольких проекторов в единую непрерывную сцену.

Для установки системы достаточно ноутбука с операционной системой Winodws, одного (или более) проекторов, малогабаритного лазерного датчика – лидара, и локальной Wi-Fi сети. Калибровка системы выполняется методом синхронизации нескольких точек в реальном и виртуальном пространстве. В целом для установки и калибровки интерактивной стены необходимо от 10 минут, что делает ее высокомобильной и простой в использовании. Возможность объединения изображений от нескольких проекторов в единое целое позволяет создавать сложные сцены отображеня, в том числе непрерывные сцены на углах помещений или сцены больших размеров, что позволяет работать с трехмерными моделями больших объектов в масштабе один к одному. Разработанная система жестов позволяет удобно проводить разнообразные операции над моделями – сдвиг, вращение, декомпозиция на составляющие элементы.

Разработанный комплекс способствует лучшему восприятию и наглядности демонстрируемых трехмерных объектов, что ускоряет процесс ознакомления с элементами изучаемого объекта и создает ощущение работы с реальным объектом.

Литература

1. *Hussain, Zahir M., Sadik A.Z., O'Shea P.* Digital signal processing: an introduction with MATLAB and applications. // The First-Order Noise-Free SDPLL P. 149
2. *Magda Y.,* Arduino Interfacing and SignalProcessing // (Kindle Edition), 2012.
3. *Hussain, Zahir M., Sadik A. Z.* Amin Unity 5.x Shaders and Effects Cookbook // Screen Effects with Unity Render Textures P. 151.

УДК 004.457

Управление состоянием человека с помощью освещения в режиме реального времени

В.А. Петрухин, С.Х. Шайхлисламов, М.С. Селезнева, А.В. Зухба

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Развитие технологии беспроводных датчиков сердечного ритма позволило собирать массивы данных, достаточные для применения к ним методов машинного обучения. Индивидуальные датчики дают возможность отслеживать в режиме реального времени изменения состояния человека, вызванные тем или иным воздействием.

В данной работе к задаче управления состоянием человека применяются методы обучения с подкреплением (reinforcement learning). Рассматривается задача обучения с подкреплением в стандартной постановке: в качестве агента выступает алгоритм,

настраивающий цвет и яркость освещения в помещении, где находится человек; в качестве среды — состояние человека. Описание состояний человека составляется на основе RR-интервалов, записанных датчиком Polar H7. Параметры освещения настраиваются с помощью комплекта ламп Philips Hue Starter Kit (E26).

Анализ вариабельности сердечного ритма, основанный на рассматриваемых данных, дает возможность оценить функциональное состояние человека, определить уровень стресса и вероятность возникновения патологических состояний. Таким образом, стратегия агента основана на оптимизации параметров состояния человека. Методы обучения с подкреплением учитывают влияние агента на среду, то есть обладают обратной связью. В нашем случае это позволяет учитывать изменение состояния человека в режиме реального времени, а также подстраиваться под его индивидуальные особенности.

Результаты работы планируется применить для создания комфортной среды (well-being environment) в сотрудничестве с Philips. В перспективе результаты исследования также применимы для контроля состояния людей, работающих в условиях постоянного искусственного освещения (на подводных лодках, полярных станциях и т.д.)

Литература

1. *Jaksch T.,* Near-optimal Regret Bounds for Reinforcement Learning // Journal of Machine Learning Research, 2010. N 11. P. 1563–1600.
2. *Kaelbling L.P., Littman M.L.; Moore, Andrew W.* Reinforcement Learning: A Survey // Journal of Artificial Intelligence Research. 1996. N 4. P. 237–285.

УДК 004.457

Исследование влияния резонансов Шумана на состояние человека с помощью приложения Cardiomood

Д.И. Крикунов, А.Г. Кульков, Р.С. Ранский, В.А. Петрухин

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Главным физическим объектом изучения в работе является распространение электромагнитных волн в полости Земля–ионосфера. А именно явление резонанса этих волн на частотах Шумана. Наибольший интерес вызывает воздействие такой стоячей волны на человеческий организм. Соответственно такие факторы, как суточные, сезонные и все периодические колебания параметров ионосферы, рассматриваются как основные модуляторы волн Шумана. С другой стороны, не меньший интерес вызывают апериодические возмущения ионосферы.

Задача поиска связи между аномалиями в ионосфере и биологическими показателями человека была сформулирована как задача классификации в стандартной постановке. Объектами выступают двухминутные записи RR-интервалов, характеризующие состояние человека, признаками — различные медицинские статистики, посчитанные на них, классами — состояния ионосферы. В свою очередь, информация об ионосфере предоставляется в виде динамики частот, амплитуд и добротностей первых четырех резонансов, а также их зашумленность. В простейшей из исследуемых постановок задачи рассматривалось всего два состояния: спокойная ионосфера и ярко выраженные колебания в ней. В работе исследуется возможность решения данной задачи классификации различными методами машинного обучения. В качестве выборки выступал набор сессий, проведённых в тихие дни, и сессий, проведённых в дни с определенными отклонениями параметров волн Шумана.

Работа представляет интерес как поиск механизма воздействия внешних полей на человека. Причем не информативных волновых пакетов, а постоянного гармонического сигнала, зашумленного естественной и техногенной средой.

Литература

1. *Блиох П.В., Николенко А.П., Филиппов Ю.Ф.* Глобальные электромагнитные резонансы в полости Земля-ионосфера // Труды Военно-космической академии им. А.Ф. Можайского. – С., 2016.
2. *Вапник В.Н.* Восстановление зависимостей по эмпирическим данным. — М.: Наука, 1979.
3. *Hastie T., Tibshirani R., Friedman J.* The Elements of Statistical Learning. — Springer, 2001. ISBN 0-387-95284-5.
4. *Stoupel E.* Effect of geomagnetic activity on cardiovascular parameters. Biomed Pharmacother, 2002.

УДК 004.457

Зависимость физиологического состояния человека от времени года

И.В. Ганусевич, А.В. Зухба, В.А. Петрухин, С.Х. Шайхлисламов, Д.И. Крикунов, Р.С. Ранский

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Состояние человека в любой моент времени зависит от множества внешних факторов, таких как загрязнение воздуха, ионизация атмосферы [2] и т.д. В данной работе было рассмотрено влияние сезона на физиологическое состояние человека. Для этого использовались данные приложения Cardiomood, которые собирались на протяжении нескольких лет и представляют собой записи сессий почти 20 000 пользователей. Состояние человека в исследовании описывается широким набором параметров вариабельности сердечного ритма (ВСР), по динамике изменения которых определялось влияние факторов времени года.

Для первичного анализа были отобраны только сессии, записанные в июне или декабре каждого года (начиная с 2014). Итоговую выборку составили записи 448 людей с общим количеством сессий 5685. На этих данных было подтверждено, что корреляция между временем года и состоянием человека действительно есть. Решалась задача классификации в стандартной постановке: объекты – 2-минутные участки сессии, признаки – набор вычисленных показателей ВСР для каждого интервала, ответы – месяц, в который была записана соответствующая сессия (июнь или декабрь). Применялись алгоритмы: случайный лес, логистическая регрессия, метод опорных векторов. Точность измерялась частотой ошибок на кроссвалидации и составила 0,69.

После этого были отобраны пользователи, у которых имелись записанные сессии в июне и декабре одного года. Были проанализированы различия в средних показателях ВСР в этих месяцах для выделения закономерностей. Дальнейшее исследование состояло в решении регрессионной задачи – определении зависимости между состоянием человека (показатели ВСР) и временем года.

Целью данной работы было нахождение зависимостей конкретных показателей ВСР от времени года. Это может значительно упростить поиск путей минимизации негативного влияния сезонов на человека.

Литература

1. *Баевский Р.М., Кириллов О.И., Клецкин С.З.* Математический анализ изменений сердечного ритма при стрессе. М.: Наука, 1984. 221 с.
2. *Vincenzo Valenzi,* CIFA, Italy. Air ions: Influences on microclimate modifications and the interactions with human physiology.

УДК 004.457

Создание инструмента для определения зависимости двух временных рядов на основе теории вероятностей в пакете Matlab

Д.И. Крикунов[1], А.Н. Ляхов[2]

[1]Московский физико-технический институт (государственный институт)
[2]Институт динамики геосфер РАН

В основе данной работы лежит одна из базовых теорем теории вероятностей, а именно рассмотрение плотностей вероятностей по определению. Предложенный инструмент служит объединением раннее известных возможностей Matlab и фундаментальной математической теории. В результате чего получился полезный индикатор зависимости событий или её отсутствия.

Разработанная программа строит плотности вероятностей двух событий, сравнивая их произведение с совместной плотностью. Для калибровки инструмента использовались заведомо независимые временные ряды белого, гауссового, розового и иных цветных шумов. Также рассмотрено влияние размера сетки, на которой строятся плотности, на получаемый результат. Система исследована на сходимость при увеличении длины входных векторов и количества опытов на одних и тех же шумах. Как результат, высчитывается максимальное отклонение разности двух матриц от нуля. На основе набранной статистики делаются выводы о наличии или отсутствии зависимости двух временных рядов.

Данная разработка, основанная на строгой математической теории, служит надежным индикатором в определенных рамках, что существенно отличается от корреляционного анализа, так как зависимость событий является более сильным понятием по определению.

Литература

1. *Ширяев А.Н.* Вероятность. 2-е издание. – М.: Наука, 1989.
2. *Потемкин В.Г.* Справочник по Matlab, Softline.

Секция вычислительной математики

УДК 004.052.42

Обнаружение ошибок типа «использование памяти после освобождения» в бинарных файлах с применением динамического анализа программ

С.А Асрян, С.С. Гайсарян, Ш.Ф. Курмангалеев, А.М. Агабалян, С.С. Саргсян

Институт системного программирования им. В.П. Иванникова РАН

Ошибки типа «использование памяти после освобождения» (Use After Free - UAF) в большинстве случаев встречаются в программном обеспечении, написанные на языках C/C++. Данная работа представляет метод обнаружения подобных ошибок, используя динамический анализ программы. В рамках данной работы было выполнено объединение двух компонентов динамического анализа программ: алгоритм обнаружения UAF-ошибок и алгоритм покрытия кода SAGE [1], что позволило улучшить количество найденных ошибок. Метод использует алгоритм обнаружения UAF-ошибок для каждого пути выполнения программы. Поскольку анализ программы выполняется динамическим образом, то поиск ошибок производится только в исполняемой части кода. Следовательно, для полного анализа программы нужно обеспечить как можно большее покрытие кода. Для достижения этой цели в большинстве случаев используется символьное выполнение программы с применением SMT [2] решателей. Существует ряд инструментов динамического анализа программ (Avalanche, DangNull, Undangle), однако они не выполняют поиск UAF-ошибок для каждого пути выполнения программы. Avalanche [3] реализует итеративный анализ исполняемого кода программы, основанный на динамической инструментации программы. В процессе анализа инструмент вычисляет входные данные анализируемой программы с целью автоматического обхода всех достижимых путей в программе и обнаружения аварийных завершений программы. Инструмент DangNull [4] фокусируется на обнаружении и обнулении указателей на динамическую область программы после их освобождения, предотвращая появление ошибок. В этом инструменте используется статическая инструментация программы. Undangle [5] также предотвращает ошибки использования памяти после освобождения. Данный инструмент присваивает метки возвращаемым значениям каждой функции распределения памяти и использует анализ помеченных данных для отслеживания этих меток. При освобождении памяти проверяется, какие ячейки памяти ассоциируются с соответствующей меткой, и определяются указатели, которые ссылаются на висячий указатель (указатель с ненулевым значением, ссылающийся на освобожденную область памяти).

Первый компонент представленного нами метода использует алгоритм обнаружения UAF-ошибок инструмента Triton [6]. В данном алгоритме используются два множества allocTable и freeTable для сохранения адресов памяти. Эти множества используются для проверки корректного доступа к памяти. Элементы добавляются и удаляются из данных множеств соответствующим образом: при выделении памяти соответствующий адрес добавляется в множество allocTable и удаляется из freeTable (если данный адрес присутствует в freeTable); после освобождения памяти данный адрес удаляется из allocTable и добавляется в множество freeTable. Следовательно, считается, что в программе есть UAF-ошибка, если при выполнении инструкции доступа к памяти memAccess справедливо следующее условие:

- $address\{memAccess\} \notin allocTable \wedge address\{memAccess\} \in freeTable$

Второй компонент основан на алгоритме покрытия кода [2], разработанный компанией Microsoft. Алгоритм имеет три основных этапа:

- Выбор начальных входных данных и сборка ограничений (например, x != 5) для каждого пути выполнения программы.
- Получение новых входных данных с помощью решения логических выражений, состоящих из ограничений, собранных на предыдущем этапе.
- Установление приоритетов для входных данных с помощью присваивания им весовых значений (количество блоков программы открывшихся с помощью данного элемента).

Реализация первых двух пунктов присутствует в инструменте Triton [6]. На данном этапе нами была добавлена реализация третьего пункта. Добавление весовых значений позволяет значительным образом ускорить процесс анализа программы с помощью рассматривания тех входных данных, которые имеют наибольшее воздействие на покрытие кода. Например, входному элементу, с помощью которого было открыто 50 новых блоков будет присвоено значение 50, и оно будет помещено в свое соответствующее место в множестве входных данных.

В пределах данной работы нами были также добавлены следующие возможности: поддержка программ, принимающих на вход файловые данные, и возможность определить конкретные диапазоны входных данных, которые должны быть помечены инструментом символического выполнения.

Метод был тестирован на нескольких реальных проектах (gvgen из пакета graphviz, jasper из пакета libjasper-runtime и gif2rgb из пакета giflib) путем внедрения кода, содержащего UAF-ошибку в исходный код данных программы на разных уровнях вложенности. В результате тестирование были обнаружены все встроенные ошибки.

Литература

1. *Godefroid P., Levin M. Y., Molnar D.* Automated Whitebox Fuzz Testing // Proceedings of NDSS'2008. San Diego, 2008. P. 151.
2. *De Moura L., Nikolaj B.* Z3: an efficient SMT solver // Proceedings of the Theory and practice of
3. software, 14th international conference on Tools and algorithms for the construction and analysis of systems. P. 337.
4. *Исаев И.К., Сидоров Д.В., Герасимов А.Ю., Ермаков М.К.* Avalanche: Применение динамического анализа для автоматического обнаружения ошибок в программах, использующих сетевые сокеты // Труды Института системного программирования РАН. Т. 21. 2011. С. 55.
5. *Lee B., Song Ch., Jang Y., Wang T.* Preventing Use-after-free with Dangling Pointers Nullification. // NDSS Symposium, 2015.
6. *Caballero J., Grieco G., Marron M., Nappa A.* Undangle: Early Detection of Dangling Pointers in Use-After-Free and Double-Free Vulnerabilities // Proceedings of the 2012 International Symposium on Software Testing and Analysis, P. 133.
7. Triton - Dynamic Binary Analysis Framework, https://triton.quarkslab.com

УДК 004.942

Валидация вычислительных алгоритмов SA-модели турбулентности и пристеночных функций для течения над пластиной и в диффузоре

Р.С. Соломатин

Институт автоматизации проектирования РАН

При решении современных газодинамических задач, таких как течение газа в областях со сложной геометрией, а также смешение и горение многокомпонентных смесей в камерах сгорания, необходимо учитывать процессы переноса, связанные с вязкостью, теплопроводностью и диффузией, а также турбулентный характер течений. Турбулентность способна критически влиять на характер и скорости процессов, происходящих в газовой смеси, и именно турбулентная форма движения газов и жидкостей чаще всего реализуется в природе.

В настоящее время широко распространены гибридные подходы к моделированию турбулентности, сочетающие в себе преимущества методов, основанных на решении уравнений Рейнольдса (RANS) и метода моделирования крупных вихрей (LES) [1]. В представленной работе для будущей реализации гибридного метода моделирования турбулентности была выбрана и численно реализована модель турбулентности Спаларта–Аллмараса (SA) [2], которая состоит из одного уравнения переноса, является достаточно простой, но в то же время показывает хорошие результаты на различных типах течений. SA-модель была включена в программный комплекс, разрабатываемый в ИАП РАН, для решения задач многомерного моделирования газовых течений, в том числе с химическими реакциями. В данном программном комплексе для решения системы уравнений Навье–Стокса для многокомпонентного газа используется гибридная явно-неявная разностная схема интегрирования по времени [3]. В качестве основного вычислительного метода используется GMRES+LU–SGS [4]. Главным преимуществом метода LU–SGS (Lower-Upper Symmetric Gauss-Seidel) выступает то, что он является безматричным и не требует больших затрат по памяти, а использование матрицы, возникающей при приближенной факторизации методом LU–SGS в качестве предобуславливателя для метода наименьших невязок (GMRES), существенно увеличивает скорость сходимости. Уравнение модели турбулентности является уравнением переноса так называемой модифицированной турбулентной вязкости $\tilde{\nu}$. Начальная инициализация осуществляется путем задания интенсивности турбулентности и характерной длины смешения. В качестве граничных условий на стенках с прилипанием для вязких потоков ставится условие $\tilde{\nu} = 0$. Конвективные потоки через грань ячейки вычисляются через суммарный поток масс:

$$F_{\tilde{\nu},\sigma} = \tilde{\nu} F_m / \rho, \tag{1}$$

где $\tilde{\nu}/\rho$ – интерполированное на грань значение из ячейки, в которой поток массы через грань положителен. Уравнение переноса модифицированной турбулентной вязкости интегрируется совместно с основной системой уравнений, поэтому вектор переменных был расширен. В качестве оценки спектрального радиуса матрицы при факторизации в методе LU-SGS для модифицированной турбулентной вязкости было взято выражение

$$\frac{1}{\sigma}\left(\nu + \tilde{\nu}\right)\frac{1}{h_{sigma}}, \tag{2}$$

где ν – кинематическая вязкость, h_{sigma} – расстояние между центрами ячеек, $\sigma = 2/3$. Аппроксимация источников в уравнении для переноса модифицированной турбулентной вязкости осуществляется на $n+1$ временном слое. Реализованная модель валидировалась на задаче численного моделирования турбулентного пограничного слоя на плоской пластине [5] с использованием расчетных сеток с разной разрешающей способностью вблизи стенок. Для сеток, не разрешающих погранслой, использовалось специальное граничное условие “закон стенки” [6]. На рис. 1 показаны а) безразмерные профили скорости для турбулентного погранслоя, построенные в трех сечениях по продольному числу Рейнольдса на расчётной сетке с $y+ = 3$ в первой пристеночной ячейке, б) вязкое напряжение на пластине при расчете на сетке $y+ = 335$. Также было проведено моделирование течения вязкого газа в ассиметричном диффузоре Оби [5], [7]. На рис. 2 показано сравнение расчетных и экспериментальных безразмерных профилей скорости в расширении диффузора для параметров $h = 1.5$ см, $U_b = 20.66$ м/с.

В дальнейшем предполагается численно реализовать гибридный метод SA-DES, и провести его валидацию для задач моделирования процессов горения и детонации топливно-воздушных смесей при раздельной подаче топлива и окислителя с учетом турбулентного смешения компонентов смесей.

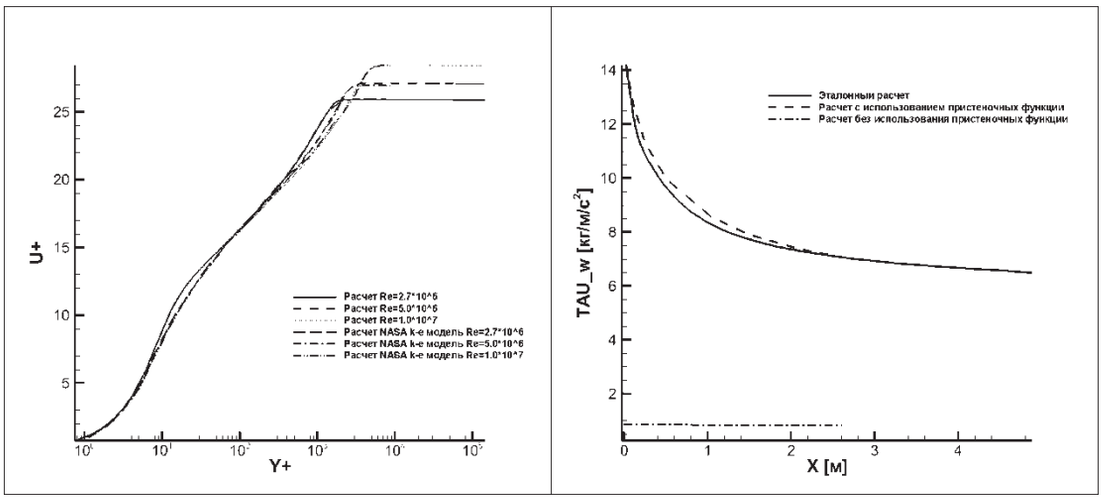


Рис. 1. а) Безразмерные профили скорости для сетки $y+=3$, б) вязкое напряжение на пластине для сетки $y+=335$

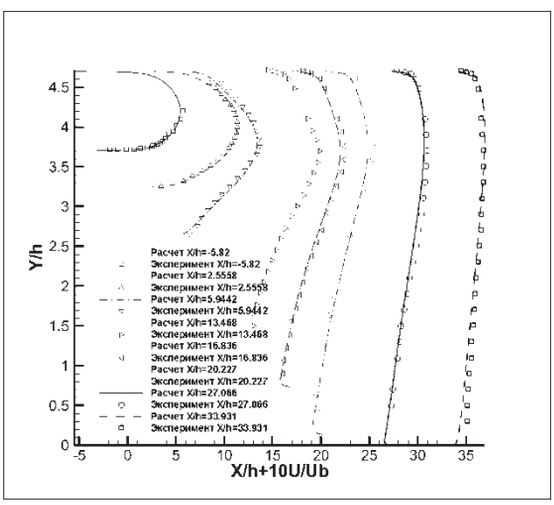


Рис. 2. Безразмерные профили скорости в расширении диффузора Оби

Литература

1. *Гарбарук А.В., Стрелец М.Х., Шур М.Л.* Моделирование турбулентности в расчетах сложных течений: учебное пособие. М.: Издательство Политехнического Института, 2012.
2. *Spalart P. R., Allmaras S. R.* A one-equation turbulence model for aerodynamic flows // AIAA Paper 1992. 0439.
3. *I.Men'shov and Y.Nakamura* Unconditionally Stable Scheme for Unsteady Compressible Flows // AIAA Journal. V. 42. I. 3. P. 551–559.
4. *Luo H., Baum J.D., Lohner R.* An accurate, fast, matrix-free implicit method for computing unsteady flows on unstructured grids // Computers and Fluids 30, 2001. P. 137 – 159.
5. NRARC Alliance Verification and Validation Archive // [электронный ресурс]. – Режим доступа: https://www.grc.nasa.gov/WWW/wind/valid/archive.html
6. *Spalding D.B*. A single formula for the law of the wall // J. Appl. Mech., 1961. V. 28. P. 455–457.
7. *Buice C.U., Eaton J.K.* Experimental investigation of flow through an asymmetric plane diffuser // Center for Turbulence Research Annual Research Briefs, 1995.

УДК 519.63

Диссипативно-дисперсионные свойства бикомпактных схем четвертого порядка аппроксимации

М.Д. Брагин[1], Б.В. Рогов[1,2]

[1]Московский физико-технический институт (государственный университет)
[2]Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

Одной из актуальных задач современной вычислительной математики является создание надежных высокоточных схем для численного решения гиперболических уравнений. К данному классу схем относятся бикомпактные схемы (например, см. [1]). Преимущество этих схем заключается в том, что они сочетают в себе целый ряд положительных свойств: высокий порядок точности на существенно неравномерных сетках; возможность неявного счета по времени при относительно низких вычислительных затратах; удобство в постановке граничных условий, обусловленное минимальностью пространственного шаблона; консервативность.

Нередко решения гиперболических уравнений имеют волновой характер (в частности, акустические, электромагнитные, упругие, ударные волны и другие). Аккуратный, физически корректный расчет подобных волновых возмущений на длительные времена требует от численной схемы хороших диссипативных и дисперсионных свойств. Их исследование представляет немалый интерес как для теории, так и для приложений численных методов. Отметим, что компактные схемы являются одними из лучших с точки зрения данных свойств, обладая при этом свойством спектрального разрешения [2–4].

В настоящем докладе изучаются диссипативно-дисперсионные свойства бикомпактных схем четвертого порядка аппроксимации [5]. Анализ выполняется как для полудискретных, так и для полностью дискретных бикомпактных схем. Показывается, что данные схемы обладают свойством спектрального разрешения. По его качеству бикомпактные схемы превосходят все прочие компактные схемы того же порядка аппроксимации, а схемная групповая скорость у бикомпактных схем совпадает по знаку с точной во всем диапазоне безразмерных волновых чисел. Результаты проведенного анализа демонстрируются на ряде численных примеров: задаче о переносе волнового пакета, задаче о переносе импульса через резкое изменение в шаге сетки и других.

Литература

1. *Рогов Б.В.* Высокоточная монотонная компактная схема бегущего счета для многомерных уравнений гиперболического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2013. Т. 53, № 2. С. 264–274.
2. *Lele S.K.* Compact finite difference schemes with spectral-like resolution // J. Comput. Phys. 1992. V. 103, N 1. P. 16–42 .
3. *Толстых А.И.* Компактные и мультиоператорные аппроксимации высокой точности для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2015. 350 с.
4. *Liu X., Zhang S., Zhang H., Shu C.-W.* A new class of central compact schemes with spectral-like resolution I: Linear schemes // J. Comput. Phys. 2013. V. 248. P. 235–256.
5. *Рогов Б.В., Брагин М.Д.* О свойствах спектрального разрешения симметричных бикомпактных схем четвертого порядка аппроксимации // Докл. АН. 2017. Т. 475, № 2. С. 140–144 .

УДК 519.63

Математическое моделирование развития неустойчивости контактной границы двух сред при высокоскоростном соударении

Т.С. Казакова[1,2], П.С. Уткин[1,2], С.В. Фортова[1]

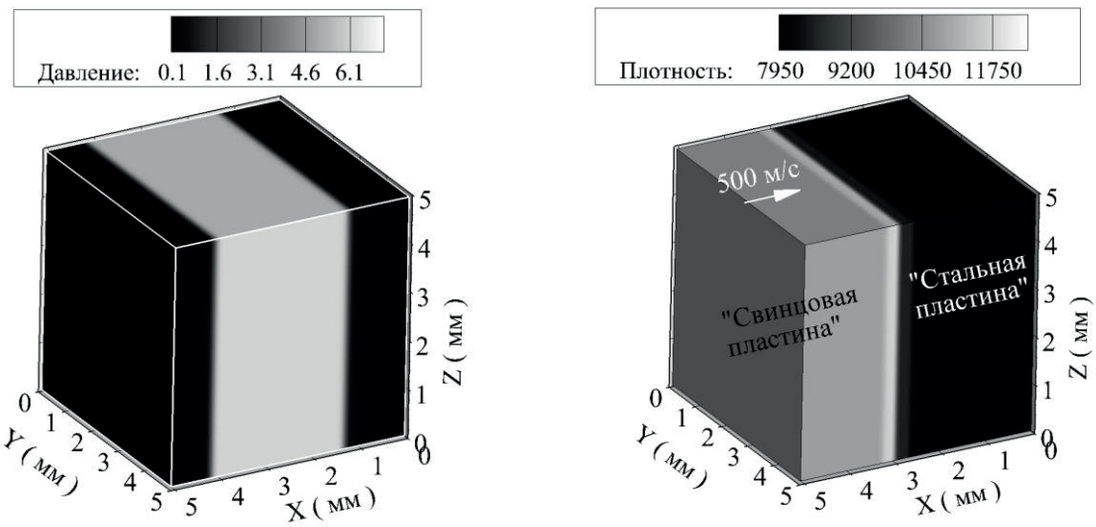
[1]Институт автоматизации проектирования РАН
[2]Московский физико-технический институт (государственный университет)

Целью работы является качественное и количественное воспроизведение основных особенностей натурного эксперимента [1] по высокоскоростному соударению двух металлических пластин, а именно формирования кратерообразных выплесков на поверхности одной из пластин. Стоит упомянуть, что теоретическими исследованиями данной задачи занимались С.К. Годунов с соавторами, В.В. Демченко с соавторами и другие.

Рисунок 1 иллюстрирует постановку задачи. Рассматривается взаимодействие свинцовой пластины (параллелепипед 2 × 5 × 5 мм) с начальной плотностью 11 300 кг/м^3 со стальной пластиной (параллелепипед 3 × 5 × 5 мм) с начальной плотностью 7900 кг/м^3. Свинцовая пластина метается в сторону стальной со скоростью 500 м/с. Предполагается, что на начальной стадии процесса взаимодействия в течение порядка 10 мкс металлы ведут себя как псевдожидкости [1], и поэтому справедливы уравнения газовой динамики. Начальное давление 10^5 Па всюду.

Математическая модель основывается на трехмерной системе уравнений Эйлера для среды с двучленным уравнением состояния (УРС), для решения которой используется метод Годунова [2]. Параметры двучленного УРС были откалиброваны по расчетно-экспериментальным данным [3, 4] для того, чтобы обеспечить количественно разумные характеристики ударных волн (УВ), которые образуются при соударении (см. рис. 1б). Более подробно см. в [5]. На границах X = 0 мм и X = 5 мм задаются граничные условия втекания. С начального момента времени до момента прихода на границу УВ задаются параметры втекания с начальными характеристиками свинцовой или стальной пластины. В момент прихода на границу УВ параметры втекания изменяются таким образом, чтобы обеспечить формирование волн разрежения, распространяющихся внутрь расчетной области. Благодаря такому приему моделируются свободные границы пластин. На остальных границах выставляются периодические граничные условия. Расчеты проводятся на сетке с пространственным разрешением 0.05 мм.

В некоторый момент времени после формирования УВ на контактной границе между пластинами накладывается малое возмущение плотности среды. Рисунок 2 иллюстрирует развитие неустойчивости после прохождения через контактную границу волн разрежения, идущих от свободных границ пластин. На срезе плотности в возмущенной области наблюдается локальный минимум ($X \approx 3.4$ мм на рис. 2), качественно соответствующий кратерообразным структурам в натурном опыте [1].



(а) (б)

Рис. 1. Рассчитанные распределения (а) плотности в момент времени 0.1 мкс (шкала в кг/м^3) и (б) давления в момент времени 0.5 мкс (шкала в ГПа). Время отсчитывается от момента соударения пластин

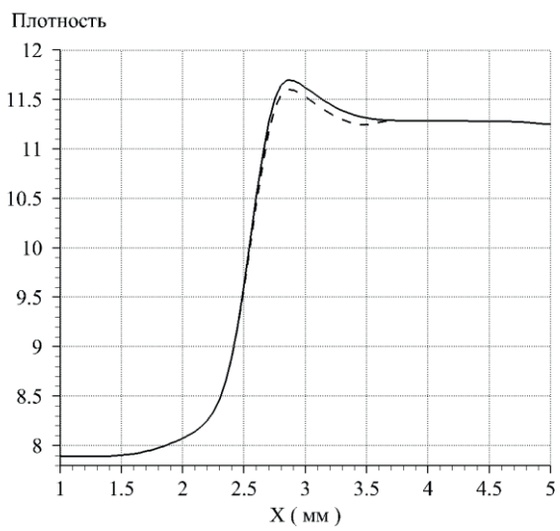


Рис. 2. Рассчитанные одномерные срезы плотности газа после взаимодействия волн разрежения с контактной границей. Сплошная линия – срез в невозмущенной области. Пунктирная линия – срез в возмущенной области. Шкала в 10^3 кг/м^3

Работа выполнена в ИАП РАН при частичной поддержке Российского научного фонда (грант № 17-11-01293), а также при частичной поддержке РФФИ (грант № 17-01-00812).

Литература

1. *Яковлев И.В.* Неустойчивость границы раздела соударяющихся поверхностей металлов // ФГВ. 1973. Т. 9, № 3. С. 447.
2. *Годунов С.К.* [и др.]. Численное решение многомерных задач газовой динамики. – М.: Наука, 1986. 400 с.
3. *Fortov V.* [et al.]. Numerical modeling of hypervelocity impacts // Int. J. Impact Eng. 2006. V. 33. P. 244.
4. *Fortov V.* [et al.]. Wide-range multi-phase equations of state for metals // Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. A. 1998. V. 415. P. 415.
5. *Fortova S.V., Utkin P.S., Narkunas T.S., Shepelev V.V.* Numerical simulation of the impact of high-speed metallic plates using two approaches // J. Physics: Conf. Series. 2017. V. 899. Paper 052006.

УДК 004.932

Ключевые проблемы создания трехмерной модели пористой среды по данным FIB-SEM

И.А. Брынза[1,2], И.В. Сафонов[2], И.В. Якимчук[2]

[1]Московский физико-технический институт (государственный университет)
[2]Московский научно-исследовательский центр «Шлюмберже»

Во многих областях науки изучение микроструктуры материалов является ключом к пониманию протекающих в них физических и химических процессов. В нефтегазовой отрасли по изображениям рентгеновской микротомографии строят модели так называемого «цифрового керна» для проведения математического моделирования с целью оценки фильтрационно-емкостных и прочностных свойств нефтесодержащих пород. В процессе истощения запасов углеводородов появляется необходимость фокусировать внимание на более сложных коллекторах, размер пор которых составляет нанометры, и разрешающей способности рентгеновской томографии оказывается недостаточно.

Одним из относительно новых методов изучения внутренней структуры веществ является технология FIB-SEM, томографии (от англ. «focused ion beam» — фокусируемый ионный пучок, «scanning electron microscope» — растровый электронный микроскоп), объединяющий в себе возможности двух приборов. Она состоит из следующих этапов: вначале ионным пучком с исследуемого образца удаляют тонкий слой вещества, а затем получают изображение поверхности с помощью электронного микроскопа [1, 2]. Результатом многократного повторения этих операций является набор последовательных изображений слоев, на основании которых можно построить объемную модель исследуемого образца. Технология FIB-SEM, томографии позволяет достичь разрешения около десяти нанометров, и широко используется для исследования строения полупроводников, наноматериалов, сплавов, биологических тканей, электродов топливных элементов, нефтесодержащих горных пород и др.

Задача построения трехмерной модели образца из последовательности двумерных изображений слоёв сопряжена с рядом проблем. Во-первых, несмотря на предварительную аппаратную обработку, включающую в том числе и выравнивание набора изображений, остаточные геометрические смещения делают невозможным создание достаточно точной модели с помощью простого размещения слоёв в виде 3D-изображения. Во-вторых, сегментация на пустотное пространство и минеральные фазы является сложной процедурой в силу присутствия яркостных искажений, артефактов и особенностей FIB-SEM-изображений. В силу указанных причин разработано крайне малое количество автоматических методов обработки FIB-SEM-изображений, а полученные результаты используются в основном для визуального анализа и интерактивных измерений.

Проанализировав имеющиеся наборы изображений (пример показан на рис. 1), а также изучив существующие публикации (например, [3] и [4]), удалось выделить следующие ключевые подзадачи, которые необходимо решить при разработке автоматического алгоритма построения объёмной модели:

1) коррекцию смещения изображений слоев друг относительно друга;
2) сегментацию пор с учётом их прозрачности (так называемый, «pore back» или «shine through» эффект), где в изображении слоя может быть видна задняя стенка поры, которая физически находится в следующих слоях (рис. 1);
3) детектирование областей засветки из-за накопленного заряда и их восстановление;
4) подавление яркостных артефактов в виде вертикальных полос (так называемый «curtaining»);
5) 5)выравнивание неоднородной яркости по полю изображения слоя и между изображениями слоев;
6) детектирование объемных фрагментов образца, механически отделившихся при удалении слоя ионным пучком, а также прогнозирование их истинного положения;
7) подавление эффекта ореола вдоль границ некоторых пор;

8) адаптивную многоклассовую сегментацию для многофазных образцов.

Следует отметить, что, во-первых, в литературе отсутствует подобная декомпозиция задачи построения объемного изображения из слоев FIB-SEM. Как правило, независимо друг от друга рассматриваются только 2–3 метода обработки. Во-вторых, если для решения некоторых из перечисленных подзадач в компьютерном зрении и обработке изображений известны удачные подходы, например, для коррекции смещения слоев друг относительно друга, то другие задачи являются совершенно новыми и не имеют близких широко известных аналогий, например, детектирование отделившихся фрагментов образца и прогнозирование их истинного положения. Отдельной нерешённой проблемой является отсутствие размеченных данных, с помощью которых можно было бы настраивать и оценивать алгоритмы коррекции и сегментации.

Пожалуй, наиболее важной задачей из всех перечисленных является автоматическая сегментация пор с учётом их прозрачности. Именно точная сегментация пустотного пространства требуется для корректного моделирования проницаемости и прочностных свойств материала. Однако данная задача является и одной из самых сложных, так как часть пикселов просвечивающейся задней стенки поры имеет интенсивность, совпадающую с интенсивностями минеральной фазы в двумерном изображении среза, и варианты визуального проявления задней стенки поры очень разнообразны. Вероятно, данная задача не может быть достаточно успешно решена с помощью известных для двумерных изображений подходов, требуется разработка новых алгоритмов сегментации трехмерных областей. Перспективным представляется использование, в частности, методов машинного обучения.

Таким образом, в докладе будут подробно освещены ключевые проблемы построения объемной модели образца по набору двумерных FIB-SEM-изображений, а также возможные способы их решения.

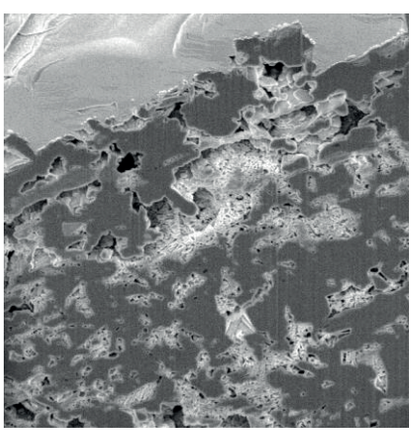


Рис. 1. Изображение слоя пористого материала, полученное с помощью технологии FIB-SEM. Стрелками выделены проявления эффекта прозрачности пор

Литература

1. *Holzer L.*, *Cantoni M*. Review of FIB Tomography // Nanofabrication Using Focused Ion and Electron Beams: Principles and Applications / edited by I. Utke, S. Moshkalev, P. Rusell. New York: Oxford University Press, 2012. 752 p.
2. *Lasagni F. A., Lasagni A. F., Huertas-Olivares I., Holazapfel C., Mücklich F*. 3D Nano-characterization of materials by FIB-SEI/EDS tomography // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. IOP Publishing. 2010. V. 7, N 1. P. 012016.
3. *Salzer M., Thiele S., Zengerle R., Schmidt, V.* On the importance of FIB-SEM specific segmentation algorithms for porous media // Materials Characterization. 2014. V. 95. P. 36–43.
4. *Prill T., Schladitz K., Jeulin D., Faessel M., Wieser C.* Morphological segmentation of FIB-SEM data of highly porous media // Journal of microscopy. 2013. V. 250, N 2. P. 77–87.

УДК 004.021

Использование теории графов для решения разреженных систем линейных алгебраических уравнений

Д.С. Крахмалёв

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Данная работа представляет собой описание алгоритма решения системы линейных алгебраических уравнений, использующего в качестве основной идеи представление разреженной матрицы коэффициентов уравнений в виде матрицы смежности слабо связного графа.

Краткое описание алгоритма:

1. Матрица коэффициентов преобразовывается в списки смежности графа.
2. К полученному графу применяется алгоритм поиска слабо связных компонент графа.
3. Для совокупности вершин текущей компоненты слабой связности, не являющихся конечными ни для одного ребра, применяется алгоритм обхода графа в глубину с целью формирования списка максимальной глубины для каждой из вершин компоненты.
4. В случае если компонента содержит циклы, к ней применяется алгоритм, выделяющий остаточный поток, с целью её конденсации или прерывания через изменение структуры графа.
5. К вершинам полученного графа в порядке возрастания глубины применяется алгоритм, являющийся уточнением алгоритма поиска максимального потока в графе. На этом этапе происходит формирование решения системы уравнений.

Данный алгоритм был протестирован на системе уравнений, содержащей порядка 100 000 свободных членов и матрицу коэффициентов, имеющую процент заполнения около 15%. Асимптотическая сложность алгоритма $-\theta\left(n\cdot\log\left(n\right)\cdot\log\left(m\right)\right)$, где n – количество свободных членов системы, а m – максимальная мощность множества исходящих рёбер из одной вершины. Таким образом, разработанный алгоритм имеет преимущества по используемой оперативной памяти и скорости выполнения по сравнению с традиционными алгоритмами решения систем линейных уравнений.

Литература

1. *Джордж А., Лю Дж.* Численное решение больших разреженных систем уравнений. М.: Мир, 1984.
2. *Писсанецки С.* Технология разреженных матриц. М.: Мир,1988.
3. *Cormen T.H.; Leiserson C.E.; Rivest R.L.; Stein C.* (2001). "Section 26.2: The Ford–Fulkerson method". Introduction to Algorithms (Second ed.) // MIT Press and McGraw–Hill. P. 651–664. ISBN 0-262-03293-7.

УДК 519.63

Сравнение схем с расщеплением потока для численного решения уравнений Эйлера сжимаемого газа

Н.С. Смирнова

Московский физико-технический институт (государственный университет)

В газовой динамике широко применяется модель идеального газа, движение которого описывается с помощью уравнений Эйлера. Для получения численного решения уравнений Эйлера сжимаемого газа используются противопоточные схемы. Дискретизация уравнений на сетке осуществляется с учетом направления распространения возмущения, что позволяет учесть физические свойства течения. Существуют два основных подхода для выявления направления потока: методы типа Годунова [1] и методы с расщеплением потока [2].

Первый подход основывается на модели, в которой поток на границе между ячейками аппроксимируется с помощью точного или приближённого решения задачи о распаде произвольного разрыва. К схемам типа Годунова относятся HLL (Harten-Lax-van Leer) [3], HLLC (Harten-Lax-van Leer-Contact) [4] и др.

Во втором подходе для аппроксимации потока используется интерпретация, в которой взаимодействие между ячейками осуществляется через группы частиц, перемещающихся между ячейками и имеющих заданное распределение скоростей. Для разделения групп частиц на движущиеся «назад» и «вперед» применяют методы расщепления потока. Схемы с расщеплением потока основываются на декомпозиции вектора невязкого потока на несколько частей. В настоящее время этот подход активно применяется в аэродинамике, так как имеет ряд преимуществ. Он достаточно быстро определяет направление распространения возмущения и имеет сравнительно простое расширение для расчетов реальных газов. Кроме этого, методы расщепления потока хорошо применимы для неявных схем, которые при решении задач аэродинамики являются предпочтительнее явных методов. Но уменьшенная сложность таких схем по сравнению со схемами типа Годунова приводит к ухудшению разрешения разрывов, в особенности контактных волн. К схемам с расщеплением потока относятся схемы: Steger-Warming [5], van Leer [6], Toro-Vázquez [7], AUSM+-up (Advection-Upstream-Splitting-Method) [8] и др.

Доклад посвящен сравнению численных схем с расщеплением потока для уравнений Эйлера сжимаемого газа в приложении к течениям с большими числами Маха. Основными критериями сравнения являются надежность счета, точность разрешения контактных разрывов и отсутствие паразитных решений на ударной волне, таких как карбункул. В качестве тестовых задач рассматриваются одномерные тесты из книги Е.Ф. Торо [2] и задача о двойном маховском отражении [9, 10].

Расчетные исследования позволили сделать следующие выводы. Схема Steger-Warming наименее предпочтительна для использования в задачах газовой динамики. Метод Toro–Vázquez хорошо применим в одномерных задачах, но не разрешает неустойчивые структуры в задаче двойного маховского отражения. Схемы van Leer и AUSM+-up дают наилучшие результаты при решении уравнений Эйлера.

Литература

1. *Годунов С.К.* Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Математический сборник. 1959. Т. 47(89), № 3. С. 271–306.
2. *Toro E.F.* Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics. Springer. 2009.
3. *Harten A. Lax P.D. van Leer B.* On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws // SIAM Review. 1983. V. 25, N 1. P. 35–61.
4. *Toro E.F. Spruce M. Speares W.* Restoration of the contact surface in the HLL-Riemann solver // Shock waves. 1994. V. 4, N 1. P. 25–34.
5. *Steger J.L. Warming R.F.* Flux vector splitting of the inviscid gas dynamic equations with application to finite-difference methods // Journal of computational physics. 1981. V. 40, N 2. P. 263–293.
6. *Van Leer B.* Flux-vector splitting for the Euler equations // Eighth international conference on numerical methods in fluid dynamics. / Springer. 1982. P. 507–512.
7. *Toro E.F. Vázquez-Cendón M.E.* Flux splitting schemes for the Euler equations // Computers and Fluids. 2012. V. 70. P. 1–12.
8. *Liou M.-S.,* A sequel to AUSM, Part II: AUSM+-up for all speeds // Journal of computational physics. 2006. V. 214, N 1. P. 137–170.
9. *Titarev V.A. Toro E.F.* Finite-volume WENO schemes for three-dimensional conservation laws // Journal of computational physics. 2004. V. 201, N 1. P. 238–260.
10. *Woodward P. Colella P.* The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks // Journal of computational physics. 1984. V. 54, N 1. P. 115–173.

УДК 519.6

Быстрая модификация алгоритма FDK компьютерной томографии с потенциалом оптимизации количества потребляемой памяти

В.В. Андрияшен[1,2], Д.А. Кожевников[2]

[1]Московский физико-технический институт (государственный университет)
[2]Объединённый институт ядерных исследований

Конусно-лучевая рентгеновская компьютерная томография с круговой траекторией сканирования часто используется в медицине и геологии для изучения внутренней структуры тел. В большинстве случаев для реконструкции в конусно-лучевой томографии используется алгоритм FKD (Feldkamp-Davis-Kress) [1]. Если исследуется объект размером N × N × N вокселей с помощью N теневых проекций, то сложность восстановления составляет $O(N^4)$ операций. Было предпринято большое количество попыток ускорить этот алгоритм, к ним относятся, например, FDK-FAST [2] и FHBP [3]. В работе представлена новая модификация алгоритма FDK – FDK-OD (optimal decomposed), которая требует $O(N^{3.5})$ операций и потенциально способна существенно сократить потребление памяти во время реконструкции.

Разработанный алгоритм основан на нескольких ранее известных принципах, которые и раньше применялись при модификации FDK. Основная идея состоит в том, чтобы разделить каждое сечение исследуемого объекта на отдельные участки и восстановить их независимо друг от друга:

$$f(x,y,z)=\sum_{\beta}\frac{R^2}{(R+x\cos\beta+y\sin\beta)^2}\,p(\beta,a(x,y,\beta),b(x,y,z,\beta))\,, \tag{1}$$

$$a(x,y,\beta)=R\frac{-x\sin\beta+y\cos\beta}{R+x\cos\beta+y\sin\beta}\,, \tag{2}$$

$$b(x,y,z,\beta)=z\frac{R}{R+x\cos\beta+y\sin\beta}\,. \tag{3}$$

Формулы (1), (2) и (3) выражают значение линейного коэффициента ослабления $f(x,y,z)$ объекта в точке с координатами (x,y,z) через взвешенную сумму значений в проекционных данных после фильтрации $p(\beta,a(x,y,\beta),b(x,y,z,\beta))$. Здесь β обозначает угол поворота и принимает значения от 0 до 360 градусов, R – расстояние от источника до оси вращения объекта. Для восстановления части сечения объекта в алгоритме FDK понадобятся не все данные. Возможно заранее предсказать, какая часть синограммы потребуется для реконструкции отдельного участка.

Эмпирически установлено, что для реконструкции небольшого участка объекта можно использовать меньше проекций, чем потребовалось бы для полного восстановления (в случае двумерной задачи томографии это доказано в [4]). Поэтому применяется прореживание по углу: для реконструкции четверти исходного сечения используется вдвое меньше проекций по углам и т.д. Прореживание включает в себя фильтрацию с использованием фильтра нижних частот для того, чтобы предотвратить появление артефактов из-за эффекта наложения спектра при понижающей дискретизации. Такое разложение реконструкции целого на сумму реконструкций частей называют декомпозицией операции обратного проецирования.

Разделим сечение объекта на 4^s квадратов, которые будем восстанавливать независимо друг от друга. Общее количество операций, которое потребует алгоритм, равно

$$t=C_1\frac{N^4}{2^s}+C_2N^3 2^s\,. \tag{1}$$

Таким образом, существует оптимальная мелкость разбиения

$$s_{\text{opt}} = \log_2 \sqrt{\frac{C_1}{C_2} N},$$

при которой вычислительная сложность алгоритма FDK-OD составляет $O(N^{3.5})$ операций.

Реконструкция одной маленькой части изображения требует только набор синограмм после декомпозиции, который меньше исходного набора в 2^s. Кроме того, и декомпозиция, и реконструкция не требует наличия всей синограммы в памяти, потому что алгоритм в один момент времени работает только с небольшой частью синограммы, которая нужна для реконструкции искомого участка изображения. Таким образом, FDK-OD может работать без необходимости сохранять даже одну синограмму.

Алгоритм FDK-OD был протестирован на сгенерированном фантоме Shepp-Logan-3D и реальных наборах данных, полученных при помощи томографа MARS. При оценке производительность FDK-OD сравнивалась с производительностью обычного алгоритма FDK для реконструкции объектов с характерным размером от 256 до 2500 пикс. Были получены ускорения операции восстановления в 15–25 раз. Экспериментально полученная зависимость ускорения от размера образца подтверждает теоретически предсказанную корневую зависимость.

Был проведен анализ качества изображения при реконструкции с помощью алгоритмов FDK и FDK-OD. При этом исследовались профили изображения вдоль линии, проходящей через разнородные участки объекта. Тесты показали, что алгоритм FDK-OD сглаживает зашумленные участки, сохраняя четкие границы. Кроме того, было проведено сравнение качества реконструкции при помощи кривой MTF, которое показало, что пространственное разрешение мелких деталей практически не ухудшается при использовании быстрого метода.

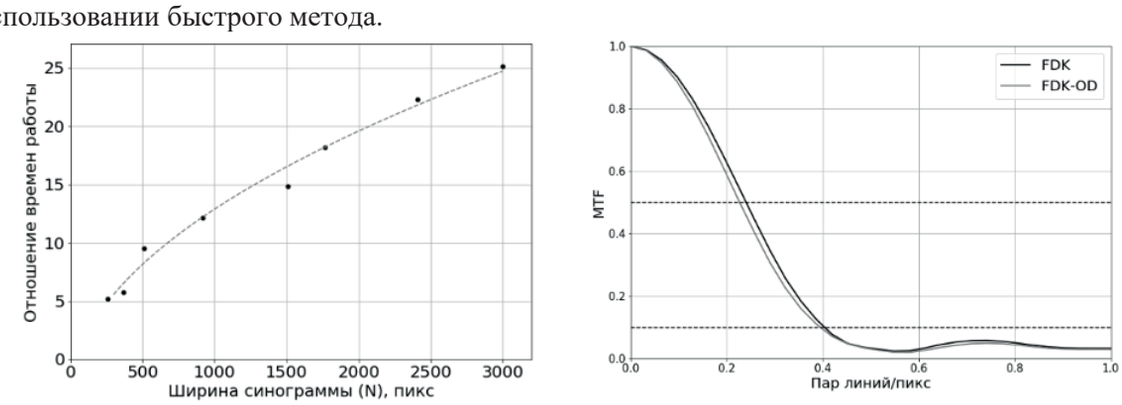


Рис. 1. Измеренная зависимость ускорения FDK-OD по сравнению с FDK от ширины синограммы N (а), сравнение кривых MTF, полученных для сечений, реконструированных с помощью FDK и FDK-OD (б)

Литература

1. *Feldkamp L.A., Davis L.C., Kress J.W.* Practical cone-beam algorithm // J. Opt. Soc. Am. A. 1984. V. 1. P. 612–619
2. *Turbell. H.* Cone-Beam Reconstruction Using Filtered Backprojection.. Linköping: Linköping University Electronic Press, 2001. 177 p.
3. *Xiao S., Bresler Y., Munson D.C.* Fast feldkamp algorithm for cone-beam computed tomography // Труды конференции ICIP-2003 «2003 International Conference on Image Processing». 2003. P. 819-822.
4. *Basu S., Bresler Y.* $O(N^2 \log_2 N)$ Filtered Backprojection Reconstruction Algorithm for Tomography // IEEE Trans. Image Process. 2000. V. 9. P. 1760–1773

UDC 519.651

Zipper family of algorithms for numerically conformal mapping and welding

Mohammad S. Alkousa

Moscow Institute of Physics and Technology (state university)

Conformal maps have many applications in physics, engineering and mathematics. It is well known, by Riemann mapping theorem, that every simply connected domain, which is not the whole plane, can be mapped conformally onto the unit disc. In general the exact conformal mappings are unknown except for some special regions, so that a computer must be used to find the map numerically. There are several numerical methods for numerically computing conformal mapping. In the early 1980s an algorithm called "Zipper" was discovered independently by R. Künhnau and D. E. Marshall, for the numerical computation of conformal maps from simply connected domain onto the unit disk, this algorithm can be viewed as an approximate solution to a conformal welding problem. Zipper family of algorithms are built on the idea that a slit in the upper half plane can be removed, using a simple combination of elementary functions. For any region in the complex plane, its boundary curve can be cut into small pieces by a large number of data points $z_0, z_1, ..., z_n$ in this boundary, and by an iterated use of such a slit-removing function, where each piece of the boundary curve is seen as a slit in the upper half-plane, and with some suitable starting and finishing mappings, the boundary curve can be mapped on the real axis, while the region itself is conformally mapped on the upper half-plane. The elementary functions that are used in the algorithm can all easily be inverted, and so the algorithms result is very efficient and accurate approximate conformal mappings between the upper half-plane and a simple region. Marshall introduced, in zipper family, three different algorithms: the slit algorithm, where the slits are assumed to be straight lines, the zipper algorithm, where they are assumed to be circular arcs through three of the boundary points, and finally, the geodesic algorithm, where the slits are assumed to be circular arcs, orthogonal to the real axis. The convergence of geodesic zipper algorithm was proved, in 2007, by D. Marshall and S. Rohde [1], but the convergence of other two variants of algorithm, slit and zipper, is an open problem for this time.

These algorithms will be described in detail, questions and suggestions which are connected with this algorithm will be presented.

References

1. *Marshall, Donald E., Rohde Steffen.* Convergence of a variant of the zipper algorithm for conformal mapping // SIAM J. Numer. Anal. 2007. 45, N 6. P. 2577–2609.
2. *Marshall, Donald E.* Lens chains and the geodesic algorithm for conformal mapping, preprint.
3. *Marshall, Donald E.* Conformal welding for finitely connected regions. Comput. Methods Funct. Theory. 2011. 11. N 2. P. 655–669.
4. *Tom Kennedy,* A Fast Algorithm for Simulating the Chordal Schramm-Loewner Evolution. arXiv: math/0508002v2 [math.PR], 24 Apr 2007.
5. *Tom Kennedy,* Numerical Computations for the Schramm-Loewner Evolution // J. Stat. Phys., 137. 2009. P. 839–856.
6. *Anders Anderson.* Using a zipper algorithm to find a conformal map for a channel with smooth boundary. Published by the American Institute of Physics.

УДК 519.6, 629.734.7

Моделирование осесимметричного обтекания купола парашютной системы с упругим звеном

Н.А. Егоров*, *Ю.Д. Шевелёв

Институт автоматизации проектирования РАН

Настоящий доклад посвящен продолжению исследования математической модели обтекания парашютной системы с упругим звеном, начатому в работе [1]. Согласно предварительным оценкам, введение в состав парашютной системы упругого звена может снизить суммарную массу средств обеспечения мягкой посадки. Разработка подобных систем требует выполнения сравнительного анализа большого количества вариантов с привлечением методов математического моделирования. В частности, для расчета аэродинамических характеристик купола целесообразно использовать математическую модель потенциального течения идеальной несжимаемой среды [2]. В таком случае система уравнений аэрогазодинамики сводится к уравнению для потенциала скорости, совпадающему с уравнением Лапласа.

Большинство численных методов решения задачи обтекания идеальной средой относится к методам граничных элементов. В общем случае для воспроизведения нестационарной картины течения вокруг купола использовались дискретно-вихревые рамки, с помощью которых формировались поверхность купола и поверхность вихревого следа, сходящего с кромки купола.

Поскольку предлагаемая методика ориентируется на решение проектных задач, то актуальным является обеспечение проведения расчетов на персональных компьютерах умеренной производительности, без обращения к сложным многопроцессорным комплексам. Для этого предлагается перейти от трехмерной модели течения к осесимметричной. В монографии [3] отмечается, что такой подход оказывается оправданным применительно к целому ряду практических случаев анализа парашютных систем.

В настоящем докладе предлагается рассмотреть вихревую модель обтекания купола с использованием осесимметричных аналогов вихревых рамок. Это незначительно усложняет осесимметричную дискретно вихревую схему по сравнению с исходным вариантом, приведенным, например, в работах [2] и [3]. В то же время обеспечивается возможность единообразного расчета как осесимметричных, так и пространственных режимов с сопоставлением при необходимости значений промежуточных величин.

Численные параметры математической модели выбраны следующие: $m_{\text{п}} = 0{,}2$ кг, $m_{\text{г}} = 19$ кг, жесткость упругого звена $c = 5{,}1$ Н/м, $F_{\text{п}} = 2{,}3$ м^2, скорость груза и парашюта в начальный момент времени $V_{\text{г}} = V_{\text{п}} = 19$ м/с, первоначальная длина упругого звена $\Delta l = 1{,}9$ м. Эти параметры соответствуют модели, собранной для исследования динамики парашютной системы в реальных условиях – при сбросах на полигоне. Предполагается, что купол является непроницаемой полусферой. Уравнения движения купола и груза интегрировались по схеме Эйлера, при этом аэродинамическое сопротивление груза предполагается пренебрежимо малым по сравнению с сопротивлением купола. На рис. 1 показаны зависимости от времени для коэффициента сопротивления купола $C_{\text{п}}$ и скорости его движения. Характерной площадью считается площадь основания полусферы. Видно, что $C_{\text{п}}$ в процессе колебаний меняется в достаточно широких пределах, отличаясь от значения $C_{\text{п}} \approx 1{,}45$, полученного при расчете в однородном установившемся потоке.

На рис. 2 показаны зависимости от времени для скоростей груза, определенных при постоянном (и переменном) коэффициенте сопротивления купола. Учет отрывного нестационарного обтекания купола приводит к тому, что скорость движения груза при переменном значении $C_{\text{п}}$ увеличивается по сравнению с упрощенной моделью $C_{\text{п}} = \text{const}$.

В дальнейшем описанная математическая модель может быть усовершенствована за счет учета проницаемости материала, а также учета нелинейности зависимости напряжения от деформации упругого звена.

Полученные результаты могут использоваться для качественных оценок работы упругого звена в процессе формирования облика перспективных посадочных устройств различного назначения.

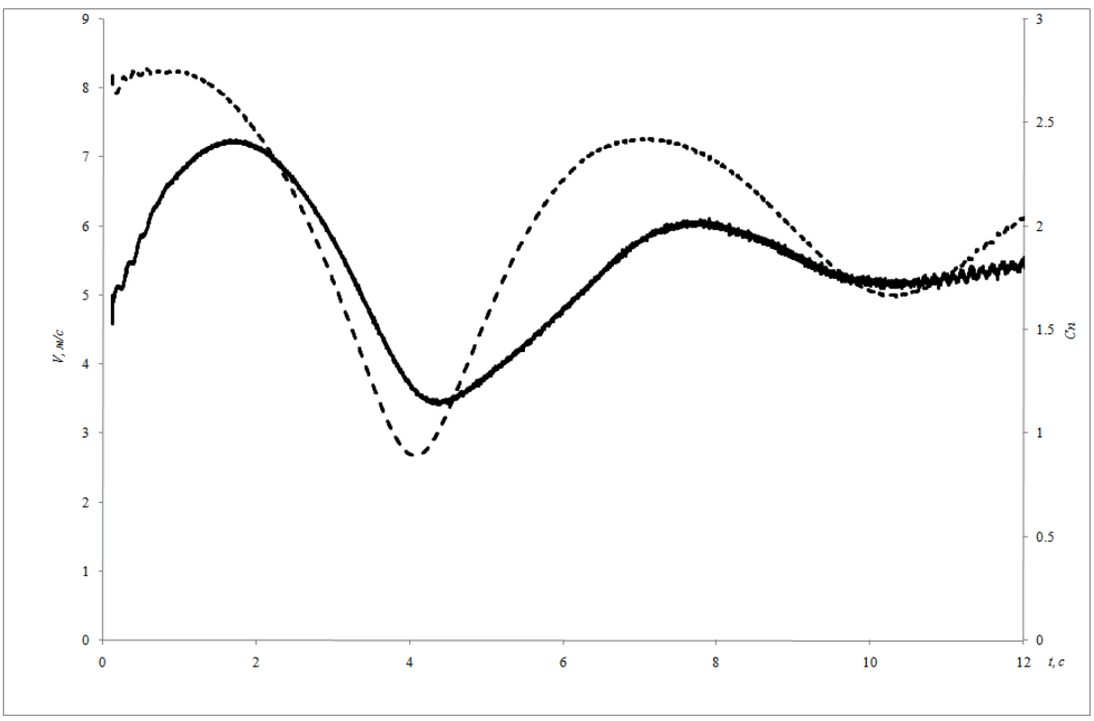


Рис. 1. Зависимость скорости купола (пунктир) и коэффициента сопротивления купола (сплошная линия) от времени

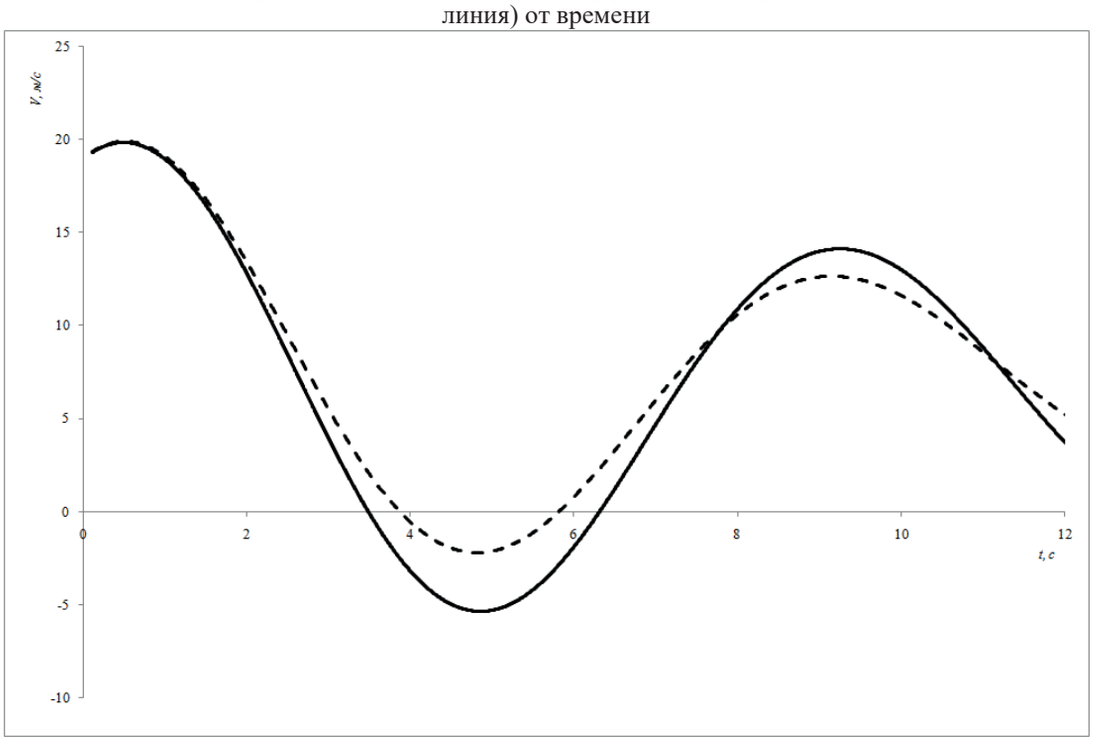


Рис. 2. Зависимость скорости груза при постоянном (пунктир) и меняющемся по времени (сплошная линия) коэффициенте сопротивления купола

Литература

1. *Журин С.В.* Парашютно-реактивная система посадки с упругим звеном // Вестник Московского авиационного института. 2016. Т. 23, № 1. С. 107–114.
2. *Аубакиров Т.О., Белоцерковский С.М., Желанников А.И., Ништ М.И.* Нелинейная теория крыла и ее приложения. Алматы: Гылым, 1997. 448 с.
3. *Рысев О.В. [и др.]*. Парашютные системы. М.: Наука. Физматлит, 1996. 288 с.

УДК 519.63

Численное моделирование волновых процессов в горном массиве с помощью разрывного метода Галёркина в двумерной постановке

И.К. Коптелов

Московский физико-технический институт (государственный университет)

В работе рассматривается воздействие железнодорожного состава при движении по тоннелю на окружающий горный массив. Тоннель испытывает нагрузки от колес состава, а также от давления перемещающихся воздушных масс. Актуальность анализа происходящих волновых процессов определяется возможностью провоцирования схода оползней и снежных лавин при распространении волн в скальных породах.

Автором проводятся серии численных экспериментов с различными начальными данными, определяющими геометрию задачи и физико-механические свойства среды. Поведение горного массива рассматривается в приближении линейной теории упругости. Исследованы различные модели поведения снежного покрова.

В качестве численного метода был выбран разрывный метод Галёркина [1, 2]. Для интегрирования по времени использовались методы Рунге–Кутты (4-ого порядка) и Эйлера (1-го порядка). Расчеты проводились на неструктурированных треугольных сетках.

Результатами исследования являются рекомендации относительно скорости движения железнодорожного состава в зависимости от крутизны склона, толщины снежного покрова и состава горного массива, а также описание процесса схода лавины при данных условиях.

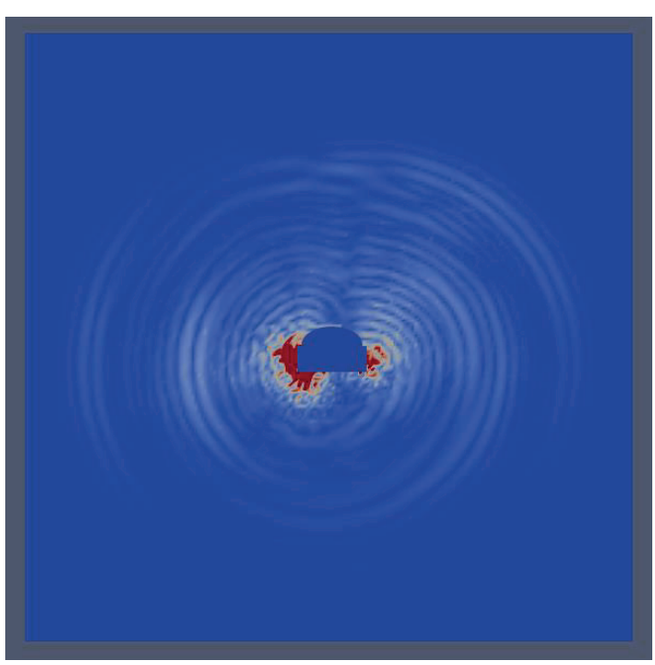


Рис. 1. Представлен пример волновой картины. Отчетливо видна последовательность волновых фронтов, генерируемая точечными источниками, имитирующими периодическое давление колесной пары на рельсы

Литература

1. *Käser M., Dumbser M.*. «An Arbitrary High Order Discontinuous Galerkin Method for Elastic Waves on Unstructured Meshes II: The Three-Dimensional Isotropic Case» Geophys. J. Int., 2000. N 142. P. 855–877.
2. *Миряха В.А., Санников А.В., Петров И.Б.* Численное моделирование динамических процессов в твердых деформируемых телах разрывным методом Галеркина // Матем. моделирование, 27:3, 2015 96–108; Math. Models Comput. Simul., 7:5 (2015), P. 446–455.

УДК 519.632

Решение дифференциальных уравнений эллиптического типа на сложных областях при помощи Quantized Tensor Train Decomposition

Л.Б. Маркеева

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Данная работа рассматривает проблему решения уравнения Дирихле – эллиптического уравнения второго порядка на области со сложной формой. Цель работы – предоставить метод решения, который будет сходиться к решению быстрее и потреблять меньше памяти, чем классическая *h*-версия метода конечных элементов (h-FEM).

В работе Зорина с соавторами [1] показано, что четырехугольные сетки уменьшают ошибку аппроксимации и количество элементов в изометрическом анализе. Поэтому в нашей работе мы разбили рабочую область на набор смежных четырехугольников. На каждом четырехугольнике проводится поиск решения, и потом они “сшиваются” вместе. В предыдущих исследованиях [2] показано, что h-FEM сходится со скоростью 1/2 от количества степеней свободы. В случае наличия сингулярности метод сходится еще медленнее. В [2] также было показано, что если представить матрицу коэффициентов FEM в формате Quantized Tensor Train (QTT), то решение будет сходиться экспоненциально в зависимости от числа степеней свободы. QTT обеспечивает многоранговую аппроксимацию матриц, подробное описание содержится в [3]. В работе [4] продемонстрированы хорошие скоростные характеристики QTT при решении систем линейных уравнений (AMEN solver).

QTT представление матрицы не единственно. Минимально возможные ранги для данного разложения называются TT-рангами. Эти ранги зависят от порядка элементов и измерений в исходной матрице. В результате экспериментов было установлено, что в некоторых случаях матрица коэффициентов FEM в QTT-формате имеет экспоненциальный рост рангов.

На рис. 1 можно увидеть треугольник, разбитый на три четырёхугольника. В случае сшивки решения между первым и вторым четырехугольниками, а также между вторым и третьим TT-ранги не превосходят 9 для всех $d = 2...9$, где 4^d – количество узлов сетки в каждом четырехугольнике. Но в случае попытки сшить решение между первым и третьим четырехугольниками мы получаем экспоненциальный рост рангов аппроксимации от d и теряем преимущество QTT-представления как малорангового.

Основные результаты работы:

- предложено использовать z-перестановку матрицы, чтобы обойти проблему экспоненциального роста TT-рангов в QTT;
- предложена новая операция в QTT-формате, которая позволяет формировать матрицы в z-перестановке, если данную матрицу можно представить в виде последовательности сумм и кронекеровых произведений над блочными матрицами;
- предложен метод формирования матриц коэффициентов FEM в QTT-формате "на лету” вместо упаковки в QTT-формат уже готовой матрицы коэффициентов.

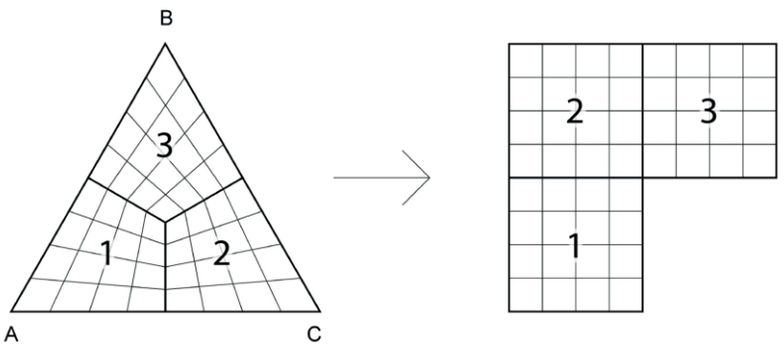


Рис. 1. Модельный пример декомпозиции задачи со сложной областью в задачу на нескольких квадратах

Литература

1. *Bommes D., L´evy B˙ Pietroni N., Puppo E., Silva C., Tarini M., Zorin D.* Quad-Mesh Generation and Processing: A Survey //Computer Graphics Forum. 2013. V. 32. P. 51–76.
2. *Kazeev V., Schwab Ch.* Quantized tensor-structured finite elements for second-order elliptic PDEs in two dimensions // ETHZ¨urich. 2015.
3. *Oseledets I.* Tensor-train decomposition // SIAM Journal on Scientific Computing. 2011. V. 3. P. 2295–2317.
4. *Chertkov A, Oseledets I, Rakhuba M.* Robust discretization in quantized tensor train format for elliptic problems in two dimensions // arXiv preprint arXiv:1612.01166. 2016.

УДК 537.635

Теоретические основы и моделирование многомерных потоковых пропагаторов

К.Л. Клименок[1,2], А.Ю. Демьянов[2]

[1]Московский физико-технический институт (государственный университет)
[2]Московский научный центр «Шлюмберже»

Движение флюида в пористой среде представляет интерес для различных областей науки, таких как керновые исследования, изучение процессов катализа и дистилляции и т.д. Основным экспериментальным методом получения данных о транспорте является ЯМР-релаксометрия [1]. Одной из наиболее отработанных техник ЯМР-исследований является расчет распределения смещений (пропагатора) для случаев стационарного потока флюида [2].

Экспериментальные результаты в этой области представлены достаточно широко для различных типов горных пород и различных режимов течения, но они ограничиваются одномерным представлением движения вдоль градиента давления, прикладываемого к исследуемому образцу [3–5].

Целью работы являлось обобщение концепции потокового пропагатора на случай двух- и трехмерных исследований. Авторами было показано теоретически, что в рамках приближения бесконечных времен релаксации результаты ЯМР-методики в точности совпадают с транспортом пассивной примеси в образце. Также в работе предложены методики численного моделирования каждого из описанных подходов для цифровой модели пористой среды с однофазным и многофазным насыщением. Рассчитаны и построены двухмерные пропагаторы для реальных образцов породы по обеим методикам и получено хорошее совпадение результатов.

Литература

1. *Slichter C.P.* Principles of Magnetic Resonance. 3rd ed. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1990. V. 1.
2. *Rassi E.M., Codd S.L., Seymour J.D.* Nuclear magnetic resonance characterization of the stationary dynamics of partially saturated media during steady-state infiltration flow // New J. Phys. 2011. V. 13, N 1. P. 15007.
3. *Scheven U.M., Seland J.G., Cory D.G.* NMR propagator measurements on flow through a random pack of porous glass beads and how they are affected by dispersion, relaxation, and internal field inhomogeneities // Phys. Rev. E - Stat. Nonlinear, Soft Matter Phys. 2004. V. 69. N 2. P. 21201.
4. *Bijeljic B. et al.* Predictions of non-Fickian solute transport in different classes of porous media using direct simulation on pore-scale images // Phys. Rev. E - Stat. Nonlinear, Soft Matter Phys. 2013. V. 87, N 1. P. 1–9.
5. *Guillon V.* [*et al.*]. Superdispersion in homogeneous unsaturated porous media using NMR propagators // Phys. Rev. E - Stat. Nonlinear, Soft Matter Phys. 2013. V. 87, N 4. P. 1–10.

УДК 519.6, 623.52

Численное моделирование волновых процессов при горении модульных метательных зарядов в матерчатых картузах

М.Ю. Немцев, И.В. Семенов

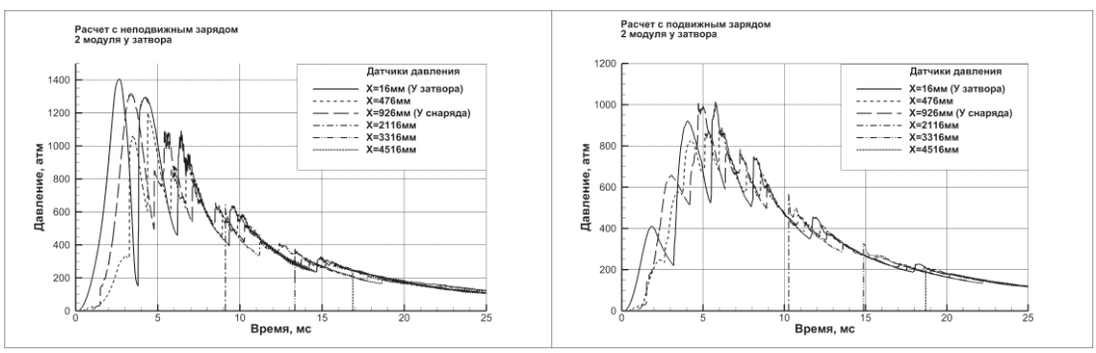
Институт автоматизации проектирования РАН

Использование модульных метательных зарядов является одним из направлений развития современного артиллерийского вооружения. Модульные метательные заряды обеспечивают возможность автоматизации процессов формирования заряда и досылки его в камору орудия. Однако широкое применение модульных метательных зарядов связано с необходимостью решения целого ряда как конструктивных и технологических, так и фундаментальных проблем организации внутрибаллистического процесса. Так, в процессе горения модульного метательного заряда может развиваться волновой процесс, приводящий к значительным колебаниям давления внутри баллистической установки [1, 2]. Математическое моделирование позволяет значительно расширить понимание механизмов и особенностей возникновения и развития волнового процесса при использовании модульных метательных зарядов. Для моделирования внутрибаллистического процесса с учётом сложной компоновки заряда разработаны математические модели, вычислительные алгоритмы и программный комплекс, позволяющие проводить моделирование в двумерной осесимметричной постановке в рамках механики многофазных реагирующих сред с использованием современных многопроцессорных вычислительных комплексов. Газопороховая смесь рассматривается как двухфазная, многокомпонентная, двухскоростная гетерогенная среда [3, 4]. Межфазное взаимодействие включает учёт горения пороховых элементов по многостадийному степенному закону, обмен импульсом между фазами, а также теплообмен не воспламенившихся пороховых элементов с газом, реализованный на основе приближенного аналитического подхода [5]. Связь термодинамических параметров состояния газовой фазы описывается уравнением типа Дюпре с коволюмом. Снаряд описывается подвижным контуром с использованием оригинального метода свободной границы. Конвективные потоки в газовой фазе рассчитываются модифицированным методом Русанова.

Проведены исследования динамики волнового процесса при горении модульных метательных зарядов с различным количеством модулей в матерчатых картузах. Модуль состоял из основного заряда с нелинейным законом горения и воспламенителя ДРП. Исследовалось влияние длины заряда, его положения в каморе орудия и положения источника воспламенения на интенсивность волнового процесса. Для исследования влияния движения заряда на волновой процесс провели расчеты с зарядом из двух

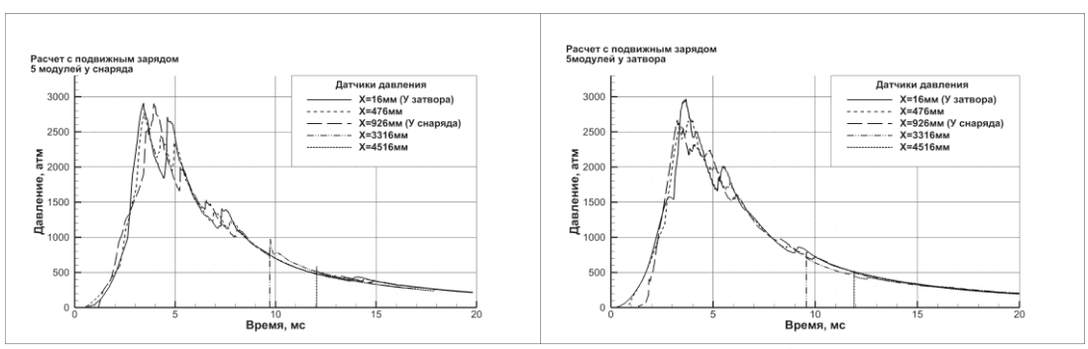
модулей. В первом расчете заряд перемещался в стволе под действием пороховых газов, во втором расчете был зафиксирован в положении у затвора, при этом учитывали силу трения между зарядом и пороховыми газами. На рис. 1 представлены зависимости давления от времени в нескольких положениях внутри орудия. Хорошо видно, что для подвижного заряда амплитуда волнового процесса существенно ниже, чем для неподвижного. Локализация процесса горения в узкой области у затвора для неподвижного заряда приводит к более быстрому выгоранию заряда и более быстрому росту давления по сравнению с подвижным зарядом. В результате торможения пороховых газов о неподвижный снаряд возникает отошедшая волна, которая для подвижного заряда имеет меньшую амплитуду и более пологий фронт, чем для неподвижного.

На рис. 2 представлены результаты моделирования для заряда из пяти модулей. Обнаружено, что для пяти модулей более интенсивный волновой процесс при воспламенении заряда с первого от затвора модуля наблюдается при расположении заряда у снаряда, чем при расположении его у затвора. В расчете учитывали раздельное воспламенение модулей. Расположение источника воспламенения также существенно влияет на интенсивность волнового процесса. При расположении источника воспламенения со стороны открытого конца заряда достигается максимальная интенсивность волнового процесса, что связано с сохранением локализации заряда и различной степенью его выгорания по длине из-за задержки воспламенения.



а) б)

Рис 1. Динамика давления в трех различных положениях внутри каморы орудия для заряда из двух модулей: а) заряд закреплен у затвора, б) заряд подвижный



а) б)

Рис. 2. Динамика давления пороховых газов в трех положениях внутри каморы орудия при стрельбе зарядом из пяти модулей: а) заряд расположен у снаряда, б) заряд расположен у затвора. Воспламенение с первого от затвора модуля

Литература

1. *Wang Y.W., Guo Y.H., Wang S.C.* The analysis of pressure waves under combining TCM with LCM in bi-modular charge // Proc. 23rd Intern. Symposium on Ballistics. Tarragona, Spain, 2007. P. 401.
2. *Jang J.S., Sung H.G., Roh T.S., Choi D.W.* Numerical study on properties of interior ballistics according to solid propellant position in chamber // Proc. 26th Intern. Symposium on Ballistics. Miami, USA, 2011. P. 721–730.

3. *Семенов И.В., Меньшов И.С., Уткин П.С., Ахмедьянов И.Ф., Пасынков П.А., Попов А.А.* Многомерное численное моделирование связанных задач внутренней и промежуточной баллистики // Известия высших учебных заведений. Физика. 2013. Т. 56, № 6–3. С. 58–60.
4. *Хоменко Ю.П., Ищенко А.Н., Касимов В.З.* Математическое моделирование внутрибаллистических процессов в ствольных системах. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999. 256 с.
5. *Nusca M.J., Controy P.J*. Multiphase CFD Simulations of Solid Propellant Combustion in Gun Systems // Proc. of DoD High Performance Computing Modernization Program 2001 Users Group Conference, Biloxi, MS, 2001.

Секция динамики и управления движением космических аппаратов

УДК 629.78

Анализ возможностей различных схем ориентации для КА технологического назначения

А.С. Горожанкина, А.С. Филиппов

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва

Для успешной реализации гравитационно-чувствительных технологических процессов нужно предъявлять серьёзные требования к ориентации космического аппарата (КА). Эффективная орбитальная стабилизация положения КА относительно Солнца позволит получать требуемую электрическую мощность с панелей солнечных батарей (ПСБ). Таким образом, важной обозначена задача выбора схемы ориентации с учётом требований для успешной реализации гравитационно-чувствительных процессов.

В работе рассматривается несколько основных применяемых схем ориентации. Наиболее распространённой является схема ориентации, предполагающая использование устройств активно-пассивной ориентации (УАПО) и ЖРД МТ для разгрузки кинетического момента УАПО [1]. Такая схема эффективна в плане управления, но при включении ЖРД МТ возникают скачки микроускорений. После выключения ЖРД МТ уровень микроускорений станет допустимым лишь спустя некоторое время. Периодическое включение ЖРД МТ позволяет проводить гравитационно-чувствительные процессы продолжительностью не более 12 часов. Значение тяги ЖРД МТ обычно колеблется от 1 до 10 Н.

В последних разработках технологических КА («Фотон-М» № 4) применялась схема ориентации на основе комплекса управляющих двигателей-маховиков (КУДМ) [2]. В отличие от предыдущей схемы ориентации, КУДМ работает непрерывно, создавая постоянно микроускорения. Преимуществом такой схемы является отсутствие скачков микроускорений, вызванных импульсным режимом работы ЖРД МТ. Однако между включениями ЖРД МТ уровень микроускорений может опускаться до более низких значений, чем при использовании КУДМ. Теоретически роль КУДМ могут выполнять и другие исполнительные органы, работающие непрерывно, например, электрические ракетные двигатели (ЭРД) [3].

В настоящее время широкое применение для решения большого круга задач, в том числе и технологических, находят малые космические аппараты (МКА) [4]. Так в рамках первой пусковой кампании с космодрома Восточный на околоземную орбиту был выведен МКА «АИСТ-2Д» [5]. Для ориентации МКА нельзя применять ЖРД МТ, поскольку их тяга является чрезмерной, а применение КУДМ ограничивается массовыми параметрами двигателей-маховиков. Это делает использование КУДМ в системе ориентации не эффективным. Поэтому необходима разработка перспективных систем ориентации с использованием других исполнительных органов.

В данной работе предлагается построить систему ориентации на основе электротермического микродвигателя (ЭТМД).

Литература

1. *Belousov A.I.* Problems in formation and control of a required microacceleration level at spacecraft design, tests, and operation / A.I. Belousov, A.V. Sedelnikov // Russian Aeronautics. 2014. V. 57, N 2. P. 111–117.

2. *Абрашкин В.И.* [и др.]. Вращательное движение спутника «Фотон-М» № 4 // Космические исследования. 2016. Т. 54, № 4. С. 315–322.
3. *Belousov A.I., Sedelnikov A.I., Potienko K.I.* Study of Effictive Application of Electric Jet Engine as a Mean to Reduce Microacceleration Level // International Rewiev of Aerospace Engineering. 2015. V. 8, N 4. P. 157–160.
4. *Белоусов А.И.* и др. Организация опытно-серийного производства в космосе на современном этапе // Научное обозрение. 2016. № 17. С. 186–194.
5. *Кирилин А.Н.* и др. Опытно-технологический малый космический аппарат «АИСТ-2Д». Самара: СамНЦ РАН, 2017. 324 с.

УДК 629.78

Оптимизация расположения двигателей коррекции для обеспечения разгрузки маховиков

А.С. Охитина[1], Я.В. Маштаков[2], С.С. Ткачев[2]

[1]Московский физико-технический институт (государственный университет)
[2]Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

В настоящей работе рассматривается задача оптимизации компоновки спутника, движущегося по геостационарной орбите. Под действием внешних возмущений, таких как влияние Луны и Солнца, орбита меняет наклонение, что может быть нежелательным в ходе выполнения миссии. Для поддержания орбиты, как правило, используются реактивные двигатели (двигатели коррекции). В общем случае оси тяги двигателей не проходят через центр масс спутника, а значит, кроме изменения орбитального движения, они будут влиять и на угловое движение, то есть будут создавать дополнительные моменты сил, которые должны быть скомпенсированы маховичной системой ориентации. Естественным является использование этих моментов для разгрузки избыточного кинетического момента, накопленного маховиками.

На спутнике установлено восемь двигателей коррекции, по четыре с противоположных сторон спутника (см. рис. 1). Аппарат стабилизирован в инерциальной системе координат (ИСК). Коррекция орбиты происходит в ее узлах с помощью одной из четверки двигателей. В узлах спутник получает необходимое изменение скорости либо в направлении оси Oz, либо в противоположном, и, таким образом, наклонение орбиты остается равным нулю. Задачей, решаемой в настоящей работе, является получение методики подбора направления осей и положения двигателей коррекции, обеспечивающей возможность разгрузки маховиков. Эта задача усложняется несколько факторами. Во-первых, должно быть выполнено условие обеспечения требуемого изменения скорости спутника. Во-вторых, невозможна абсолютно точная установка двигателей, а значит, фактическое их расположение может отличаться, пусть и в известных пределах, от расчетного. В-третьих, допускается выход из строя одного из двигателей коррекции, а система при этом должна сохранить свою работоспособность.

При решении предполагалось, что все двигатели идентичны, а суммарное время работы двигателей для коррекции орбиты равно одному часу. Были найдены необходимые и достаточные условия того, чтобы при заданных ошибках установки двигателей было возможно разгрузить маховики. Также была получена геометрическая интерпретация этих условий, наглядно описывающая требования к расположению векторов моментов сил, создаваемых двигателями коррекции.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ №17-71-20117.

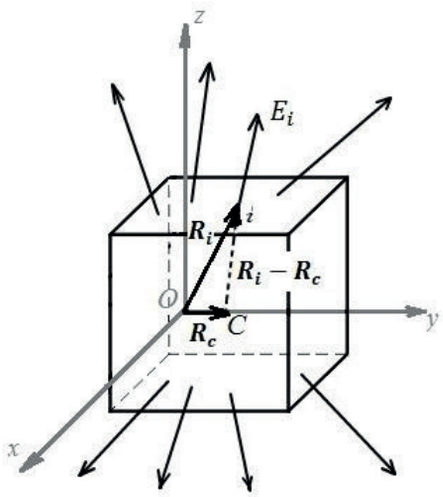


Рис.1. Спутник с восемью фиксированными двигателями

УДК 629.78

Глобальная оптимизация космических траекторий с помощью кривых, заполняющих пространство

Ю.А. Худайбердиев[1], С.П. Трофимов[2]

[1] Московский физико-технический институт (государственный университет)
[2] Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

К настоящему времени разработано немало методов глобальной оптимизации многоэкстремальных функций, в том числе неградиентных (симплексный метод Нелдера–Мида) и стохастических (метод роя частиц), но эти методы обычно сложны в реализации, а их эффективность сильно зависит от параметров конкретной задачи. Для липшицевых функций одной переменной, то есть функций, удовлетворяющих условию

$$\left|f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)\right| \le L\left|x_2-x_1\right|$$

для некоторого $L>0$, показал себя весьма эффективным метод Пиявского, который также называется *методом ломаных*. Его суть заключается в построении так называемых минорант – кусочно-линейных функций, которые «подпирают» снизу заданную функцию в ряде выбранных точек и дают информацию о том, на каком интервале следует продолжать поиск глобального минимума. Пример функции и её миноранты приведён на рис. 1.

У метода Пиявского есть один существенный недостаток: он требует точного знания константы Липшица L. В связи с этим Р.Г. Стронгиным был предложен информационный алгоритм, который опирается на оценку константы Липшица на каждом интервале. Эту константу можно оценить следующим образом:

$$L=\max_{1\le i\le k}\left|\frac{f\left(x_i\right)-f\left(x_{i-1}\right)}{x_i-x_{i-1}}\right|.$$

Максимум берется по оценкам на всех интервалах. Полученная величина может ещё домножаться на параметр надёжности – некоторое число, большее единицы: переоценка константы Липшица даёт лучший результат, нежели недооценка.

Похожие методы оптимизации могут использоваться и для гёльдеровых функций, то есть функций, удовлетворяющих условию

$$\left|f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)\right| \le H\left|x_2-x_1\right|^{\alpha}$$

для некоторых $H>0$ и $0<\alpha<1$. В данном случае миноранты выглядят так, как показано на рис. 2. Оценка константы Гёльдера делается следующим образом:

$$L = \max_{1 \le i \le k} \frac{\left| f(x_i) - f(x_{i-1}) \right|}{\left| x_i - x_{i-1} \right|^{\alpha}}.$$

Важность обобщения методов на случай гёльдеровых функций заключается ещё и в том, что это позволяет распространить аналогичный подход на задачу оптимизации липшицевых функций многих переменных: она сводится к задаче оптимизации гёльдеровой функции одной переменной при помощи кривой, заполняющей пространство. Кривой, заполняющей пространство, или кривой Пеано, называется непрерывное отображение $y(x)$ отрезка $[0,1]$ на стандартный гиперкуб:

$$D = \left\{ y \in R^N : -1/2 \le y_j \le 1/2,\ 1 \le j \le N \right\}$$

Оптимизацию липшицевой функции $F(y)$ с константой Липшица L на любой ограниченной области многомерного пространства можно свести к оптимизации на стандартном гиперкубе, которая, в свою очередь, сводится к оптимизации гёльдеровой функции одной переменной: $f(x) = F(y(x))$ с константой Гёльдера: $H = 2L\sqrt{N+3}$ и показателем Гёльдера: $\alpha = 1/N$, где $y(x)$ – кривая Пеано. Подобный подход позволяет применять все выше перечисленные эффективные методы оптимизации функций скалярного аргумента к задаче нахождения экстремума функции в многомерном пространстве.

Настоящая работа является первой попыткой применения методики глобальной оптимизации с помощью заполняющих пространство кривых к задачам нахождения оптимальных космических траекторий. Рассмотрена проблема перелёта космического аппарата между двумя компланарными (лежащими в одной плоскости) орбитами. Необходимые условия оптимальности, дающиеся принципом максимума, сводят задачу поиска оптимальной по затратам топлива траектории к двухточечной краевой задаче. Вектор невязок зависит от начальных значений сопряжённых переменных. Задача минимизации его нормы в соответствующем четырёхмерном пространстве решается сведением к задаче нахождения глобального минимума функции одной переменной. Проведено сравнение точности и вычислительной эффективности такой методики со стандартными методами решения краевых задач.

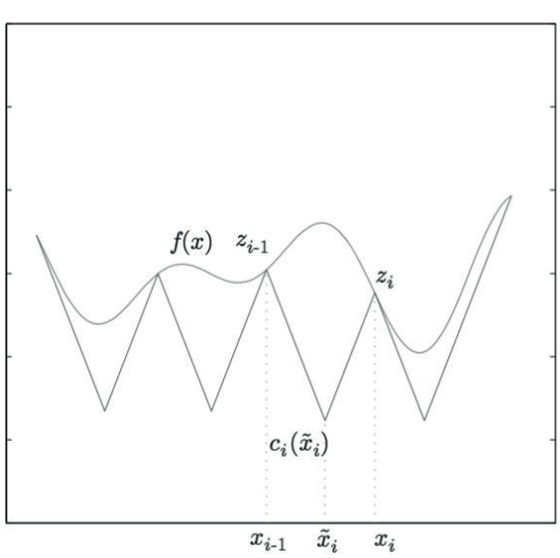


Рис. 1. Липшицева функция и её миноранта [1]

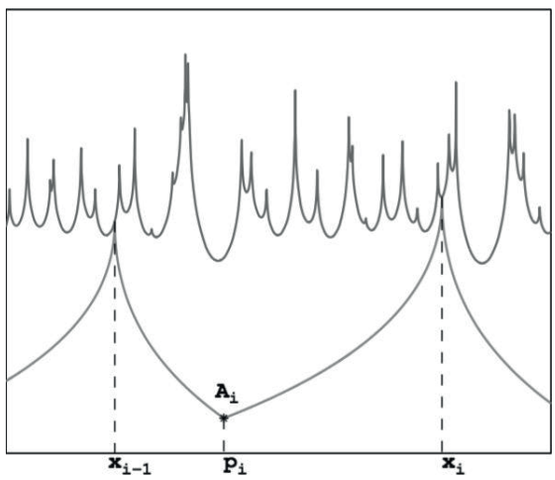


Рис. 2. Гёльдерова функция и её миноранта [1]

Исследование выполнено при поддержке гранта РНФ 17-71-10242.

Литература

1. *Yaroslav D. Sergeyev, Roman G. Strongin, Daniela Lera*. Introduction to Global Optimization Exploiting Space-Filling Curves, Springer Briefs in Optimization. Springer Verlag New-York, 2013. 125 p.

УДК 629.78

Децентрализованное управление группой спутников для поддержания тетраэдральной конфигурации с помощью аэродинамической силы

У.В. Монахова[1], Д.С. Иванов[2]

[1]Московский физико-технический институт (государственный университет)
[2]Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

В последнее время для решения ряда фундаментальных и прикладных задач в космосе все большую популярность набирает использование группового полета малых спутников. В групповом полете спутники могут взаимодействовать между собой для достижения общих целей. Основной сложностью реализации группового полета спутников является навигация и управление взаимным относительным движением отдельного аппарата. В настоящее время существует два основных подхода по автономному управлению группой спутников: централизованное и децентрализованное. Централизованное управление подразумевает наличие головного (или «материнского») аппарата в формации, его движение отслеживается остальными «дочерними» спутниками, а при децентрализованном управлении каждый аппарат принимает решение об управлении индивидуально на основе движения ближайших соседей [1].

Настоящая работа посвящена исследованию децентрализованного управления с помощью аэродинамической силы для формирования и поддержания желаемой тетраэдральной конфигурации. Такая конфигурация требуется, в частности, для изучения пространственного распределения параметров магнитосферы Земли на низкой околоземной орбите. В качестве спутников рассматриваются наиболее популярные в классе наноспутников 3U кубсаты. Они имеют подходящий форм-фактор, благодаря которому площадь поперечного сечения спутников относительно набегающего потока в зависимости от ориентации изменяется в три раза. Предполагается, что спутники последовательно запускаются из пускового контейнера. Каждый спутник оснащен активной маховичной системой ориентации, позволяющей обеспечивать требуемое угловое положение. С помощью межспутниковой связи или средств измерения относительного

движения каждый аппарат имеет информацию о векторе состояния всех соседних спутников. В настоящей работе строится такой децентрализованный алгоритм управления относительным движением каждого аппарата, который обеспечивает достижение и отслеживание опорной траектории. Опорная траектория для четырех аппаратов строится таким образом, что два спутника движутся по одной круговой орбите со сдвигом по времени друг относительно друга, а два других движутся по круговой траектории в противофазе в плоскости, перпендикулярной плоскости орбиты, как описано в работе [2]. Благодаря такому опорному движению, аппараты движутся в вершинах тетраэдра, однако вследствие возмущений такое относительное движение разрушается, поэтому возникает задача его поддержания. В работе исследуется возможность построения тетраэдральной конфигурации после запуска спутников в зависимости от начальных условий. Рассматривается влияние возмущений и параметров алгоритма управления на достижение желаемого движения спутников.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 17-01-00449.

Литература

1. *Ivanov D., Monakhova U., Ovchinnikov M.* Proceedings of 68th International Austronautical Congress // Decentralized Control of Swarm of Nanosatellites with Communication Restrictions using Aerodynamic Forces. Adelaide. 2017. P. 8.
2. *Маштаков Я.В.; Шестаков С.А.* Поддержание тетраэдральной конфигурации группы спутников при помощи одноосного управления // препринт ИПМ им. М.В. Келдыша. М., 2016. № 95. 27 с.

УДК 517.977.58, 629.785

Прямые методы оптимизации траекторий перелета с малой тягой

А.А. Целоусова[1], М.Г. Широбоков[2]

[1]Московский физико-технический институт (государственный университет)
[2]Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

Основными методами построения оптимальных траекторий перелета с малой тягой являются так называемые прямые и непрямые методы. Непрямые методы основаны на использовании принципа максимума Понтрягина и сводят задачу построения оптимального управления к решению двухточечной краевой задачи для расширенной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Управление, полученное непрямым методом, удовлетворяет необходимым условиям оптимальности в классе непрерывных ограниченных функций и в типичных задачах оптимизации времени перелета или затрат топлива выражается как функция сопряженных переменных. Недостатком непрямых методов является высокая чувствительность поведения итерационной процедуры решения краевой задачи к начальному приближению.

В прямых методах управление задается конечным числом переменных, поэтому задача оптимального управления сводится к задаче нелинейного программирования. Хорошо известно, что для сходимости возникающих при этом итерационных процедур удается сравнительно легко подобрать начальное приближение. Решение, полученное прямым методом, удовлетворяет необходимым условиям оптимальности в более узком классе функций, однако оно является близким к оптимальному решению в классе непрерывных ограниченных функций. Преимущество прямых методов перед непрямыми методами заключается в возможности их применения к более сложным динамическим системам. Это выражается в том, что при добавлении в модельную задачу новых возмущений в качестве начального приближения в прямом методе можно использовать решение, полученное для более простой модели. Прямые методы активно используются на этапе предварительного анализа траекторий перелета и могут быть использованы в качестве начального приближения краевых задач в непрямых методах.

Существуют различные прямые методы поиска оптимальных траекторий [1–6]. Важным аспектом прямых методов является выбор переменных, описывающих задачу, относительно которых выполняется оптимизация. Этот аспект влияет на свойства сходимости прямого метода и его чувствительность к начальному приближению. Один из наиболее распространенных подходов выбора оптимизационных переменных основан на поиске оптимального управления в виде кусочно-постоянной функции. В этом случае на каждом из участков траектории оптимизируется величина и направление ускорения тяги [3, 5]. Другой подход основан на идее перехода от управления ускорением тяги к импульсному управлению, при этом на каждом из участков траектории можно воспользоваться моделью задачи двух тел, а затем произвести обратный переход от импульсов к ускорению тяги [6]. В некоторых прямых методах искомое оптимальное управление представляется в виде линейной комбинации или рядов из интерполяционных полиномов Эрмита или Лагранжа [1, 2, 4]. В такой постановке задача сводится к оптимизации соответствующих коэффициентов.

Данная работа посвящена проблеме выбора оптимизационных переменных. Для сравнения будут реализованы несколько прямых методов оптимизации на основе метода последовательного квадратичного программирования (sequential quadratic programming, SQP) [7], продемонстрирована их работа при различных начальных данных и проведен сравнительный анализ.

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 17-71-10242).

Литература

1. *Tang S., Conway B. A.* Optimization of low-thrust interplanetary trajectories using collocation and nonlinear programming// Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 1995. V. 18, N 3. P. 599–606.
2. *Hargraves S.R., Paris S.W.* Direct trajectory optimization using nonlinear programming and collocation// Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 1987. V. 10, N 4. P. 338–342.
3. *Kluever C.A., Oleson S.R.* Direct approach for computing near-optimal low-thrust earth-orbit transfers// Journal of Spacecraft and Rockets. 1998. V. 35, N 4. P. 509–516.
4. *Fahroo F., Ross I.M.* Direct trajectory optimization by a Chebyshev pseudospectral method// Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2002. V. 25, N 10. P. 160–166.
5. Spacecraft trajectory optimization/ ed. by Conway B.A. New York: Cambridge University Press, 2010. 298 p.
6. *Sims J., Flanagan S.* Preliminary design of low-thrust interplanetary missions//AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference. Girdwood, Alaska, USA. 1999.
7. *Gill P.E., Murray W., Saunders M.A.* SNOPT: An SQP algorithm for large-scale constrained optimization// SIAM Review. 2005. V. 47, N 1. P. 99–131.

УДК 629.78

Применение прямого метода Ляпунова для обеспечения разворота космического аппарата при наличии ограничений

Я.В. Маштаков, С.С. Ткачев

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

В настоящее время широкое применение получили космические аппараты, в которых основной полезной нагрузкой являются оптические системы: камеры и телескопы. Они используются в различных как прикладных задачах, например в сельском хозяйстве и мониторинге состояния окружающей среды, так и в научных миссиях, например изучение прошлого вселенной и поиск теоретически пригодных для жизни других планетных систем.

Использование таких оптических систем сопряжено с рядом трудностей. Для обеспечения качественных изображений точность обеспечиваемой ориентации и стабилизации должна быть крайне высокой, что предъявляет существенные требования к

используемым в системе ориентации инструментам. Помимо этого, наличие высокочувствительных элементов в камерах накладывает ограничения и на возможную ориентацию аппарата: если направить ось оптического сенсора на слишком яркий объект, например Солнце, это может привести к выходу камеры из строя. Это обстоятельство становится особенно важным при осуществлении переориентации аппарата, когда происходит поворот аппарата на достаточно большой угол. Именно этой задаче и посвящена настоящая работа.

Существует несколько подходов к решению задачи переориентации спутника при наличии ограничений. Одним из них является применение принципа максимума Понтрягина для поиска оптимального по времени разворота, учитывающего ограничения на ориентацию [1]. Однако эта задача является достаточно сложной с вычислительной точки зрения и не всегда может быть решена на борту аппарата. Мы же будем рассматривать подход к построению такого разворота на основе прямого метода Ляпунова, который, с одной стороны, будет обеспечивать асимптотическую устойчивость требуемого положения спутника и, с другой, будет достаточно простым, чтобы использоваться на борту аппарата.

Работа поддержана грантом РНФ №17-71-20117.

Литература

1. *Melton R. G*. Hybrid methods for determining time-optimal, constrained spacecraft reorientation maneuvers //Acta Astronautica. 2014. V. 94, N 1. P. 294–301.

УДК 629.785, 004.032.26

Управление орбитальным движением космических аппаратов с использованием искусственных нейронных сетей

А.В. Сорокин[1], М.Г. Широбоков[2]

[1]Московский физико-технический институт (государственный университет)
[2]Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

В докладе исследуется применение нейронных сетей в задачах орбитальной динамики космического полета.

С одной стороны, интерес к методам машинного обучения в этой области механики обусловлен повышенными требованиями к степени автономности космических аппаратов. В случае потери связи с наземной станцией или нештатной ситуации на борту аппарат должен самостоятельно брать на себя управление и выполнять поставленные перед ним задачи. Автономность особенно важна для аппаратов, движущихся на низких орбитах, так как для них плотность атмосферы является вторым по значимости фактором после гравитации. С использованием методов обучения с учителем нейронные сети могут помочь уточнить модель атмосферы во время движения аппарата [1, 2].

С другой стороны, поиск траекторий, оптимальных с точки зрения времени полета или затрат топлива, представляет собой сложный и ресурсозатратный процесс, так как поведение сходимости традиционных методов оптимизации зависит от «адекватных» начальных приближений. Искусственные нейронные сети помогают частично решать эти проблемы. Например, нейронные сети, оптимизация синаптических связей, в которых выполняется эволюционными алгоритмами, методами обучения с подкреплением способны синтезировать регуляторы для полетов космических аппаратов с малой тягой к Луне [3, 4, 5]. Алгоритмы оптимизации, рассмотренные в этих работах, не требуют начального приближения. Другой пример использования искусственных нейронных сетей – управление формациями спутников в условиях неустойчивой динамики вокруг коллинеарных точек либрации [6]. Отметим и работу [7], в которой управление космическим аппаратом осуществляется посредством автономного искусственного интеллекта.

В докладе будет проведен обзор и сравнительный анализ описанных выше работ и других исследований, в которых искусственные нейронные сети используются для управления орбитальным движением космического аппарата.

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект №14-11-00621).

Литература

1. *Pérez D., Bevilacqua R*. Neural Network based calibration of atmospheric density models // Acta Astronautica. 2015. V. 110. P. 58–76.
2. *Chaparro P., Andrés D.* Adaptive Lyapunov control and artificial neural networks for spacecraft relative maneuvering using atmospheric differential drag // Ph.D. Thesis, Rensselaer Polytechnic Institute. 2013.
3. *Dachwald B.* Low-thrust trajectory optimization and interplanetary mission analysis using evolutionary neurocontrol // Ph.D. Thesis, Bundeswehr University Munich, Munich, Germany. 2004.
4. *Dachwald B*. Optimization of very-low-thrust trajectories using evolutionary neurocontrol // Acta Astronautica. 2005. V. 57 (2). P. 175–185.
5. *Ohndorf A*. Optimization of low-thrust earth-moon transfers using evolutionary neurocontrol // IEEE Congress on Evolutionary Computation, 2009.
6. *Gurfil P*. Adaptive neural control of deep-space formation flying // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2002. V. 26(3). P. 491–501.
7. *Жданов А*. Система стабилизации углового движения космического аппарата на основе нейроноподобной системы автономного адаптивного управления // Космические исследования. 2004. Т. 42 (3). С. 1–15.

УДК 519.688

Моделирование динамики газа в процессе лазерного плавления металлической поверхности с помощью разрывного метода Галёркина на графических ускорителях

Б.А. Корнеев[1], В.Д. Левченко[2]

[1]Московский физико-технический институт (государственный университет),
[2]Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

При исследовании плавления металла сфокусированным пучком энергии [1] рассматривается режим высоких температур, при котором немаловажное влияние на ход процесса может оказывать динамика паров материала и наполняющего окружающее пространство газа. В данной работе рассматривается задача моделирования в трехмерной постановке динамики газа в формулировке нестационарной системы уравнений Навье–Стокса в области с движущейся свободной границей – поверхностью расплавленного слоя жидкости. Для постановки граничных условий на данной поверхности используется модель испарения Knight–Anisimov [2]. В качестве численной схемы используется разрывный метод Галеркина (RKDG-метод), эффективно реализованный с помощью локально-рекурсивных нелокально-асинхронных алгоритмов в виде гетерогенного программного комплекса [3]. Приводятся результаты моделирования (см. рис 1). Результаты оказываются в согласии с известными экспериментальными и расчётными работами [4].

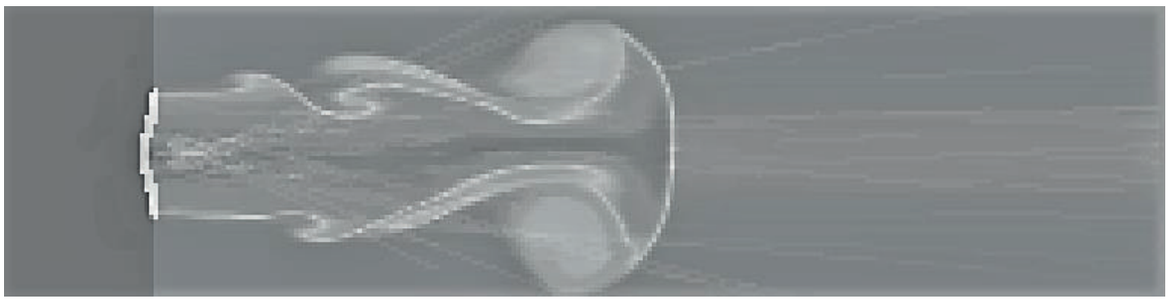


Рис. 1. Визуализация газового потока в поперечном сечении в процессе плавления лазерным пучком металлической пластины. Размеры сетки 256 × 64 × 64 узлов

Литература

1. *King W.E.* [*et al*.]. Laser powder bed fusion additive manufacturing of metals; physics, computational, and materials challenges // Applied Physics Reviews. 2015. V. 2, N 4. P. 041304.
2. *Anisimov S.I.* [*et al*.]. Vaporization of metal absorbing laser radiation // Sov. Phys. JETP. 1968. V. 27, N 1. P. 182–183.
3. *Korneev B.A., Levchenko V.D.* DiamondTorre GPU implementation algorithm of the RKDG solver for fluid dynamics and its using for the numerical simulation of the bubble-shock interaction problem // Procedia Computer Science. 2015. V. 51. P. 1292–1302.
4. *Bidare P.* [*et al*.]. Fluid and particle dynamics in laser powder bed fusion // Acta Materialia. 2017.

УДК 629.78

Исследование алгоритма определения движения космического аппарата с помощью обработки изображения лимба планеты

Ю.К. Наумкина[1], Д.С. Иванов[2]

[1]Московский физико-технический институт (государственный университет)
[2]Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

Для автономной навигации в условиях межпланетного полета космического аппарата или полета в сфере действия удаленных планет Солнечной системы могут использоваться оптические измерения, с помощью которых можно определить угловой размер близлежащих планет и направление на их геометрический центр. Однако для обработки изображения необходимо учитывать форму наблюдаемого объекта, а также принимать во внимание неидеальные условия освещенности видимой части планеты.

В настоящей работе разрабатывается и исследуется алгоритм автономной навигации на основе фильтра Калмана, который обрабатывает измерения, получаемые в результате обработки изображения близлежащих планет. В работе [1] было установлено, что обработка измерений углового размера, которые могут быть получены наряду с направлением на планету с помощью звездного датчика, улучшает точность навигации. В настоящей работе учитываются особенности получения углового размера планеты по изображению, которые заключаются в моделировании формы видимого объекта, принимающего форму лимба вследствие условий освещения Солнцем.

Первый способ решения задачи определения углового размера и направления на центр планеты заключается в дополнении видимого изображения планеты, принимающего форму лимба. Для этого на первом этапе необходимо распознать планету на кадре. Поиск осуществляется путем сравнения наблюдаемых изображений звезд на изображении со звёздным каталогом. Таким образом выявляются тела, информация о которых отсутствует в звездном каталоге. Затем выбирается объект, наиболее похожий на планету по форме (круг, засвеченный круг или лимб) и ожидаемому размеру. Обработка изображения основана на применении метода наименьших квадратов при сравнении полученного изображения и прогнозируемого изображения с учетом особенностей освещения и формы

планеты. В дальнейшем космический аппарат отслеживает направление на планету, поэтому для получения измерений достаточно анализировать лишь часть кадра.

Другой способ решения задачи заключается в использовании изображения в инфракрасном диапазоне. Для этого потребуется дополнительная установка инфракрасного датчика на борт космического аппарата [2]. Изображение в инфракрасном диапазоне не подвержено особенностям, связанным с освещением, однако разрешающая способность таких сенсоров может быть ниже, чем у звездных датчиков.

В настоящей работе проводится исследование точности определения движения космического аппарата с помощью разработанного алгоритма в окрестности планеты, массивного естественного спутника планеты или астероида, форма которого считается известной. В работе рассматриваются параметры звездного и инфракрасного датчиков реальных аналогов. Для проведения исследования создан программный комплекс, позволяющий моделировать изображения с рассматриваемых датчиков при заданном движении аппарата относительно космического тела. Эти изображения подаются на вход предлагаемому алгоритму, в результате чего вычисляется оценка движения космического аппарата. Проводится анализ полученных результатов исследования.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 17-01-00449.

Литература

1. *Наумкина Ю.К., Иванов Д.С.* Определение движения космического аппарата во время межпланетного перелета по измерениям углового размера планет Солнечной системы // Труды 59-й научной конференции МФТИ, 2016.
2. *Жуков Б.С., Жуков С.Б.* Возможности космической навигации по планетному горизонту в видимом и ближнем инфракрасном диапазоне // Сборник трудов четвертой всероссийской научно-технической конференции «Современные проблемы ориентации и навигации космических аппаратов», Таруса, 8–11 сентября 2014. С. 293–310.

УДК 629.783

Включение колебаний гибких элементов в математическую модель движения спутника

А.Б. Нуралиева

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

Спутники с гибкими элементами широко распространены в настоящее время. Колебания гибких частей (солнечных панелей, антенн и т.д.) могут сильно влиять на движение космического аппарата и даже дестабилизировать его. Поэтому необходимо учитывать эти колебания в математической модели движения аппарата. Существуют два способа изучения этих колебаний. Первый – использовать комбинацию обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) и уравнений в частных производных (УЧП). Такой способ дает точные результаты, но сложен для бортовых вычислений. Второй – модальный подход – использовать только ОДУ, а для описания гибких деформаций использовать собственные моды колебаний. Второй способ больше подходит для имеющейся задачи [1].

Собственные моды колебаний определяются моделированием всей конструкции методом конечных элементов. Когда нежесткий элемент вращается, то, если вращение достаточно медленное и его можно считать стационарным, проводится серия вычислений для разных положений гибкого элемента. Но если вращение недостаточно медленное, применяется другой подход: считаются отдельно собственные моды зафиксированного гибкого элемента, которые используются в уравнении движения всей системы. Кроме того, этот подход позволяет сократить объем вычислений, т.к. не нужно считать собственные частоты и формы колебаний модели при каждом угле поворота.

Приведены примеры для разных конструкций гибких частей.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 16-01-00634.

Литература

1. *Нуралиева А.Б., Ткачев С.С.* Математическая модель спутника с гибкой солнечной панелью на управляемом шарнире: препринт / ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. М., 2015. № 61. http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-61.

Секция математического моделирования и вычислительного эксперимента

УДК 621.396.6

О суперкомпьютерном моделировании сенсорных сетей.

И.М. Никольский

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

В настоящее время технологии беспроводных сенсорных сетей (wireless sensor networks, WSN) переживают бурный рост. Они находят применение в области экологического мониторинга окружающей среды, здравоохранения, диагностики неисправностей двигателей, используются при построении «умных» домов.

Сенсорная сеть состоит из небольших устройств («умных сенсоров»), состоящих

1) из микропроцессора,
2) устройства для беспроводного приёма/передачи данных,
3) датчика.

В настоящее время на рынке присутствует большое количество подобных устройств. Благодаря развитию микроэлектроники их стоимость удалось значительно снизить, что и привело к росту популярности WSN.

Усложнение сетей, рост количества сенсоров приводит к необходимости математического моделирования сетей. Существует целый ряд математических моделей WSN [1]. Как правило, они состоят из трех блоков: модель отдельного сенсора, модель маршрутизации и модель интерференции. В данной работе рассматривается модель WSN, описанная Чиассерини и Гаретто в [2]. Эта модель является одной из первых, где учитываются два состояния сенсора – сна и активности.

В работе [2] представлены результаты имитационного моделирования WSN при количестве сенсоров, равном 400. Однако уже сейчас используются сети из тысяч сенсоров, а в будущем ожидается появление сетей ещё больших масштабов, ведь рост количества сенсоров способствует повышению точности получаемых данных, а также увеличению охвата области мониторинга. Таким образом представляется целесообразной разработка суперкомпьютерных технологий моделирования крупномасштабных WSN.

В рамках данной работы реализована параллельная реализация модели Чиассерини–Гаретто. Для распределения нагрузки по вычислительным узлам использовалась декомпозиция области точно так же, как это делается при решении уравнений математической физики на сетках. Вычислительные эксперименты проводились на суперкомпьютере BlueGene/P суперкомпьютерного комплекса МГУ. Показана эффективность параллельных вычислений при моделировании WSN.

Литература

1. *Schmid S., Wattenhofer R.* “Modeling sensor networks” in Algorithms and Protocols for Wireless Sensor Networks, A.Boukerche, Ed., John Wiley & Sons, 2008.
2. *Chiasserini C.-F., Garetto M.* Modeling the Performance of Wireless Sensor Networks , Proc. Infocom, 2004.

УДК 539.3.

Стохастическая математическая модель первой основной задачи плоской теории упругости для анизотропного тела

А.В. Юденков, Л.П. Римская

ФГБОУ ВО «Смоленская ГСХА»

В статье рассматривается стохастическая модель первой основной задачи теории упругости для тел, обладающих плоской анизотропией общего вида.

Краевые задачи ТФКП широко используются для математического моделирования основных задач теории упрости. В работах Г.В. Колосова и Н.И. Мусхелишвили [1], было показано, что в случае упругой деформации изотропного тела компоненты напряжений и смещений выражаются через аналитические компоненты бианалитической функции. Таким образом, решение основных задач теории упругости может быть сведено к исследованию краевых задач для бианалитических функций.

Если тело обладает анизотропий общего вида, то его напряженное состояние можно описать с помощью так называемой функции напряжений $F = F_1(z_1) + F(z_2)$. Функция напряжений имеет более сложную структуру, чем бианалитическая функция [2]. То же можно сказать и о краевых условиях, соответствующих основным задачам анизотропной теории упругости.

Что касается исследования самих краевых задач ТФКП, то существует два основных подхода к их решению.

Первый основывается на использовании граничных свойств интеграла типа Коши и интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Используя первый подход, к настоящему времени удалось исследовать основные задачи теории упругости для изотропных и анизотропных тел. Следует отметить, что применение первого метода возможно при наложении достаточно жестких условий на форму контура и краевые коэффициенты (см., например, [1, 5]).

Второй подход состоит в применении к основным задачам теории упругости методов теории стохастического потенциала. Стохастический подход позволяет применять к решению краевых задач новые численные методы и позволяет существенно ослабить требования, предъявляемые к граничным условиям.

Известно, что решение задачи Дирихле для аналитической (гармонической) функции может быть выражено в терминах броуновского движения. В работе [3] стохастический подход был применен к ряду задач для бианалитических функций, в том числе и к задаче Дирихле. Основные задачи теории упругости для тел с анизотропией общего вида в стохастической постановке к настоящему времени до конца не исследованы.

Для применения к решению первой основной задачи плоской теории упругости для анизотропных тел вводится понятие стохастической функции напряжений:

$$F = M(F_1(Z_1) + F(Z_2)), \tag{1}$$

здесь $M(.)$ – математическое ожидание случайной функции.

Доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Стохастическая функция напряжений (1) удовлетворяет уравнению*

$$A_1A_2\,\mathrm{Re}(F) = 0, \tag{2}$$

здесь A_1 и A_2 – характеристические операторы.

Используя стохастическую функцию напряжений, конформные отображения и свойства сингулярного оператора с ядром Коши, удалось получить следующий основной результат.

Терема 2. Первая основная задача плоской теории упругости для анизотропного тела в стохастической постановке сводится к решению двух стохастических задач Дирихле для Z-аналитических функций. А также к решению детерминированной задачи Гильберта с интегральными ядрами Фредгольма.

Указанные в теореме краевые задачи достаточно хорошо исследованы [4, 5].

Литература

1. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. 707 с.
2. *Лехницкий Г.С.* Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. 416 с.
3. *Максимова Л.А., Юденков А.В.* Теория стохастического потенциала в плоской теории упругости // Вестник Чувашского педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 4(26). С.134–142.
4. *Оксендаль Б.* Стохастические дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 2003. 300с.
5. *Редкозубов С.А., Юденков А.В., Володченков А.М.* Моделирование процесса линейной деформации упругого однородного тела с помощью бианалитических функций // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. №1(48). – Чебоксары, 2006. С. 128–137.

УДК. 531.17

Численный метод в задаче микромеханического гироскопа

К. М. Ву

Рязанский государственный радиотехнический университет

Рассмотрим динамику микромеханического гироскопа с резонатором в виде четырех упругих пластин при линейной постановке задачи и укажем технические условия функционирования и управляемости гироскопом «в малом».

Решение задачи по анализу управляемости «в малом» для линейной задачи динамики гироскопа проведем известными (и рекомендованными) методами качественной теории дифференциальных уравнений [1–3] динамики, в которой для описания вынужденных колебаний чувствительного элемента в случае медленно меняющихся условий функционирования используем следующую систему дифференциальных уравнений для обобщенных координат систем [4]:

$$\begin{aligned} \ddot{x}+\omega^2 x &= -2\gamma\,\dot{x}+\mu\,\dot{y}+A\sin\sigma, \\ \ddot{y}+\omega^2 y &= -2\gamma\,\dot{y}-\mu\,\dot{x}, \end{aligned} \tag{1}$$

где A – амплитуда внешнего воздействия; σ − фаза внешнего воздействия; y – угол поворота рамки относительно основания гироскопа; γ − коэффициент вязкого трения; $\mu = 2\sqrt{b_1 b_2}\,\Omega$, b_1, b_2 − постоянные коэффициенты.

Для понимания дальнейших результатов автора воспользуемся несложными преобразованиями работы [4] и получим систему дифференциальных уравнений, равносильную системе (1), в новых переменных z_1, z_2 :

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega}\frac{d\omega}{dt}+2\gamma\right)z_1+ivz_1+\frac{\mu}{2}z_2-i\breve{A}_0, \\ \frac{dz_2}{dt} &= -\frac{\mu}{2}z_1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega}\frac{d\omega}{dt}+2\gamma\right)z_2+ivz_2. \end{aligned} \tag{2}$$

Или в матричной форме:

$$\frac{dz}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{z}+\mathbf{u}, \tag{3}$$

где обозначения естественны:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\gamma+iv & \frac{\mu}{2} \\ -\frac{\mu}{2} & -\gamma+iv \end{bmatrix}, \mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \mathbf{u} = \begin{bmatrix} -i\breve{A}_0 \\ 0 \end{bmatrix}, -1 \le \mathbf{u} \le 1$$ – классический вектор управления.

Нетрудно видеть, что начало координат является особым решением системы (3) при нулевом векторе управления, и других особых решений система (3) не имеет.

Это означает (ввиду общей теории [3]), что вопрос управляемости «в малом» в полученной линейной задаче анализа динамики механического гироскопа в случае вынужденных колебаний чувствительного элемента сводится к задаче исследования достижимости начала координат при определенном переключении управления в системе (3).

Рассмотрим систему двух линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и с управлением, зависящим от времени:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \nu u, \tag{4}$$

где x – вектор функций с двумя компонентам (координатами) $\xi = \xi(t)$ и $\eta = \eta(t)$, зависящими от времени t, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ – постоянная матрица, $v(t)$ – допустимое скалярное управление, удовлетворяющее условию: в любой момент времени $-1 \le v \le 1$, u – заданный постоянный двумерный вектор, физически описывающий величину максимального управления на объект в заданном направлении.

В работах [2, 3] доказано, что применительно к рассматриваемой задаче, для того чтобы начало координат было достижимо «в малом» для системы (3), необходимо и достаточно, чтобы число $k = u_2 / u_1$ не являлось бы корнем квадратного уравнения

$$bz^2 + (a-d)z - c = 0\,. \tag{5}$$

В рассматриваемом случае управления микромеханическим гироскопом в соответствии с основополагающей работой [4] коэффициенты $a = d$; $k = u_2 / u_1$, поэтому уравнение (5) в данном случае примет вид

$$\mu z^2 + \mu = 0\,. \tag{6}$$

Нетрудно видеть, что $\mu = 0$ при $\Omega = 0$. К тому же, очевидно, если $z = 0$ является корнем уравнения (6), то $\mu = 0$. Имея в виду только что доказанные теоремы, последнее означает, что, *во-первых*, при неподвижном основании (в силу работы [4], когда параметр $\mu = 0$) достижимости «в малом» начала координат для системы (4) не существует; *во-вторых,* при подвижном основании (когда параметр $\mu \neq 0$) гироскоп управляем «в малом».

Рассмотрим осцилляторный вибрационный гироскоп при медленном изменении частоты вынуждающей силы со следующими параметрами (данные взяты из работы [4]): $a = b = 10$ мм и толщиной $h = 1$ мм, плотностью материала $\rho = 2201$ кг/м^3, $\omega = \omega_0 = 60000$ рад/с, $\mu = 25$ рад/с, $\gamma = \hat{A} = 120$ 1/с.

Компьютерное моделирование выполнялось в математическом приложении *Mathcad*.

Закон изменения частоты вынуждающей силы имеет следующий вид: $\omega = \omega_0(0.95 + \sigma_0 t)$. Здесь $\sigma_0 = 2.4 \cdot 10^{-6}\,\text{с}^{-1}$. На рис. 1 приведены амплитудно-частотные характеристики для амплитуды колебаний A по первой обобщенной координате и амплитуды колебаний B по второй обобщенной координате. Штриховой линией на графиках изображены амплитудно-частотные характеристики при стационарном режиме. Выражения для амплитуд колебаний резонатора по двум обобщенным координатам имеют следующие вид:

$$A = \frac{A_0\sqrt{\nu^2 + \gamma^2}}{W};\; B = \frac{A_0\mu}{2W},$$

где $W^2 = (\nu^2 + \mu\nu + \gamma^2 + \mu^2/4)(\nu^2 - \mu\nu + \gamma^2 + \mu^2/4)$.

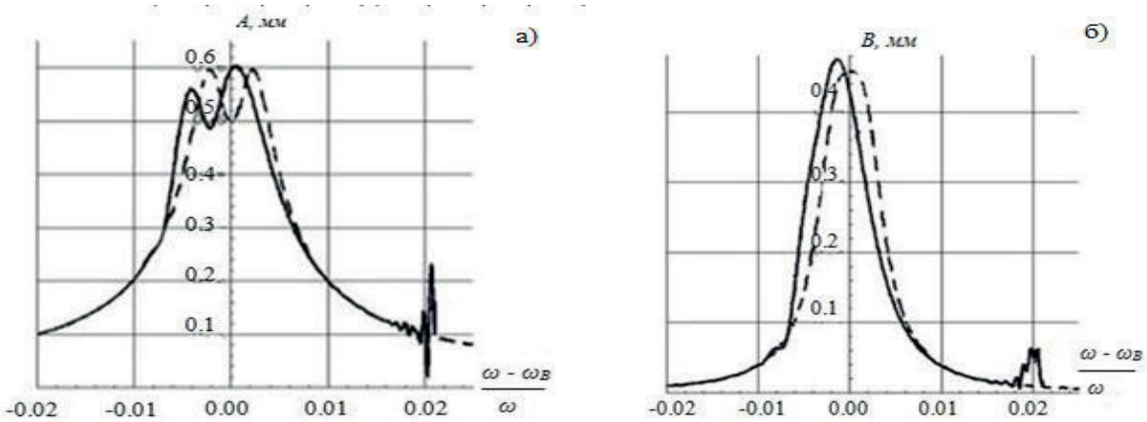


Рис. 1. АЧХ колебаний по первой (а) и второй (б) обобщенной координате [штриховая линия - стационарный режим, сплошная линия – в случае $\omega=\omega_0 (0.95 + \sigma_0 t)$]

Литература

1. *Миронов В.В., Митрохин Ю.С.* Задача об управляемости систем оптимального регулирования и методы ее решения // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2000. № 7. С. 57–64.
2. *Ешуков Л.Н., Карасев И.П.* О достижимости в малом для систем оптимального регулирования второго порядка // Тематический сборник статей по дифференциальным уравнениям. − Рязань: РРТИ, 1968.
3. *Миронов В.В., Северцев Н.А.* Методы анализа устойчивости систем и управляемости движением // ВЦ РАН.− М.: Изд-во РУДН, 2002. 165 с.
4. *Сбытова Е.С.* Динамика микромеханического гироскопа с резонатором в виде упругих пластин: диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. – М.: Национальный исследовательский университет Московский энергетический институт, 2014.

УДК 51-76

Математическое моделирование процессов новообразований

И.С. Французова

Санкт-Петербургский государственный университет

Математическая модель опухоли представлена задачей Коши для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. В модели присутствуют опухолевые, здоровые и некротические клетки, которые взаимодействуют друг с другом в функциональном пространстве при условии наличия питания. Модель опухоли представляет собой краевую задачу для дифференциальных уравнений в частных производных. Предполагается, что рост опухолевой ткани обусловлен диффузией опухолевых клеток в функциональное пространство и вытеснением ими здоровых клеток. Таким образом, злокачественная опухоль является ядром мертвых клеток, вокруг которого образуется слой непрерывно делящихся раковых клеток. Она автономна по отношению к окружающим её тканям. Делящиеся клетки вторгаются в них, разрушая здоровую структуру и образуя новый очаг роста. Поэтому в модели заложено три типа клеток, которые взаимодействуют друг с другом: нормальные, делящиеся и некротические [1]. Скорость роста опухолевой ткани определяется чрезмерным внутренним давлением, которое возникает в результате образования новых клеток, и описывается на основе второго закона Ньютона. Стационарные точки исследуются на устойчивость. Система решается численными методами [1 – 3].

В диффузионных моделях злокачественных образований учитываются различные типы клеток, участвующих в биохимических реакциях, происходящих в некоторой области пространства. С учетом диффузионного распределения веществ математические модели сводятся к краевым задачам для систем дифференциальных уравнений в частных производных. В работе используются аналогичные подходы, с учетом особенностей функционирования рассматриваемых органов и систем организма.

Механизм роста опухоли

Раковые клетки не распознаются иммунной системой, так они являются для организма «своими». По мере формирования опухоли внутренние клетки начинают умирать из-за недостатка поступающего питания, а клетки на внешней границе опухоли размножаются, вытесняя здоровые клетки соседних органов и тканей. Таким образом, формируется опухоль, раковые клетки которой не выводятся из организма, погибая и образуя солидное ядро [1–3].

В силу своей автономии по отношению к окружающим тканям опухолевые клетки вторгаются в их пространство, разрушают и создают новую точку роста. Таким образом, в модели учитывается три типа взаимодействующих клеток: нормальные (здоровые), опухолевые (делящиеся) и некротические [1].

В модели предполагается, что если в организме отсутствуют раковые клетки, тогда нормальные клетки по завершению жизненного цикла умирают и выводятся организмом. На их месте в организме появляются новые клетки. Пусть u_1 – линейная плотность делящихся клеток, u_2 – нормальных клеток, u_3 – некротических клеток. Тогда динамику трех типов клеток можно описать с помощью следующей системы уравнений:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \mu_1 u_1 - \mu_1 u_1 u_3 - \gamma_1 u_1 u_3 , \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \mu_2 u_2 (1-u_2) - \mu_2 u_2 u_3 - \gamma_2 u_1 u_2 - \gamma_3 u_2 u_3 , \tag{2}$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} = (\gamma_2 u_1 u_2 + \gamma_1 u_1 u_3 + \gamma_3 u_2 u_3)(1-u_3) . \tag{3}$$

Граничные условия:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} = 0 , \quad i = 1,2,3 . \tag{4}$$

В первом уравнении $\mu_1 u_1$ – собственная скорость роста делящихся клеток, $\gamma_1 u_1 u_3$ – ингибирующая скорость роста длящихся клеток некротическими, $\mu_1 u_1 u_3$ – скорость замещения некротическими клетками делящихся. Во втором уравнении: $\mu_2 u_2 (1-u_2)$ — скорость изменения численности нормальных клеток, $\gamma_2 u_1 u_2$ — скорость ингибирования делящимися клетками здоровых, $\gamma_3 u_2 u_3$ — скорость ингибирования нормальных клеток погибшими, $\mu_2 u_2 u_3$ — скорость вытеснения нормальных клеток погибшими [1]. В третьем уравнении: $(1-u_3)\gamma_2 u_1 u_2 + \gamma_1 u_1 u_3 + \gamma_3 u_2 u_3$ — пропорционально скорости роста мертвых клеток, где $1-u_3$ показывает, что заполнение функционального пространства, занимаемого погибшими клетками, происходит тем медленнее, чем больше его наполнение. $\mu_1, \mu_2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — положительные константы, которые характеризуют скорости реакций [1].

Численное решение

Численное решение уравнений (1) проводилось с использованием сетчатых методов. Выборка уравнений (1) осуществлялась по пространственным и временным переменным [5, 6]. Пример вариации функциий $u_1(t,x)$, $u_2(t,x)$, $u_3(t,x)$ и $S(t,x)$ вдоль координатной оси в момент времени $t = 200$ приведен на рис. 1.

Основные выводы

Разработаны математические модели опухоли, которые описывают рост вдоль линии с образованием мертвой ткани в области ее возникновения. В моделях также рассматриваются различные ингибирующие вещества, реакция иммунной системы с учетом основных биохимических реакций и кинетики ферментативных реакций. Представлены математические модели опухоли, которые описывают ее рост вдоль линии с

образованием некротической ткани в ее области происхождения. Скорость движения опухолей пропорциональна удельным темпам роста делящихся клеток и их подвижности. Распространение опухоли вдоль линии можно рассматривать как распространение мертвой ткани с постоянной скоростью. В приведенных моделях по описанию процессов развития опухолей ставится задача Коши для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений [4–6].

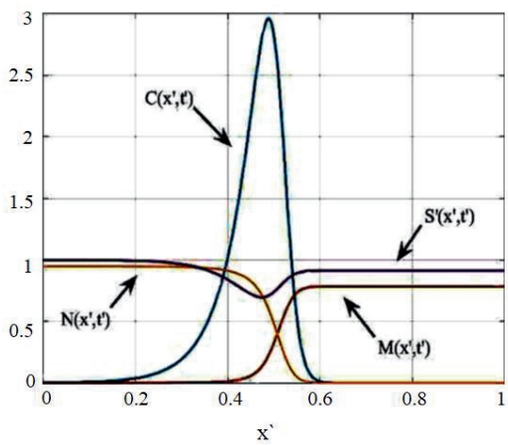


Рис. 1. Вариации функциий $u_1(t,x)$, $u_2(t,x)$, $u_3(t,x)$ и $S(t,x)$ вдоль координатной оси в момент времени $t = 200$

Литература

1. *Zhukova I.V., Kolpak E.P., Balykina Y.E.* Mathematical model of growing tumor // Applied Mathematical Sciences. 2014. V. 8, N 30. P. 1455–1466.
2. *Kolpak E.P., Kabrits S.A., Bubalo V.* The follicle function and thyroid gland cancer // Biology and Medicine. 2015. V. 7. P. 1–6.
3. *Balykina Y.E., Kolpak E.P., Kotina E.D.* Mathematical model of thyroid function // Middle East Journal of Scientific Research. 2014. V. 19. P. 429–433.
4. *Kolpak E.P., Frantsuzova, I.S., Kabrits S.A.* A mathematical model of thyroid tumor// Global Journal of Pure and Applied Mathematics. 2016. V. 12, N 1. P. 55–66.
5. *Kolpak E.P., Stolbovaya M.V., Frantsuzova I.S.* Mathematical models of single population // Global Journal of Pure and Applied Mathematics.2016. V. 12, N 4. P. 3609–3619.
6. *Французова И.С., Кувшинова К.В., Колпак Е.П., Сеньков Р.Э.* Статистические показатели заболеваемости жителей России: новообразования // Молодой ученый. 2016. № 8. С. 449–457.

УДК 519.63

Расчет осаждения струи капельной влаги моментным методом

Р.И. Романенко

Московский физико-технический институт (государственный университет)
Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН

Задачи расчета переноса воздушным потоком капельной влаги уже давно рассматриваются, например, при математическом моделировании зарождения и формирования осадков в облачных структурах. Подобные задачи возникают также при попытках описания распространения аэрозолей, распыляемых наземным или воздушным источником. Еще одно интересное явление, к которому имеет отношение данная работа, – это возникновение и интенсивный перенос капельной влаги в нижних бьефах крупных гидроэлектростанций при работе их водосбросных сооружений.

На рис. 1 представлена фотография ГЭС «Капанда» (Ангола) при пропуске расхода паводка реки Кванза через поверхностные и донные водосбросы.

На фотографии видно водно-воздушное облако, образующееся и распространяющееся в нижнем бьефе. Укажем, что интенсивность осадков, выпадающих, в частности, и на площадках гидроузла, при этом достигает величины 10 000 мм/сут и более, что может затруднить проведение строительных работ и негативно сказаться на функционировании оборудования. Особенность показанного на рис. 1 явления состоит в том, что оно не поддается физическому моделированию, и поэтому основным способом его изучения является численное моделирование. В течение ряда лет в Вычислительном центре им. А.А. Дородницына РАН разрабатывалась численная модель трехмерной вынужденной конвекции и переноса капельной влаги в районе водосбросов крупного гидроузла [1]. Модель использовалась

– для прогнозных оценок интенсивности выпадения капельной влаги в нижнем бьефе ГЭС «Капанда» при различных режимах работы ее водосбросов;

– для научного обеспечения комплекса мероприятий по обеспечению безопасной эксплуатации водосбросов Саяно-Шушенской ГЭС (р. Енисей) в зимний аварийный период 2009–2010 гг.;

– для прогнозирования последствий длительной работы водосбросов Богучанской ГЭС (р. Ангара) в период начального наполнения ее водохранилища.

Один из блоков данной модели предназначен для расчета распространения капельной влаги в потоке воздуха. Это явление достаточно аккуратно описывается уравнением переноса и диффузии для функции распределения капель по их размерам. При этом, однако, необходимо рассматривать четырехмерное пространство (три пространственные координаты + переменная, определяющая радиусы капель), что на практике требует длительных расчетов с использованием высокопроизводительных вычислительных комплексов. Для сокращения расчетного времени в модели ВЦ РАН была использована приближенная методика, основанная на применении метода моментов, причем в низшем двухмоментном приближении. Верификация такой упрощенной модели осуществлялась путем сравнения результатов расчетов с данными экспериментальных измерений интенсивности выпадения осадков.

Настоящий доклад посвящен верификации моментного метода расчета уравнения переноса и диффузии капельной влаги путем сравнения результатов расчетов моментных уравнений с «точным» расчетом уравнения переноса и диффузии. При этом рассматривается одна из простейших задач в двумерной пространственной постановке. Результаты расчетов моментных уравнений сравнивались с «точным» расчетом уравнения переноса и диффузии.

Выводы:

– Сформулирован метод моментов и способ замыкания цепочки моментных уравнений как в общем случае, так и в частных случаях двух- и трехмоментного приближений.

– Для разных значений параметра гравитационной коагуляции – основного параметра подобия задачи – проведены расчеты «точного» уравнения переноса и диффузии, а также уравнений двух- и трехмоментного приближений. Сопоставлены результаты расчетов этих задач.

Рис. 1. Вид на нижний бьеф ГЭС «Капанда» при интенсивном сбросе воды из верхнего бьефа

Литература

1. *Беликов В.В, Котеров В.Н.* Проблемы брызгового обледенения и образования техногенных осадков в нижних бьефах высоконапорных гидроузлов. Теория и практика математического моделирования природных и техногенных процессов. – М.: Янус-К, 2016.
2. Интернет-ресурс Википедия: https://ru.wikipedia.org/wiki/Верификация.
3. *Кубентаева М.Б.* Исследование осаждения капельной струи в воздушном потоке: дипломная квалификационная работа на соискание степени бакалавра: – М.: МФТИ–ВЦ ФИЦ ИУ РАН, 2016.
4. *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. Т.1,2 – М.: Наука, 1987.
5. *Качурин Л.Г.* Физические основы воздействия на атмосферные процессы. – Л.: Гидрометеоиздат, 1973.

УДК 539.3

Математическое моделирование колебательных процессов газонефтепроводов с учетом вязкоупругого основания грунта

Б.А. Худаяров, О.Р. Кучаров

Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства

Проблема обеспечения высокопрочными трубами для строительства и эксплуатации мощностей по добыче и транспортировке нефти и газа является одной из первоочередных государственных задач. Решение ее начинается с формулировки требований к качеству труб, связанных с повышением надежности и долговечности трубопроводного транспорта.

Одним из путей решения этой проблемы является использование в нефтегазовой отрасли труб из различных материалов, в том числе полимерсодержащих [1].

Как известно, магистральные, технологические и промысловые газонефтепроводы представляют собой сложные инженерные конструкции, проложенные во многих регионах России и ряда республик СНГ и эксплуатируемые в разнообразнейших природно-климатических условиях. Следует отметить, что подземная, наземная и подводные прокладки трубопроводов, подводные переходы, различные электрохимзащиты от коррозии, особенности технологии строительства и конструктивных решений создают широкий спектр параметров прочности, устойчивости различных участков трубопроводов. В связи с тем, что в настоящее время при строительстве магистральных трубопроводов широко применяются трубы, изготовленные из различных естественных и искусственных (композитных) материалов при сложных климатических условиях, от проектировщика и расчетчика требуется максимально правильно оценить свойства материала трубы и реального грунта [2].

Целью данный работы является разработка математической модели, численного алгоритма и компьютерной программы для решения задачи о нелинейных колебаниях вязкоупругих тонкостенных трубопроводов большого диаметра на базе теории оболочек [3, 4].

Рассмотрим поведение тонкой круговой вязкоупругой цилиндрической оболочки, внутри которой с постоянной скоростью движется идеальная жидкость. Скорость жидкости равна U и имеет направление, совпадающее с направлением оси Ox.

Уравнения движения оболочки, полученные в рамках классических теории оболочек [3, 4], с учетом наличия вязкоупругого основания, имеют вид

$$(1-R^*)\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1-\mu}{2R^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{1+\mu}{2R}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial\theta}+L_1(w)\right\}-\rho\frac{1-\mu^2}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0,$$

$$\left(1-R^*\right)\left\{\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{1+\mu}{2R}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial\theta}+L_2\left(w\right)\right\}-\rho\frac{1-\mu^2}{E}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=0, \qquad (1)$$

$$D(1-R^*)\nabla^4 w+L_3^*(u,v,w)+k_1(1-\Gamma^*)w+\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=q,$$

где D – цилиндрическая жесткость трубы, μ – коэффициент Пуассона материала трубы, E – модуль упругости материала трубы, ρ – его плотность; k_1 – коэффициент основания Винклера, R − радиус кривизны срединной поверхности; h – толщина стенки трубы; R^* – интегральный оператор вида: $R^*\varphi(t)=\int_0^t R(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau$; $R(t-\tau)$ – ядро релаксации; операторы $L_1(w)$, $L_2(w)$, $L_3^*\left(u,v,w\right)$ будут такими:

$$L_1(w)=-\frac{\mu}{R}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{1+\mu}{2R^2}\frac{\partial w}{\partial\theta}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial\theta}+\frac{1-\mu}{2R^2}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2},$$

$$L_2(w)=-\frac{1}{R^2}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial\theta}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}+\frac{1+\mu}{2R}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial\theta}+\frac{1-\mu}{2R}\frac{\partial w}{\partial\theta}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

$$L_3^*(u,v,w)=\left(1-R^*\right)\frac{Eh}{1-\mu^2}\left\{-\frac{\mu}{R}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{R^2}\frac{\partial v}{\partial\theta}+\frac{w}{R^2}-\frac{\mu}{2R}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2-\right.$$

$$-\left.\frac{1}{R^3}\left(\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)^2\right\}-\frac{Eh}{1-\mu^2}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial w}{\partial x}\left(1-R^*\right)\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\mu}{R}\frac{\partial v}{\partial\theta}-\frac{\mu w}{R}\right]+\right.$$

$$+\left.\frac{1-\mu}{2R}\frac{\partial w}{\partial\theta}\left(1-R^*\right)\left(\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\}-$$

$$-\frac{Eh}{1-\mu^2}\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial\theta}\left(1-R^*\right)\left[\mu\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial\theta}-\frac{w}{R}\right]+\right.$$

$$+\left.\frac{(1-\mu)}{2}\frac{\partial w}{\partial x}\left(1-R^*\right)\left(\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\},$$

q – давление жидкости на стенку трубопровода:

$$q = -\varphi^*_{\alpha m}\rho\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + U^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right),$$

где $\varphi^*_{\alpha m}\rho$ – присоединенная масса жидкости; m – число волн, образующихся по окружности, α – волновое число или постоянная распространения фазы.

Полученные нелинейные ИДУ в частных производных с помощью метода Бубнова – Галеркина при рассмотренных граничных условиях сводятся к решению систем нелинейных обыкновенных ИДУ с постоянными или переменными коэффициентами относительно функции времени. Для исследования колебательных процессов трубопровода предлагается численный алгоритм решения нелинейных интегродифференциальных уравнений с сингулярными ядрами. На основе разработанного вычислительного алгоритма создан комплекс прикладных программ. Численно исследовано влияние сингулярности в ядрах наследственности и основания Винклера на колебания конструкций, обладающих вязкоупругими свойствами.

Литература

1. *Якубовская С.В., Сильницкая Н.Ю., Иванова Е.Ю.* Явление ползучести и релаксации армированных полиэтиленовых трубопроводов // Фундаментальные исследования. 2015. № 2. С. 1676–1680.
2. *Гаджиев В.Дж., Расулова С.Р., Джафаров Х.Г.* Свободное колебание прямоугольного участка неоднородного трубопровода, лежащего на двухконстантном основании // Нефтегазовое дело. 2015. Т. 13, № 4. С. 137–141.
3. *Вольмир А.С.* Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи гидроупругости. – М.: Наука. 1979. 320 с.
4. *Григолюк Э.И., Мамай В.И.* Нелинейное деформирование тонкостенных конструкций. –М.: Наука. Физматлит, 1997. 272 с.

УДК 532.546

Модель двухфазной фильтрации с релаксацией потока на примере задачи вытеснения нефти водой

А.А. Люпа

Московский физико-технический институт (государственный университет)

В работе предложена модификация классической модели для описания изотермической двухфазной двухкомпонентной фильтрации слабосжимаемых жидкостей в пористых средах, полученная введением релаксации потока в уравнениях неразрывности.

Классическая модель двухфазной изотермической фильтрации может быть представлена в виде [1, 2]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(\phi\rho_i S_i)}{\partial t} + \operatorname{div}\overrightarrow{Q_i} = q_i, & \text{(1a)} \\ \overrightarrow{u_i} = -\dfrac{Kk_i}{\mu_i}(\operatorname{grad} P_i - \rho_i g \operatorname{grad} z), & \text{(1b)} \\ P_n = P_w + P_c(S_w), \quad S_w + S_n = 1, & \text{(1c)} \\ k_i = k_i(\overline{S}_w), \quad \rho_i = \rho_i(P_i), \quad i = w, n. & \text{(1d)} \end{cases}$$

Здесь $\overrightarrow{Q_i}$ – поток фазы, P_i – давление фазы, P_c – капиллярное давление на границе раздела фаз, S_i – насыщенность фазы, ρ_i – плотность фазы, q_i – источниковые члены, K – абсолютная проницаемость среды, φ – пористость среды, $\overrightarrow{u_i}$ – скорость фильтрации фазы, μ_i – вязкость фазы, k_i – относительная фазовая проницаемость, g – ускорение свободного падения, (1a) – уравнения неразрывности, (1b) – закон Дарси, (1c) – связь давлений фаз, насыщенностей фаз, (1d) – уравнения относительных фазовых проницаемостей, уравнения состояния.

В модели (1) $\overrightarrow{Q_i} = \overrightarrow{Q_i^D} = \rho_i\overrightarrow{u_i}$ – поток Дарси. Для получения качественных результатов при моделировании фильтрации сложных сред необходимо учитывать эффекты релаксации [3]. Вводим релаксацию потока:

$$\overrightarrow{Q_i} = \overrightarrow{Q_i^D} - \tau\,\frac{\partial\overrightarrow{Q_i}}{\partial t}, \quad \tau \text{ – параметр релаксации.} \qquad (2)$$

Уравнение (1a) продифференцируем по времени и умножим на τ. Получим уравнения неразрывности с учетом релаксации потока:

$$\tau\frac{\partial^2(\phi\rho_i S_i)}{\partial t^2} + \frac{\partial(\phi\rho_i S_i)}{\partial t} + \operatorname{div}\overrightarrow{Q^D}_i = q_i + \tau\frac{\partial q_i}{\partial t}. \qquad (3)$$

При τ = 0 (3) совпадает с (1a). На данном этапе сделаны дополнительные предположения, позволяющие значительно упростить уравнения системы (1). В частности, пористость среды положена постоянной, уравнения состояния – линейными, капиллярные эффекты не учтены. Относительные фазовые проницаемости определяются в работе в соответствии с приближением Стоуна [1]. Для тестирования предложенной модели выбрана задача вытеснения нефти водой при заданных значениях давления на границах резервуара. Начальные условия: S_w = 0.35, давление линейно убывает от $3.3 \cdot 10^7$ Па к $3.0 \cdot 10^7$ Па слева направо. Граничные условия: $S_w|_{\text{left}} = 0.7$, $S_w|_{\text{right}} = 0.35$, $P|_{\text{left}} = 3.3 \cdot 10^7$ Па, $P|_{\text{right}} = 3.0 \cdot 10^7$ Па. На рис. 1, 2 представлены полученные в расчетах распределения насыщенностей и давления на момент времени t = 100 с. Рисунки демонстрируют процесс вытеснения нефти водой.

Для проведения расчетов по классической и модифицированной моделям использованы IMPES-метод [4] с шагом $\Delta t = 10^{-4}$ с и явные двухслойная и трехслойная схемы. Написана программа на языке Python. Параметр τ, при котором расчеты были бы

устойчивы, подбирался эмпирически в зависимости от размера шага по времени. Результаты сравнения расчетов разными методами представлены в табл. 1. Относительная ошибка между величинами A и B вычисляется следующим образом:

$$\varepsilon = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{A_i - B_i}{A_i}\right)^2} \; / \, N.$$

Например, при $\Delta x = 0.05$ м явная двухслойная схема становится неустойчивой при $\Delta t \geq 5 \cdot 10^{-5}$ с, а явная трехслойная при $\Delta t = 0.001$ с, $\tau = 0.025$ с позволяет проводить расчеты с приемлемой точки зрения моделирования погрешностью $\varepsilon_p = 0.0005$, $\varepsilon_s = 0.03$ на момент времени $t = 10$ с. Анализ применения явной трехслойной разностной схемы показал, что при использовании модифицированной модели допускается снижение ограничения на шаг по времени, по крайней мере, на порядок в сравнении с классической моделью. При этом погрешность вычислений остается приемлемой.

Таблица 1.

Погрешность явной схемы относительно эталонного решения при различных τ при $t = 10$ с

Δt,с	τ,с	ε_p	ε_s
10^{-5}	$5 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-6}$	0.003
10^{-4}	$2 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-7}$	0.001
$5 \cdot 10^{-4}$	0.01	10^{-4}	0.003
0.001	0.025	$5 \cdot 10^{-4}$	0.03

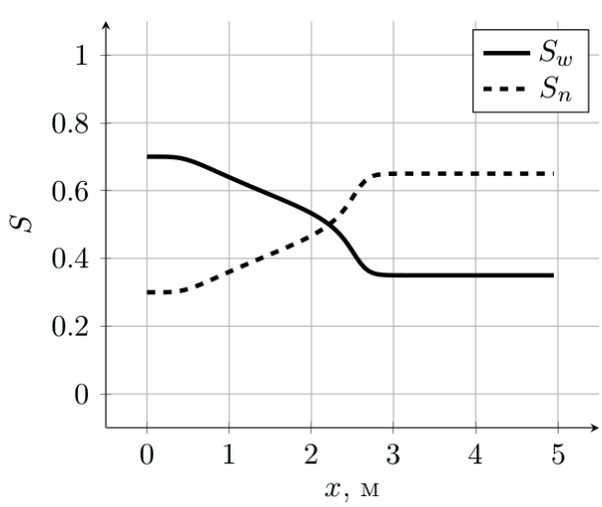


Рис. 1. Насыщенности воды и нефти, $t = 100$ с

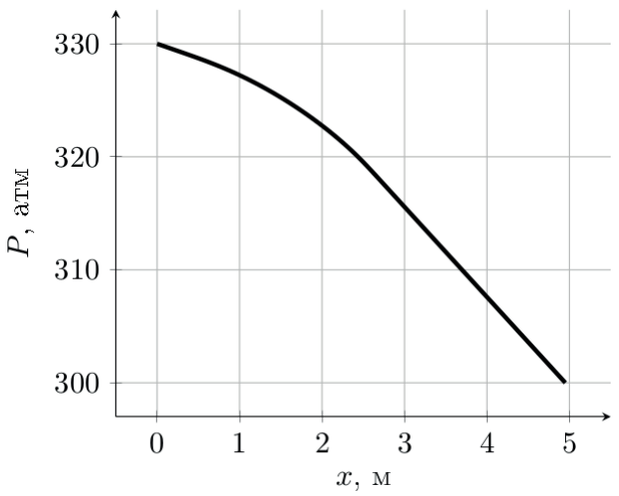


Рис. 2. Давление, $t = 100$ с

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 16-29-15095-офи_м, 15-01-03654-а и 15-01-03445-а.

Литература

1. *Азиз Х., Сеттари Э.* Математическое моделирование пластовых систем. – М.: Недра. 1982. 407 с.
2. *Басниев К.С., Кочина И.Н., Максимов В.М*. Подземная гидромеханика. – М.: Недра. 1993. 416 с.
3. *Хасанов М.М., Булгакова Г.Т*. Нелинейные и неравновесные эффекты в реологически сложных средах. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2003. 288 с.
4. *Peaceman D.* Fundamentals of numerical reservoir simulation. Amsterdam – Oxford – New York: Elsevier. 1977. 176 p.

УДК 519.217.2

Что есть вектор PageRank для Интернета?

С.В. Ким

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

Рассмотрено поведение вектора PageRank на разных моделях web-графов с разными степенями кластеризации, эмпирическим путем обнаружен степенной закон компонент вектора PageRank.

Рассмотрим следующие модели web-графов: Боллобаша–Риордана, Бакли–Остгуса (обобщенный случай Боллобаша–Риордана) и Холма–Кима. Важно понять, что каждая модель задает взвешенный ориентированный web-граф, в котором вес ребра – вероятность перехода по этому ребру. По такому графу можно построить стохастическую матрицу. Собственный вектор, отвечающий максимальному собственному значению матрицы, и есть PageRank.

Эмпирическим путем на разных моделях веб-графов, в большей мере на модели Холма–Кима, был обнаружен некий степенной закон распределения компонент вектора PageRank (Рис. 1): $v_k \sim k^{g(a)}$. Замечено, что после того как параметр a начинает превосходить 100, функция $g(a)$ становится практически нечувствительной к a (рис. 2).

Есть логичное обоснование этого закона: предположим, матрица имеет вид, как на рис. 3, и для каждого сайта имеет место точный (не вероятностный) степенной закон распределения выходящих степеней вершин, имеющий одинаковый вид для всех сайтов. Это интуитивно понятное, но очень сильное предположение, чтобы считать это обоснование строгим доказательством. Однако оно позволяет сказать, что для выписанной матрицы существует единственный PageRank, более того, этот вектор должен совпадать с одной из строчек матрицы. Это и означает выполнение степенного закона.

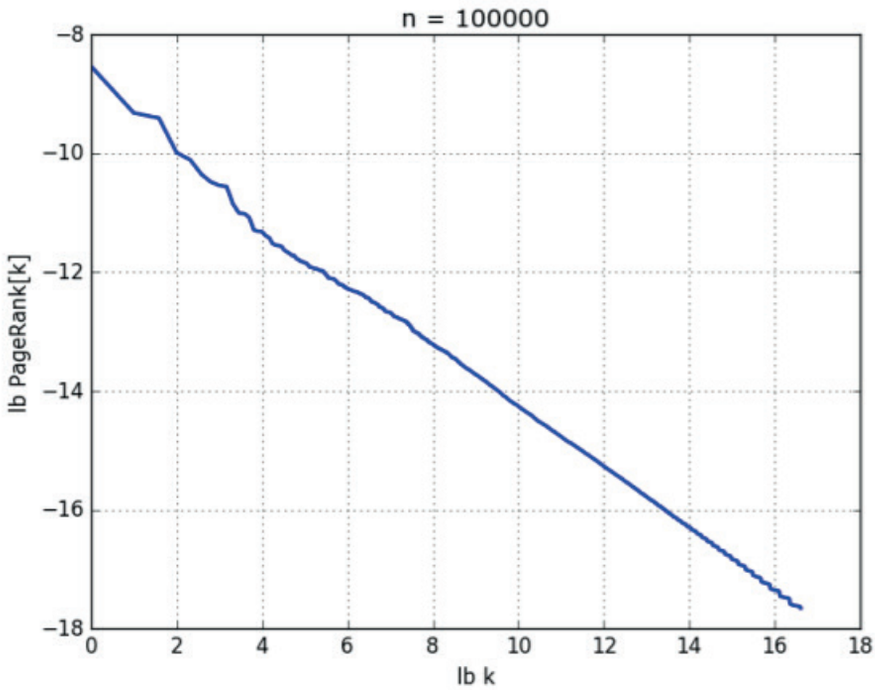


Рис. 1. Степенной закон

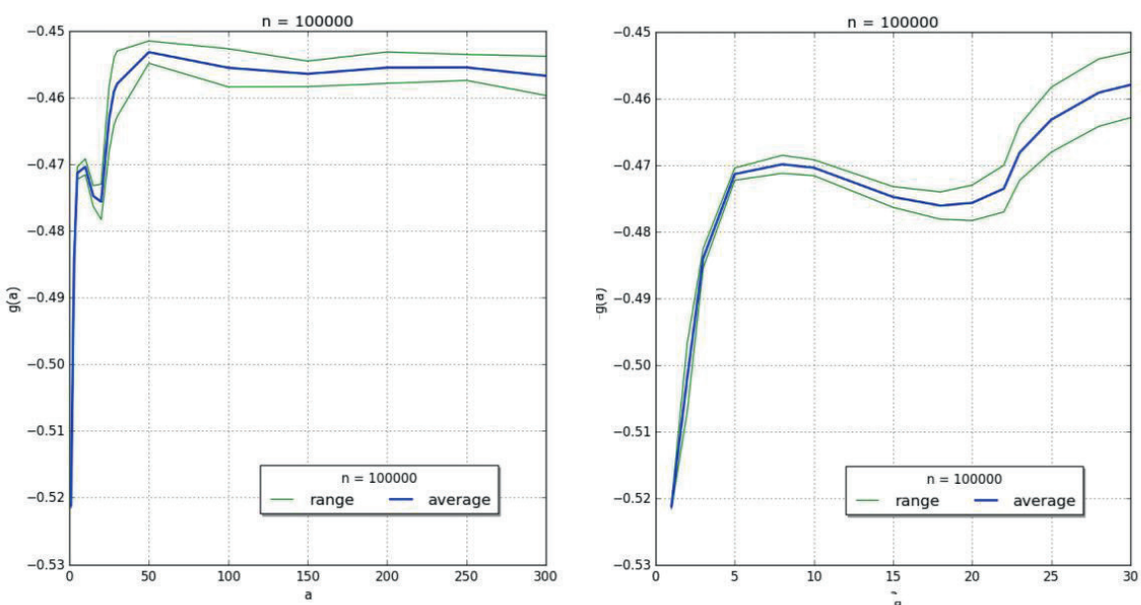


Рис. 2. График функции коэффициента наклона прямой *g(a)* в зависимости от параметра *a*, количество вершин в web-графе *n* = 100000

$$P \sim \begin{bmatrix} 1^{-\lambda}\ 2^{-\lambda}\ 3^{-\lambda}\ 4^{-\lambda}\ 5^{-\lambda}\ \ldots \\ 1^{-\lambda}\ 2^{-\lambda}\ 3^{-\lambda}\ 4^{-\lambda}\ 5^{-\lambda}\ \ldots \\ 1^{-\lambda}\ 2^{-\lambda}\ 3^{-\lambda}\ 4^{-\lambda}\ 5^{-\lambda}\ \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{bmatrix}.$$

Рис. 3. Предположительный вид матрицы

Литература

1. *Гасников А.В., Жуковский М.Е., Ким С.В., Носков Ф.А., Плаунов С.С., Смирнов Д.А.* Вокруг степенного закона компонент вектора PageRank. arXiv: 1701.02595
2. *Ostroumova L., Ryabchenko A., Samosvat E.* Generalized preferential attachment: tunable power-law degree distribution and clustering coefficient. arXiv: 1205.3015
3. https://github.com/KoIIdun/PageRank-gradient

УДК 519.6

Моделирование методом КАБАРЕ задачи взаимодействия пары вихрей со свободной поверхностью

В.А. Гущин[1], В.Г. Кондаков[2]

[1]Институт автоматизации проектирования РАН
[2]Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН

Рассматривается движение пары вихрей и их взаимодействие со свободной поверхностью. Будем предполагать, что вихри имеют одинаковую интенсивность, закрутка этих вихрей противоположна друг другу, и они на одном уровне ниже свободной поверхности H_0. Для упрощения постановки задачи среду будем считать невязкой и однородной. Предполагаем, что в начальный момент времени центры вихрей расположены на некотором расстоянии b и что ядра вихрей заключены в кругах радиусами r_0. Профиль радиальной скорости в вихре линейно растет от центра вихря и достигает максимума U на r_0, потом падает до нуля на радиусе $2r_0$. Из работы [1] известно, что такая пара вихрей в невязкой однородной среде будет двигаться в перпендикулярном направлении прямой линии, соединяющей их центры со скоростью:

$$V = G/(2\pi b),$$

где G – интенсивность одного вихря. Движение вихрей характеризуется двумя параметрами: числом Фруда $\mathrm{F} = U/\sqrt{gr_0}$ и отношением размеров $a = b/r_0$. Для корректной постановки будет рассматриваться половина области с условием симметрии на вертикальной оси, зеркально отражающая поле скорости. На противоположной вертикальной границе будет условие свободного выхода (условие излучения [2]). На дне будем полагать условие непротекания, а наверху условие свободной поверхности.

Для данной постановки задачи были выбраны два набора параметров:

$$\begin{aligned} &1)\ F^2 = 0.032, a = 4, H_0 = 5r_0; \\ &2)\ F^2 = 0.001, a = 4, H_0 = 5r_0. \end{aligned} \qquad (1)$$

В работе будут представлены результаты численного расчета по заданному набору параметров (1). Будет проведен анализ количественного сравнения с результатами других исследователей. Цель работы заключается в разработке новых подходов на основе разностной схемы КАБАРЕ [3–5] при решении задач взаимодействия вихревых образований со свободной поверхностью.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 17-11-01286.

Литература

1. *Batchelor G.K.* An introduction to fluid dynamics. Cambridge university press, 2000.
2. *Orlanski I.A.* Simple boundary condition for unbounded hyperbolic flows //J. Computational Physics. 1976. V.21, N 3. P. 251–269.
3. *Головизнин В.М.*, *Самарский А.А.* Некоторые свойства разностной схемы "Кабаре //Математическое моделирование. 1998. Т. 10. № 1. С. 101–116.
4. *Головизнин В.М.*, *Карабасов С.А.*, *Кобринский И.М.* Балансно-характеристические схемы с разделенными консервативными и потоковыми переменными // Математическое моделирование. 2003. Т. 15, № 9. С. 29–48.

5. *Головизнин В.М.* Балансно-характеристический метод численного решения одномерных уравнений газовой динамики в эйлеровых переменных // Математическое моделирование. 2006. Т.18, № 11. С.14–30.

УДК 51-73

Особенности фильтрационных процессов в пластах переменной смачиваемости

О.А. Костюк

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Математическое моделирование пластов углеводородов – инструмент, который позволяет глубже изучить механизмы фильтрации и нефтеотдачу в пласте. Зачастую, ввиду неточности или недостаточности информации, полученной в ходе исследования керна некоторое количество параметров или свойств нефти, или коллектора могут быть убраны из рассмотрения. Не всегда сделать это получается успешно: некоторые свойства пластов могут иметь существенное влияние на поведение пласта в процессе фильтрации, и, в случае, если они не были учтены в процессе составления модели, она не будет адекватной. Одним из таких свойств пластов является смачиваемость, влияние которой на многие аспекты работы с месторождением необычайно велико.

В данной работе на примере одного из месторождений Башкирии было построено решение задачи капиллярно-гравитационного равновесия в случае пласта переменной смачиваемости, когда часть пропластков гидрофильна, а часть – гидрофобна. Также была рассмотрена одномерная задача вертикального вытеснения нефти водой с учётом капиллярных и гравитационных сил для гидрофильного, гидрофобного пласта, а также пласта переменной смачиваемости; была изучена зависимость профиля насыщенности от типа смачиваемости пласта и направления вытеснения.

Литература

1. *Басниев К.С., Дмитриев Н.М., Каневская Р.Д., Максимов В.М.* Подземная гидромеханика: Учебник для вузов. –М., Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. 496 с.
2. *Anderson, W. G.* Wettability literature survey – Part 1: Rock/oil/brine interactions and the effects of core handling on wettability. // Journal of Petroleum Technology, 1986.
3. *Anderson, W. G.* Wettability literature survey – Part 4: Effects of wettability on capillary pressure. // Journal of Petroleum Technology, 1987.
4. *Anderson, W. G.* Wettability literature survey – Part 5: The effects of wettability on relative permeability. // Journal of Petroleum Technology, 1987.

УДК 004.94

3D-моделирование современных конструкций

А.И. Жигалова

Мытищинский филиал Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана

Цель работы заключается:

1) в математическом предложении технического и архитектурного решения высотного сооружения как продолжения развития математических идей В.Г. Шухова;
2) в снятии ряда технологических ограничений для перспективных конструкций;
3) в сочетании математических принципов с гармонической архитектурой.

Классическим примером технической реализации однополостного гиперболоида «старыми» технологиями служит Шаболовская телебашня конструкции В.Г. Шухова [1, 2]. Форма башни выбрана конструктором по нескольким причинам.

1. Однополостный гиперболоид имеет прямолинейные образующие [3].
2. Верхняя часть каждой секции – это «горлышко» однополосного гиперболоида.
3. Высоты первых секций приблизительно одинаковые.
4. Стержни нагружены почти одинаково в каждой точке, получилась почти равнопрочная более лёгкая конструкция.
5. Масса конструкции уменьшилась в 4 раза по сравнению с Эйфелевой башней.

Конструкции В.Г. Шухова были созданы сто лет назад, когда не было возможности реализовать более рациональные технические решения. Например, в то время железобетон только начинал осваиваться. Останкинская башня создавалась позднее на основе железобетона и стальных натянутых тросовых стяжек. Сейчас очень быстро развиваются аддитивные 3D-технологии. Появляется возможность изготовить конструкции в виде сложных оболочек, о которых В.Г. Шухов не мог даже мечтать с технологической точки зрения [4–6]. На основе современных аддитивных технологий можно снять первое ограничение – изготовить не круговой, а эллиптический однополостный гиперболоид. Ориентация большой оси эллипса по розе ветров позволит снизить ветровые нагрузки и облегчить конструкцию. Второе ограничение, которое предлагается снять с перспективных проектов математически, – это отказ от «горлышка» однополостного гиперболоида в верхних основаниях секций. В.Г. Шухов не мог расширить конструкцию секций в верхней части, потому что через «горлышко» проходил подъём вышележащих секций, они просто не прошли бы внизу в самом узком месте. Вертолётов и высотных кранов в то время не было. Главное направление работы заключается в переходе от конечного числа прямолинейных образующих в сооружениях В.Г. Шухова к несчётному множеству образующих, то есть к оболочкам. Такой переход стал возможен в настоящее время благодаря развитию аддитивных технологий и возможностью реализации с их помощью сложных математических объектов.

Однополостный гиперболоид был изучен на предмет возможности соблюдения правил «золотого» сечения при архитектурном проектировании. На защиту выносится три положения. Во-первых, математическое доказательство возможности соблюдения четырёх независимых соотношений «золотого» сечения гиперболических секций высотной конструкции. Во-вторых, следствие пятого «золотого» соотношения из сформулированных четырёх принципов. В-третьих, невозможность соблюсти шестое «золотое» сечение по «горлышку» гиперболоида, но возможность выполнить его приближённо с относительной ошибкой не более 13%.

Для доказательства правильности математических расчётов сформулировано Техническое задание и выдан заказ на изготовление аддитивными технологиями двух комплектов макетов перспективной высотной башни. Техническое задание иллюстрировано программными средствами MathCAD-14. Заказ был принят специализированной фирмой для изготовления с доработкой Технического задания по необходимому для 3D-принтера программному обеспечению. Сертификаты получены. Один комплект макета башни предназначен для испытаний под нагрузкой до разрушения на измерительном прессе. Второй комплект макета башни является демонстрационным. Реализация гармонического «золотого» сечения приводит к убыванию размеров секций по геометрической прогрессии. Это определяет предельную высоту башни.

На рис. 1 показан пример реализации технологии аддитивных технологий для создания модели высотной башни сложной формы на основе нескольких однополостных гиперболоидов с максимальным соблюдением «золотого» сечения.

Продолжение работы планируется в области создания новых материалов, в том числе композиционных, на основе хорошей несущей способности и прочностных характеристик однополостного гиперболоида. Планируется участие в конкурсе У.М.Н.И.К.

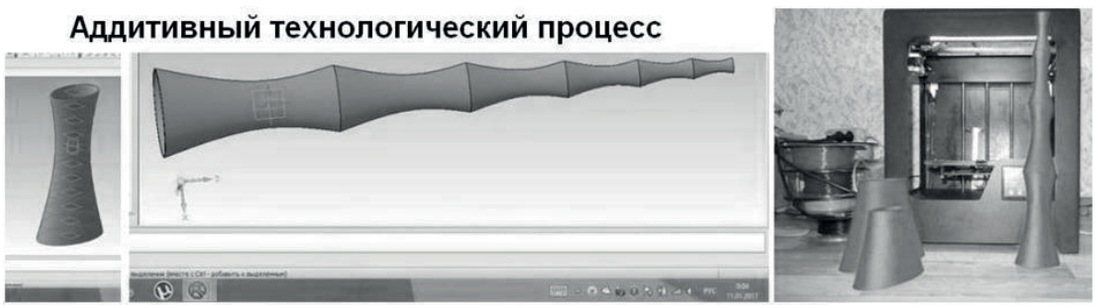


Рис.1. Процесс создания сложной детали аддитивными технологиями

Литература

1. *Андреев Н.Н.* [*и др.*]. Ажурная башня / Математические этюды. Электронный ресурс: http://www.etudes.ru/ru/etudes/shukhov/
2. Шуховские башни // Математическая составляющая / Ред.-сост. Н.Н. Андреев, С.П. Коновалов, Н.М. Панюнин. – М.: Математические этюды, 2015. С. 60–61. Электронный ресурс: http://book.etudes.ru/toc/shuhov/
3. *Привалов И.И*. Аналитическая геометрия: учебник для вузов. – М.: Изд. Юрайт, 2016.
4. *Жигалова А.И.* Гармоническая математика однополостного гиперболоида. – Электронный ресурс (видеоролик 8 минут): https://youtu.be/XD29txJO0gE
5. *Жигалова А.И.* Математическая архитектура однополостного гиперболоида в аддитивных технологиях / Гагаринские чтения – 2017: XLIII Международная молодёжная научная конференция: Сборник тезисов докладов: М.; Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), 2017. Школьные работы: – М.: Моск. авиационный ин-т (национальный исследовательский университет), 2017. 226 с. С.23-24. Электронный ресурс: https://mai.ru/science/gagarin/materialy-konferentsii/
6. *Жигалова А.И.* 3D-моделирование в конкурсных проектных работах школьного кружка // Материалы XXVIII Международной конференции «Современные информационные технологии в образовании». Научно-методическое издание / Редакционная группа: Алексеев М.Ю. и др. – Троицк–Москва, 2017. ISBN 978-5-9907219-4-4 Электронный ресурс: http://ito.bytic.ru/uploads/files/conf_2017.pdf - С.373-374.
7. *Жигалова А.И.* Математическая архитектура высотной башни на основе однополостного гиперболоида // Строительство — формирование среды жизнедеятельности [Электронный ресурс] : сборник трудов XX Международной межвузовской научно-практической конференции студентов, магистрантов, аспирантов и молодых ученых (26–28 апреля 2017, г., Москва) / М-во образования и науки Рос. Федерации, Нац. исследоват. Моск. гос. строит. ун-т. — Электрон. дан. и прогр. (73,7 Мб). — М.: Изд-во Моск. гос. строит. унта, 2017. С. 71–73. ISBN 978-5-7264-1660-1– Эл. Ресурс: http://mgsu.ru/resources/izdatelskaya-deyatelnost/izdaniya/izdaniya-otkrdostupa/

УДК 577.38

О дистанционной активации очага эпилепсии

А.В. Параскевов, Д.К. Зендриков

Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт»

Популяционные спайки, события кратковременной глобальной синхронизации спайковой активности нейронов, в планарных нейронных сетях *in vitro* возникают из центров нуклеации, напоминающих очаги возникновения эпилептических приступов. Причины возникновения очагов эпилепсии пока неизвестны. В данной работе представлены результаты численных экспериментов на основе биофизической сетевой модели [1] с определенной пространственной конфигурацией нейронов-пейсмекеров. Цель этих экспериментов состоит в прояснении функциональной взаимосвязи между центрами нуклеации и пейсмекерами. Показано, что центры нуклеации могут возникать в пространственных областях, где пейсмекеры отсутствуют (рис. 1). Полученный результат указывает на принципиальную возможность дистанционной активации источника

эпилептической активности в головном мозге и положительно коррелирует с известными экспериментальными результатами [2].

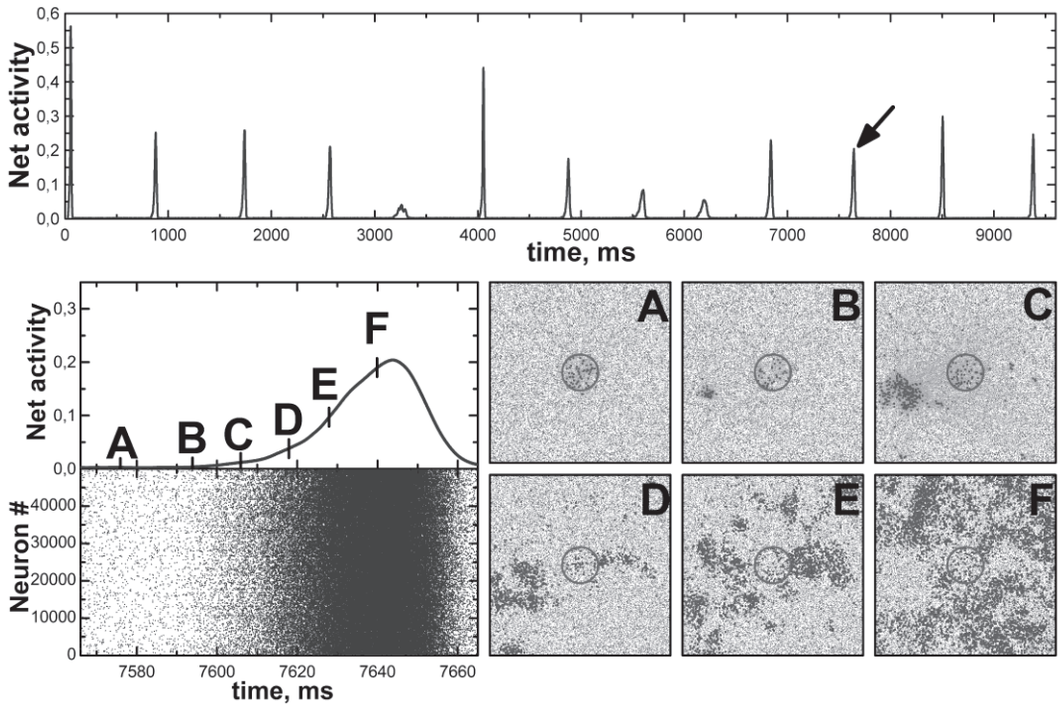


Рис. 1. Симуляция спайковой активности нейронной сети, состоящей из 50 тыс. LIF(Leaky Integrate-and-Fire)-нейронов (80% возбуждающих, 20% тормозящих), статистически равномерно распределённых по квадратной площадке $L \times L$. Вероятность образования межнейронной связи $P_{con}(r) = \exp(-r/\lambda)$, т.е. экспоненциально убывает с увеличением расстояния r между нейронами. При $\lambda = 0.01L$ число исходящих связей на нейрон равно 32 ± 6. Все нейроны-пейсмекеры (3.4% от полного числа нейронов) локализованы в центральной круглой области радиуса $0.1L$. Радиус круга выбран таким, чтобы средняя плотность пейсмекеров внутри круга была такой же, как средняя плотность нейронов по всей площадке. ВВЕРХУ: Нормированная спайковая активность сети в течение 10 секунд симуляции. ВНИЗУ: График усредненной (по 2 мс) сетевой активности и точный растр активных нейронов (слева), а также шесть кадров пространственной развёртки (справа), для популяционного спайка, отмеченного стрелкой на верхнем графике. Светло-серыми точками на кадрах обозначены неактивные нейроны, темно-серыми точками – активные нейроны. Область с пейсмекерами обведена окружностью, вне этой окружности пейсмекеров нет. Видно, что центр нуклеации популяционного спайка возникает на достаточно большом расстоянии от пятна с пейсмекерами. На первых трех кадрах (A, B, C) дополнительно визуализированы исходящие связи активных нейронов.

Литература

1. *Paraskevov A.V., Zendrikov D.K.* A spatially resolved network spike in model neuronal cultures reveals nucleation centers, circular traveling waves and drifting spiral waves // Phys. Biol. 2017. V. 14. P. 026003.
2. *Bower M.R.* [et al.]. Spatiotemporal neuronal correlates of seizure generation in focal epilepsy // Epilepsia. 2012. V. 53. P. 807.

УДК 517.95:533.601.1

Численное решение модельной задачи о взрывах, расположенных в вершинах правильного тетраэдра, гексаэдра, октаэдра

И.В. Мурашкин

Институт автоматизации проектирования РАН

Решена модельная задача о множественных взрывах в атмосфере для случая их упорядоченного расположения в пространстве в вершинах правильного тетраэдра, гексаэдра, октаэдра в целях апробации численной методики для изучения взрывного взаимодействия фрагментов метеороидов. Численное исследование проводится на основе системы трехмерных эволюционных уравнений Эйлера в декартовых координатах (x, y, z). Задача модельная – газ считается идеальным, атмосфера – экспоненциальной, центры взрывов с одинаковой общей начальной энергией $E = 96\ \text{кТ} = 4 \times 24\ \text{кТ} = 6 \times 16\ \text{кТ} = 8 \times 12\ \text{кТ}$, расположены в вершинах трех платоновых тел (правильный многогранник): правильного тетраэдра, гексаэдра и октаэдра (см. рис. 1а–в), с радиусами описанной окружности $R_0 = 400\ \text{м}$ и центром симметрии на высоте $H = 800\ \text{м} = 2R_0$ над подстилающей поверхностью; длинами ребер $d_{\text{т}} = 2\sqrt{2}P_0/\sqrt{3} \approx 653\ \text{м}$, $d_{\text{г}} = 2R_0/\sqrt{3} \approx 462\ \text{м}$ и $d_{\text{о}} = \sqrt{2}R_0 \approx 566\ \text{м}$ В качестве начальных условий для каждого взрыва выбирается решение задачи для одиночного взрыва в экспоненциальной атмосфере с учетом противодавления (начальными условиями для этой задачи бралось решение задачи о сильном взрыве Л.И. Седова) до моментов времени $t_m = 0.172\ \text{с}$, $t_{\text{г}} = 0.103\ \text{с}$, $t_{\text{о}} = 0.146\ \text{с}$ для тетраэдра, гексаэдра, октаэдра соответственно, когда первичные ударные волны близки к соударению в центрах ребер правильных многогранников, в вершинах которых происходят взрывы. Далее отсчет идет от этого момента времени, принимаемого за $t_0 = 0.0\ \text{с}$. Дискретизация исходной системы дифференциальных уравнений осуществляется на сетке $401 \times 401 \times 401$ узлов по каждому направлению с переменным масштабом. Для всех газодинамических функций по всем трем координатным направлениям (x, y, z) применяется градиентное сглаживание специального вида, которое сводит выбранную схему к схеме типа TVD, обладающую свойством монотонности и позволяющую хорошо рассчитывать сквозным способом УВ достаточно большой интенсивности и их взаимодействия.

Опишем процесс взаимодействия четырех ударных волн (УВ) в вершинах тетраэдра. Пусть O – центр описанной вокруг тетраэдра ABCD окружности. В момент времени $t \approx 0.02\ \text{с}$ в серединах ребер тетраэдра ABCD (A – верхняя вершина) происходят кумулятивные эффекты с резким возрастанием давления из-за столкновения пар первичных УВ. На регулярной стадии лобового соударения двух взрывных сферических УВ образуются пары исходящих УВ и тангенциальных разрывов для каждой пары взрывов [1]. Развитие ударно-волнового процесса хорошо прослеживается по поведению распределений газодинамических показателей вдоль прямой AO (см. рис. 2а). В момент времени $t \approx 0.11\ \text{с}$ в центрах граней тетраэдра ABCD происходит еще один кумулятивный эффект за счет схождения троек первичных УВ. Отраженные 4 УВ двигаясь к центру O, сталкиваются в момент времени $t \approx 0.146\ \text{с}$ с еще 4 первичными УВ, тем самым порождая максимальный кумулятивный эффект процесса, при котором достигается давление в 12.8 МПа (см. рис. 2б). Далее давление в центре падает, но потом снова возрастает до значений в 1.8 МПа за счет столкновения с 6 вторичными УВ от центров ребер.

Затем множественные ударные волны взаимодействуют друг с другом, с горячими центральными областями и поверхностью, при этом происходят их распады на новые УВ, которые продолжают двигаться в прежних направлениях, и волны разрежения,

устремляющиеся к зоне начального контакта, тем самым эволюция течения сильно усложняется.

В задачах о множественных взрывах для случаев их упорядоченного расположения в пространстве в вершинах правильного гексаэдра и октаэдра проявляются аналогичные эффекты. В ходе эволюционного процесса в центре симметрии происходят два основных кумулятивных эффекта, причем при общей одинаковой энергии взрыва, для гексаэдра они наиболее сильные, слабее для октаэдра и тетраэдра (см. рис. 3).

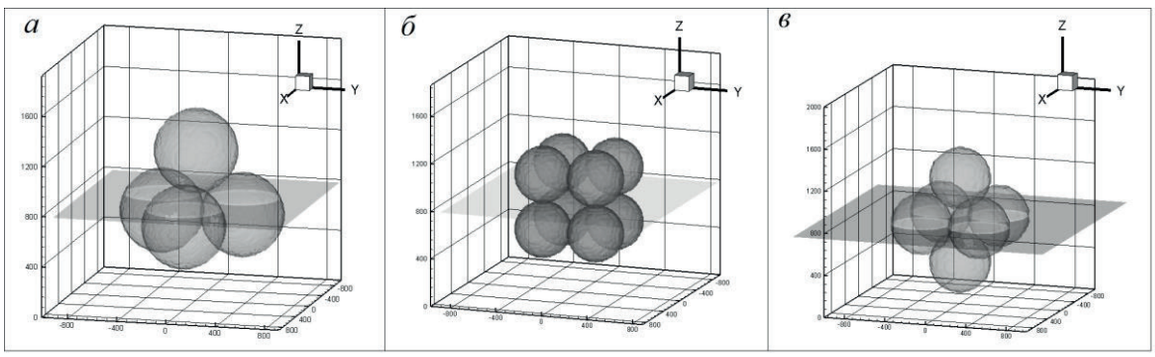


Рис. 1. Начальные условия

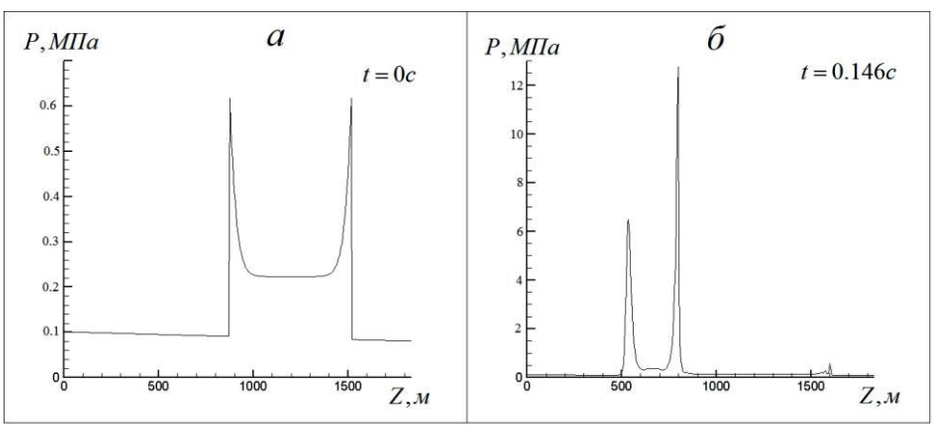


Рис. 2. Распределение давления вдоль прямой АО

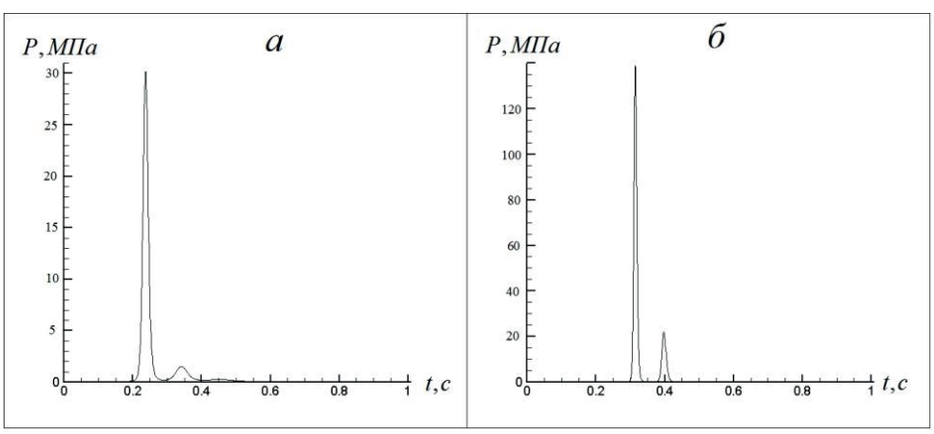


Рис. 3. Зависимость распределение давления в центре симметрии от времени

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 15-01-07444).

Литература

1. *Андрущенко В.А.* Парный взрыв в экспоненциальной атмосфере // ИФЖ. 1994. Т. 66. № 6. С. 657–661.

Секция теории вычислений

УДК 519.17

Оценка коммуникационной сложности знака перестановочной матрицы

М.Н. Вялый

Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН
Московский физико-технический институт (государственный университет)
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

В этой работе обсуждаются задачи, связанные со сложностью различения чётных и нечётных перестановочных матриц. Задачи такого типа возникают при анализе алгоритмов вычисления перманента [1].

Однако здесь основным примером является коммуникационная сложность XOR-функции знака перестановочной матрицы. Для каждой булевой функции $f(x)$ определена XOR-функция $F(x,y)$, которая равна значению f от суммы аргументов x и y по модулю 2. Переход к XOR-функции позволяет по любой булевой функции построить коммуникационную задачу. Эти функции были предложены в работе [2] и оказались полезными для анализа нескольких важных вопросов в коммуникационной сложности, см., например, [2, 3 ,4].

В работе получена нижняя оценка $\Omega(n \log n)$ коммуникационной сложности XOR-функции для знака перестановочной матрицы. Значение этой функции на паре X, Y матриц порядка n равно +1, если $X + Y$ является матрицей четной перестановки, и равно –1, если $X + Y$ является матрицей нечетной перестановки. В остальных случаях эта функция не определена. Полученная оценка оптимальна с точностью до мультипликативной константы.

Из этой оценки легко следуют аналогичные нижние оценки $\Omega(n \log n)$ для двух других моделей вычисления знака перестановки: для модели линейной классификации и для модели разрешающих деревьев с линейными запросами.

Первая из этих моделей была предложена в работе [5] и затем была использована в [1] для анализа общего подхода к вычислению перманента матрицы с целочисленными коэффициентами с помощью вычисления детерминанта подходящей матрицы в расширении кольца целых чисел.

В модели линейной классификации (частичная) функция вычисляется по значению образа некоторого линейного отображения, параметром сложности является размерность пространства-образа. Линейная сложность функции - наименьшая возможная сложность классификации функции. Таким образом определяется линейная сложность над полем из двух элементов. В целочисленном случае параметром сложности является максимум модуля коэффициентов линейного функционала, разделяющего значения функции, и целочисленная линейная сложность – минимум этой величины по всем разделяющим функционалам.

В работе [1] были получены линейные нижние оценки линейной сложности в обоих случаях: над полем из двух элементов и целочисленным. В данной работе эти оценки улучшаются до $\Omega(n \log n)$ с помощью оценки $\Omega(n \log n)$ для коммуникационной сложности XOR-функции знака перестановочной матрицы.

Вторая модель, для которой из основной оценки коммуникационной сложности следуют нижние оценки вида $\Omega(n \log n)$, – это модель разрешающих деревьев с линейными запросами. От обычной модели разрешающих деревьев (см., скажем, [6]) она отличается тем, что вместо значения одной из переменных можно спрашивать значение произвольной линейной функции от переменных.

Сложность разрешения с линейными запросами оказывается полиномиально связана с более общей коммуникационной сложностью, когда вычисляется XOR-функция от 4 аргументов [7].

Оценка коммуникационной сложности XOR-функции знака перестановочной матрицы получается стандартными для коммуникационной сложности методами, см. [8.9]. Как хорошо известно, нижней оценкой коммуникационной сложности является логарифм наименьшего числа прямоугольников в покрытии области определения функции монохроматическими прямоугольниками (недетерминированная коммуникационная сложность).

В данной работе эта величина покрытия оценивается через разбалансировку (discrepancy) функции. В общем случае разбалансировка определяется по некоторому вероятностному распределению на входах. Здесь нам достаточно равномерного распределения. Поэтому строится верхняя оценка веса прямоугольника, то есть алгебраической суммы значений функции по прямоугольнику.

Вес прямоугольника $S \times Q$ выражается как скалярное произведение в пространстве действительных функций характеристической функции S на образ характеристической функции Q
под действием самосопряженного оператора P, матрица которого получается из XOR-функции продолжением 0 вне области определения. Неравенство Коши–Буняковского сводит построение оценки веса к оценке максимума модуля собственных чисел оператора P.

Оператор P разлагается в линейную комбинацию операторов P_π , отвечающих отдельным перестановкам. Коэффициент при P_π в этой линейной комбинации – это знак перестановки π.

Все операторы P_π диагонализуются в базисе Фурье, и их собственные числа в этом базисе легко вычисляются. Суммирование по всем перестановкам для данного характера T (базисного вектора в базисе Фурье) дает определитель ± 1 матрицы, связанной с T. Этот определитель оценивается с помощью неравенства Адамара как $n^{n/2}$. Логарифм отношения $n!/n^{n/2}$ имеет требуемый порядок роста $\Omega(n \log n)$, что и приводит к искомой оценке коммуникационной сложности.

Указанные выше приложения этой оценки получаются непосредственным построением коммуникационных протоколов из линейной классификации над полем из двух элементов и из дерева разрешения с линейными запросами.

Для получения оценки $\Omega(n \log n)$ целочисленной линейной классификации знака перестановочных матриц необходимо модифицировать саму коммуникационную задачу. А именно, нужно рассмотреть функцию от $(\pm 1, 0)$ – матриц X, Y, которая равна знаку перестановочной матрицы $X + Y$ (здесь уже сложение целочисленное), и не определена, если $X + Y$ не является перестановочной матрицей. Нетрудно проверить, что любой монохроматический прямоугольник для этой новой функции стиранием знака у ± 1 отображается в монохроматический прямоугольник для исходной функции и то же самое справедливо для областей определения этих функций. Поэтому величина покрытия монохроматическими прямоугольниками для новой функции не меньше, чем для исходной. Таким образом, нижняя оценка величины покрытия монохроматическими прямоугольниками для исходной функции дает оценку детерминированной коммуникационной сложности новой функции. С другой стороны, по разделяющему целочисленному функционалу легко строится коммуникационный протокол для новой функции.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, номер проекта 17-01-00300, программы 0063-2016-0017 III.1 ОМН РАН. Исследование также финансировалось в рамках государственной поддержки ведущих университетов Российской Федерации «5-100».

Литература

1. *Бабенко А.В., Вялый М.Н.* О линейной классификации четных и нечетных перестановочных матриц и сложности вычисления перманента // ЖВМиМФ. 2017. Т. 57, № 2. С. 362–372.

2. *Zhang Zh., Shi Y.* On the parity complexity measures of Boolean functions // Theoretical Computer Science. 2010. V. 411(26-28). P. 2612-2618.
3. *Lee T., Zhang Sh.* Composition theorems in communication complexity // Proceedings of the 37th International Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP). 2010. P. 475–489.
4. *Tsang H.Y., Wong Ch.H., Xie N., Zhang Sh.* Fourier sparsity, spectral norm, and the log-rank conjecture //
5. Proceedings of the 2013 IEEE 54th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS '13). – Washington (DC):IEEE Computer Society, 2013. P. 658–667.
6. *Abbe E., Alon N., Bandeira A.S.* Linear Boolean classification coding and ``the critical problem" // Proceedings of IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT). 2014. P. 1231–1235.
7. *Jukna S.* Boolean function complexity: advances and frontiers. - Heidelberg-Berlin-NewYork: Springer-Verlag, 2012. 617 p.
8. *Yao P.* Parity decision tree complexity and 4-party communication complexity of XOR-functions are polynomially equivalent // Chicago Journal of Theoretical Computer Science. 2016. Article 12. P. 1-8.
9. *Kushilevitz E., Nisan N.* Communication complexity. New York (NY): Cambridge University Press, 1996. 189 p.
10. *Lee T., Shraibman A.* Lower bounds in communication complexity // Foundations and Trends® in Theoretical Computer Science. 2009. V. 3, N. 1. P. 263–399.

УДК 510.52

Эффективная унирациональность кубической гиперповерхности

А.В. Селиверстов

Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН

Фиксируем счётное поле K характеристики нуль с нумерацией, при которой арифметические операции вычислимы за полиномиальное время. Примером такого поля служит конечное расширение поля рациональных чисел, элементы которого представимы многочленами ограниченной степени с рациональными коэффициентами, а для записи числителя и знаменателя дроби используется двоичная запись. Элементы конечного расширения поля рациональных чисел представимы многочленами ограниченной степени с рациональными коэффициентами; арифметические операции над таким полем подразумевают вычисление остатков от деления многочленов. В сервисе MathPartner это выполнимо посредством команды \reduceByGB [1]. В общем случае, если два поля, в каждом из которых операции вычислимы за полиномиальное время, изоморфны друг другу, то не существует изоморфизма, вычислимого за полиномиальное время [2]. Говоря о расширении поля L/K, мы подразумеваем, что операции в поле L также вычислимы за полиномиальное время, более того, существует вычислимый за полиномиальное время изоморфизм между полем K и подполем поля L.

Гладкая проективная кубическая кривая на плоскости иррациональна. Однако отличная от конуса неприводимая проективная кубическая гиперповерхность размерности два или выше с отмеченной K-точкой унирациональна над K. Для гладкой кубической поверхности над полем рациональных чисел унирациональность доказал Беньямино Сегре [3], при некоторых ограничениях – Ю.И. Манин [4, с. 57], а в более общем случае – Янош Коллар [5]. Однако в этих работах доказана лишь чистая теорема существования. Мы рассмотрим вычислительную сложность поиска доминантного рационального отображения проективного пространства в гиперповерхность. В общем случае образ этого отображения содержит не все K-точки, но множество таких K-точек всюду плотное в топологии Зарисского.

Допуская некоторую вольность, мы не различаем случайную величину и реализацию этой случайной величины. По сути, вероятностный алгоритм получает на вход некоторую реализацию случайной величины.

Теорема. Существует вероятностный алгоритм, который получает на вход кубическую форму над полем K, определяющую отличную от конуса неприводимую кубическую гиперповерхность X в n-мерном проективном пространстве, где размерность n

не меньше трёх, координаты K-точки на X, положительное число E и n-1 независимую случайную величину, каждая из которых равномерно распределена на множестве целых рациональных чисел от 1 до N>(6n+9)/E. С вероятностью не меньше 1-E алгоритм выдаёт доминантное рациональное отображение из (2n-4)-мерного проективного пространства в X над полем K, то есть список рациональных функций. Иначе с вероятностью меньше E алгоритм выдаёт сообщение об отказе от вычисления. При этом число арифметических операций над полем K, которые выполняет алгоритм, ограничено сверху многочленом от размерности n.

Число N в формулировке теоремы не ограничено сверху и может быть выбрано так, чтобы случайные числа были распределены на множестве, мощность которого равна степени двойки. В этом случае случайные числа можно отождествить с последовательностями случайных битов – независимых бернуллиевских случайных величин; алгоритм использует $O(n\log_2 n)$ битов.

Вначале алгоритм проверяет гладкость отмеченной точки. Если K-точка особая (двойная), то гиперповерхность X рациональная над K, а искомое рациональное отображение вычисляется детерминированным алгоритмом за полиномиальное время. Иначе дальнейшие шаги алгоритма основаны на конструкции из работы [5]. Через выделенную K-точку на X проводится прямая, определяемая n-1 случайным числом. Алгоритм проверяет условие, что эта прямая пересекает X в двух других точках, которые служат двойными точками сечений касательными гиперплоскостями. Иначе алгоритм отказывается от вычислений и выдаёт предупреждение. Если это условие выполнено, то оба сечения либо содержат рациональные над K неприводимые компоненты, либо содержат рациональные над квадратичным расширением L/K и сопряжённые неприводимые компоненты. Обычно эти сечения неприводимые. Сопоставляя двум точкам этих рациональных многообразий третью точку пересечения проходящей через них прямой с X, мы получим доминантное рациональное отображение из произведения двух рациональных многообразий в X. При этом если две точки сопряжены, то третья точка определена над полем K. А если две точки определены над K, то такова же и третья точка. Композиция рациональных отображений даст искомое рациональное отображение. Отметим два существенных отличия от работы [5], связанных с вычислительной сложностью.

Во-первых, промежуточные вычисления проходят над некоторым полем L, которое получается присоединением к полю K квадратного корня из его элемента. Если этот корень извлекается, то $L=K$. Однако символьные вычисления можно проводить по одним и тем же формулам, не проверяя, извлекается ли квадратный корень. В любом случае окончательный ответ будет получен над исходным полем K.

Во-вторых, вместо прямой общего положения, проходящей через выделенную K-точку гиперповерхности, используется прямая, случайно выбранная из конечного множества. В первом случае требуемое свойство следует из теоремы Бертини – чистой теоремы существования, а в эффективном варианте это свойство выполнено с большой вероятностью, которую можно оценить снизу посредством леммы Шварца–Зиппеля [6]. Эта оценка и составляет научную новизну работы.

Алгоритм может быть преобразован следующим способом. Существует вероятностный алгоритм, который никогда не отказывается от вычислений и даёт правильный ответ, причём с высокой вероятностью время его работы будет маленьким, но алгоритм может работать длительное время при некоторой реализации используемых случайных чисел. Для этого достаточно повторять вычисление на новых реализациях случайных чисел до тех пор, пока требуемое отображение не будет построено. Если параллельно осуществлять полный перебор вариантов, то правильный ответ будет получен за конечное время.

Условие отличия гиперповерхности от конуса существенно. Во-первых, конус над плоской гладкой кубической кривой не может быть унирациональным. Во-вторых, если отмеченная K-точка совпадает с вершиной конуса, то алгоритм не применим, даже если конус унирационален. Если гиперповерхность рациональная, алгоритм не обязательно

найдёт бирациональное отображение. Для рациональных поверхностей известны другие методы [7].

Построенное рациональное отображение позволяет быстро найти всюду плотное в топологии Зарисского множество K-точек на кубической гиперповерхности с отмеченной K-точкой. С другой стороны, найденные K-точки можно использовать для доказательства гладкости гиперповерхности методом, описанным в работе [8].

Литература

1. *Малашонок Г.И.* Система компьютерной алгебры MathPartner // Программирование. 2017. № 2. С. 63–71.
2. *Алаев П.Е.* Структуры, вычислимые за полиномиальное время. I // Алгебра и логика. 2016. Т. 55, № 6. С. 647–669.
3. *Segre B.* A note on arithmetical properties of cubic surfaces // Journal of the London Mathematical Society. 1943. V. 18. P. 24–31.
4. *Манин Ю.И.* Кубические формы: алгебра, геометрия, арифметика. –М.: Наука, 1972. 304 с.
5. *Kollár J.* Unirationality of cubic hypersurfaces // Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu. 2002. V. 1. P. 467–476.
6. *Schwartz J.T.* Fast probabilistic algorithms for verification of polynomial identities // Journal of the ACM. 1980. V. 27, no. 4. P. 701–717.
7. *González-Sánchez J.*, *Polo-Blanco I.* Construction algorithms for rational cubic surfaces // Journal of Symbolic Computation. 2017. V. 79. P. 309–326.
8. *Селиверстов А.В.* О касательных прямых к аффинным гиперповерхностям // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27, № 2. С. 248–256.

УДК 519.713

Автоматы со структурой данных и сложность вычислений

А.А. Рубцов

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
Московский физико-технический институт (государственный университет)

Односторонние недетерминированные конечные автоматы, снабжённые структурами данных, занимают важную нишу в теории формальных языков. С их помощью описывают такие широкие классы языков, как контекстно-свободные языки и индексные языки: в первом случае структурой данных выступает стек, а во втором — вложенные стеки. Приведём примеры более специальных классов, которые определяются через автоматы данного вида: автоматы со счётчиками, автоматы со словарём (Set Automata), открытые в 2014 году [1], автоматы, снабжённые k счётчиками с ограниченным числом переключений между увеличениями и уменьшениями.

Некоторые общие вычислительные и структурные свойства таких моделей были исследованы в 60–70-х годах XX века [2–4]. Вариации таких автоматов получили названия Balloon Automata и Abstract Family of Automata. Для данных моделей были установлены структурные свойства, описываемые в терминах абстрактных семейств языков (Abstract Family of Languages), в частности замкнутость относительно пересечения с регулярными языками и, в зависимости от структуры данных, замкнутость относительно стирающего или нестирающего гомоморфизма. Важным результатом этих исследований, который относится к вопросам разрешимости, является факт того, что проблема принадлежности слова языку либо разрешима одновременно для односторонних и двусторонних автоматов со структурами данных, либо одновременно неразрешима.

Мы предлагаем новый формализм описания автоматов данного вида и устанавливаем с его помощью связь данной модели со сложностью вычислений. А именно, мы формализуем понятие структуры данных. Структура данных определяется через язык протоколов PROT этой структуры. Заметим, что языком протокола работы со стеком

является язык правильных скобочных выражений – язык Дика. Мы определяем класс автоматов, который называем $\mathrm{OW_{PROT}}$-автоматами от («one way») с помощью недетерминированных конечных преобразователей (Finite State Transducers). $\mathrm{OW_{PROT}}$-автомат является преобразователем; получив слово w на ленту входа, он пишет слово p на выходную ленту и принимает w, только если $\mathrm{p} \in \mathrm{PROT}$.

Для данных автоматов мы получили следующие результаты.

Теорема 1. *Класс языков, распознаваемых OW_{PROT}-автоматами является главным рациональным конусом, порождённым языком $PROT$.*

Теорема 2. *Проблема пустоты для OW_{PROT}-автоматов сводится к задаче недетерминированной регулярной реализуемости сводимостью на логарифмической памяти.*

Из теоремы 2 получаем следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть проблема пустоты для OW_{PROT}-автоматов полна в классе C. Тогда языки, распознаваемые недетерминированной машиной Тьюринга на логарифмической памяти, снабжённые структурой данных, определяемой языком $PROT$, распознают языки класса C, и в том числе полные языки данного класса.*

Работа поддержана грантом РФФИ 17–01–00300.

Литература

1. *Kutrib, M., Malcher, A., Wendlandt, M.*: Deterministic set automata. In: Shur A.M., Volkov M.V. (eds.) DLT 2014, LNCS, Springer, Cham. 2014. V. 8633. P. 303–314.
2. *Ginsburg S.* Algebraic and automata-theoretic properties of formal languages. — Elsevier Science Publishing Co Inc.,U.S., 1975.
3. *Hopcroft J.E., Ullman J.D.* An approach to a unified theory of automata. — Switching and Automata Theory, 1967.
4. *Berstel J.* Transductions and Context-Free Languages. — Teubner Verlag, 1979.
5. *Hopcroft J.E., Motwani R., Ullman J.D.* Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation (3rd Edition). — Boston, MA, USA : Addison- Wesley Longman Publishing Co., Inc., 2006.

УДК 514.113.5

О числе граней многогранников Гельфанда–Цетлина

Е.В. Мелихова

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

Пусть дана неубывающая конечная последовательность действительных чисел $a_1 \leq \cdots \leq a_s$, например $1 \leq 1 \leq 2 \leq 2 \leq 3$. Соответствующий многогранник Гельфанда–Цетлина, $GZ(a_1 a_2 \ldots a_s)$, – это выпуклый многогранник, определяемый некоторым набором линейных неравенств, зависящих от a_i. Этот набор неравенств можно заключить в треугольную таблицу, первая строка которой совпадает с последовательностью $a_1, a_2, \ldots a_s$.

В 2013 году П. Гусев, В. Кириченко и В. Тиморин получили рекуррентное соотношение на количество вершин таких многогранников. В настоящей работе выведено рекуррентное соотношение на *f*-многочлен многогранника Гельфанда–Цетлина, то есть на производящую функцию конечной последовательности (f_n), где f_n – количество его граней размерности $n \geq 0$.

Также в работе показано, что для двух простейших однопараметрических серий, а именно: $GZ(1\ 2^m\ 3)$ и $GZ(1\ 2\ 3^m)$, где 2^m и 3^m – это m двоек и m троек соответственно, найденное рекуррентное соотношение достаточно просто решается.

Литература

1. *Byung Hee An, Yunhyung Cho, Jang Soo Kim.* On the f-vectors of Gelfand-Cetlinpolytopes// European Jornal of Combinatorics. 2018. V. 67. P. 61–67.
2. *Gusev P., Kiritchenko V., Timorin V.* Counting vertices in Gelfand–Zetlinpolytopes// J. Combin. Theory Ser. A. 2013. V. 120. P. 960–969.

УДК 519.163

Эффективное вычисление класса формы спроса по дискретным данным для однородной сильной аксиомы

С.П. Тарасов, А.А. Шананин

Московский физико-технический институт (государственный университет)
Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН

В математической экономике уже более ста лет изучается вопрос об рационализируемости функций спроса. *Функциями спроса* называется зависимость объемов покупок товаров от цен на них, а под *рационализируемостью* понимается возможность представления функции спроса в виде результата максимизации скалярной функции полезности при бюджетном ограничении. В гладкой категории для рационализируемости необходимо, чтобы построенная по функциям спроса дифференциальная форма удовлетворяла условиям интегрируемости типа Фробениуса [1]. В свою очередь условия Фробениуса можно переформулировать в терминах сильной аксиомы теории выявленного предпочтения, а последняя, в силу известной теоремы Африата, допускает проверку по дискретной торговой статистике, т. е. по массиву значений функций спроса в заданных точках [2]. Таким образом, теорема Африата является не только дискретным критерием интегрируемости, но и позволяет построить эффективный алгоритм проверки интегрируемости. В то же время численные эксперименты показывают, что сильная аксиома, а следовательно, и рационализируемость могут нарушаться. В гладкой категории неинтегрируемость можно проинтерпретировать в терминах класса дифференциальной формы спроса по Э. Картану [1], т. е. минимального числа (агрегированных) переменных, к которому форма может быть приведена. Можно предположить, что класс формы спроса связан с числом одновременно существующих предпочтений и/или укладов, различие между которыми слабо проявляются в стабильной ситуации, но становится существенным в период кризисов и/.или крупных структурных перестроек. В последние годы группа исследователей провела масштабные исследования дискретных постановок проблемы рационализируемости при нарушении сильной аксиомы [3]. В частности, была предложена естественная формулировка дискретного аналога класса формы спроса для неоднородной аксиомы выявленного предпочтения, и показано, что соответствующая задача вычисления дискретного класса формы спроса сводится к задаче ЦЛП [4, 5], что дает экспоненциальный алгоритм вычисления класса формы. Другой экспоненциальный алгоритм см. в [6].

Отметим два момента. Те же авторы (см., напр., [7]) показали NP-трудность задачи вычисления класса в этой и близкой постановках. Таким образом, какие-то количественные выводы могут быть сделаны лишь для очень небольших статистик.

Кроме того, отметим, что авторам не известны попытки проведения подобной программы для аналогичной формулировки дискретного класса формы спроса для однородной сильной аксиомы. Дело в том, что в этом случае задача к системе нелинейных алгебраических уравнений, что не позволяет использовать стандартные подходы типа ЦЛП (подход в приближенной постановке см. в [8]). В то же время, численные эксперименты на

реальных статистиках, проведенные в [9], убедили нас, что использование однородной сильной аксиомы имеет неоспоримое преимущество.

В данной работе для однородного случая построен эффективный полиномиальный (ε-приближенный) алгоритм. Это открывает возможность глубокого качественного и количественного изучения переходных периодов экономики.

Исследование первого автора выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 17-01-00300.

Исследование второго автора выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 17-07-00507.

Литература

1. *Petrov A., Shananin A.* Integrability conditions, income distribution, and social structures. Lecture notes in economics and mathematics systems. Springer. 1997. V. *453.* P. 271–288.
2. *Afraid S.* The construction of utility functions from expenditure data. International Economic Review, 1967. V. 8. P. 66–77.
3. *Cherchye L. et al.* The collective model of household consumption: a nonparametric characterization. Econometrica, 2007. V. 75. P. 553–574.
4. *Cherchye L. et al.* Nonparametric tests of collectively rational consumption behavior: an integer programming procedure. Journal of Econometrics V. 147. P. 258–265.
5. *Fabrice Talla Nobibon et al*., Revealed preference tests of collectively rational consumption behavior:
6. Formulations and algorithms. Operations Research, 2016. 64. P.1197–1216.
7. *Тарасов С.* Алгоритм вычисления класса дифференциальной формы спроса по дискретным данным. // Труды 57-й конференции МФТИ. 2014.
8. *Smeulders, B. et al*. Complexity results for the weak axiom of revealed preference for collective consumption models. Journal of Mathematical Economics. 2015. V. 58. P. 82 – 91.
9. *Шананин А., Тарасов С*. Вычисление класса дифференциальной формы спроса по дискретным данным. // Труды 58-й конференции МФТИ. 2015.
10. *Klemashev N., Shananin A.* Inverse problems of demand analysis and their applications to computation of positively-homogeneous Konüs–Divisia indices and forecasting. Journal of Inverse and Ill-posed Problems. V. 24, № 4. 2015.

УДК 512.54.05

Автоматные группы: краткий обзор

Д.А. Голубенко

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Пусть дана группа G, заданная образующими $a_1, \ldots a_N$ и соотношениями R. Иными словами, $G = A/R$, где A – свободная группа, порожденная $a_1, \ldots a_N$. Задача равенства слов в группе формулируется следующим образом: для группы G вычислить, является ли $\boldsymbol{w}$, слово от образующих группы G, тривиальным элементом группы. Классический результат теории вычислимости заключается в том, что эта задача алгоритмически неразрешима для общей группы G. Тем самым, становится интересной задача поиска класса групп, в которых эта задача разрешима. Одним из таких классов групп являются автоматные группы.

В докладе сделан обзор теории автоматных групп. Приведено определение, рассказывается о разрешимости проблемы равенства слов в автоматной группе, продемонстрированы примеры автоматных групп и объясняется связь с геометрией и теорией Гарсайда.

Оказывается, что если слова группы можно описать регулярным языком, то проблема равенства слов в группе является разрешимой. Говоря строго,

Теорема. *Пусть для данной группы $G = A/R$ имеется регулярный язык L в алфавите из образующих G такой, что отображение p: $L \to G$ – сюръекция такая, что прообраз тривиального элемента при отображении p регулярен. Тогда в группе G проблема разрешима.*

Здесь же, однако, алгоритм работает a priori сколь угодно долго, так как использует лишь перечислимость множества всех слов от образующих, представляющих единицу в G. Потребуем дополнительных условий. Конечнопорожденная группа $G = A/R$ называется *автоматной*, если имеется ДКА W такой, что $L(W) \to G$ — сюръекция, и для каждого генератора G и тривиального элемента e имеются ДКА M_x на парах слов, принимающие пару слов (w_1, w_2) языка L титтк $w_1\, x = w_2$ как элементы группы.

Теорема. *В автоматной группе G проблема равенства слов разрешима за O(|w|^2).*

Автоматные группы обладают красивыми геометрическими свойствами. В частности, имеет место липшицевость, то есть если два слова (w_1, w_2) принимаются некоторым M_x, то все их префиксы отдалены друг от друга не более, чем на некоторую константу, зависящую лишь от группы. (Расстояние здесь подразумевается в смысле обычной словарной метрики на дискретных группах.) Ключевую роль здесь играет автоматность групп: эта константа, зависящая лишь от группы, может быть взята как удвоенный максимум числа состояний всех автоматов M_x.

Автоматность не зависит от выбора порождающих, то есть является свойством группы. Это позволяет выбрать удобную нам систему порождающих и найти автоматную структуру группы на хорошей системе порождающих. Это дает возможность, в частности, установить автоматность группы кос B_n, столь часто возникающей в современной математической физике. Сначала для элементов группы кос находится нормальная форма Гарсайда. Пусть σ_i — положительные базовые косы, сплетающие лишь i и i+1 нитку; определим

$$\Delta = (\sigma_1 \dots \sigma_n)(\sigma_1 \dots \sigma_n\text{-}1)\dots(\sigma_1\, \sigma_2)\, \sigma_1.$$

Тогда нормальная форма Гарсайда есть представление элемента в виде произведения $\Delta\text{^}k\ \ \sigma_i_1 \dots\ \sigma_i_N$.

Теорема. *Группа B_n является автоматной. Автоматная структура задается языком нормальных форм Гарсайда.*

Это, в частности, позволяет решить проблему сопряженности элементов группы кос. Открытым остается вопрос, полиномиально ли время работы алгоритма от числа ниток кос.

Автоматную структуру можно даже искать алгоритмически; имеется процедура Кнута–Бендикса, позволяющая находить автоматную структуру посредством проверки выполнимости определенных аксиом. Она, впрочем, не работает за ограниченное время и выдаст ответ только при условии существования автоматной структуры группы. Поэтому поиск автоматной структуры до сих пор является нетривиальной задачей.

Сформулируем открытые вопросы в теории автоматных групп и покажем пару экзотических примеров автоматных групп. Например, группы:

$$\mathrm{Fib}(k,n) = \langle a_1, \dots, a_k \mid a_l\, a_l\text{+}1 \dots\ a_l\text{+}n = a_l\text{+}n\text{+}1 \rangle.$$

Группы Fib(2,1), Fib(3,1), Fib(4,1) являются тривиальными, Fib(5,1) – конечна, а группа Fib(9,1) бесконечна, но при этом автоматна, в соответствующем автомате хотя бы 550 состояний и не более 2000.

Литература

1. Epstein D. [et al.]. Word processing in groups, Jones and Bartlett, Boston MA, 1992.
2. Ito T. Minicourse on Garside structure and Dehornoy ordering. Presentation, Combinatorial Link. Homology Theories, Braids, and Contact Geometry, 2014.

Секция вычислительных технологий и моделирования

УДК 519.633

Численное решение задачи о восстановлении граничных функций на «внешних и внутренних жидких границах»

Н.Р. Лёзина[1], Т.О. Шелопут[1], В.И. Агошков[1,2,3]

[1]Институт вычислительной математики РАН
[2]Московский физико-технический институт (государственный университет)
[3]Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

В гидродинамике известна проблема постановки граничных условий на «жидких» границах. В данной работе под «внешней жидкой» границей будем подразумевать границу «вода–вода» в акватории моря. «Внутренней» границей будем называть границу, которая появляется при использовании метода разделения области. Задачи определения дополнительных неизвестных («граничных функций») в граничных условиях могут решаться с привлечением данных наблюдений на основе методов ассимиляции. Такие задачи можно рассматривать как обратные, решаемые вариационным подходом. Трудности изучения и решения данных задач усугубляются сложной конфигурацией пространственных областей − акваторий океанов и морей.

Проблема задания граничных условий на «жидких» границах является одной из важных проблем современной геофизики. Точность учета граничных условий существенно влияет на соответствие вычисляемых полей течений, температуры и солености наблюдаемым как в климатических задачах, так и в задачах оперативного прогноза. Это в свою очередь сказывается на последующих прикладных расчетах.

Существуют различные подходы к моделированию областей с «внешними жидкими границами». Например, в работе [1] был использован подход к заданию граничных условий, основанный на вариационной ассимиляции данных. Для аппроксимации модели по времени был использован метод расщепления, что позволило рассматривать задачу ассимиляции данных для нелинейной модели гидротермодинамики на каждом интервале по времени, решая последовательно более простые задачи ассимиляции, привлекая соответствующие изменяющимся переменным данные наблюдений. Также в [1] был поставлен класс обратных задач о «граничных функциях», определяющих граничные условия на «жидких границах». В настоящей работе рассмотрена одна из таких подзадач – задача ассимиляции данных о температуре. Мы предполагаем, что существуют данные наблюдений за температурой по глубине на «внешней жидкой» границе. В таком случае вводится дополнительная неизвестная функция в граничном условии на «жидкой границе», которую требуется восстановить вместе с компонентами решения на данном интервале по времени.

В случае решения задач в областях сложной геометрической формы эффективными могут оказаться методы разделения области. Существует ряд известных подходов к формулировке метода разделения области. В данной работе будет рассматриваться методология построения алгоритмов разделения области, которая предлагается в [2]. Идея этой методологии состоит в следующем. После введения «внутренней границы», разделяющей исходную область, на ней записываются условия сшивки для решения подзадач в подобластях. Затем одно из условий сшивки записывается через «граничную функцию», которая объявляется «управлением» и подлежит отысканию вместе с решениями в подобластях. В качестве «уравнения замыкания» принимается вторая часть условий сшивки (условие равенства температур).

Пусть рассматривается полная система уравнений и краевых условий, задающих математическую модель гидротермодинамики моря в приближении Буссинеска и

гидростатики, и для аппроксимации её по временной переменной применяется метод расщепления, как и в работах [1, 2]. Тогда задача ассимиляции данных о температуре будет решаться на шаге метода расщепления, соответствующем задаче о распространении тепла с применением метода разделения области. Таким образом, рассматриваемая задача состоит в решении задачи о восстановлении компонентов температур в подобластях, «дополнительных неизвестных» на «внешних и внутренних жидких» границах для трехмерного уравнения конвекции–диффузии. Задача формулируется как задача минимизации функционала, выписываются условия оптимальности и на их основе формулируется итерационный алгоритм для решения обратной задачи. Описанный подход внедрен в модель [3], и проведен ряд численных экспериментов.

Использование вариационной ассимиляции данных позволяет добиться лучшего соответствия вычисляемых профилей температуры по глубине и наблюдаемых профилей вблизи «внешних жидких» границ акватории Балтийского моря. Было проведено сравнение результатов численного решения задачи на всей области с решением с применением метода разделения области. Данные результаты практически совпадают.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-01-00548.

Литература

1. *Agoshkov, V.I.* Statement and study of some inverse problems in modelling of hydrophysical fields for water areas with ‘liquid’ boundaries // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2017. V. 32, N 2. P. 73–90.
2. *Агошков В.И*. Методы разделения области в задачах гидротермодинамики океанов и морей. М.: ИВМ РАН, 2017.
3. *Zalesny V.B., Gusev A.V., Ivchenko V.O., Tamsalu R., Aps R.* Numerical model of the Baltic Sea circulation // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2013. V. 28, N 1. P. 85–99.

УДК 519.633

Повышение эффективности решения нелинейных задач при моделировании ненасыщенной и безнапорной фильтрации

Д.В. Ануприенко

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
Институт безопасного развития атомной энергетики РАН

Использующееся в настоящее время для оценки безопасности захоронений радиоактивных отходов численное моделирование требует расчета течения подземных вод, что при рассмотрении приповерхностной зоны приводит к моделям ненасыщенной и безнапорной фильтрации. Обе модели используют нелинейное уравнение Ричардса:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + S \cdot s_{\text{stor}} \frac{\partial h}{\partial t} - \nabla \cdot \left(K_r(\theta) \mathrm{K}_s \nabla h \right) = Q \,. \qquad (1)$$

Здесь $h(\theta)$ и $K_r(\theta)$ – напор воды и относительная проницаемость, зависящие от объемного влагосодержания θ, $S = \theta/\theta_s$ – насыщенность, θ_s – максимальное влагосодержание, s_{stor} – коэффициент упругой емкости, K_s – коэффициент фильтрации в насыщенном состоянии, Q – объемные источники и стоки. Модели ненасыщенной и безнапорной фильтрации отличаются выбором зависимостей напора и относительной проницаемости от влагосодержания: ненасыщенная модель использует нелинейные функции, а безнапорная – кусочно-линейные.

Решение задач ненасыщенной и безнапорной фильтрации проводится в программном комплексе GeRa (геомиграция радионуклидов) [1]. Для дискретизации уравнения Ричардса используется полностью неявная схема по времени и *метод конечных*

объемов (МКО) с различными аппроксимациями потоков на неструктурированных сетках. Для решения получаемых систем нелинейных уравнений используется широко распространенный модифицированный *модифицированный метод простой итерации* (ММПИ) [2]. Во многих случаях ММПИ замедляет расчеты, требуя уменьшать шаг по времени для своей сходимости.

На замену ММПИ в GeRa для двухточечной схемы МКО реализован метод Ньютона в двух вариантах: с фиксированной во всех уравнениях главной переменной h и с переключением главных переменных между h и θ на каждой итерации в зависимости от насыщенности в ячейках [3].

При тестировании на различных задачах ненасыщенной фильтрации, в том числе с сильно неоднородными средами, сухими начальными условиями и возникновением зон полной насыщенности в расчетной области лучше всех показал себя *метод Ньютона* с переключением главных переменных. Его итерации занимают в 2–3 раза больше времени, чем итерации ММПИ, но это компенсируется более быстрой сходимостью. Главной же причиной более быстрой работы является возможность выбора существенно больших шагов по времени, что и дает сокращение времени расчетов в 2–10 раз на большинстве задач и до 1000 раз на особо сложных задачах типа капиллярного барьера [4]. Метод Ньютона без переключения работал дольше всех из-за не менее жестких ограничений на шаг по времени, чем у ММПИ. Метод Ньютона в обоих вариантах оказался чувствителен к выбору линейного решателя. Не на всех задачах удалось успешно провести расчеты с помощью обычно используемого в GeRa стабилизированного метода бисопряженных градиентов (BiCGStab) с переобуславливателем ILU (3) из пакета PETSc [5], и его приходилось заменять на прямой метод LU-разложения из того же пакета. Среди других испробованных прямых решателей – метода прогонки (для одномерных задач) и мультифронтального метода факторизации для разреженных матриц из пакета UMFPACK [6] – последний оказался непригодным, поскольку из-за накапливающихся ошибок решения сильно ухудшал сходимость метода Ньютона.

На задачах безнапорной фильтрации, напротив, метод Ньютона без переключения переменных оказался самым эффективным. Все рассмотренные задачи успешно решались с применением BiCGStab + ILU (3) в качестве линейного решателя. На некоторых задачах моделирования реальных объектов, где ММПИ даже на не очень мелких сетках (десятков тысяч ячеек) работал крайне медленно и с измельчением сетки заставлял уменьшать и шаг по времени, удалось сократить время расчетов более чем в 10 раз. Пример полученного решения для реального объекта показан на рис. 1.

Проведенные расчеты показали, что при решении нелинейных задач, возникающих при моделировании фильтрации подземных вод в приповерхностной зоне, метод Ньютона позволяет существенно сократить время расчетов по сравнению с модифицированным методом простой итерации. При этом в случае ненасыщенной фильтрации предпочтительнее использовать метод Ньютона с переключением переменных, а в случае безнапорной фильтрации – без переключения. Описанные методы внедрены в программный комплекс GeRa на замену модифицированному методу простой итерации.

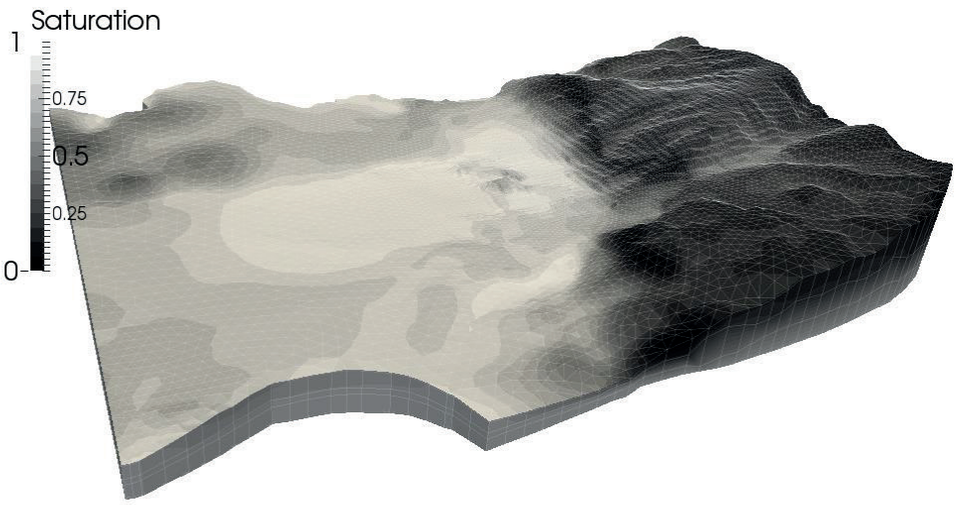


Рис. 3. Полученное с помощью безнапорной модели распределение насыщенности (область растянута в 10 раз по вертикали)

Литература

1. *Капырин И.В.,. Иванов В.А, Копытов Г.В., Уткин С.С.* Интегральный код GeRa для обоснования безопасности захоронений РАО // Горный журнал. 2015. №10. С. 44–50.
2. *Celia M., Bouloutas E.* A general mass-conservative solution for unsaturated flow equation // Water Resources Research. 1990. V. 26, N7. P. 1483–1496.
3. *Diersch H.-G., Perrochet P.* On the primary variable switching technique for simulating unsaturated-saturated flows // Advances in Water Resources. 1999. V. 23, I. 3. P. 271–301.
4. *Webb S.W.* Generalization of Ross' tilted capillary barrier diversion formula for different two-phase characteristic curves // Water Resour. Res. 1997. V.33, N 8. P. 1855–1859.
5. Portable Extensible Toolkit for Scientific Computing. https://www.mcs.anl.gov/petsc/
6. https://people.sc.fsu.edu/~jburkardt/cpp_src/umfpack/umfpack.html

УДК 517.929, 517.958:57

Управление моделями вирусных инфекций на основе оптимальных возмущений

М.Ю. Христиченко

Институт вычислительной математики РАН

Разработка математических моделей для описания и исследования динамики инфекционных заболеваний имеет своей конечной целью анализ характеристик чувствительности процессов к воздействиям различной природы, изменяющих параметры соответствующей динамической системы и её состояние. Данный доклад посвящен новому подходу к построению мультимодальных воздействий на иммунную систему в хронической фазе вирусной инфекции в рамках математических моделей с запаздывающим аргументом, предложенному в работах [1, 2] и основанному на оптимальных возмущениях. В первой части кратко излагаются результаты, полученные в этих работах. Эти результаты заключаются в перенесении понятия оптимального возмущения на системы с запаздыванием, разработке алгоритма вычисления оптимальных возмущений для таких систем и применении оптимальных возмущений для возмущения стационарных состояний модели экспериментальной инфекции, вызванной вирусами лимфоцитарного хориоменингита, представляющей собой систему из четырёх нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим временем.

Во второй части доклада описаны новые исследования, проведённые автором доклада, в рамках которых были использованы новые, более адекватные с точки зрения

медицины (основанные на фармококинетических моделях) базисные функции и локальные нормы. Также были проведены соответствующие численные эксперименты и выполнено сравнение полученных результатов с предыдущими. В дальнейшем планируется применить разработанный подход построения мультимодальных воздействий к исследованию ВИЧ-инфекции, что в частности позволит провести сравнение с данными медицинских исследований.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 16-01-00572.

Литература

1. *Bocharov G.A., Nechepurenko Y.M., Khristichenko M.Y., Grebennikov D.S.* Maximum response perturbation based control of virus infection model with time-delays // RJNAMM 2017. V. 32, N 5.
2. *Бочаров Г.А., Нечепуренко Ю.М., Христиченко М.Ю., Гребенников Д.С.* Управление моделями вирусных инфекций с запаздывающими переменными на основе оптимальных возмущений // Препринт ИПМ им. Келдыша 2017.

УДК:519.6

Детерминистический и стохастические подходы к моделированию внутриклеточной репликации ВИЧ

О.Г. Орлова

Институт вычислительной математики РАН
Московский физико-технический институт (государственный университет)

Данное исследование посвящено построению и исследованию математической модели внутриклеточной репликации вируса иммунодефицита человека (ВИЧ-1). Разработанная модель объединяет в себе все основные стадии репликации вируса ВИЧ-1 в клетке человека, начиная с момента связывания вирусов с рецепторами иммунных клеток и заканчивая созреванием нового вируса [1].

Модель сформулирована в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В ней используются 35 параметров, оцененных по данным клинических, экспериментальных исследований, имеющимся в опубликованной литературе. В общем виде система записывается следующим образом:

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = f(\vec{y}, \vec{\rho}),$$

где $\vec{y} \in R_+^{25}$ – пространство переменных, $\vec{\rho} \in R_+^{35}$ – пространство параметров. В моделе применен блочный подход, выделяются следующие стадии репликации.

1. Проникновение в клетку.
2. Обратная транскрипция.
3. Интеграция.
4. Транскрипция.
5. Трансляция вирусных белков.
6. Сборка, почкование и созревание вируса.

Часть параметров модели может изменяться под действием лекарств. Численные решения получены в среде matlab. Верификация модели проводилась по реальным данным, опубликованным в работах [2, 5–8]. Она осуществлялась по данным кинетики стадий внутриклеточной репликации и численностям (количеству молекул) участвующих в процессе репликации переменных (компонент).

В связи с тем, что переменные модели – малые и дискретные величины, была построена стохастическая версия модели на основе алгоритма Гиллеспи (Logarithmic Direct Method) [3]. Для реализации модели использована среда C. Проведена верификация стохастической версии с помощью другого стохастического алгоритма Гиллеспи (First

Reaction Method), реализованного в среде MATLAB. Также с помощью стохастических моделей исследован вопрос зависимости вероятности успешного инфицирования от начального числа вирусов. В связи с большим количеством параметров был проведен анализ чувствительности на основе сопряженных уравнений [4]. Из анализа чувствительности можно выделить параметры, изменения которых влияют на продукцию вирусов сильнее всего.

Разрабатываемая модель будет использована для интеграции в многомасштабные модели динамики ВИЧ-инфекции в качестве отдельного модуля.

Работа выполнена в рамках проекта РНФ № 15-11-00029.

Литература

1. *Черешнев В.А., Бажан С.И., Бахметьев Б.А., Гайнова И.А., Бочаров Г.А.* Системный анализ патогенеза ВИЧ-инфекции. Успехи современной биологии. 2012. Т. 132, № 2. С. 115–140.
2. *Bindu Reddy, John Yin*. Quantitative intracellular kinetics of HIV type 1 // AIDS Res Hum Retroviruses. 1999. 15. P. 273–283.
3. *Gillespie DT*. Stochastic simulation of chemical kinetics. //Annu. Rev. Phys. Chem. 2007. 58:35–55.
4. *Marchuk G.I., Shutyaev V., Bocharov G*. Adjoint equations and analysis of complex systems: Application to virus infection modelling. // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2005. V. 184, I. 1. P.177– 204.
5. *Chad M. Swanson, Michael H. Malim*. SnapShot: HIV-1 Proteins. 2008.
6. *Mohammadi P., Desfarges S., Bartha I., Joos B., Zangger N., Muñoz M., Günthard H.F., Beerenwinkel N., Telenti A., Ciuffi A.* 24 hours in the life of HIV-1 in a T cell line // PLoS Pathog. 2013 Jan; 9(1):e1003161.
7. *Dimitrov D.S., Hillman K., Manischewitz J., Blumenthal R., Golding H.* Kinetics of soluble CD4 binding to cells expressing human immunodeficiency virus type 1 envelope glycoprotein // J Virol. 1992 Jan; 66(1):132-138.
8. *Likhoshvai V.A., Khlebodarova T.M., Bazhan S.I., Gainova I.A., Chereshnev V.A., Bocharov G.A.* Mathematical model of the Tat-Rev regulation of HIV-1 replication in an activated cell predicts the existence of oscillatory dynamics in the synthesis of viral components // BMC Genomics 2014. 15(Suppl 12):S1.

УДК 519.6

Двумерная модель передвижения клеток иммунной системы в лимфоузле

Д.С. Гребенников

Московский физико-технический институт (государственный университет)
Институт вычислительной математики РАН

Клеточный иммунный ответ на вирусные инфекции происходит преимущественно в лимфатических узлах. Специфические Т-клетки мигрируют в лимфоузлах в поисках антигенпрезентирующих клеток (АПК) для активации и дальнейшего развития иммунного ответа. Ввиду малой доли специфических Т-клеток от общего числа клеток, характеристики их подвижности оказывают существенное влияние на эффективность поиска АПК [1].

Иммунные клетки в лимфоузле расположены в плотно упакованной среде с высокой степенью вязкости. Их передвижение определяется а) внутренней подвижностью клеток, регулируемой реорганизацией цитоскелета или мембраны, б) механическими взаимодействиями с внешней средой (другими клетками, иными структурами). Внешние молекулярные сигналы могут влиять на внутреннюю подвижность клеток (контактное ингибирование передвижения (КИП), хемотаксис и др.).

В данной работе была построена двумерная модель передвижения иммунных клеток, которая описывает основные механизмы подвижности клеток феноменологически. Основным уравнением модели является второй закон Ньютона с вязким трением, пропорциональным скорости движения, потенциальной силой взаимодействия

контактирующих клеток, стохастической силой внутренней подвижности клеток. Потенциальная сила взаимодействия параметризована силой межклеточной адгезии, которая является слабой неспецифической силой между Т-клетками и существенно большей специфической силой между Т-клетками и АПК [2]. Сила, определяющая характеристики подвижности клеток, задается по аналогии с тем, как задаются скорости в модели IHomoCRW [3] (наблюдаемое *in vivo* коррелированное случайное блуждание с обратной зависимостью между поступательной скоростью клетки и скоростью поворота клетки). На полученную силу для расчета подвижности влияют контактирующие клетки (сдвигается направление силы и уменьшается модуль силы пропорционально их количеству), что имплементировано по аналогии с моделью КИП [4].

Параметры построенной модели оценены по экспериментальным данным, найденным в литературе. Статистические характеристики передвижения клеток откалиброванной модели были сравнены с экспериментальными данными. Сравниваемый статистический профиль состоял из трех распределений: поступательных скоростей клеток, скоростей поворота клеток и индексов меандрирования [3]. Откалиброванная модель близко воспроизводит экспериментальный профиль. Модель передвижения клеток будет использоваться в качестве блока разрабатываемой гибридной модели иммунных процессов в лимфоузле для исследования эффективности клеточного иммунного ответа на вирусные инфекции.

Исследования выполнены при поддержке проекта РНФ № 15-11-00029 (постановка задачи, построение модели, анализ биофизических параметров) и проекта РФФИ № 17-01-00636 (численная реализация модели).

Литература

1. *Miller M.J., Hejazi A.S., Wei S.H., Cahalan M.D., Parker I.* T-cell repertoire scanning is promoted by dynamic dendritic cell behavior and random T cell motility in the lymph node // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 2004. V. 101. P. 998–1003.
2. *Bell G.I.* Models for the specific adhesion of cells to cells // Science. 1978. V. 200. P. 618–627.
3. *Read M.N., Bailey J., Timmis J., Chtanova T.* Leukocyte Motility Models Assessed through Simulation and Multi-objective Optimization-Based Model Selection // PLOS Comp. Biology. 2016. V. 12. P. e1005082.
4. *Zimmermann J., Camley B.A., Rappel W.J., Levine H.* Contact inhibition of locomotion determines cell–cell and cell–substrate forces in tissues // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 2016. V. 113. P. 2660–2665.

УДК 519.63

Оптимизация параметров двухсеточного метода с помощью глубоких нейронных сетей

А.М. Катруца

Московский физико-технический институт (государственный университет)

В работе рассматривается задача оптимизации операторов интерполяции и проекции в геометрическом двухсеточном методе [1] решения уравнений в частных производных с граничными условиями Дирихле. Предложенный метод легко распространяется на случай нескольких сеток. Идея двухсеточного метода заключается в увеличении шага сетки, проекции матрицы системы и невязки на грубую сетку, решении уравнения на грубой сетке и интерполирования решения на исходную сетку. Ключевыми параметрами метода являются операторы проекции и интерполяции, которые существенно влияют на сходимость метода. Например, если для уравнения Гельмгольца в случае высоких частот использовать стандартные операторы линейной интерполяции и проекции, то двухсеточный метод не сходится.

Для оценки качества используемых операторов естественно использовать спектральный радиус соответствующей матрицы итераций, действие которой эквивалентно одной итерации двухсеточного метода. Однако вычислительная сложность решения задачи

минимизации спектрального радиуса не позволяет решать её напрямую. Это обусловлено негладкостью задачи и необходимостью вычислять главные собственные векторы матрицы итерации для формирования субградиента [2]. Поэтому было предложено использовать аппроксимацию спектрального радиуса с помощью формулы Гельфанда [3]. Используемая аппроксимация имеет стохастическую несмещённую оценку, основанную на оценке следа матрицы [4]. Эта оценка позволяет получить стохастический градиент исходной аппроксимации и использовать его в методах типа стохастического градиентного спуска. Для эффективного вычисления стохастического градиента одна итерация двухсеточного метода была представлена в виде глубокой нейронной сети с дифференцируемыми слоями, зависящими от искомых операторов. Такое представление двухсеточного метода позволяет использовать метод обратного распространения ошибки для вычисления стохастического градиента.

Важным условием сходимости методов первого порядка к лучшему локальному минимуму является подходящий выбор начального приближения, поскольку для различных начальных приближений метод может сходиться к различным локальным минимумам. Так как для уравнения Пуассона линейные операторы проекции и интерполяции обеспечивают сходимость двухсеточного метода, они были использованы как начальные приближения операторов в процессе решения задачи оптимизации. Однако для уравнения Гельмгольца такая инициализация приводила к сходимости к неудовлетворительному локальному минимуму. Для решения этой проблемы был использован метод гомотопии, который вводит последовательность промежуточных задач, таких что в качестве начального приближения для каждой следующей используется решение предыдущей задачи. Использование этого подхода позволило получить операторы, гарантирующие сходимость двухсеточного метода для уравнения Гельмгольца в случае высоких частот.

Предложенный метод оптимизации операторов проекции и интерполяции в двухсеточном методе был экспериментально проверен для одномерных уравнений Пуассона, Гельмгольца (для низких и высоких частот, а также для случая непостоянного волнового числа) и сингулярно возмущённого уравнения диффузии-конвекции. Во всех экспериментах предложенный метод даёт операторы проекции и интерполяции, для которых спектральный радиус матрицы итераций меньше, чем в случае использования линейных операторов проекции и интерполяции. Несмотря на то, что рассмотренные одномерные случаи не так интересны на практике, полученные результаты дают подтверждение работоспособности идеи оптимизации операторов проекции и интерполяции. Предложенный метод будет распространён на рассматриваемые уравнения в 2D и 3D.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (грант № 14.756.31.0001) и РНФ (грант № 17-11-01376).

Литература

1. *Briggs W.L., Henson V.E., McCormick S.F.* A multigrid tutorial. Society for Industrial and Applied Mathematics. 2000.
2. *Nesterov Y., Protasov V.Y.* Optimizing the spectral radius // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. 2013. V. 34, N 3. P. 999–1013.
3. *Kozyakin V.* On accuracy of approximation of the spectral radius by the Gelfand formula // Linear Algebra and its Applications. 2009. V. 431, N 11. P. 2134–2141
4. *Hutchinson M.F.* A stochastic estimator of the trace of the influence matrix for laplacian smoothing splines // Communications in Statistics-Simulation and Computation. 1990. V. 19, N 2. P. 433–450.

УДК 519.6

Метод решения задачи на собственные значения в тензорных форматах с использованием графических ускорителей

М.В. Рахуба[1,3], А.В. Новиков[2,4], И.В. Оселедец[1,2]

[1]Сколковский институт науки и технологий
[2]Институт вычислительной математики РАН
[3]Московский физико-технический институт (государственный университет)
[4]Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

В данной работе рассматривается задача поиска собственных значений и собственных векторов многомерных линейных операторов. Особенностью задачи является то, что матрица оператора и собственные векторы представляются в виде разложения в тензорный поезд [1]. Разложение в тензорный поезд является способом представления многомерных массивов, базирующихся на обобщении малорангового разложения матриц на многомерный случай.

Для ряда задач было показано, что собственные векторы могут быть приближены в формате тензорного поезда, то есть они принадлежат некоторому нелинейному многообразию малой размерности. В качестве отправной точки для поиска этих собственных векторов вдоль многообразия низкого ранга используется метод LOBPCG. Для более эффективной реализации базис, состоящий из приближений к собственным векторам, невязок и сопряженных градиентов на каждой итерации проецируется на касательное пространство одного из текущих приближений к собственным векторам. Данная проекция позволяет эффективно вычислять матрицу Грама (спроектированного) базиса, а также вычислять линейные комбинации векторов базиса без роста рангов.

Для эффективной параллелизации вычислений был разработан программный комплекс для работы с разложением тензорного поезда, поддерживающий работу на графических ускорителях. С использованием данного комплекса исходный код итерационного метода занимает 200 строк на языке Python. При расчете колебательного спектра молекулы ацетонитрила [3] с помощью уравнения Шредингера предложенный код позволяет ускорять вычисления более чем в 20 раз по сравнению с методом без использования GPU и без идеи проекции на касательное пространство [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 16-31-00372.

Литература

1. *Oseledets I.V.* Tensor-train decomposition // SIAM J. Sci. Comput. 2011. V. 33. N 5. P. 2295–2317.
2. *Rakhuba M.V., Oseledets I.V.* Calculating vibrational spectra of molecules using tensor train decomposition // J. Chem. Phys. 2016. V. 145.
3. *Thomas P.S., Carrington Jr T.* Using Nested Contractions and a Hierarchical Tensor Format To Compute Vibrational Spectra of Molecules with Seven Atoms // J. Phys. Chem. A. 2015. V. 119, N 52. P. 13074–13091.

УДК 51-76

Графический интерфейс для построения графа коронарных сосудов с КТ снимков

Р.А. Прямоносов

Московский физико-технический институт (государственный университет)
Институт вычислительной математики РАН

Сегментация и построение графа сосудов является ключевым моментом в моделировании фракционного резерва кровотока (ФРК) – нового количественного стандарта в принятии решений об операциях на сосудах. Виртуальный ФРК

рассчитывается на основе графа сосудов с метками стенозов и стентов конкретного пациента. В предыдущей работе [1] был разработан алгоритм построения графа коронарных сосудов, основанный на обработке наборов данных в формате DICOM. Эти наборы представляют собой контрастированные КТ-снимки сердца в артериальной фазе. Алгоритм состоял из следующих этапов

1. Сегментация аорты.
2. Вычисление сосудистости.
3. Поиск точек устья и сегментация ветвей коронарного дерева.
4. Скелетонизация и удаление ложных ответвлений.
5. Построение графа на основе скелетонизации.

Для сегментации аорты использовался алгоритм IDT [2], на этапе 2 – фильтр сосудистости Франжи [3]. На этапе 3 точки устья выбирались как два локальных максимума сосудистости. Коронарные деревья сегментировались по порогу сосудистости как компоненты связности, содержащие точки устья. На этапе 4 вычислялся скелетон – топологически эквивалентное исходному объекту, центральное, тонкое множество точек; затем удалялись сегменты скелетона, не отвечающие реальным сосудам. На этапе 5 сегменты скелетона рассматривались в качестве ребер графа, а стыки сегментов скелетона – в качестве вершин графа. Все этапы подробно описаны в [1] и схематично показаны на рис. 1.

Практика обработки КТ-данных показала, что в некоторых случаях требуется дополнительный подбор параметров, который невозможен без удобной визуализации. Во-первых, возможны случаи с разным охватом области вокруг сердца, разной областью видимости, разным разрешением, различными протоколами записи. Во-вторых, у разных пациентов могут значительно отличаться размеры аорты, форма патологий, видимость сосудов. В-третьих, для точной обработки стенозов требуется удобный пользовательский интерфейс. Эти причины обуславливают необходимость графического интерфейса. Кроме того, наличие удобного и стабильного интерфейса снижает требования к оператору, использующему программу.

В коллаборации с МГУ алгоритм сегментации был интегрирован в медицинскую платформу MultiVox [4]. Этапы 1, 2–3 и 4–5 были организованы в отдельные шаги, на каждом из которых возможна коррекция результатов путем выбора параметров (рис. 2). Это решение, с одной стороны, позволяет получить максимальную стабильность для различных наборов данных. С другой стороны, выбранные параметры алгоритма сегментации сохраняются для обработки следующих наборов данных, что дает возможность сохранить автоматизацию алгоритма в случае похожих наборов. Кроме того, инструменты MultiVox позволяют выполнить предварительную обработку изображений (удаление срезов или прореживание серии DICOM).

После построения графа пользовательский интерфейс позволяет выбрать конкретные сосуды и пометить участки сосудов со стенозами или стентами в ручном режиме (рис. 3 слева). Помеченные участки сосудов визуализируются на 3D-сегментации (рис. 2 справа) и на 2D-представлениях отдельных сосудов (Рис. 3 слева). После окончательной обработки данных, граф сосудов записывается в файл и передается автоматическому модулю расчета виртуального ФРК. Для исследовательских целей организована автоматическая отрисовка графа с помощью языка DOT [5], с учетом меток на патологических участках (рис. 3).

Программа реализована в виде динамической библиотеки на языке C++, использует библиотеку Insight Toolkit [6] и подключена к платформе MultiVox. Все расчеты производятся на CPU под ОС Windows, причем программа разработана специально для персонального компьютера или ноутбука.

Результаты данной работы позволят операторам, в том числе и кардиологам, рассчитывать виртуальный ФРК на ПК без дополнительных знаний о математическом моделировании. Также данное исследование может быть полезно для моделирования течения крови в отсутствие ресурсов для сегментации.

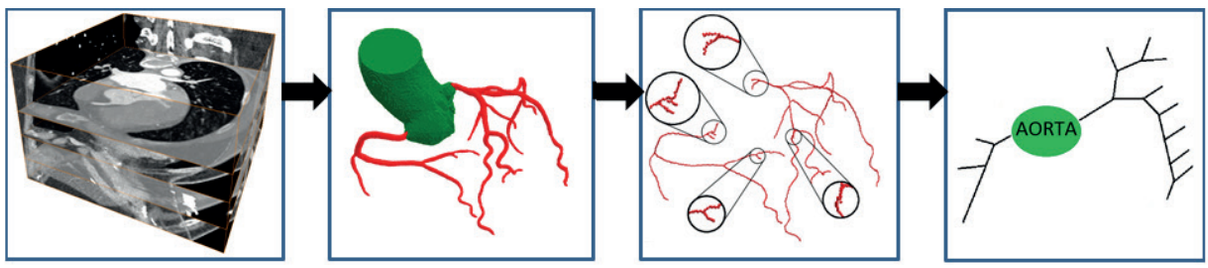


Рис. 1. Иллюстрация алгоритма [1] построения дерева коронарных сосудов: входные данные в формате DICOM, сегментация аорты (зеленый) и коронарных сосудов (красный), скелетон с ложными ответвлениями, граф сосудов

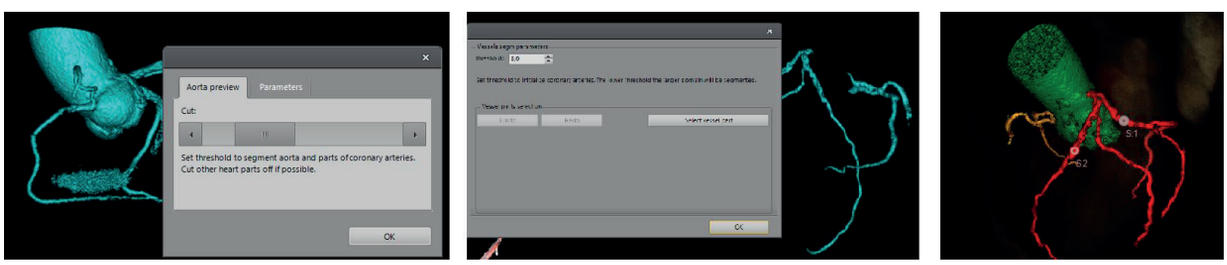


Рис. 2. Интерфейсы сегментации аорты, коронарных артерий и визуализация результата (точками показаны участки со стенозами)

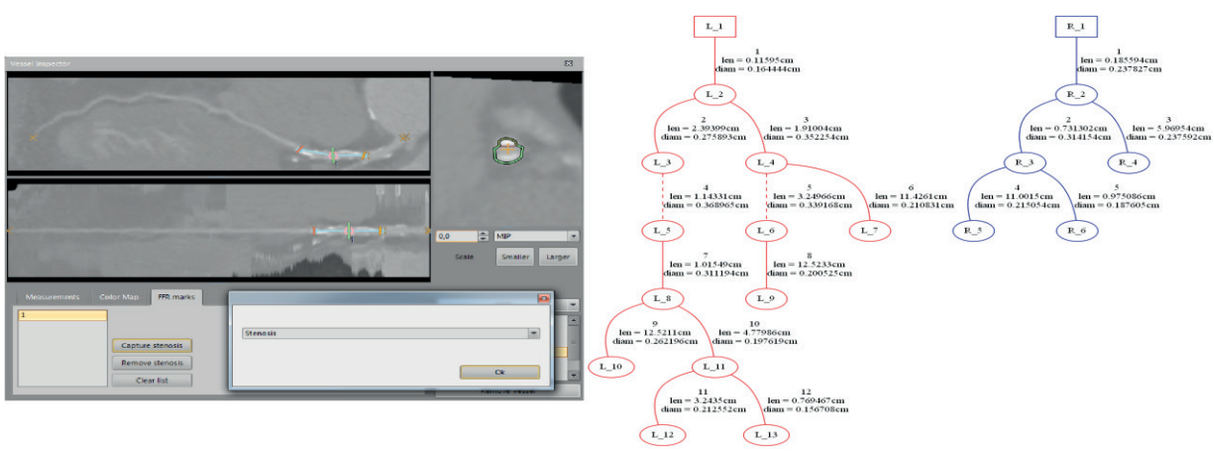


Рис. 3. Слева – интерфейс обработки стенозов и стентов, справа – DOT-представление графа

Литература

1. *Danilov A., Ivanov Y., Pryamonosov R., Vassilevski Y.* Methods of Graph Network Reconstruction in Personalized Medicine // International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering. 2015. DOI: 10.1002/cnm.2754.
2. *Grady L.* Fast, quality, segmentation of large volumes – Isoperimetric distance trees // Computer Vision ECCV 2006. 2006. P. 449–462.
3. *Frangi A.* [*et al.*]. Multiscale vessel enhancement filtering // Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention. MICCAI'98. 1998. P. 130–137.
4. https://www.multivox.ru/
5. *John Ellson* [*et al.*]. Graphviz and dynagraph – static and dynamic graph drawing tools // Graph drawing software. 2003. P.127–148.
6. https://itk.org/

УДК 519.6

Двумерная модель F-слоя земной ионосферы

П.А. Останин

Московский физико-технический институт (государственный университет)

В работе рассматривается задача построения динамической модели *F*-слоя земной ионосферы с целью использования в качестве вычислительного блока в уже разработанной в ИВМ РАН модели нейтральной термосферы. Актуальность задачи связана с высоким практическим интересом к исследованию космической погоды, играющей особую роль для систем радиосвязи, спутниковых систем, а также для всей космической отрасли в целом. Состояние системы термосфера–ионосфера определяет условия распространения радиосигналов для систем радиосвязи, радиолокации и навигационных систем, а также характеристики движения низкоорбитальных спутников и космических аппаратов.

Основное решаемое в модели уравнение представляет собой уравнение неразрывности для электронной концентрации. При рассмотрении только *F*-слоя используются стандартные приближения: преобладание ионизации атомарного кислорода и рекомбинации ионов кислорода с главными компонентами воздуха, квазинейтральности плазмы, амбиполярной диффузии вдоль магнитных силовых линий, преобладание электромагнитного поперечного дрейфа, а также приближение дипольного магнитного поля Земли и совпадение географических и магнитных полюсов. В этих предположениях уравнение неразрывности можно записать в виде:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = P - kn - \operatorname{div}(n\vec{u}_{n||}) - \operatorname{div}\left(n\frac{[\vec{E}\times\vec{B}]}{B^2} \right) + \operatorname{div}\left(D\left[\vec{\nabla}_{||} n + n\frac{1}{T_p}\vec{\nabla}_{||} T_p - \frac{nm_i}{2kT_p}\vec{g}_{||} \right] \right). \quad (1)$$

Здесь $D = \dfrac{2kT_p}{m_i \nu_{in}}$ – коэффициент амбиполярной диффузии, $\nu_{in} \approx 10^{-14} \cdot \sqrt{\dfrac{1}{2}(T_i + T_n)} \cdot n_O [\text{с}^{-1}]$ – частота столкновений O^+ с нейтралами, m_i – атомная масса иона, $\vec{g}$ – гравитационное поле Земли, $\vec{E}$ – электрическое поле внешней природы (поля магнитосферной конвекции и т.п.) $\vec{B}$ – магнитное поле Земли, $\overrightarrow{u_n}$ – скорость нейтрального ветра, T_n – температура нейтралов, $T_p = \dfrac{1}{2}(T_e + T_i)$ – полусумма электронной и ионной температур, а индекс $||$ отвечает проекции на силовые линии магнитного поля [1]. Слагаемые в правой части выражают процессы ионизации O в O^+ и потери в результате рекомбинации. Температуры T_i, T_e, T_n вычисляются по аналитическим формулам: $T(z) = T_\infty - (T_\infty - T_0)\exp\left(-\dfrac{g}{RT_\infty}(z - z_0) \right)$, которые согласуются с эмпирическими данными. Константы в формулах для температур полагаются равными соответственно $T_{n\infty} = 800 \sim \text{К}$, $T_{i\infty} = 950 \sim \text{К}$, $T_{e\infty} = 2200 \sim \text{К}$.

Численный алгоритм решения (1) основан на методе расщепления, причем расщепление происходит как по физическим процессам, так и по геометрическим направлениям (с учётом направления магнитных силовых линий и его проекции на координатные оси при расщеплении). Векторное трехмерное уравнение преобразуется к сферической системе координат в приближении тонкого сферического слоя, после чего на первом шаге решается уравнение, описывающее плазмохимические процессы и диффузию в проекции на вертикальное направление, на втором шаге добавляется часть полного оператора, отвечающая диффузии вдоль широты, наконец, на третьем шаге решается

задача, описывающая трёхмерный перенос. Особенности рассматриваемого уравнения приводят к тому, что требуется использовать монотонные и консервативные схемы, чему уделено особое внимание при построении численной модели. Детальное рассмотрение постановки задачи, численных методологий и реализаций первого шага описано в [2].

В работе рассматривается численная реализация первых двух шагов расщепления, что фактически отвечает двумерной постановке задачи без учёта нейтрального и поперечного переноса. Использованы те же схемы, что и при реализации первого шага [2]. При этом для использования одномерных прогонок вдоль широты и высоты применяется нелинейная явно-неявная аппроксимация смешанных производных, сводящая соответствующие слагаемые к добавкам к дивергентному переносу вдоль рассматриваемых направлений.

Второй шаг расщепления требует более высокого разрешения и меньших шагов по времени в силу возникающих неустойчивостей. Результаты расчета показывают, что при фиксированных значениях функций фотоионизации P и рекомбинации k, отвечающих дневному времени, разностная задача имеет не зависящее от времени решение. Получаемые стационарные высотные профили близки к наблюдаемым в средних широтах невозмущённым профилям электронной концентрации в F-слое. Таким образом, можно видеть, что как модель, основанная только на первом шаге расщепления, так и модель, использующая оба шага, воспроизводят состояние ионосферы в средних широтах близко к наблюдаемым данным [1], а учет проекций и расчет модели с обоими шагами расщепления позволяет улучшить результаты в приэкваториальной области. При этом сравнение результатов вычисления проводится с данными известных эмпирических моделей (IRI, SIMP [5–6] и другие). Планируется также детальное сравнение статистик с накопленными данными ионозондов и интегральных GPS TEC.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-17-01305).

Литература

1. *Schunk R. W., Nagy A.F.* Ionospheres Physics, Plasma Physics, and Chemistry. New York: Cambridge University Press, 2008. 628 p.
2. *Останин П.А., Кулямин Д.В., Дымников В.П.* Численное моделирование F слоя Земной ионосферы // Международная молодежная школа и конференция по вычислительно-информационным технологиям для наук об окружающей среде CITES-2017, 2017. С. 121–124.
3. *Kulyamin D.V., Dymnikov V.P.* A three-dimensional model of general theromspheric circulation // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling, 2013. V. 28(4). P. 353–380.
4. *Кулямин Д.В., Дымников В.П.* Моделирование климата нижней ионосферы // Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана. 2015. Т. 51(3). С. 317–337.
5. *Bilitza D., McKinnell L.A., Reinisch B., Fuller-Rowell T.* The International Reference Ionosphere (IRI) today and in the future // J. Geodesy, 2011. V. 85. P. 909–920.
6. *Leshchinskaya T.Y., Mikhailov V.V.* SIMP-1 model: mapping of fo F2 monthly medians over the Northern // Geomagnetism and Aeronomy. 2016. V. 56, N 6. P. 733–741.

УДК: 519.688

Параллельное моделирование нелинейных уравнений мелкой воды

А.В. Чаплыгин[1], Н.А. Диансκий[2,3], А.В. Гусев[2]

[1]Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
[2]Институт вычислительной математики РАН
[3]Государственный океанографический институт

В работе рассматривается система нелинейных уравнений мелкой воды (УМВ), являющаяся блоком сигма-модели общей циркуляции океана INMOM (Institute of Numerical Mathematics Ocean Model), развиваемой в ИВМ РАН [1]. Решение системы УМВ занимает существенную часть времени, необходимого для решения полной задачи

циркуляции океана, поэтому возникает вопрос об эффективной параллельной реализации. Целью данной работы является реализация параллельного алгоритма решения нелинейных УМВ для использования на массивно-параллельных вычислительных системах как в качестве блока модели INMOM, так и независимо, например, для моделирования цунами.

Полная система нелинейных УМВ в модели INMOM записывается в виде

$$\frac{\partial r_x r_y h\,u}{\partial t} + T_u(u,v) - F_u(u,v) - h\,r_x\,r_y\,l\,v + r_y h\,g\frac{\partial \zeta}{\partial x} + r_x\,r_y\,\frac{gn^2}{h^{\frac{1}{3}}}u\sqrt{u^2+v^2} = RHS_u,$$

$$\frac{\partial r_x r_y h\,v}{\partial t} + T_v(u,v) - F_v(u,v) + h\,r_x\,r_y\,l\,u + r_x h\,g\frac{\partial \zeta}{\partial y} + r_x\,r_y\,\frac{gn^2}{h^{\frac{1}{3}}}v\sqrt{u^2+v^2} = RHS_v,$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{r_x r_y}\left(\frac{\partial u\,r_y h}{\partial x} + \frac{\partial v\,r_x h}{\partial y}\right) = 0,$$

где u, v – компоненты скорости; r_x, r_y – метрические коэффициенты, возникающие при записи уравнений в произвольной ортогональной системе координат [2]; l – параметр Кориолиса; g – ускорение свободного падения; n – коэффициент донного трения, выписанного в форме, предложенной в японской модели TUNAMI [3]; ζ – отклонение уровня; $h = H + \zeta$ – эффективная глубина океана; H – глубина океана в состоянии покоя. Операторы вязкости F_u, F_v записываются как дивергенция тензора напряжений; операторы переноса T_u, T_v записываются в дивергентной форме. В общем виде в правых частях RHS_u, RHS_v рассчитываются градиенты атмосферного давления и напряжения трения ветра.

На боковой поверхности для скорости задаются граничные условия непротекания и свободного скольжения.

Дискретизация уравнений по пространству проводится со вторым порядком точности на разнесенной ‘C’-сетке по классификации Аракавы, для дискретизации по времени используется явная схема «чехарда со средней точкой» [3].

При параллельной реализации блока нелинейных УМВ, использовался двумерный метод декомпозиции области. Были реализованы два MPI режима работы: режим HCNC (High-Communication No-Extra Computation) [5], который использует большое количество пересылок между процессорами, но не использует лишние вычисления и режим LCHC (Low-Communication High-Extra Computation), который уменьшает количество пересылок за счет увеличения внерасчетной области и лишних вычислений [4, 5]. Увеличив внерасчетную границу в $2n$ раза для режима LCHC, количество пересылок уменьшится в n раз по сравнению с режимом HCNC. Также реализован гибридный режим MPI+OpenMP.

Тестирование предложенного алгоритма решения УМВ проводилось на кластере ИВМ РАН и на кластере МВС-10П (МСЦ РАН), было проведено сравнение масштабируемости режимов. Продемонстрировано, что на небольшом количестве ядер (для данных размеров задачи) модель в режиме HCNC показывает ускорение лучше, чем в режиме LCHC, в котором происходят лишние вычисления. Но на большем количестве ядер модель в режиме LCHC показывает лучшее ускорение, чем в режиме HCNC, в котором затраты времени на коммуникационные задержки уже существенны. Например, для задачи с сеткой 289×163 такая граница установлена в 60–70 ядер. Показана эффективность гибридного в сравнении с чистым MPI-режимом.

С помощью параллельной реализации блока нелинейных УМВ было проведено моделирование цунами 2011 года в Японии, приведшее к катастрофе в Фукусиме, с разрешением 4 километра. Данные по начальному возвышению в очаге цунами Тохоку были любезно предоставлены М.А. Носовым [6]. Также было проведено моделирование экстремального шторма на Азовском море в марте 2013 года с разрешением 250 метров. Атмосферные данные были взяты из модели WRF (Weather Research and Forecast Model). В обеих задачах решалась только полная система УМВ, без использования модели INMOM целиком. Было проведено сравнение с экспериментальными данными и сравнение результатов расчетов по нелинейным и линеаризованным УМВ. Показано, что расчет длинных волн практически не отличается для нелинейного и линеаризованного случаев, за исключением прибрежных акваторий.

Работа выполнена в рамках проекта РФФИ № 15-05-07539-а.

Литература

1. *Дианский Н.А.* Моделирование циркуляции океана и исследование его реакции на короткопериодные и долгопериодные атмосферные воздействия. – М.: Физмалит, 2012.
2. *Сухов В.Б.* О решении некоторых задач моделирования крупномасштабной динамики океана. Диссертация на соиск. уч. ст. к.ф.-м.н. М.: Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, 2009.
3. *Fumihiko I., Yalciner A.C., Ozyurt G.* Tsunami modelling model (TUNAMI model), 2006.
4. *Калмыков В.В., Ибраев Р.А.* Алгоритм с перекрытиями для решения системы уравнений мелкой воды на параллельных компьютерах с распределенной памятью // Вестник УГАТУ, Т. 17, № 5 (58). 2013.
5. *Wang G., Qiao F., Xia C.* Parallelization of a coupled wave-circulation model and its application. Ocean Dynamics, 2010.
6. *Nosov M.A., Moshenceva A.V., Kolesov S.V.* Horizontal Motions of Water in the Vicinity of a Tsunami Source // Pure Appl. Geophys. 170 (2013). P. 1647–1660.

УДК 532.5

Анализ параметризаций двумерной турбулентности в задаче моделирования неустойчивой баротропной струи

П.А. Пережогин

Институт вычислительной математики РАН

Данная работа является естественным продолжением цикла исследований, посвященных численному моделированию двумерных баротропных течений [1–3]. Задача моделирования двумерной баротропной жидкости выбрана нами по той причине, что течения, наблюдаемые в атмосфере и океане, являются квазидвумерными. Моделирование таких крупномасштабных гидродинамических процессов имеет большую практическую важность для решения задач прогноза погоды и климата. Современные вычислительные системы не позволяют полностью описывать турбулентные процессы в геофизических течениях. Фактически в численных моделях атмосферы и океана вместо явного разрешения на вычислительной сетке всех взаимодействующих масштабов турбулентного течения используется другой подход: «вихреразрешающее моделирование» (LES). В основу этого подхода заложена идея о том, что преобладающее количество энергии содержится в крупных масштабах, которые, кроме того, являются наиболее неуниверсальными. Таким образом, в данном подходе решаются уравнения динамики крупных масштабов, при этом мелкие масштабы должны быть смоделированы. Проблеме построения моделей неразрешенных на вычислительной сетке течений и посвящён данный цикл работ. Также эту проблему называют проблемой построения «турбулентных замыканий» либо проблемой построения «параметризаций турбулентности». Актуальность данной работы объясняется и тем фактом, что изучению турбулентных замыканий именно для двумерной жидкости уделено очень незначительное внимание в литературе.

Как показали наши предыдущие исследования [1], [2], динамика двумерной жидкости устроена таким образом, что нелинейные взаимодействия стремятся перераспределить энергию, приходящую от внешнего воздействия либо содержащуюся в начальном состоянии, в крупные масштабы. Это свойство большинством авторов связывается с наличием дополнительного квадратичного закона сохранения, которого нет в трехмерной жидкости, – закона сохранения энстрофии. Энстрофия посредством нелинейных взаимодействий передается в мелкие масштабы, тем самым формируя широко известный «прямой каскад энстрофии» [4]. Этот процесс ответственен за образование численного шума на характерном масштабе расчетной сетке. Численный шум обычно сглаживается при помощи добавления в правую часть уравнений динамики слагаемого, имеющего вид оператора Лапласа высокого порядка. Сглаживание – необходимая

процедура, без которой нельзя добиться устойчивости численного алгоритма. Однако эта процедура имеет и очевидный недостаток: часть энергии крупных вихрей переходит в подсеточные масштабы, что не соответствует общим представлениям о динамике двумерной жидкости. В результате получаем, что если диссипация велика, то крупные масштабы оказываются недостаточно развитыми. Для решения этой проблемы мы изучаем параметризации типа «kinetic energy backscatter» («обратное перераспределение кинетической энергии»), которые возвращают часть энергии обратно в решение.

В данной работе рассматривается модельная задача баротропной неусточивости струи. Уравнения несжимаемой жидкости имеют следующий вид:

$$\frac{du}{dt} = -\nabla p + \nu \Delta u,$$
$$\nabla \cdot u = 0,$$

где $u = \left(u_x, u_y\right)$ – вектор скорости, p – давление, ν – вязкость, а $\frac{d}{dt}$ – лагранжева производная. Мы рассматриваем данные уравнения в канале $\Omega = [0, 32\pi) \cdot [0, 2\pi)$ с периодическими граничными условиями по вертикали и с условиями втока–вытока по горизонтали:

$$u_x\big|_{x=0} = 0.1 + \exp\left(\frac{1000}{y \cdot (y - 2\pi)}\right) / \exp(-1000/\pi^2),\ u_y\big|_{x=0} = 0, \left.\frac{dp}{dx}\right|_{x=0} = 0,$$

$$\left.\frac{du_x}{dx}\right|_{x=32\pi} = 0, \quad \left.\frac{du_y}{dx}\right|_{x=32\pi} = 0, \quad p\big|_{x=32\pi} = 0.$$

Решения данных уравнений (см. рис. 1) обладают тем свойством, что такие средние по времени характеристики, как среднее течение $\langle u \rangle$, количество турбулентной кинетической энергии $\left\langle u'^2_x + u'^2_y \right\rangle / 2$, средние потоки импульса $\left\langle u'_i u'_j \right\rangle$, сходятся при повышении числа Рейнольдса. Здесь угловыми скобками обозначено осреднение по времени, а штрихом – отклонение от среднего. В данной работе проведены эксперименты при разрешениях $1024 \times 64, 2048 \times 128, 4096 \times 256$ и показана сходимость средних характеристик. Во всех расчетах вместо обычной вязкости $\nu \Delta u$ используется бигармонический оператор с коэффициентом вязкости, выбранным по формуле Смагоринского: $-\frac{\partial}{\partial x_j}(0.06 h^4 |S| \Delta S_{ij})$, где h – шаг сетки, $S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ – тензор деформаций, а $|S| = \sqrt{2 S_{ij} S_{ij}}$ – его модуль. Для самой грубой модели 1024×64 рассмотрены три основных типа подсеточных параметризаций обратного перераспределения энергии: стохастическая, eddy viscosity, модель подобия масштабов. Планируется изучить их эффективность в данной задаче.

Отдельно рассмотрена задача развития неустойчивости на периодическом квадрате, где показана эффективность модели подобия масштабов на начальном этапе развития неустойчивости, когда происходит линейный рост нормальных мод задачи. В данном случае модель подобия масштабов осуществляет перераспределение энергии из горизонтальной компоненты течения в вертикальную, тем самым ускоряя процесс развития неустойчивости.

Данная работа является промежуточным этапом работы по построению параметризаций турбулентности для модели океана FEMAO. Неустойчивая струя является аналогом течения Гольфстрим. Реальные течения, помимо баротропной неустойчивости, рассмотренной в данной работе, подвержены еще и бароклинной неустойчивости, которая генерирует энергию на масштабе бароклинного радиуса Россби. На данный момент этот масштаб хорошо разрешается на сетке в моделях атмосферы, но значительно хуже в моделях океана. По этой причине мы ориентируемся именно на модели океана.

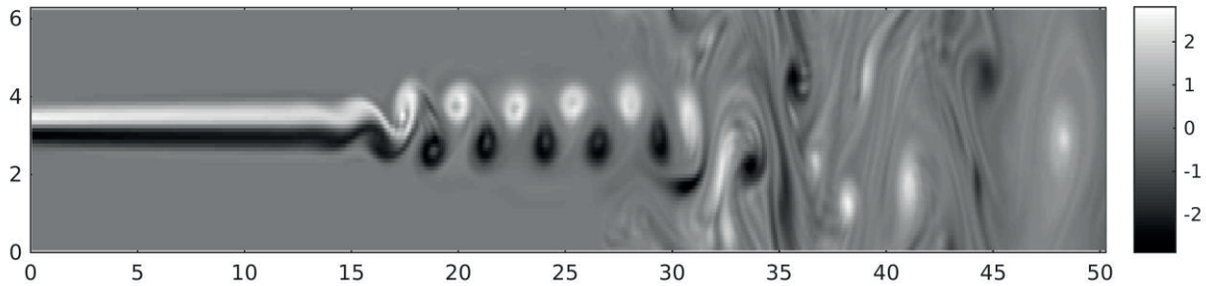


Рис. 1. Мгновенное поле завихренности $\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ после достижения статистически-равновесного состояния. Разрешение расчетной сетки 1024×64, в качестве диссипации выбран бигармонический оператор с коэффициентом вязкости, вычисляемым по формуле Смагоринского

Литература

1. *Perezhogin P.A., Glazunov A.V., Mortikov E.V., Dymnikov V.P.* Comparison of numerical advection schemes in two-dimensional turbulence simulation // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2017. V. 32, N 1. P. 47–60.
2. *Пережогин П.А., Дымников В.П.* Моделирование квазиравновесных состояний двумерной идеальной жидкости // Доклады Академии наук. 2017. Т. 474, № 1. С. 36–40.
3. *Пережогин П.А., Дымников В.П.* Равновесные состояния конечномерных аппроксимаций уравнений двумерной идеальной жидкости // Нелинейная динамика. 2017. Т. 13, № 1. С. 55–79.
4. *Kraichnan R.H.* Inertial ranges in two-dimensional turbulence // The Physics of Fluids. 1967. V. 10, N 7. P. 1417–1423.

УДК 519.632.4

Исследование алгоритмов численного решения линейных уравнений мелкой воды на редуцированной широтно-долготной сетке

Г.С. Гойман

Институт вычислительной математики РАН

Рост производительности вычислительных систем сделает возможным глобальный прогноз погоды с разрешением порядка 1 км по горизонтали уже в ближайшее десятилетие. Однако использование регулярной широтно-долготной сетки, применявшейся в большинстве моделей общей циркуляции атмосферы в течение нескольких десятилетий, приводит к проблемам устойчивости, вычислительной и параллельной эффективности численных методов, а также к трудностям при формулировке параметризованных схем процессов подсеточного масштаба уже при шаге менее 10 км на экваторе [1]. Поэтому для перспективной версии модели глобального прогноза погоды ПЛАВ [2] рассматривается возможность применения редуцированной широтно-долготной сетки.

Редуцированная сетка задается как набор точек, расположенных на широтах $\varphi = \varphi_j$, $j \in [0, N_\varphi]$ с шагом по долготе $\Delta\lambda_j$, $(\lambda, \varphi) = (i\Delta\lambda_j, \varphi_j)$, $i \in [0, N_\lambda(j)]$. При переходе к решению уравнений на редуцированной широтно-долготной сетке возникают вопросы влияния структуры сетки на свойства численного решения, а также построения алгоритма интегрирования и дискретизаций, оптимальных с точки зрения точности решения, численной и параллельной эффективности. Исследование данных вопросов в рамках полной модели атмосферы является затруднительным в связи с тем, что решение формируется многими факторами, влияние которых трудно отделимы друг от друга. Поэтому в данной работе предлагается в качестве модельной задачи использовать линейные уравнения мелкой воды на сфере:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -g\nabla h, \\ \dfrac{\partial h}{\partial t} = -H(\nabla \cdot \vec{u}). \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $\vec{u}$ – вектор скорости, g – ускорение свободного падения , h – величина отклонения столба жидкости от среднего уровня H.

Так как система уравнений (1) может быть приведена к волновому уравнению относительно величины h, анализ влияние сетки на свойства численного решения уравнений предлагается производить при помощи исследования спектра дискретного оператора Лапласа. Численный анализ собственных функций и собственных значений данного оператора показал, что применение редуцированной сетки приводит к возникновению качественно новых численных особенностей в решении, и что алгоритм редукции коренным образом влияет на точность решения. В результате данного анализа предложена модификация алгоритма построения сетки, учитывающая структуру численного оператора.

Свойства алгоритма численного интегрирования уравнений во многом зависят не только от выбора дискретизации операторов, но и от формулировки уравнений (выбор переменных и их расположения на сетке). В данной работе предложен вариант дискретизации уравнений с использованием разнесенных в пространстве переменных (аналог С-сетки на регулярной широтно-долготной сетке) и произведено сравнение точности с решением на А-сетке. Данное сравнение показало, что, как и в случае регулярной широтно-долготной сетки, использование разнесенных в пространстве переменных позволяет точнее описывать распространение гравитационных волн.

Как уже было отмечено ранее переход к высокому пространственному разрешению в модели атмосферы требует использования масштабируемых численных алгоритмов. В связи с этим предложен новый алгоритм решения уравнений эллиптического типа на редуцированной сетке, которые возникают в моделях атмосферы при использовании полунеявного метода интегрирования по времени или формулировки уравнений в терминах вихрь-дивергенция. Данный алгоритм является обобщением реализованного ранее многосеточного метода решения уравнений на регулярной сетке [3]. Численный анализ сходимости нового алгоритма показал, что применение редуцированной сетки не приводит к существенному изменению скорости сходимости итерационного процесса.

Литература

1. *Staniforth A., Thuburn J*. Horizontal grids for global weather and climate prediction models: a review //Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society. 2012. V. 138, N 662. P. 1–26.
2. *Tolstykh M.A., Shashkin V.V., Fadeev R.Y., Goyman G.S*. Vorticity-divergence semi-Lagrangian global atmospheric model SL-AV20: dynamical core. Geosci. Model Dev. 10, 1961–1983 (2017), doi:10.5194/gmd-10-1961-2017
3. *Гойман Г.С.* Разработка параллельного итеративного блока решения уравнения типа Гельмгольца для глобальной модели атмосферы ПЛАВ // Труды международной конференции "Суперкомпьютерные дни России". 2016. Издательский дом МГУ им. М.В. Ломоносова. С. 959–966.

УДК 004.42

Реализация быстродействующего табличного элемента управления для отображения записей базы данных

И.Н. Пономарёв

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Таблица (грид) с вертикальной полосой прокрутки — наиболее распространённый элемент пользовательского интерфейса для работы с данными реляционной БД. Однако известны сложности, с которыми приходится сталкиваться, когда таблица содержит так много записей, что тактика их полной вычитки и сохранения в оперативной памяти становится неразумной. Какие-то приложения на большие таблицы не рассчитаны. Иные отказываются от использования грида с вертикальной полосой прокрутки в пользу постраничного отображения или предлагают пользователю лишь иллюзию, что при помощи полосы прокрутки можно быстро перейти к нужной записи.

Мы рассматриваем метод, позволяющий обойти эти трудности и реализовать табличный элемент управления, обладающий свойствами O (log (N)) – быстрого отображения, прокрутки (скроллирования на всём диапазоне записей), позиционирования на записи с заданным уникальным ключом.

Для решения этой задачи оказалось необходимым выявить, что записи в таблице распределены в пространстве значений ключевых полей по гипергеометрическому закону распределения вероятностей, и оценить ошибку статистического «предугадывания» номера записи по значению первичного ключа (см. рис. 1) при помощи метода интерполяционного поиска [2].

Также оказалось необходимым построить изоморфизм порядка между множеством натуральных чисел и лексикографически упорядоченным множеством комбинаций значений ключевых полей. Общая схема взаимодействия процедур системы показана на рисунке 2. Сплошной стрелкой показана последовательность выполнения процедур, пунктирной стрелкой — асинхронный вызов в отдельном потоке выполнения.

Допустим, что пользователь изменяет положение бегунка вертикальной полосы прокрутки (левый нижний угол диаграммы). Интерполятор вычисляет значение номера комбинации значений ключевых полей $\kappa = f^{-1}(\lambda)$ с типом BigInteger. На основе этого значения нумератор восстанавливает комбинацию ключевых полей $(K_1 \dots K_n) = g^{-1}(\kappa)$. Важно понимать, что на данном этапе в полях $K_1 \dots K_n$ не обязательно будут находиться значения, действительно присутствующие в базе данных: там будут лишь приближения (в частности, в строковых полях будет бессмысленный набор символов). Тем не менее, вывод из базы данных h строк с ключами, большими или равными набору $K_1 \dots K_n$, окажется приблизительно верным результатом для данного положения полосы прокрутки.

Если пользователь отпускает полосу прокрутки, асинхронно (в отдельном потоке выполнения) запускается запрос к БД, определяющий порядковый номер записи, а значит, и точное положение полосы прокрутки.

Грид по приведённым здесь принципам реализован на языке Java с использованием Postgre SQL в качестве СУБД. В качестве нагрузочного тестового набора данных используется база данных КЛАДР, содержащая более 1 млн названий улиц населённых пунктов России, сортировка ведётся по различным полям и их комбинациям.

Элемент управления на основе данного подхода встроен в программную платформу C-Orchestra [4]. Подробное изложение идей доступно в [5].

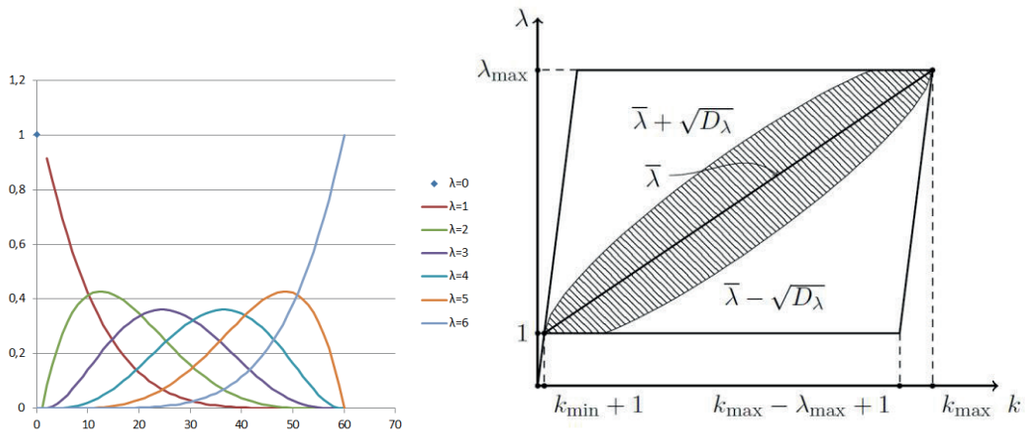


Рис. 1. Зависимость ключа и номера записи: распределение вероятностей, допустимые границы, среднее значение, средне-квадратичное отклонение

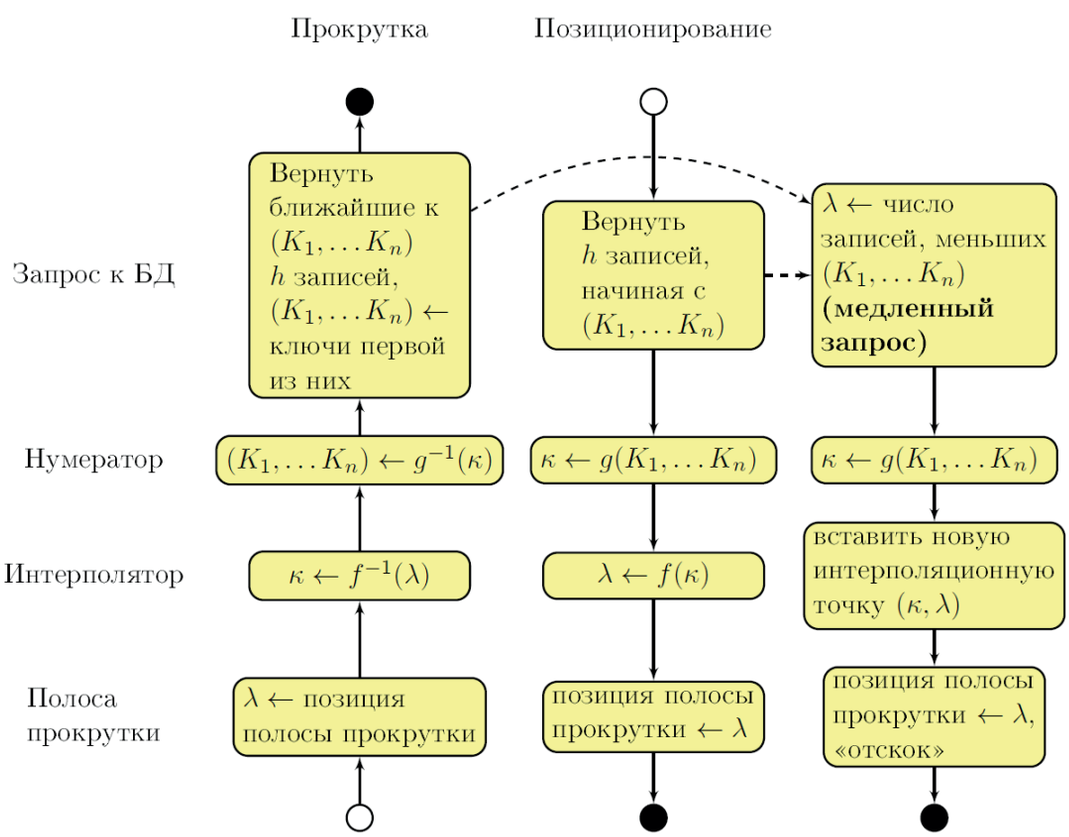


Рис. 2. Общая схема взаимодействия процедур

Литература

1. *Perl Y., Itai A., Avni H.* Interpolation Search – ALog Log N Search // Communications of the ACM. 1978. V. 21, I. 7, P. 550–554.
2. *Davis M., Whistler K., Scherer M.* Unicode Technical Standard #10. UnicodeCollation Algorithm. http://www.unicode.org/reports/tr10/
3. *ООО «КУРС».* Программная платформа C-Orchestra. http://corchestra.ru
4. *Пономарев И. Н.* Реализация грида для работы с большими таблицами. https://habrahabr.ru/post/278773/
5. *Forbes C., Evans M., Hastings N., Peacock B.* Statistical Distributions. Wiley, 2011. P. 117.

УДК 004.4

Технология динамической модификации кода

В.В. Конычев[1,2], Ю.С. Овчинников[2], А.Б. Корякин[2]

[1]Московский физико-технический институт (государственный университет),
[2]Parallels

Технология динамической модификации кода нашла широкое применение в программировании как в различных вирусах, так и в загрузчиках, интерпретаторах, бинарных трансляторах, операционных системах и гипервизорах виртуальных машин [1].

Данная работа выполнялась для гипервизора виртуальных машин Parallels Desktop®, который работает как пользовательское приложение операционной системы и позволяет работать на Mac Os X с другими операционными системами такими, как Windows и Linux и их приложениями [2].

Целью исследования была реализация автономной библиотеки на языке C для динамической модификации кода, скомпилированного с помощью clang для архитектуры Intel® IA-32 [3]. Данная библиотека решает несколько задач: увеличение производительности и расширение функциональности уже готового исполняемого файла.

Увеличение производительности достигается за счёт возможности исключения во время компиляции участков кода из основного тела программы и восстановления их при необходимости во время исполнения. В частности, для гипервизоров библиотека позволяет исключить код, отвечающий за сбор и вывод диагностики или реализующий функциональность, специфичную для малого числа аппаратных платформ, что приводит к уменьшению объема основной части исполняемого файла, и, как следствие, объема используемого кэша процессора. Это также позволяет избежать избыточного условного ветвления потока исполняемых команд.

Функциональность расширяется благодаря возможности во время работы вставить код для исполнения скриптов на языке lua. Lua был выбран для этой цели, потому что он является мощным и легковесным языком, который к тому же имеет API для взаимодействия с программами, написанными на языке C [4].

Библиотека состоит из нескольких частей. Первая часть – разметка кода, она отвечает за расстановку меток и то, чтобы работа по переносу частей программы, которые необходимо исключить из основного тела исполняемого файла, осуществлял компилятор на этапе компиляции. Всё это было реализовано независимо от особенностей компилятора, а потому проект, использующий данную библиотеку, может быть собран любым компилятором.

Вторая часть – парсер бинарных файлов. Парсер необходим, чтобы из бинарных файлов доставать информацию о секциях и символах: виртуальные адреса, размеры и их расположение в исполняемом файле. Были реализованы парсеры с общей обёрткой для двух бинарных форматов: ELF [5] и mach-o [6].

Также был добавлен обработчик скомпилированного кода – постпроцессор, который подготавливает все возможные и необходимые структуры данных ещё до исполнения, тем самым ускоряя инициализацию динамического модификатора кода и исключая необходимость получать доступ к бинарному файлу во время работы. Это также позволяет применять библиотеку для работы с программами в изолированном окружении, для тех, у которых удалена часть служебной информации, для драйверов и для гипервизоров виртуальных машин. Помимо этого, была написана библиотека для перемещения различных участков кода внутри адресного пространства процесса с сохранением их работоспособности.

Последняя часть – динамический модификатор кода, отвечающий за восстановление при необходимости сокрытых участков кода и за их повторное сокрытие.

Технология по своим целям схожа со static key ядра Linux [7], однако имеет ряд преимущественных отличий. Во-первых, она применима не только в ядре Linux, но и на других операционных системах. Во-вторых, нет необходимости в использовании глобальных переменных. В-третьих, static key скрывает участки кода в недостижимых

частях функций, после операций возврата, что не приводит к уменьшению секции text. Библиотека, разработанная в ходе этого исследования, группирует все исключенные участки в отдельной секции. В-четвёртых, static key реализуется за счёт особенностей компилятора gcc, а потому жёстко к нему привязана. При этом static key требует меньше места.

Таким образом, была разработана библиотека динамической модификации кода, не зависящая от компилятора и операционной системы, применимая для широкого спектра задач.

Литература

1. *Hongxu Cai, Zhong Shao, Alexander Vaynberg*. Certified Self-Modifying Code. 2007 ACM SIGPLAN // Conference on Programming Language Design and Implementation, June 2007. P. 66–77.
2. Parallels International GmbH. Parallels Desktop® 13 for Mac User's Guide, 2017.
3. Intel Corporation. Intel® 64 and IA-32 Architectures Software Developer's Manual, 2017.
4. *Roberto Ierusalimschy, Luiz Henrique de Figueiredo, Waldemar Celes*. Lua 5.0 Reference Manual, 2003.
5. ELF-64 Object File Format, Version 1.5 Draft 2, 1998.
6. OS X ABI Mach-O File Format Reference, 2009.
7. *Christoffer Dall Shih-Wei Li Jason Nieh.* Optimizing the Design and Implementation of the Linux ARM Hypervisor, 2017.

УДК 004.896

Современные подходы к автоматическому извлечению кратких выдержек из текстов

К.В. Соболев

Московский физико-технический институт (государственный университет)

В век цифровых технологий объемы печатной информации растут с экспоненциальной скоростью. Человек уже не в состоянии справиться самостоятельно с таким объемом данных. Но для решения этой непосильной задачи приходят на помощь системы интеллектуального текста. Подобные системы автоматически генерируют краткое резюме текста. На практике они применяются не только конечными пользователями, но и в поисковых системах для упрощенной генерации индексной базы.

В рамках данной работы были рассмотрены современные подходы к автоматическому формированию кратких выдержек из тексов, с которыми мы работали в рамках проекта Acronis: "Text clusterisation". Список алгоритмов делится на два типа: extractive и abstractive стратегии. Extractive – это стратегии извлечения выдержек непосредственно уже из самого текста. Они в свою очередь делятся на supervised (с учителем) и unsupervised (без учителя) подходы. Наиболее интересным из этих семейств алгоритмов является TextRank – алгоритм, основанный на работе широко известного алгоритма ранжирования веб страниц PageRank. Abstractive – набор стратегий, в котором резюме генерируется на основе информации в тексте практически без использования предложений самого текста. Данный метод направлен на создание выдержек наиболее похожих на человеческую речь с использованием глубоких нейронных сетей.

В докладе представлен краткий обзор работы принципов работы этих алгоритмов, сравнение их работы на примере различных текстов.

Литература

1. *Bird S., Klein E., Loper E.* Natural language processing with Python O'Reily Media. 504 p.
2. *Mihalcea R., Tarau P.* TextRank: Bringing Order into Texts // Department of Computer Science, University of North Texas // EMNLP, 2015.
3. *Rush A. M., Chopa S., Weston J.* A Neural Attention Model for Abstractive Sentence Summarization // EMNLP, 2015.

4. *Lopyrev K.* Generating News Headlines with Recurrent Neural Networks // 2016 Conference on Empirical Methods in Natural Language Processing. 2016.
5. *Nallapati R., Zhou B., do Santos C.* Abstractive Text Summarization using Sequence-to-sequence RNNs and Beyond // The SIGNLL Conference on Computational Natural Language Learning. 2016.

УДК 004.457

Получение карты блоков файла на диске

Д.В. Копырин

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Получение карты блоков файла на диске является прикладной задачей для userspace программирования, не решенной методами простого системного вызова. В рассматриваемой операционной системе mac OS была рассмотрена функция POSIX fcntl с параметром LOG2PHYS, которая позволяет получать смещение на физическом диске от начала раздела для логического смещения в файле.

Полученная информация о смещениях может быть превращена в карту непрерывных блоков и «дыр» на диске. В данной работе также разработан и получен один из оптимальных методов получения карты блоков.

Было проведено сравнение различных файловых систем, используемых в операционной системе mac OS 10.13: HFS+ и APFS. Исследование затрагивает структуру разреженных файлов на диске (sparse file) для APFS и производит сравнение с системой, не поддерживающей sparse file.

Литература

1. *Comay, David S., Andrew G. Tucker, Tim P. Marsland*. Mechanism for implementing a sparse file system for an operating system partition. U.S. Patent No. 7,567,985. 2009.
2. *Schmidt P.* Configuring Net-SNMP Event Notification Traps. 2017.
3. *Singh, Amit.* Mac OS X internals: a systems approach. Addison-Wesley Professional, 2006.

УДК 004.622, 004.048, 004.49

Проектирование программно-аппаратного комплекса для сбора данных о поведении вредоносного программного обеспечения

А.А. Переберина[1,2], А.В. Костюшко[2]

[1]Московский физико-технический институт (государственный университет)
[2]Acronis International GmbH

В данной работе рассматривается создание автоматизированного программно-аппаратного комплекса (Sandbox) для запуска вредоносного программного обеспечения, ориентированного на операционные системы семейства Microsoft Windows, в целях сбора данных о поведении вредоносной программы (операции по работе с файлами, реестром, стек вызовов) для последующего анализа. Главным образом мы сосредоточены на шифровальщиках-вымогателях, которые в настоящее время являются одним из ключевых типов компьютерных угроз [1]. Полученные данные будут подаваться на вход модели машинного обучения, осуществляющей классификацию программ на потенциально представляющие угрозу (suspicious) и не представляющие угрозы (clean). Второе важное применение Sandbox — автоматическое тестирование программного обеспечения (в том числе обученной модели) на способность детектировать вредоносную программу и нейтрализовать её действия (например, остановить соотвествующий процесс и расшифровать файлы).

В статье [10] описываются различные подходы к анализу вредоносного программного обеспечения и обозреваются существующие решения. Несмотря на тренд

виртуализации и возможность создания чисто программных комплексов виртуальных машин для запуска вредоносных программ, для наших целей необходимы данные, полученные на реальном аппаратном обеспечении. Это обусловлено тем, что запуск вредоносной программы в виртуальной машине может быть небезопасен — например, если речь идет о сетевом черве, распространяющемся, используя уязвимости в сетевых протоколах [2]. Кроме того, некоторые вредоносные программы могут детектировать окружение, в котором исполняются [10], и в виртуальной машине и вести себя не так, как на реальном оборудовании (например, просто прекращать свою работу). Также существует компьютерная атака, называемая virtual machine escape, которая эксплуатирует уязвимости в имплементации гипервизора [3, 4].

При проектировании такого комплекса для запуска вредоносного программного обеспечения самыми важными являются вопросы безопасности системы: тестовые серверы, на которых будет исполняться вредоносное программное обеспечение, должны находиться под контролем управляющих серверов и, таким образом, иметь соотвествующий канал коммуникации, но при этом управляющие серверы системы не должны подвергнуться воздействию вредоносных программ. Другими значимыми вопросами являются вопросы производительности системы: необходимо минимизировать время исследования одного образца вредоносного программного обеспечения, так как количество «вирусов» в существующих базах данных велико и каждый день появляются новые угрозы. Так, AV-TEST регистрирует более 250 000 новых вредоносных программ в день [5].

На данном этапе исследования основное внимание было уделено производительности и безопасности системы, а также автоматизации запуска образцов вредоносного программного обеспечения и сбора интересующих нас данных. В данный момент происходит апробация и внедрение прототипа Sandbox. При создании прототипа были использованы такие технологии, как PXE, NFS, SSH, RDP, Jenkins, Allure, такие операционные системы, как FreeBSD, Linux, Windows.

В настоящее время подготовлен набор образцов вымогателей-шифровальщиков, для формирования которого была использована база вредоносных программ службы VirusTotal [6] и данные компании F-Secure о шифровальщиках, появившихся в 2010 — 2016 годах [7], дополненные последними образцами 2017 года, такими как WannaCry [8] или ExPetr [9]. В дальнейшем планируется запуск собранных программ на разработанном программно-аппаратном комплексе, получение данных об их поведении и последующий анализ данных моделями машинного обучения. Далее планируется формирование новых наборов образцов вредоносных программ.

Получение входных данных является важным этапом машинного обучения: необходимо не только собрать большой объем данных, но и должным образом подготовить их — произвести предварительную обработку. В рамках подготовки данных планируется проводить их оптимальную фильтрацию (для уменьшения времени обработки и передачи по сети), что включает статистический анализ и дедупликацию событий. Планируется также сбор данных в условиях наличия специального программного обеспечения, вмешивающегося в работу исследуемого образца — например, осуществляющего эмуляцию ускоренного течения времени или инжекцию во вредоносные программы для получения более полной информации об алгоритмах их работы.

Литература

1. *Malwarebytes LABS* 2017 state of malware report, 2017. https://www.malwarebytes.com/pdf/white-papers/stateofmalware.pdf.
2. *C.E.R. Team-EU* Wannacry ransomware campaign exploiting smb vulnerability, 2017. https://cert.europa.eu/static/SecurityAdvisories/2017/CERT-EU-SA2017-012.pdf.
3. *Carpenter M., Liston T., Skoudis E.* Hiding virtualization from attackers and malware, Security Privacy, IEEE 5 (3) (2007) 62–65. doi:10.1109/MSP.2007.63.
4. *Wikipedia* Virtual machine escape. https://en.wikipedia.org/wiki/Virtual_machine_escape.
5. *AV-TEST* Malware. https://www.av-test.org/en/statistics/malware/.
6. *VirusTotal* https://www.virustotal.com/ru/.

7. *F-Secure* 2017 state of cyber report, 2017. https://www.f-secure.com/documents/996508/1030743/cyber-security-report-2017. P. 41.
8. *Kaspersky LAB* WannaCry ransomware used in widespread attacks all over the world, 2017. https://securelist.com/wannacry-ransomware-used-in-widespread-attacks-all-over-the-world/78351/.
9. *Kaspersky LAB* New Petya/NotPetya/ExPetr ransomware outbreak, 2017. https://www.kaspersky.com/blog/new-ransomware-epidemics/17314/.
10. *Egele M., Scholte Th., Kirda E., Kruegel C*. A survey on automated dynamic malware-analysis techniques and tools, 2012. ACM Computing Surveys, Vol. 44, No. 2, Article 6. https://www.cs.ucsb.edu/~chris/research/doc/acmsurvey12_dynamic.pdf.

Секция флюидодинамики и сейсмоакустики

УДК 532.685

Полностью усреднённая модель Кондаурова неравновесного двухфазного течения в средах с двойной пористостью с тонкими трещинами

А.С. Волошин

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Рассматривается двухфазное несжимаемое неравновесное течение в трещиновато-пористой среде в рамках модели Кондаурова, в которой мобильности и капиллярное давление зависят от реальной насыщенности и удовлетворяющему кинетическому уравнению неравновесному параметру. Среда Ω состоит их двух наложенных друг на друга континуумов: связной системы трещин толщиной порядка $\varepsilon\delta$, где δ – относительная толщина трещин, и ε-периодической системы непересекающихся кубических матричных блоков. Определено глобальное поведение модели при переходе к пределу $\varepsilon \to 0$, полагая проницаемость блоков пропорциональной $(\varepsilon\delta)^2$ и проницаемость трещин порядка единицы, и получена глобальная δ-модель. В δ-модели линеаризована локальная задача в матричном блоке и, устремляя δ к нулю, получена макроскопическая неравновесная полностью усреднённая модель, т.е. модель, не содержащая никаких дополнительных локальных ячеечных задач:

$$\begin{cases} \Phi_{\mathrm{f}} \dfrac{\partial S}{\partial t} - \operatorname{div}_x\left\{\mathbb{K}^* \lambda_{\mathrm{f},w}(S) \nabla P_w\right\} = \hat{Q}_w & \text{в } \Omega \times (0,T); \\ -\Phi_{\mathrm{f}} \dfrac{\partial S}{\partial t} - \operatorname{div}_x\left\{\mathbb{K}^* \lambda_{\mathrm{f},n}(1-S) \nabla P_n\right\} = \hat{Q}_n & \text{в } \Omega \times (0,T); \\ P_c(S) = P_n - P_w, \quad \Phi_{\mathrm{f}} P_c(S) \stackrel{\text{def}}{=} a_{\mathrm{f},1} S + a_{\mathrm{f},3} & \text{в } \Omega \times (0,T), \end{cases}$$

где правые части $\hat{Q}_w$ и $\hat{Q}_n$ зависят только от заданных данных исходной модели.

С помощью численных расчётов показано, что для достаточно малых δ точная глобальная δ-модель может быть заменена на полностью усреднённую без значительной потери точности. В данной работе продолжено исследование глобальной модели Кондаурова, начатое в статьях [1, 2], и обобщены результаты, полученные ранее в [3, 4].

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда в рамках научного проекта №15-11-00015 в лаборатории флюидодинамики и сейсмоакустики МФТИ.

Литература

1. *Konyukhov A., Pankratov L.* Upscaling of an immiscible non-equilibrium two-phase flow in double porosity media // Applicable Analysis. 2016. V. 95, I. 10. P. 2300–2322.
2. *Konyukhov A., Pankratov L.* New non-equilibrium matrix imbibition equation for double porosity model // Comptes Rendus M'ecanique. 2016. V. 344, I. 7. P. 510–520.
3. *Jurak M., Pankratov L., Vrbaski A.* A fully homogenized model for incompressible two-phase flow in double porosity media // Applicable Analysis. 2016. V. 95, I. 10. P. 2280–2299.
4. *Amaziane B., Milisic J.P., Panfilov M., Pankratov L.* Generalized nonequilibrium capillary relations for two-phase flow through heterogeneous media // Phys. Rev. E. 2012. V. 85. 016304.

УДК 519.63

Вычислительные алгоритмы, основанные на решении обобщенной задачи Римана о распаде разрыва

Ю.И. Скалько, В.А. Мазепов

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Многие эволюционные процессы в физике, биологии, экономике и других прикладных областях моделируются гиперболическими системами линейных дифференциальных уравнений первого порядка. При построении численных алгоритмов решения краевых задач для таких систем уравнений с использованием аппроксимации решения кусочно-гладкими функциями ключевым моментом является решение задачи Римана о распаде разрыва. По сути, все известные методы решения этой задачи связаны с наличием у гиперболических систем характеристик. В случае многих пространственных переменных методы, основанные на наличии характеристик, уже не работают. И задача Римана, чаще всего, решается в предположении, что вблизи разрыва решение представляет собой плоскую волну, движущуюся вдоль нормали к поверхности разрыва и для кусочно-постоянных начальных данных.

В работе построено решение задачи Римана о распаде разрыва для гиперболических систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка с кусочно-постоянными коэффициентами и с произвольным количеством пространственных переменных:

$$\frac{\partial \mathbf{u}(t,\mathbf{x})}{\partial t}+\sum_{i=1}^{N} A_i \frac{\partial \mathbf{u}(t,\mathbf{x})}{\partial x_i}=0, \mathbf{x}\in \mathbf{R}^N$$

с кусочно-непрерывными начальными данными: $\mathbf{u}(t=0,\mathbf{x})=\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$.

Предложенный алгоритм сводит задачу нахождения значений переменных в момент времени $t>0$ по обе стороны поверхности разрыва начальных данных к решению системы алгебраических уравнений с правой частью, зависящей от значений переменных в начальный момент времени в конечном числе точек.

Построенное решение обобщенной задачи Римана позволяет сформулировать алгоритм численного решения начально-краевых задач для гиперболических систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Суть алгоритма состоит в том, что для перехода на следующий временной слой решается обобщенная задача Римана, используя в качестве начальных данных решение на предыдущем временном слое.
Эффективность указанного алгоритма продемонстрирована на примере системы уравнений, описывающих распространение упругих волн.

Литература

1. *Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.
2. *LeVeque R.L.* Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
3. *Скалько Ю.И.* Корректные условия на границе, разделяющей подобласти // Компьютерные исследования и моделирование. 2014. Т. 6, № 3. С. 347–356.
5. *Kaser M., Dumbser M.* An Arbitrary High Order Discontinuous Galerkin Method for Elastic Waves on Unstructured Meshes – I. The Two-Dimensional Isotropic Case with External Source Terms // Geophys. J. Int. 2006. V. 166. P. 855–877.
6. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Пространства основных и обобщенных функций. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1958.
7. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Обобщенные функции и действия над ними. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959.
8. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981.
9. *Скалько Ю.И.* Задача Римана о распаде разрыва в случае многих пространственных переменных. // Труды МФТИ. 2016. Т. 8, № 4. С. 169–182.

УДК 534–18

Исследование особенностей акустического шума при фильтрации газа через сухие и насыщенные образцы горных пород

С.И. Сергеев[1,2], Д.Н. Михайлов[2]

[1]Московский физико-технический институт (государственный университет)
[2]Московский научный центр «Шлюмберже»

Эффект генерации акустического шума в процессе фильтрации газа через образцы горных пород активно исследуется последние десятилетия [1–3]. Эксперименты показывают, что на вид спектра шумового сигнала влияют тип породы, через который осуществляется фильтрация, наличие трещин и полостей, скорость флюида, наличие остаточной фазы. Тем самым, анализируя спектр генерируемого шума, потенциально возможно получить информацию о составе фильтрующего флюида и параметрах течения, что может применяться для мониторинга динамики течения флюидов в околоскважинной зоне пласта в процессе работы добывающих и нагнетательных скважин. Несмотря на достаточно большое число работ по экспериментальному исследованию фильтрационных акустических шумов, до сих пор сохраняются некоторые противоречия относительно параметров акустического шума, и данный эффект требует дополнительного изучения.

В настоящей работе представлены результаты экспериментального исследования влияния параметров потока флюида на спектр регистрируемого акустического шума. На основе серии экспериментов по однофазной фильтрации азота через сухие образцы карбонатных пород и песчаников получены зависимости интенсивности шумового сигнала от скорости потока газа. Показано, что интенсивная генерация акустического шума начинается, когда течение в породе существенно отклоняется от режима Дарси и переходит в режим Форхгеймера [4], при этом число Форхгеймера F_0 находится в диапазоне от 0.1 до 0.3 (рис. 1).

Приведены результаты экспериментов по фильтрации азота через образцы пород, насыщенных водой. Представлены временные развертки шумового сигнала, записанные в процессе вытеснения азотом воды в карбонатных породах и песчаниках. Показано, что генерация шума происходит при существенно меньших расходах газа, чем в случае однофазной фильтрации. Предположено, что шум генерируется импульсами давления, сопровождающими мобилизацию капель воды. Приведена оценка капиллярных чисел, при которых инициализируется мобилизация капель, а также оценка параметров импульса давления.

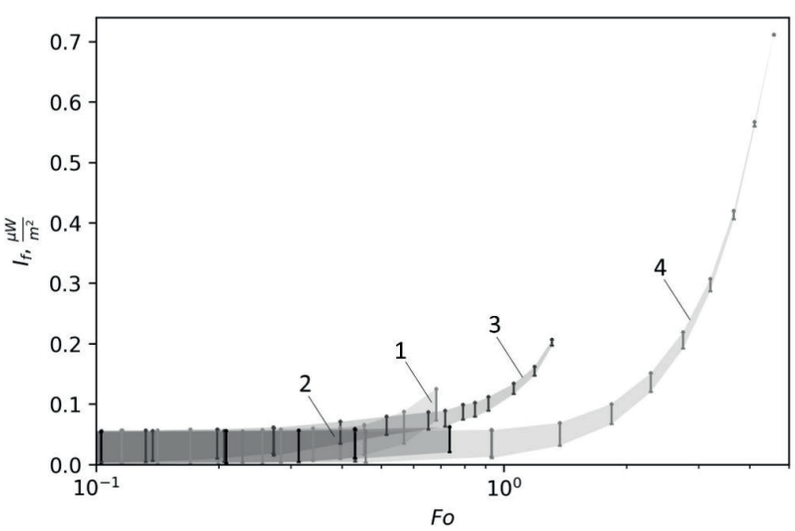


Рис. 1. Зависимость интенсивности акустического шума от числа Форхгеймера для образцов различных пород: 1 – песчаник Buffalo Berea; 2, 3, 4 – карбонатные породы Indiana Limestone с разными проницаемостями. Закрашенные зоны показывают ошибку определения интенсивности сигнала, обусловленную чувствительностью используемых датчиков.

Работа выполнена в Московском научно-исследовательском центре «Шлюмберже». Автор выражает благодарность Рыжикову Н. И. и Жарниковой А. В. за помощь в постановке и проведении эксперимента.

Литература

1. *Заславский Ю.М., Заславский В.Ю.* Исследование акустического излучения при фильтрации воздушного потока сквозь пористую среду // Акустический журнал. 2012. Т. 58, № 6. Р. 756–761.
2. *Metelev I.S., Marfin E.A., Gaifutdinov R.R.* The use of spectral sound meter in the study of the physical properties of oil and gas reservoirs. 12th Conference and Exhibition Engineering Geophysics. 2016.
3. *DiCarlo [et al.].* Acoustic measurements of pore-scale // Geophys. Res. Lett. 2003. V. 30. N 17. P. 1901.
4. *Ma, H., Ruth, D.W.* The microscopic analysis of high Forchheimer number flow in porous media // Transport Porous Media. 1993. V. 13. P. 139–160.

УДК 534-18

Моделирование акустического волнового поля в системе скважина–пласт, обусловленного генерацией шума флюидом вне скважины

Н.В. Мутовкин[1,2], Д.Н. Михайлов[2], И.Л. Софронов[1,2]

[1]Московский физико-технический институт (государственный университет)
[2]Московский научно-исследовательский центр Шлюмберже

Пассивные акустические методы широко используются для мониторинга работы скважины. В частности, один из методов промыслового каротажа – пассивная акустическая шумометрия – позволяет регистрировать акустичекий шум, который генерируется при фильтрации флюида через пористую среду [1]. Ряд измерений акустических шумов в полевых условиях и в лабораторных исследованиях на соотвествующих керновых образцах демонстрирует идентичность спектров и их зависимость от типа и структуры коллектора [2]. Анализ данного рода шумов может быть использован для определения профиля притока продукции в скважину, оценки характера фильтрации, а также для уточнения границ потока в пласте, в частности для выделения работающих пропластков или трещин, через которые может происходить прорыв воды или газа в добывающую скважину.

Исследование связано с решением практической задачи по выделению высокопроницаемого пропластка в коллекторе. Высокая проницаемость может быть связана как с собственной проницаемостью пород коллектора, так и с наличием системы трещин. Первым шагом в решении данной задачи является анализ распределения интенсивности акустического волнового поля вдоль оси скважины вблизи высокопроницаемого пропластка на основе моделирования.

В работе рассматривается задача распространения акустических волн, индуцированных фильтрацией флюида через пористую среду, в двумерной осесимметричной постановке. Численная модель, геометрия которой представлена на рис. 1, включает скважину, заполненную флюидом, и прилегающую к скважине часть пласта (околоскважинная зона). Последняя состоит из трех пропластков: два низкопроницаемых и один – высокопроницаемый. Распространение волн в околоскважинной зоне пласта описывается уравнениями насыщенной пористой среды согласно модели Био [3]. Размеры области моделирования составляют порядка 2 м как по радиусу r, так и по вертикали z. Расчеты велись по разностной схеме, представленной в [4], с добавлением источниковых членов, обеспечивающих генерацию акустических волн в околоскважинной зоне.

Источник акустических сигналов является объемным, дипольного типа и представляет собой область, лежащую в высокопроницаемом пропластке вблизи ствола скважины (рис. 1). Параметры источника выбирались исходя из предположения от том, что генерация акустических сигналов обусловлена высокой скоростью фильтрации флюида в данном пропластке. Отметим, что основной механизм генерации акустических сигналов

связан с формированием и осцилляцией микровихрей в порах при переходе фильтрационного потока из режима Дарси в режим Форчхаймера. Радиус зоны объемного источника оценивался исходя из распределения скорости потока в околоскважинной зоне пласта. Частоты соответствуют экспериментальным данным, полученным в Московском научно-исследовательском центре Шлюмберже [5, 6]. В низкопроницаемых (непродуктивных) слоях скорость фильтрации существенно меньше, поэтому генерация акустических сигналов в них не учитывается.

В докладе представлены результаты численного моделирования распространения акустического шума из околоскважинной зоны в скважину. Регистрация сигналов осуществляется в центре скважины по всей длине ее ствола. При этом рассматривается несколько случаев,

- Газонасыщенный пласт (скважина с открытым стволом).
- Прорыв газа в нефтяной коллектор (скважина с открытым и обсаженным стволом).
- Прорыв воды в нефтяной коллектор (скважина с открытым и обсаженным стволом).

На основе полученных результатов приведен анализ изменения акустического шума (амплитуда, спектр) в зависимости от свойств породы, геометрии и типа заканчивания скважины. Анализ результатов расчетов интенсивности акустического шума вдоль оси скважины позволяет сделать вывод о возможности четкого выделения границ высокопроницаемого пропластка. Численно обнаружен эффект усиления уровня сигнала на некоторых интервалах частот.

Работа выполнена в Московском научно-исследовательском центре Шлюмберже.

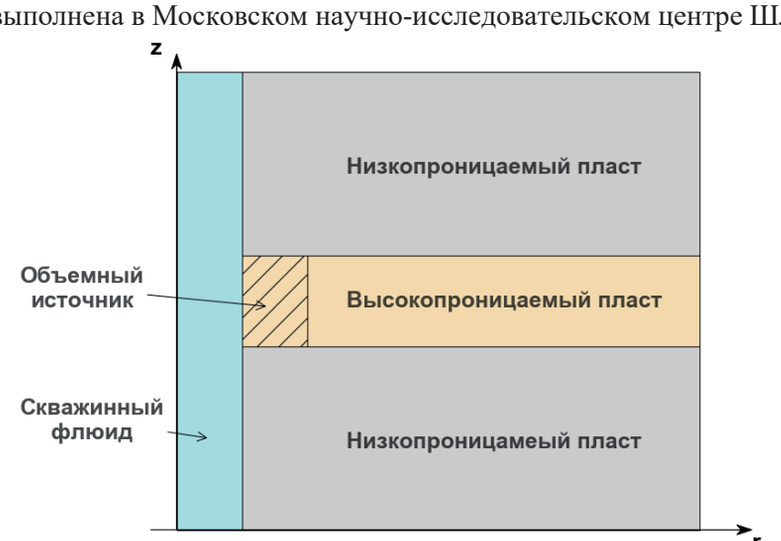


Рис. 1. Типичная геометрия модели

Литература

1. *Ипатов А.И.*, *Кременецкий М.И.* Геофизический и гидродинамический контроль разработки месторождений углеводородов. – М.: РХД, 2010. 780 с.
2. *Николаев С.А., Овчинников М.Н.* Генерация звука фильтрационным потоком в пористых средах // Акустический журнал. 1992. Т. 38, № 1. С. 114–118.
3. *Biot M.A.* Theory of propagation of elastic waves in fluid saturated porous solid. I Low frequency range // JASA. 1956. N 2. P. 168–178.
4. *Plyushchenkov B.D., Turchaninov V.I.* Acoustic logging modeling by refined Biot's equations // Int. J. Mod. Phys. C. 2000. V. 11, N. 2. P. 365–396.
5. *Сергеев С.И.* Экспериментальное исследование акустического шума, создаваемого потоком газа в пористой среде // Материалы Международного научного форума «Ломоносов-2017», секция «Геология», 2017.
6. *Иванова Э.А., Михайлов Д.Н.* Резонансы внутри ансамбля пор как возможная модель формирования спектра акустического излучения при фильтрации газа через пористые среды // Ученые записки физического факультета Московского университета. 2017. № 5.

УДК 533.539

Метод построения термических констант фазового равновесия многокомпонентных растворов

Е.В. Колдоба, С.А. Жуков

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

В работе предложены новые аналитические формулы для констант фазового равновесия (K-values). Теоретический подход, изложенный в работе [1], учитывает влияние температуры, давления, состава и других факторов, влияющих на фазовое поведение реального флюида. В данной работе изложено дальнейшее развитие такого подхода. Предложены простые модельные уравнения состояния и модельный потенциал Гиббса, которые хорошо описывают фазовое поведение растворов в некотором практически важном диапазоне давлений и температур. Подход учитывает неидеальность растворимости. Модель содержит легко вычисляемые параметры. Подход позволяет построить термодинамически согласованную модель (согласованы между собой уравнения состояния фаз и N-мерные поверхности фазового равновесия) для реального флюида, удобную для численного моделирования двухфазной многокомпонентной фильтрации, а именно: сокращаются требуемые вычислительные ресурсы, повышается надежность расчетов. Проведено сравнение полученных формул с формулами, получившими широкое применение. Результаты сравнения представлены на рис. 1.

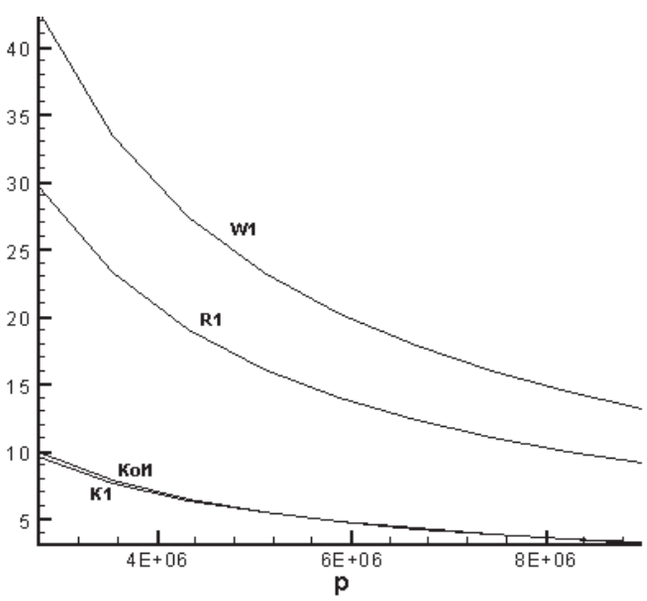


Рис. 1. Зависимости K(p) для метана при $t = 20$ °C для раствора $C_1H_4 - C_{10}H_{22}$, где K1 – «точное» решение полученное по композиционной модели, W1 – по формуле Вильсона, R1 – по формуле Рейда, Kol1 – по новой формуле

Литература

1. *Koldoba A.V., Koldoba E.V.* Thermodynamically consistent model of a multicomponent mixture with phase transitions // Mathematical models and computer simulations, 2010. V. 2, N 6. P. 782–787.

УДК 534.8.081.7

Расчет градиента целевого функционала при решении обратной задачи акустического каротажа для скважин с некруговым сечением ствола в анизотропных породах

Г.С. Щелик

Московский физико-технический институт (государственный университет)
Московский научный центр «Шлюмберже»

Современные приборы акустического каротажа собирают большое количество информации с распределенных вдоль оси и по азимуту приемников. Обработка этих данных, как правило, сводится к усреднению измерений по нескольким приемникам с последующим выделением волновых фронтов и определением скоростей их распространения и затухания. Такой традиционный подход к интерпретации каротажных данных может приводить к потере важной информации о нецилиндрической геометрии скважины и анизотропных свойствах породы. Естественным шагом для улучшения качества обработки измерений является применение методологии решения обратных к результатам математического моделирования распространения волн в скважине в полной постановке с учетом всех необходимых эффектов.

В предположении отсутствия зависимости геометрии и свойств породы по оси скважины z прямая задача распространения упругих волн в породе со скважиной, заполненной жидкостью, после преобразования Фурье сводится к набору двумерных задач в плоскости (r, θ) и решается с помощью полуаналитического метода конечных элементов [1, 2]. Численное решение представляется в виде суммы «элементарных» волн (мод), распространяющихся вдоль оси скважины. Недостающая информация об источнике упругих колебаний может быть получена из условия минимума квадрата невязки данных, измеренных в точках приемников акустического каротажа и численного решения. Проведённые ранее расчеты показали достаточную точность численного приближения решения даже небольшим числом мод, а также хорошую чувствительность функционала невязки к изменению коэффициентов матрицы модулей упругости. При верификации в качестве исходных данных каротажных измерений были использованы результаты трехмерного моделирования методом спектральных элементов [3] для скважин в различных породах.

Следуя [4], получены выражения для градиента целевого функционала невязки по параметрам задачи, вычисленного на основе производных Фреше и решения сопряженной задачи. Точность полученных значений градиентов для случаев изотропной и анизотропной породы проверена на результатах расчета градиентов прямым методом. В продолжение анализа, начатого в [5], показано как полученные результаты могут быть использованы для решения обратной задачи.

Литература

1. *Treyssede, F., Laguerre, L.* Numerical and analytical calculation of modal excitability for elastic wave generation in lossy waveguides // The Journal of the Acoustical Society of America. 2013. V. 133(6). P. 3827–3837.
2. *Zharnikov, T. V., Syresin, D. E.* Repulsion of dispersion curves of quasidipole modes of anisotropic waveguides studied by finite element method // The Journal of the Acoustical Society of America. 2015. V. 137(6). P. EL396–EL402.
3. *Charara, M., Vershinin, A., Deger, E., Sabitov, D., Pekar, G.* 3D spectral element method simulation of sonic logging in anisotropic viscoelastic media // SEG Technical Program Expanded Abstracts. Society of Exploration Geophysicists. 2011. P. 432–437.
4. *Plessix, R.-E.* A review of the adjoint-state method for computing the gradient of a functional with geophysical applications // Geophysical Journal International. 2006. V. 167(2). P. 495–503.
5. *Shchelik G.S., Sofronov I.L.* Application of semi-analytical finite element method (SAFE) to inversion of acoustic logging data in non-cylindrical boreholes in anisotropic formation // Proceedings of the International Conference DAYS on DIFFRACTION 2016. 2016. P. 317–320.

УДК 519.6

Численное моделирование конструктивно-нелинейных колебаний упруго опертого стержня

В.В. Янаева[1], Ю.И. Скалько[1], С.Ю. Гриднев[2]

[1]Московский физико-технический институт (государственный университет)
[2]Воронежский государственный технический университет

В работе усовершенствован вычислительный алгоритм решения дифференциальных уравнений с изменяющимися в процессе решения граничными условиями. Задача решалась применительно к упруго опертому стержню с ограничителями хода по концам. По стержню двигалась изменяющаяся во времени сосредоточенная сила. Рассматриваемый стержень может быть использован в качестве расчетной схемы пролетного строения наплавного моста неразрезной системы и ряда других упруго опертых конструкций (рис. 1).

Усовершенствование заключается в учете изгибных движений. Ранее в работах [1, 2] была решена аналогичная задача для недеформируемого стержня. Описание расчетной схемы, математической модели колебаний пролетного строения и смысл входящих в уравнения величин приведены в работе [3]. Использование плоской расчетной схемы оправдано предположением о движении автомобиля по оси моста или проезжей части с одной полосой движения.

Изгибные колебания в вертикальной плоскости пролетного строения (расчетной схемой является тонкостенный упругий стержень) описываются дифференциальным уравнением в частных производных пятого (или четвертого без учета внутреннего трения) порядка в соответствии с теорией В.З. Власова. Для описания движения пролетного строения как твердого тела использована система двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с начальными условиями. Пролетное строение представляет собой стержень, находящийся под воздействием давлений колес автомобиля и сил взаимодействия с плавучими опорами. Перемещения концов стержня ограничено величиной зазоров между концами и верхом ограничительных опор.

Трудности численного решения дифференциальных уравнений с разрывными граничными условиями возникают из-за неизвестного времени смены граничных условий. Для их преодоления построена математическая модель изгибных движений упругого тонкостенного стержня в системе координат, начало которой совпадает с центром масс этого стержня, и связанная со стержнем, как с твердым телом. Полная система представляется в виде начально-краевой задачи для уравнения в частных производных. Используется новая переменная $u(t,x)$, которая описывает перемещения сечений стержня в момент времени в неподвижной системе координат в случае малых угловых отклонений моста от положения равновесия. Это позволяет записать исходное уравнение с использованием распределений сил, приложенных к упругому тонкостенному стержню. Показано, что $u(t,x)$, рассматриваемая как обобщенная функция из D' для произвольной бесконечно-дифференцируемой пробной функции $\psi(x) \in D$ из пространства основных функций, удовлетворяет исходным уравнениям. Решение получено с использованием непрерывных обобщенных функций $u(t,x) \in C^0\left(-l_б/2...l_б/2\right)$ [4]. После преобразований, получаем уравнение, принимаемое в дальнейшем за основу при построении вычислительного алгоритма.

Для нахождения решения применяли полиномы Чебышева, полиномы Лежандра и кусочно-линейные функции. Дано обоснование использования полиномов Лежандра для решения рассматриваемой задачи. Ниже приведем краткий алгоритм решения с использованием полиномов Лежандра.

Решение ищется в виде $u(x,t)=\sum_{n=1}^{K} H_n(x)T^n(t)$, где в качестве $H_n(x)$ возьмем полиномы Лежандра порядка $n=1:K$. В качестве пробных функций возьмем $\psi^m(x)=H^m(x)$ – полиномы Лежандра порядка $m=1:K$.

Неизвестные функций T^n получаем решением задачи Коши для системы ОДУ.

Рассмотрен деформируемый стержень со свободными концами длиной $l_б$, который опирается на n упругих связей. Плавность приложения нагрузки обеспечивается двумя переходными частями длиной l_1 и l_2, которые служат только для передачи нагрузки на стержень, когда сила находится на переходных частях. Под концами стержня находятся ограничительные жесткие опоры. Вертикальные перемещения концов стержня ограничены жесткими опорами с зазорами f_1 и f_2. По системе движется одиночная сила, изменяющаяся по гармоническому закону.

На основе разработанного алгоритма создана вычислительная программа в среде Matlab. С ее помощью выполнены различные численные исследования по изучению влияния разнообразных параметров динамической системы на амплитуды и характер колебаний: величины зазора между ограничительными опорами и концами стержня, скорости движения нагрузки. Выявлены основные закономерности колебательного процесса. Для иллюстрации результатов ниже приведен рис. 2.

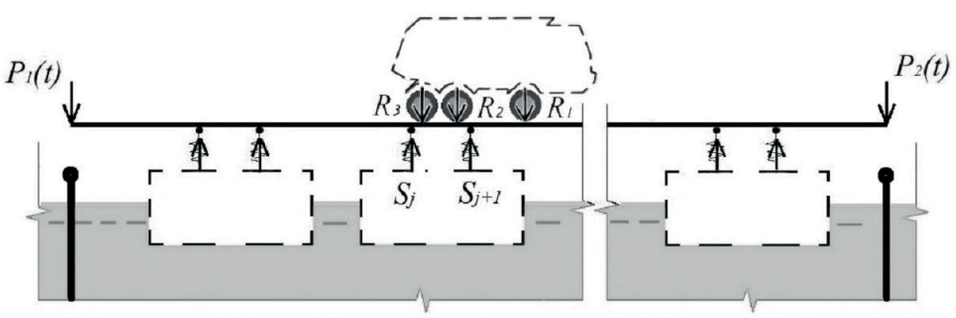


Рис. 1. Расчетная схема пролетного строения наплавного моста в виде упруго опертого стержня

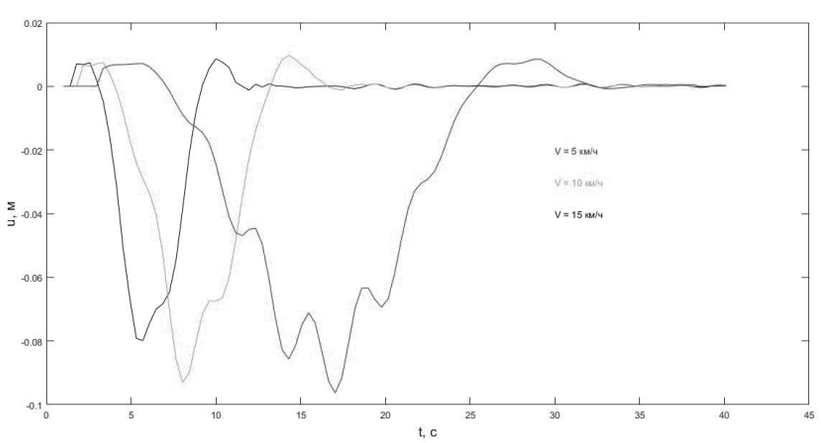


Рис. 2. Графики вертикальных перемещений среднего сечения стержня при различных скоростях подвижной нагрузки

Литература

1. *Гриднев С.Ю., Скалько Ю.И., Раводин И.В., Янаева В.В.* Моделирование колебаний упруго опертой динамической системы с ограничителями хода // Строительная механика и конструкции. Научно-технический журнал. Воронеж. 2017. Вып. № 1 (14). С. 108–117.

2. *Гриднев С.Ю., Скалько Ю.И., Раводин И.В., Янаева В.В.* Колебания упруго опертой динамической системы с ограничителями хода при движении нагрузки в одном направлении // Сб. материалов XVIII междунар. науч.-техн. конф. Тула «Актуальные проблемы строительства, строительной индустрии и промышленности». 2017. С. 44–47.
3. *Гриднев С.Ю.* Уточненная пространственная расчетная схема наплавного моста неразрезной системы // Научный вестник ВГАСУ. Строительство и архитектура. 2008. Вып. №4 (9). С. 38–47.
4. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1979. 379 с.

УДК 519.63

Численное моделирование парогравитационной технологии добычи высоковязких нефтей

Е.И. Фирсов

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Значительная доля нефтяных запасов России приходится на высоковязкие нефти и битумы. Их добыча сложна из-за большой вязкости. При разработке месторождений высоковязких нефтей используются методы, повышающие нефтеотдачу, в том числе тепловые.

Одним из наиболее эффективных и развитых тепловых методов является метод парогравитационного дренажа. Он состоит из двух этапов. Первый этап — прогрев области с помощью циркулирующего внутри труб пара. Второй — закачка горячего пара в пласт.

В работе исследуется численное моделирование этого процесса с использованием нефтегазового симулятора. Производится сравнение с коммерческим симулятором STARS на примере моделирования технологии парогравитационного дренажа.

Также исследуется задача трехфазной неизотермической фильтрации с подвижной твердой фазой. В классической постановке задачи фильтрации считается, что скелет неподвижен.

Исходная модель – уравнение сохранения энергии, непрерывности и определяющее соотношение в виде закона Дарси [1]. Система уравнений решается по явной схеме. Сравниваются результаты при использовании противопоточной аппроксимации, решении задачи о распаде разрыва и упрощенной задачи о распаде разрыва (HLL).

Литература

1. *Кондауров В.И.* Механика и термодинамика насыщенной пористой среды. —М.: МФТИ, 2007. 309 с.
2. *Добрего К.В., Жданок С.А.* Физика фильтрационного горения газов. — М.: Ин-т тепло- и массообмена им. А.В. Лыкова НАНБ, 2002. 203 с.
3. *Баталин О.Ю., Брусиловский А.И., Захаров М.Ю*. Фазовые равновесия в системах природных углеводородов. – М.: Недра, 1992. 270 с.
4. *Бурже Ж., Сурио П., Комбарну М*. Термические методы повышения нефтеотдачи пластов. — М.: Недра, 1988. 422 с.

Секция проблем передачи информации, анализа данных и оптимизации

УДК 519.688

Исследование неасимптотического поведения многошаговых итеративных методов оптимизации

А.Д. Кулакова[1,2], *Б.Т. Поляк*[2]

[1]Московский физико-технический институт (государственный университет)
[2]Институт проблем управления РАН

Данное исследование возникло из наблюдения зависимости от начальных условий поведения таких методов безусловной оптимизации, как метод тяжелого шарика [1] и быстрый градиентный метод Нестерова [2].

Рассматривается линейное разностное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$x_k = a_1 x_{k-1} + a_2 x_{k-2} + \cdots + a_n x_{k-n}. \quad (1)$$

Для частного случая единственного корня (корня ρ кратности *n*) его решение имеет вид

$$x_k = \rho^k (C_1 + C_2 k + \cdots + C_n k^{n-1}), \quad (2)$$

где константы $C_1 \ldots C_n$ находятся из начальных условий. При специальных начальных условия вида $(0\ 0\ \cdots 1)$ решение выписывается в явном виде:

$$x_k = \rho^{k-n} \binom{k-1}{k-n}, \quad (3)$$

где ρ — корень характеристического уравнения, а $\binom{k-1}{k-n}$ означает число сочетаний из $(k-1)$ по $(k-n)$.

Такая траектория ведет себя немонотонно и характеризуется заметным «всплеском». Ее максимум $x_{\max}$ достигается при $k_{\max}$, выражаемого из уравнения:

$$\ln \rho + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{k_{\max} - i} = 0. \quad (4)$$

Для простейшего случая *n* = 2 получены следующие соотношения:

$$k_{\max} = 1 + \gamma, \quad (5)$$

$$x_{\max} = \rho^{1+\gamma} \binom{\gamma}{\gamma-1}, \quad (6)$$

где $\gamma = -\frac{1}{\ln \rho}$, $\rho < 1$.

Эти результаты могут быть применены для анализа поведения метода тяжелого шарика [1, раздел 3.2] и стационарного варианта ускоренного метода Нестерова [2, метод 2.38].

Действительно, данные методы для случая минимизации квадратичной функции могут быть записаны в виде линейного векторно-матричного разностного уравнения второго порядка. Если выбраны оптимальные параметры методов, то для отдельных координат мы оказываемся в ситуации, описанной выше, при этом $\rho = 1 - \frac{2}{\chi}$, где χ — обусловленность матрицы, задающей квадратичную функцию.

Делается вывод о том, что поведение указанных методов при «плохих» начальных условиях может быть немонотонным: к идее о быстрой сходимости таких методов нужно относиться осторожно.

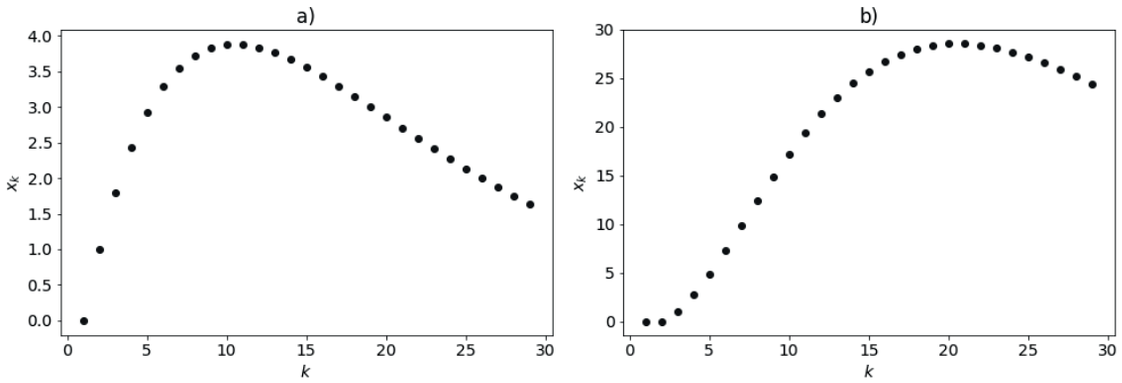


Рис. 1. Поведение итерационного метода с ρ = 0.9 (случай кратного корня характеристического уравнения) при $n = 2$ (a) и $n = 3$ (b) соответственно

Литература

1. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. – М.: Наука, 1983. 384 с.
2. *Нестеров Ю.Е.* Введение в выпуклую оптимизацию. – М.: МНЦМО, 2010. 280 с.

УДК 519.688

Об одном численном методе минимизации OPLS force field

А.С. Аникин[1], О.А. Большакова[3], А.В. Гасников[2,3], А.Ю. Горнов[1], Д.В. Макаренко[2], Б.О. Нетеребский[3], П.А. Яковлев[3]

[1]Институт динамики систем и теории управления им. В.И. Матросова СО РАН
[2]Московский физико-технический институт (государственный университет)
[3]Департамент вычислительной биологии БИОКАД

В вычислительной биологии одной из наиболее важных задач является (существенно невыпуклая) задача минимизации энергии третичной структуры белковой молекулы [1, 2]. Далее рассматривается постановка задачи, в которой не учитывается влияние соленого раствора (воды), в котором, как правило, находится молекула белка. Связано это с тем, что нас интересуют ситуации, в которых уже есть хорошие начальные приближения к нужному решению (локальному минимуму), и эти начальные приближения уже были получены с учетом наличия воды (раствора).

Типичная молекула белка состоит из нескольких десятков или сотен аминокислот, в свою очередь каждая аминокислота состоит из двух десятков атомов. Таким образом, типичный белок состоит из нескольких тысяч атомов. Обозначим число атомов в рассматриваемом белке n ($n \sim 10^3$). Каждый атом имеет три пространственные координаты $\{x_k, y_k, z_k\}$. Далее мы будем работать в этом координатном пространстве. Здесь стоит отметить, что в литературе предпочитают работать в пространстве углов и расстояний между соседними атомами [2].

Оптимизируемый функционал энергии может быть представлен в виде

$$E = E_{bonds} + E_{angles} + E_{dihedrals} + \underbrace{E_{elst} + E_{vdw}}_{E_{nonbonded}},$$

где

$$E_{bonds} = \sum_{\substack{\text{между атомами } i \text{ и } j \\ \text{есть хим. связь}}} K_r^{ij} \cdot \left(r_{ij} - r_{ij}^0\right)^2,$$

r_{ij} – расстояние между i-м и j-м атомами, r_{ij}^0 – равновесное значение этого расстояния;

$$E_{angles} = \sum_{\substack{\text{между атомами } i \text{ и } j, \\ j \text{ и } k \text{ есть хим. связи}}} K_{\theta}^{ijk} \cdot \left(\theta_{ijk} - \theta_{ijk}^{0}\right)^2,$$

θ_{ijk} – угол, образованный векторами (i,j) и (j,k), т.е. между векторами, выходящими из j-го атома в i-й и k-й атомы, θ_{ijk}^{0} – равновесное значение этого угла;

$$E_{dihedrals} = \sum_{\substack{\text{между атомами } i \text{ и } j, \\ j \text{ и } k,\ k \text{ и } l \text{ есть хим. связи}}} K_{\theta}^{ijkl} \cdot \left(\theta_{ijkl} - \theta_{ijkl}^{0}\right)^2,$$

θ_{ijkl} – двугранный угол между плоскостями, образованными парами векторов $\{(i,j),(j,k)\}$ и $\{(j,k),(k,l)\}$, θ_{ijkl}^{0} – равновесное значение этого угла;

$$E_{elst} = \sum_{i<j} \frac{C_{elst}^{ij} f^{ij}}{r_{ij}} \tag{1}$$

– потенциал Кулоновского взаимодействия атомов друг с другом, $f^{ij} = 0$, если расстояние между атомами i и j одна или две связи, $f^{ij} = 0.5$, если расстояние три связи, $f^{ij} = 1$, если больше чем три связи;

$$E_{vdw} = \sum_{i<j} \left(\frac{C_{vdw,1}^{ij}}{r_{ij}^{12}} - \frac{C_{vdw,2}^{ij}}{r_{ij}^{6}} \right) f^{ij}$$

– потенциал Ван-дер-Ваальсовского взаимодействия атомов друг с другом.

В основе предлагаемого подхода – «шевеление» на каждой итерации только одного (случайно выбранного) атома при «замороженных» остальных. Заметим, что при изменении положения одного атома пересчет E_{bonds}, E_{angles}, $E_{dihedrals}$ будет стоить $\mathrm{O}(1)$, поскольку затрагивает только «соседние» по химическим связям атомы («соседние» взяты в кавычки, потому что речь идет не только о непосредственных соседях, но и о соседях через две и даже три химические связи). Обычно число таких «соседей» не больше 15. Для пересчета E_{vdw} можно использовать специальные структуры данных типа Kd Tree [3], которые имеются, например, в библиотеке SciPy Python 3. Однако оптимально использовать в данном случае деревья диапазонов (Range Tree), описанные, например, в главе 5 [3]. С помощью такой структуры данных первый пересчет E_{vdw} будет занимать $\mathrm{O}\left(\ln^2 n\right)$ – это время уходит на поиск ближайших пространственных соседей рассматриваемого атома. Последующие пересчеты E_{vdw} при изменении положения того же атома будут занимать $\mathrm{O}(1)$. Сложнее дело обстоит с E_{elst}. Численные эксперименты с реальными белками убедительно свидетельствуют о том, что для пересчета значений E_{elst} необходимо учитывать все слагаемые в сумме (1), которые связаны с рассматриваемым атомом. Поскольку таких слагаемых $n-1$, то получается, что сложность пересчета E_{elst} будет $\mathrm{O}(n)$, что на два-три порядка больше, чем по остальным компонентам энергии. Далее излагается основная оригинальная конструкция данной заметки, позволяющая получить амортизационную сложность пересчета E_{elst} порядка $\mathrm{O}(1)$.

Прежде всего, заметим, что на одной итерации необходимо посчитать (точнее, пересчитать) значение полной энергии при изменении положения одного атома ни один раз, а много раз, чтобы определить наилучшее положение этого атома при фиксированных положениях всех остальных атомов. Выберем число таких пересчетов порядка n. Покажем, как можно осуществить все эти $\sim n$ пересчетов за время $\mathrm{O}(n)$. Пусть на

рассматриваемой итерации был выбран атом с номером i. Обозначим приращения положения этого атома через $\{\delta_i^x, \delta_i^y, \delta_i^z\}$. Тогда за время $\mathrm{O}\left(\ln^2 n\right)$ (см. выше) сумму (1) можно разбить на две неравнозначные составляющие. Первая составляющая ($\mathrm{O}(1)$ слагаемых) будет содержать сумму по ближайшим пространственным соседям атома i, а вторая сумма будет содержать все, что не вошло в первую ($\mathrm{O}(n)$ слагаемых). Вторую сумму с хорошей точностью можно заменить её рядом Тейлора по $\{\delta_i^x, \delta_i^y, \delta_i^z\}$ с членами до первого порядка включительно [4]:

$$E^i_{elst}\left(\delta_i^x, \delta_i^y, \delta_i^z\right) = \underbrace{E^i_{elst}\left(0,0,0\right)}_{\text{считается один раз за O}(n)} - \underbrace{\sum_{\substack{j\text{: атом } j \text{ пространственно} \\ \text{близок к атому } i}} \frac{C^{ij}_{elst} f^{ij}}{\left(\left(x_j - x_i\right)^2 + \left(y_j - y_i\right)^2 + \left(z_j - z_i\right)^2\right)^{1/2}}}_{\text{считается один раз за O}(1)} +$$

$$+ \underbrace{\sum_{\substack{j\text{: атом } j \text{ пространственно} \\ \text{близок к атому } i}} \frac{C^{ij}_{elst} f^{ij}}{\left(\left(x_j - x_i - \delta_i^x\right)^2 + \left(y_j - y_i - \delta_i^y\right)^2 + \left(z_j - z_i - \delta_i^z\right)^2\right)^{1/2}}}_{\text{пересчитается один раз за O(1)}} +$$

$$+ \sum_{\substack{j\text{: атом } j \text{ пространственно} \\ \text{далек от атома } i}} \frac{C^{ij}_{elst} f^{ij}}{r_{ij}^3}\left(\left(x_j - x_i\right)\delta_i^x + \left(y_j - y_i\right)\delta_i^y + \left(z_j - z_i\right)\delta_i^z\right). \qquad (2)$$

Несложно понять, что последнее слагаемое в (2) есть просто линейная форма $C_x\delta_i^x + C_y\delta_i^y + C_z\delta_i^z$, коэффициенты которой $\left\{C_x, C_y, C_z\right\}$ достаточно посчитать один раз (это можно сделать за $\mathrm{O}(n)$). Таким образом, чтобы посчитать значение $E^i_{elst}\left(\delta_i^x, \delta_i^y, \delta_i^z\right)$ один раз, нужно время $\mathrm{O}(n)$, но, чтобы посчитать $E^i_{elst}\left(\delta_i^x, \delta_i^y, \delta_i^z\right)$ порядка n раз, также нужно время $\mathrm{O}(n)$. Получается, что среднее время на один расчет будет $\mathrm{O}(1)$. Таким образом, пересчитать полную энергию порядка n раз при изменении положения одного атома (случайно выбранного на данной итерации) можно за время $\mathrm{O}(n)$. Это и будет стоимостью итерации, на которой приближенно ищется оптимальное положение случайно выбранного атома. Ясно, что число таких итераций (ввиду их дешевизны) можно сделать очень большим. Более того, если в рассматриваемой эпохе случайно «нарезать» исходную молекулу на приблизительно одинаковые части и выбирать независимо в каждой части атомы для шевеления (вдали от границ), то можно организовать параллельный запуск описанного выше метода. В конце каждой эпохи все части снова собираются вместе, и происходит новое (случайное и независимое) нарезание на части, начинается новая эпоха

Отметим, что для осуществления такого подхода весьма существенно, что атомы для шевеления выбираются случайно. Впрочем, немного более громоздкие рассуждения, возможно, позволят ускорить сходимость метода за счет выбора для шевеления не случайного атома, а атома, от шевеления которого может быть наибольший эффект – правило Гаусса–Саузвелла [5] (соответственно при параллельном подходе нужно будет выбирать такой атом среди атомов, принадлежащих рассматриваемой части). К сожалению, последнее (чувствительность к шевелению) можно определить лишь локально – по пересчету частных производных. Тем не менее подобно описанному выше пересчету значений функции можно показать, что с аналогичной сложностью можно пересчитывать и частные производные (благо пересчитывать их нужно будет только у «соседних» по химически связям и пространственно атомов). По-видимому, это общий факт, связанный с развитием идей автоматического дифференцирования [6]. Используя далее, скажем,

бинарные кучи, можно поддерживать все время быстрый доступ к нужной для работы алгоритма максимальной компоненте градиента.

В описанном выше основном подходе (со случайным выбором атома для шевеления) возникают различные нюансы, которые необходимо проработать при практической реализации метода. Прежде всего, нужно определить, что такое «ближайшие пространственные соседи» или как и сколько конкретно набрасывать значений $\{\delta_i^x, \delta_i^y, \delta_i^z\}$, набрасывать их в шаре или параллелепипеде и какого размера? Ответы на такого рода вопросы можно получить путем проведения экспериментов. Дело в том, что алгоритм разрабатывается не для разового решения одной конкретной задачи, а для массового решения (по 20 раз в день) большого количества однотипных задач. Многое из того, что выше, нужно было доопределять, чтобы окончательно задать метод, можно параметризовать небольшим числом естественно интерпретируемых параметров. Эти параметры можно сделать параметрами обучения и реализовать метод таким образом, чтобы он самообучался и сам настраивался со временем на наиболее «правильные» значения этих параметров. Отметим, что угадать эти значения заранее, без обучения (из теоретических соображений), представляется крайне затруднительным. Так, проведенные численные эксперименты показали, что, случайно выбрав атом i, в наборе $\{\delta_i^x, \delta_i^y, \delta_i^z\}$ наиболее выгодно менять все время положения атома только по одной (также случайно выбранной) координате, не затрагивая остальные координаты (в этом случае метод быстрее сходится). Найти какое-то разумное теоретическое объяснение этому наблюдению нам пока не удалось.

Описанный выше подход со случайным выбором атома для шевеления фактически не использует градиент функционала энергии. То есть в данной заметке предложен безградиентный метод. В литературе, посвященной решению рассматриваемой задачи, безградиентные методы также довольно популярны (особенно популярны вариации метода имитации отжига, случайного марковского поиска, методов Монте-Карло [7] и циклического покомпонентного спуска [8]). Однако в основном такие методы реализуются в пространстве углов и расстояний (не координатном пространстве) и, как правило, реализуются со сложностью итерации $\mathrm{O}\left(n^2\right)$ (столько по порядку слагаемых в $E_{nonbonded}$). Такие методы типично сходятся быстрее (по числу итераций) и часто к более глубокому локальному минимуму. Однако для этого требуется большее время. Подчеркнем, что в данной работе не ставилась цель – найти глобальный минимум. Целью было с «хорошего» начального приближения побыстрее спуститься в “хороший” локальный минимум. Предложенный подход заточен именно под заданную цель. Текущая неоптимизированная версия (не параллельная и без вспомогательной малоразмерной оптимизации на каждой итерации) предложенного алгоритма, написанная на Python 3, работает на современном ноутбуке около часа. Причем отметим, что точности аппроксимации рядом Тейлора (2) не хватает для небольших белков. Для нормальной работы требуются большие белки $n \gtrsim 10^4$.

Если все-таки стремиться приблизиться к глобальному минимуму, то текущий опыт сопоставления различных подходов позволяет выделить среди градиентных и безградиентных методов обычный градиентный спуск (с постоянным шагом) и квазиньютоновский метод с ограниченной памятью LBFGS [9]. При этом рассматривалось то же самое координатное пространство $\{x_k, y_k, z_k\}$. Время работы программы на 1000 GPU порядка одной минуты.

Работа А.Ю. Горнова и А.С. Аникина поддержана грантом РФФИ № 15-07-03827. Работа А.В. Гасникова поддержана грантом РНФ № 17-11-01027.

Литература

1. *Jorgensen W.J., Triado-Rives J.* The OPLS potential function for proteins. Energy minimizations for crystals of cyclic peptides and crambin // Journal of the American chemistry society. 1988. V. 110, N 6. P. 1657–1666.
2. *Жмуров А.А., Барсегов В.А.* Моделирование биологических систем на GPU. М.: МФТИ, 2013.

3. *Берг М., Чеонг О., Кревельд М., Овермарс М.* Вычислительная геометрия. Алгоритмы и приложения. М.: ДМК, 2017.
4. *Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И.* Курс математического анализа. М.: Физматлит, 2001.
5. *Nutini J., Schmidt M., Laradji I.H., Friedlander M., Koepke H.* Coordinate descent converges faster with the Gauss-Southwell rule than random selection // e-print, 2015. arXiv:1506.00552
6. *Baydin A.G., Pearlmutter B.A., Radul A.A., Siskand J.M.* Automatic differentiation in machine learning: a survey // e-print, 2016. arXiv:1502.05767
7. *Жиглявский А.А., Жилинскас А.Г.* Методы поиска глобального экстремума. М.: Наука, 1991.
8. *Canutescu A.A., Dunbrack R.L.* Cyclic coordinate descent: A robotic algorithm for protein loop closure // Protein Sci. 2003. V. 12(5). P. 963–972.
9. *Nocedal J., Wright S.* Numerical optimization. Springer, 2006.

УДК 519.6

Поиск индексных стратегий для маршрутизации трафика базовой станции

Д.А. Пасечнюк

Президентский физико-математический лицей № 239

Задача составления расписания работы планировщика для вышки сотовой связи рассматривалась в части численных экспериментов.

Базовая станция работает в определенном диапазоне частот, разбитом на интервалы, в каждом из которых базовая станция посылает данные на одно из сотовых устройств. Число пакетов (трафик) $r_k(t)$, которые можно в данный момент времени t передать от базовой станции пользователю k, определяется его текущим местоположением. Это приводит к тому, что $r_k(t)$ непостоянны во времени и колеблются вокруг некоторого среднего значения с амплитудой составляющей ~ 30% от этого среднего значения. Эти детали учитываются при разработке алгоритма для планировщика, распределяющего ресурсы базовой станции среди клиентов, используются специальные пакеты типа NS3.

В данной работе разработка алгоритма для планировщика осуществлена при дополнительных упрощающих предположениях.

Считаем, что $\{r_k(t)\}_t$ является i.i.d. последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин. Величины $r_k(t)$, объем уже переданного трафика на сотовое устройство ($R_k(t)$ – размер трафика, переданного к моменту t пользователю k) и текущий размер буферов, отвечающих активным в каждый момент пользователям ($b_k(t)$ – размер буфера в момент t пользователя k) известны на базовой станции. Исходим из того, что базовая станция «не знает» сколько еще лежит на сервере данных, которые впоследствии надо будет закачать в соответствии с запросом пользователя. Объем файла, необходимый для скачивания пользователем k обозначим через A_k (отождествляем номер пользователя и номер файла). Число клиентов, доступных в данный момент всегда известно и меняется со временем. Информация о появлении новых пользователей (T_k^0 – момент прихода пользователя k) и об уходе пользователей (T_k^{end} – момент ухода пользователя k) на базовой станции известна.

$$F(x) \overset{\text{п.н.}}{=} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{N(T)} \sum_{k=1}^{N(T)} \frac{A_k}{T_k^{end}(x) - T_k^0} \to \max_x \qquad (1)$$

На базовой станции хранится история $\{r_k(t)\}_{k,t}, \{b_k(t)\}_{k,t}, \{R_k(t)\}_{k,t}, \{T_k^0\}_k, \{T_k^{end}\}_k$, $\{A_k\}_k$, исходя из которой строим оптимальное расписание распределения (временных) ресурсов базовой станции (x) (1):

$$F(x) \overset{\text{п.н.}}{=} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{N(T)} \sum_{k=1}^{N(T)} \log\left(\frac{A_k}{T_k^{end}(x) - T_k^0}\right) \to \max_x \tag{2}$$

или logALPT (2).

На основе доступной (на базовой станции) информации построен обучающийся алгоритм (с подкреплением), который распределяет ресурсы базовой станции оптимально исходя из критерия максимума $F(x)$

$$I = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i I_i. \tag{3}$$

Было выдвинуто предположение, что вместо использования одного индекса при выборе клиента для передачи информации в момент времени t (3) более эффективным может быть применение машинного обучения для взвешивания уже имеющихся индексов с целью получения нового, в среднем лучшего:

$$\text{индекса.} I = \begin{cases} I_1, \text{ с вероятностью } p_1; \\ I_2, \text{ с вероятностью } p_2; \\ \vdots \\ I_n, \text{ с вероятностью } p_n; \end{cases} \sum_{i=1}^{n} p_i = 1. \tag{4}$$

Вместо линейной комбинации была использована вероятностная комбинация нескольких индексов. Формула вычисления индекса (4) для пользователей в момент времени t определяется случайным выбором из множества всех индексов с вероятностью выбрать первый индекс p_1, второй индекс – с вероятностью p_2 и т. д.

Для проверки выдвинутых гипотез было реализовано программное обеспечение, симулирующее реальный процесс появления и обслуживания клиентов на базовой станции. Программа генерирует очередь клиентов, опираясь на наблюдаемые в действительности статистические закономерности в характеристиках новых клиентов.

$T_{k+1}^0 - T_k^0$ есть случайные величины из показательного распределения $p(x) = Exp(x|\lambda)$:

$$p(x) = \sum_{i=1}^{4} p_i \Pi(x|m_i, \alpha), \tag{5}$$

где $\Pi(x|m_i, \alpha) = \frac{\alpha m_i^{\alpha}}{x^{\alpha+1}}$. A_k есть случайные величины из смеси распределений Парето (5):

$$p(x) = U(x|a_k, b_k), \tag{6}$$

$r_k(t)$ есть независимые одинаково распределенные случайные величины из равномерного распределения (6)

Программное обеспечение для экспериментов сконфигурировано следующим образом: параметр показательного распределения для генерации промежутков времени между приходами клиентов $\lambda = 1/11$; параметры распределения Парето для генерации размеров файлов $\alpha = 5.5; m_1 = 500;\ p_1 = 0.4; m_2 = 5000;\ p_2 = 0.3; m_3 = 25000;\ p_3 = 0.2; m_4 = 62500;\ p_4 = 0.1;$ параметры равномерного распределения для генерации $r_k(t)$: $a_k, b_k = r(1 \mp 0.3),\ r = c\lambda\overline{A_k}, c = 0.6$.

В процессе симуляции в некоторые промежутки времени наблюдается появление небольших очередей, из 5–7 клиентов.

В результате тестирования сделан вывод: использование комбинаций стратегий не приводит к увеличению функционала $logALPT$. Его максимум как при использовании линейной, так и вероятностной комбинации нескольких стратегий достигается в точке, где все весовые коэффициенты или вероятности использования индекса, кроме одного, обращаются в ноль, что соответствует использованию одной стратегии на протяжении всей

работы базовой станции, что отражено на рис. 1 в виде графика зависимости значения функционала от вероятностей выбора каждого из трех индексов и на рис. 2 в виде графика зависимости значения функционала от весовых коэффициентов для каждого из двух индексов.

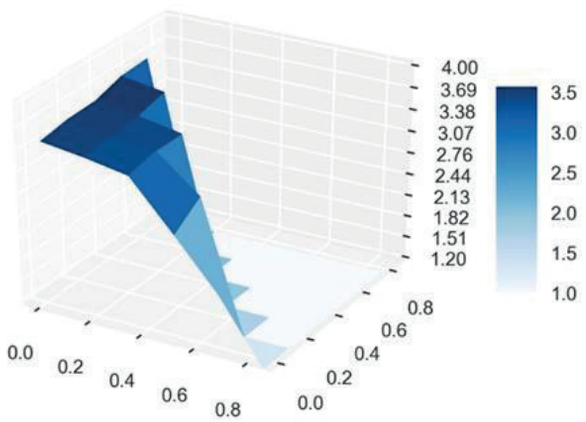


Рис. 1. Зависимость значения функционала от вероятностей выбора индексов T, TAS и DAS

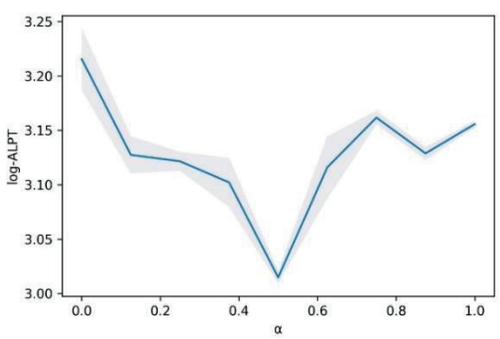


Рис. 2. Зависимость значения функционала от весовых коэффициентов для индексов TAS и DAS

Литература

1. *Gittins J., Glazebrook K., Weber R.* Multi-armed Bandit Allocation Indices. Second Edition. John Wiley & Sons, Ltd. Published, 2011. 301 c.
2. *Николенко С.И., Тулупьев А.Л.* Самообучающиеся системы. М.: МЦНМО, 2009. 288 с.
3. *Aalto S., Lassila P., Osti P.* Whittle index approach to size-aware scheduling for time-varying channels with multiple states // Queueing Syst. 2016. 83.P.195–225.
4. *Nelly M.* Stochastic Network Optimization with Application to Communication and Queueing Systems. Morgan & Claypool Publishers, 2010. 212 p.

УДК 519.71

Метод зеркального спуска в задачах условной минимизации при условии неограниченности градиента целевой функции

***Ф.С. Стонякин*[2], *А.А. Титов*[1]**

[1]Московский физико-технический институт (государственный университет)
[2]Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского

В работе предложено два алгоритма зеркального спуска для негладких условных задач выпуклой оптимизации:

$$f(x) \to \min_{x \in X}, g(x) \le 0 \qquad (1)$$

для выпуклых субдифференцируемых функций $f, g : X \to \square$, где X – выпуклое подмножество конечномерного пространства E с нормой $\|\square\|$. При этом f может не удовлетворять условию Липшица, но иметь градиент $\nabla f(x) \in E^* \forall x \in X$, удовлетворяющий условию Липшица:

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_* \le L\|x - y\|_E, \tag{2}$$

где $\|f\|$ – норма в сопряженном пространстве: $\|f\|_* = \max\{< g, x >, \|x\|_E \le 1\}$.

Про функциональные ограничения мы делаем предположение, что

$$\|g(x) - g(y)\| \le M_g \|x - y\|_E \ \forall x, y \in E. \tag{3}$$

Введем вспомогательную прокс-функцию $d : X \to \square$ и предположим, что $\min_{x \in X} d(x) = d(0)$ и $\exists \theta_0$, что $d(x_*) \le \theta_0^2$, где x_* – множество решений задачи (1). Введем также соответствующую дивергенцию Брегмана: $V(y, x) = d(x) - d(y) - < d`(y), x - y)$. Мы предполагаем, что d непрерывно дифференцируемая и 1-сильно выпукла. Аналогично [1] введем следующий оператор: $Mirr_\xi(\eta) = \arg\min\{< \eta, x > + V(\xi, x)\}$.

Мы предлагаем следующие два алгоритма.

Алгоритм 1. Для $\varepsilon > 0$ и начальной итерации $x^0 = \arg\min_{x \in X} d(x)$. Далее на каждом шаге i если $g(x^i) \le \varepsilon$ то выбираем шаг $h_i = \dfrac{\varepsilon}{\|\nabla f(x^i)\|_* M_g}$ («продуктивные» шаги), а в противном случае ($g(x^i) > \varepsilon$), то выбираем шаг $h_i = \dfrac{\varepsilon}{M_g^2}$ («непродуктивные» шаги). Далее x^{i+1} будем выбирать как $Mirr_{x^i}(h_i \nabla f(x^i))$. Алгоритм будет работать $N = \left\lceil \dfrac{2M_g^2 \theta_0^2}{\varepsilon^2} \right\rceil$ шагов.

Второй алгоритм уже адаптивный.

Алгоритм 2. Выберем $\varepsilon > 0$ и начальную итерацию $x^0 = \arg\min_{x \in X} d(x)$. Далее, если на шаге i $g(x^i) \le \varepsilon$, то выберем $h_i = \dfrac{\varepsilon}{\|\nabla f(x^i)\|_*}$, а в противном случае $h_i = \dfrac{\varepsilon}{\|\nabla f(x^i)\|_*^2}$ (соответственно «продуктивные» и «непродуктивные» шаги).

Критерий остановки:

$$|I| + \sum_{i \notin I} \frac{1}{\|\nabla g(x^i)\|_*^2} \ge \frac{2\theta_0^2}{\varepsilon}, \tag{4}$$

где I – множество «продуктивных» шагов ($g(x^i) \le \varepsilon$).

Отметим, что условие (3) означает, что алгоритм 2 работает не более $\dfrac{2\max\{1, M_g\}\theta_0^2}{\varepsilon^2}$ шагов.

Получены следующие оценки скорости сходимости алгоритмов 1 и 2.

Теорема 1. *Если f и g удовлетворяют условиям* (1), (2) *и* (3), *то после работы алгоритма* 1 *верны оценки*

$$f(x) - f(x_*) \le \frac{\varepsilon \|\nabla f(x_*)\|_*}{M_g} + \frac{L\varepsilon^2}{2M_g^2}, \tag{5}$$

$$g(x) \le \varepsilon \ \textit{где}\ x = \arg\min_{i \in I} f(x^i). \tag{6}$$

Теорема 2. *Если f и g удовлетворяют* (1) *и* (2)*, то после работы алгоритма 2 верны оценки:*

$$f(x) - f(x_*) \le \varepsilon \left\| \nabla f(x_*) \right\|_* + \frac{L\varepsilon^2}{2}, \tag{7}$$

$$g(x) \le \varepsilon, \text{ где } x = \arg\min_{i \in I} f(x^i) \ . \tag{8}$$

Отметим, что теоремы 1 и 2 могут быть перенесены на случай с целевой функцией

$$f(x) = \max f_k(x) \forall x \in X, \tag{9}$$

где для всякого $k = \overline{1, N}$ существует $L_k > 0$ и существует $\nabla f_k(x) \in E^* \forall x \in X$:

$$\left\| \nabla f_k(x) - \nabla f_k(y) \right\| \le L_k \left\| x - y \right\|_E \tag{10}$$

В работе были использованы материалы доклада Ю. Е. Нестерова [5]. Авторы выражают особую благодарность А.В. Гасникову за постановку задачи и полезные обсуждения.

Литература

1. *Bayandina A., Gasnikov A., Gasnikova E., and Matsievsky S.* Primal-dual mirror descent for the stochastic programming problems with functional constraints. Computational Mathematics and Mathematical Physics, 58, 2018. To appear, arXiv:1604.08194.
2. *Ben-Tal A. and Nemirovski A.* Lectures on Modern Convex Optimization. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001.
3. *Ben-Tal A. and Nemirovski A*. Lectures on Modern Convex Optimization (Lecture Notes). Personal web-page of A. Nemirovski, 2015.
4. *Nemirovski A., Juditsky A., Lan G., and Shapiro A.* Robust stochastic approximation approach to stochastic programming // SIAM Journal on Optimization, 19(4):1574–1609, 2009. 15.
5. *Nemirovskii A.* Efficient methods for large-scale convex optimization problems // Ekonomika i Matematicheskie Metody, 15, 1979. In Russian.
6. http://www.mathnet.ru:8080/PresentFiles/16179/growthbm_nesterov.pdf

УДК 518.12

Использование градиентных методов в задачах распределённой децентрализованной оптимизации

А.В. Рогозин

[1]Московский физико-технический институт (государственный университет)
[2]Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН

Рассмотрим задачу выпуклой оптимизации $\varphi(y) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(y) \to \min_y$. Эту задачу можно решать с помощью сети вычислителей, на каждом из которых хранится функция $\varphi_k(y)$. Рассмотрим граф вычислительных узлов и связей между ними. По матрице инцидентности I построим лапласову матрицу W: $W_{ij} = -I_{ij}, i \ne j; W_{ij} = \sum_{j=1}^{n} I_{ij}, i = j$. Тогда окажется, что $Wy = 0 \Leftrightarrow y_1 = ... = y_n$. Исходная задача перепишется в виде

$$\varphi(y) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(y_k) \to \min_{Wy=0}.$$

Построим двойственную задачу.

$$f(x) = \max_y \left\{ - < x, Wy > - \varphi(y) \right\} \to \min_x .$$

Можно показать, что эта задача может эффективно решаться распределённо с помощью численных методов оптимизации. Однако, если в сети происходят сбои (например, пропадает соединение между какими-то двумя вычислителями), то матрица W меняется, и вместе с ней меняется двойственная задача. При этом точка минимума функции f остаётся неизменной. Тем не менее в таком случае используемый итерационный процесс может не сходиться к минимуму целевой функции.

Эта проблема решается с помощью использования рестартов для численных методов оптимизации. Допустим, метод делает n шагов и выдаёт точку x_n. *Рестартом* называется перезапуск метода с начальным приближением в точке x_n. В данной работе изучается сходимость градиентного спуска с постоянным шагом, а также ускоренных градиентных методов FISTA [2] и AGM [1] при изменяющейся во времени целевой функции. Рассматриваются различные предположения на частоту изменений целевой функции(изменения происходят не чаще, чем один раз в t шагов алгоритма, время скачка функции имеет равномерное распределение на некотором отрезке $[0, T]$ и т.п.). При этом предполагается, что в каждый момент целевая функция является сильно выпуклой с константой $\mu \geq \mu'$, а её градиент – липшицев с константой $L \leq L'$.

Литература

1. *Zhu A., Orecchia L.* Linear Coupling: An Ultimate Unification of Gradient and Mirror Descent // arXiv. 2016. URL: https://arxiv.org/pdf/1407.1537.pdf. (Дата обращения: 11.10.2017).
2. *Fercoq O., Qu Z.* Restarting accelerated gradient methods with a rough strong convexity estimate // arXiv. 2016. URL: https://arxiv.org/pdf/1609.07358.pdf. (Дата обращения: 11.10.2017).
3. *Boyd, S., Ghosh, A., Prabhakar, B.* [*et al.*]. Randomized Gossip Algorithms // IEEE Transactions on Information Theory. 2006. V. 52, N 6. P. 2508–2530.

УДК 519.856

Задача поиска стохастических равновесий в транспортных сетях

М.Б. Кубентаева

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Рассмотрим модель Бэкмана равновесного распределения потоков в транспортной сети [1]. Сеть представляется в виде ориентированного графа $\langle V, E \rangle$, где V – множество вершин, E – множество ребер; OD – множество пар $w = (i, j)$ источник–сток, d_w – корреспонденция, отвечающая паре w, затраты на прохождение ребра $e \in E$ описываются функцией $\tau_e(f_e)$, где f_e – поток по ребру e.

Задача поиска стохастического равновесия Нэша–Вардропа для данной модели формулируется следующим образом [1]:

$$\sum_{e \in E} \sigma_e(f_e) + \gamma \sum_{w \in OD} \sum_{p \in P_w} x_p \ln(x_p / d_w) \to \min_{f = \Theta x,\ x \in X},$$

где x_p – поток по пути p; P_w – множество путей, отвечающих корреспонденции w, $P = \cup_{w \in OD} P_w$ – множество всех путей; $\gamma > 0$ – параметр, отвечающий за ограниченную рациональность агентов. $\sigma_e(f_e) = \int_0^{f_e} \tau_e(z)\, dz$ – выпуклые функции.

$$\Theta = \|\delta_{ep}\|_{e \in E, p \in P} = \|\Theta^{(p)}\|_{p \in P}, \qquad \delta_{ep} = \begin{cases} 1, e \in E \\ 0, p \in P. \end{cases}$$

$X = \{x \geq 0 : \sum_{p \in P_w} x_p = d_w, w \in OD\}$ – прямое произведение симплексов.

В качестве $\tau_e(f_e)$ выберем BPR-функцию:

$$\tau_e(f_e) = \bar{t}_e(1 + \rho(f / \bar{f}_e)^{\mu}).$$

Переход к двойственной задаче ($\operatorname{dom} \sigma^*$ – область определения сопряженной к σ функции):

$$\min_{f,x}\left\{\sum_{e\in E}\sigma_e(f_e)+\gamma\sum_{w\in OD}\sum_{p\in P}x_p\ln(x_p/d_w):f=\Theta x,\ \ x\in X\right\}=$$
$$-\min_{dom\ \sigma^*}\left\{\gamma\psi\left(\frac{t}{\gamma}\right)++\sum_{e\in E}\sigma_e^*(t_e)\right\}$$

,

где $\psi(t)=\sum_{w\in OD}d_w\,\psi_w(t),\ \psi_w(t)=\ln(\sum_{p\in P_w}\exp(-\sum_{e\in E}\delta_{ep}t_e))$.

При этом решение исходной задачи выражается через решение двойственной следующим образом:

$$f=-\nabla\gamma\psi\left(\frac{t}{\gamma}\right),x_p=d_w\frac{\exp\left(-\frac{1}{\gamma}\sum_{e\in E}\delta_{ep}t_e\right)}{\sum_{q\in P_w}\left(-\frac{1}{\gamma}\sum_{e\in E}\delta_{eq}t_e\right)},p\in P_w,$$

Для BPR-функции: $\tau_e(f_e)=\bar{t}_e\left(1+\rho\left(\frac{f_e}{f_e}\right)^{\frac{1}{\mu}}\right)$ имеем $\sigma_e^*(t_e)=\bar{t}_e\left(\frac{t_e-\bar{t}_e}{\bar{t}_e\rho}\right)^{\frac{(t_e-\bar{t}_e)}{1+\mu}}$.

Отметим, что при $\gamma\to+0$ распределение потока по путям вырождается, и все агенты действуют полностью рационально, т.е. используют только кратчайшие пути.

Эксперименты

Для численного решения двойственной задачи был реализован универсальный метод подобных треугольников [2]. Эксперименты проводились на данных, описывающих транспортную сеть города Су-Фолс [3].

Полученное решение также сравнивалось с наилучшим известным решением f^* для предельного случая $\gamma\to+0$ [3] (рис. 1).

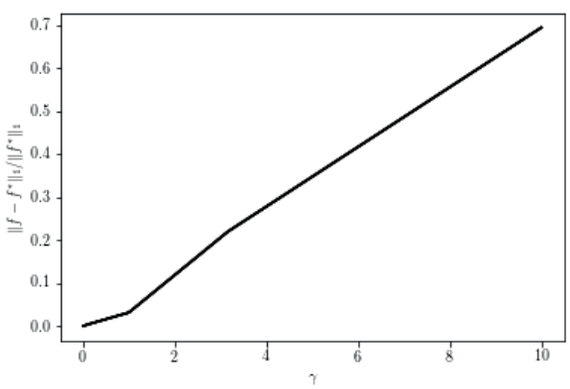


Рис. 1. Зависимость $\|f-f^*\|_1/\|f^*\|_1$ от γ

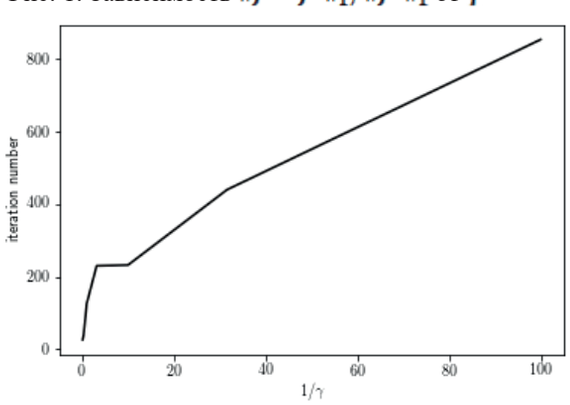


Рис. 4. Зависимость числа итераций от $1/\gamma$

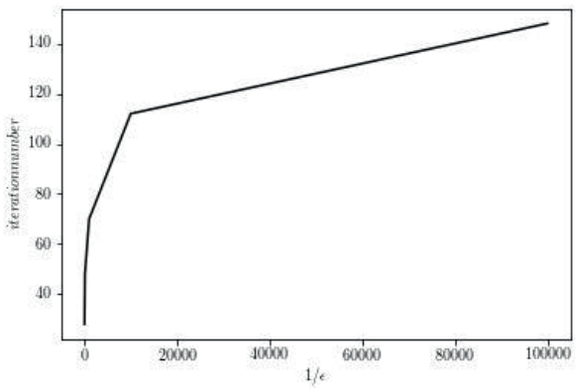


Рис. 5. Зависимость числа итераций от точности

Автор выражает благодарность Александру Владимировичу Гасникову за предложенную тему для исследования и ряд ценных советов в решении задачи.

Литература

1. *Баймурзина Д.Р*, *Гасников А.В*., *Гасникова Е.В., Двуреченский П.Е., Ершов Е.И., Лагуновская А.А.* Универсальный метод поиска равновесий и стохастических равновесий в транспортных сетях.
2. *Гасников А.В., Нестеров Ю.Е.* Универсальный метод для задач стохастической композитной оптимизации // ЖВМ и МФ. 2017. Т. 57, № 7. arXiv:1604.05275
3. https://github.com/bstabler/TransportationNetworks/tree/master/SiouxFalls
4. https://github.com/MeruzaKub/TransportNet

УДК 004

Решение задачи переноса обучения с применением автокодировщика

П.Е. Калошин

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Рассмотрен один из подходов к задаче переноса обучения в симметричном случае. На репозитории tera-PROMISE, представляющем собой набор датасетов, в которых объектом является совокупность метрик для модуля программного кода, а меткой класса – наличие или отсутствие ошибок, обучался автокодировщик, реализующий функцию перехода из исходного признакового пространства в латентное:

$$f: x \to y, x \in R^n, y \in [0,1]^m \text{ , где } m > n$$

Обучение автокодировщика, представлявшего собой нейросеть из нескольких полносвязных слоев, происходило при помощи обучаемого одновременно с ним декодировщика, реализующего преобразование:

$$g: y \to x^*, x^* \in R^n, \ y \in [0,1]^m.$$

При обучении минимизировалась ошибка восстановления в l2-метрике:

$$\text{Loss}(x, x^*) = |x - x^*|_2$$

Основные требуемые свойства латентного пространства: сохранение максимально возможной информации из исходного пространства и независимость признаков (каждая координата латентного пространства должна отвечать за свой аспект информации, таким образом можно рассчитывать на то, что часть признаков будут отвечать за метки классов, а часть – за источник данных). Выполнение первого свойства достигалось большей размерностью латентного признакового пространства в сравнении с исходным, второго –

прореживанием (добавочным штрафом функции потерь на слишком большое количество близких к единице латентных признаков для одного объекта выборки, s – степень влияния прореживания).

$$\mathrm{Loss}_{\mathrm{sparse}}(y) = s\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}|y_i|.$$

Предлагаемый подход к решению задачи переноса обучения заключается в транслировании имеющихся данных в латентное пространство (при помощи обученного на них же автоэнкодера) и обучении стандартных алгоритмов классификации (в данной работе использовался метод опорных векторов svm) уже в нем. Качество измерялось следующим образом: выбиралась пара датасетов *A* и *B*, оба переводились в латентное пространство, на *A* обучался svm и считалось качество предсказаний на *B* в f1-мере. Полученное качество сравнивалось с результатом переноса svm в исходном пространстве результатом при кросс-валидации svm на *B* (без переноса). Результаты наглядно отображены на рис. 1.

Видно, что предложенный алгоритм во всех случаях превосходит классический svm при переносе, более того, визуально он не сильно уступает классификации внутри домена (то есть без переноса вообще). Тем не менее, ввиду того, что в зависимости от выбранной пары A и B качество классификации сильно варьируется, сопоставить качеству алгоритма некое единственное репрезентативное число – непростая задача. Гиперпараметры алгоритма (например, такие, как размер слоев и коэффициент при прореживании) подбирались исходя из максимизации среднего качества классификации на выбранных парах, и отношение посчитанных подобным образом величин для переноса обучения в латентном пространстве и для внутридоменной класификации составляет 0.74. В этой же метрике качества наш подход к переносу обучения позволяет превзойти простой перенос обученного svm в 17.2 раз.

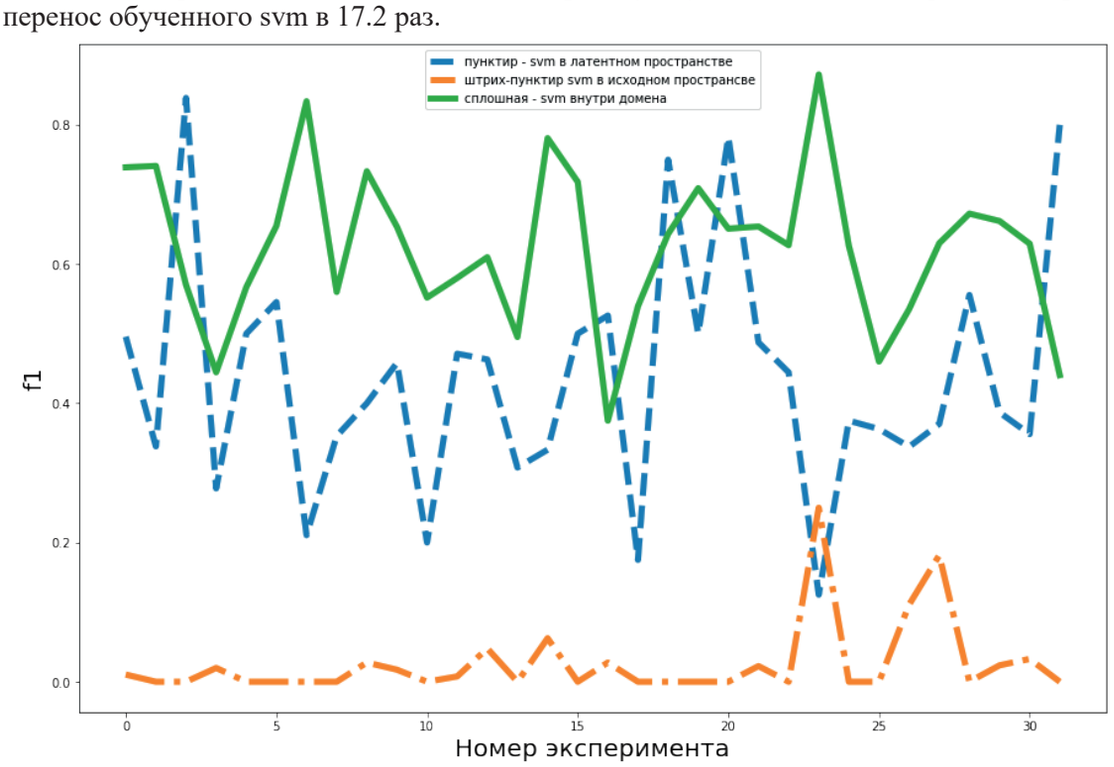


Рис. 1. По оси *X* отложен номер выбранной пары *A* и *B*

Литература

1. *Glorot X., Bordes A., Bengio Y.* Domain Adaptation for Large-Scale Sentiment Classification: A Deep Learning Approach // Proceedings of the Twenty-eight International Conference on Machine Learning (ICML'11) 2011. P. 97–110.

УДК 004.942

Отслеживание множества похожих объектов в видеопотоке при наличии взаимных окклюзий на основе нейросетевой аппроксимации оптического потока

Л.М. Тепляков

Московский физико-технический институт (государственный университет)
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН

Актуальной задачей обработки изображений является покадровое отслеживание одного или нескольких объектов в видеопотоке (например, отслеживание мяча в теннисе [1], людей [2] или автомобилей [3]).

Задача отслеживания представляет особенный интерес при наличии окклюзий, то есть при наличии пересечений объектов между собой и с неподвижными объектами сцены на некоторых кадрах. Предложенные в литературе методы решения задачи отслеживания при наличии окклюзий [2] в основном опираются на возможность различения объектов по их цветовым или текстурным свойствам.

В данной работе мы рассматриваем задачу отслеживания похожих объектов при наличии окклюзий между объектами. Из-за похожести объектов существующие методы, опирающиеся на цветовые и текстурные свойства объектов, нам не подходят. В нашем случае кадры видеопоследовательности содержат снимки организмов вида Intoshia linnei (см. рис. 1).

Для решения задачи мы используем оценку оптического потока между кадрами видеопоследовательности. Использование оптического потока для отслеживания объектов использовалось в литературе и ранее [3, 4], однако предложенные решения не рассматривают случаи окклюзий вообще [3] или рассматривают только окклюзии со статичными объектами [4]. Таким образом, наша задача обладает новизной и является актуальной.

Мы предлагаем отслеживать объекты в видеопотоке путем последовательного анализа последовательных пар кадров. Для этого мы используем искусственную сверточную нейронную сеть. Сверточные нейронные сети и ранее использовались для оценки оптического потока [5]. Алгоритм отслеживания выглядит следующим образом:

На вход алгоритма поступает

1. Два последовательных кадра видеопоследовательности (I_i, I_{i+1}).
2. Множество объектов W_i для кадра I_i (для каждого пикселя изображения I_i задана его принадлежность фону или одному из объектов).

Алгоритм состоит из следующих шагов:

1. Оценивается оптический поток $V = (V_x, V_y)$ для кадров (I_i, I_{i+1}) с использованием искусственной сверточной нейронной сети.
2. Рассчитывается приближение $\widetilde{W}_{i+1}$, оценивающее положения объектов на изображении I_{i+1} с использованием оптического потока V:
$$\widetilde{W}_{i+1}(x + V_x(x,y), y + V_y(x,y)) = W_i(x,y).$$
3. Оценивается множество объектов W_{i+1} на основе приближения $\widetilde{W}_{i+1}$ и кадра I_{i+1}. Для этого
    a. Производится бинаризация кадра I_{i+1}. Поскольку разброс яркостей пикселей червей и разброс яркостей пикселей фона меньше разницы между средними значениями яркости червей и фона, то бинаризация позволяет для каждого пикселя определить принадлежность объекту или фону (но нельзя различить, какому именно объекту он принадлежит).
    b. Для каждого пикселя изображения I_{i+1} определяется ближайший пиксель $\widetilde{W}_{i+1}$, принадлежащий (в соответствии с приближением $\widetilde{W}_{i+1}$) одному из объектов.
    c. Каждому пикселю I_{i+1}, принадлежащему объекту, приписывается принадлежность объекту, пиксель которого был найден на предыдущем

шаге (или приписывается идентификатор нового объекта, если расстояние до ближайшего объекта больше настраиваемого порога T).

d. Каждому пикселю I_{i+1}, не принадлежащему объекту, приписывается принадлежность фону.

Результатом работы алгоритма является

1. Множество объектов W_{i+1} для I_{i+1}-го изображения.

Отметим, что множество W_{i+1} состоит из тех объектов множества W_i, которые не покинули область кадра, а также из объектов, которые впервые появились на кадре I_{i+1}.

В нашем случае из-за большого объема данных и отсутствии готовой разметки (известных сопоставлений объектов между кадрами) обучение на реальных данных представлялось затруднительным. Поэтому в работе была построена модель движения червей на основе реальных данных, и с ее использованием сгенерирована синтетическая выборка.

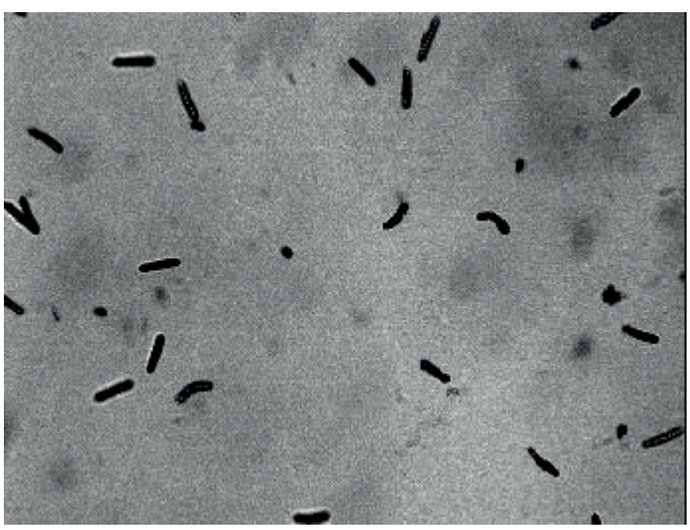


Рис. 1. Пример кадра видеопоследовательности

Литература

1. *Xi-angzeng Zhou, Lei Xie, Qiang Huang* [*et al.*]. Tennis ball tracking using a two-layered data association approach // IEEE Transactions on Mul-timedia. 2015. V. 17, N 2. P. 145–156.
2. *Stephen J. McKenna, Sumer Jabri, Zoran Duricet* [*et al.*]. Tracking groups of people // Computer vision and image understanding. 2000. V. 80, N 1. P. 42–56.
3. *Chauhan Abhishek Kumar, Krishan Prashant.* Moving object tracking using gaussian mixture model and optical flow // International Journalof Advanced Research in Computer Science and Software Engineering. 2013. V. 3, N 4.
4. *Shantaiya Sanjivani, Verma Kesari, Mehta Kamal.* Multiple object tracking using kalman filter and optical flow // European Journal of Advances inEngineering and Technology. 2015. V. 2, N 2. P. 34–39.
5. *Dosovitskiy Alexey* [*et al.*]. Flownet: Learning optical flow with convolutional networks // Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision, 2015. P. 2758–2766.

Секция физико-технической информатики

УДК 316.324.8

Иерархические самоуправляемые системы коллективного интеллекта

К.А. Абрамова[1], Е.В. Карелина[2], В.И. Протасов[3]

[1]Московский физико-технический институт (государственный университет)
[2]ООО «СИНДЕКС»
[3]Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС»

В статье предложены правила взаимодействия большого числа акторов, позволяющие построить иерархическую самоуправляемую систему, в которой акторы взаимодействуют в параллельно работающих небольших группах, выполняя общий проект. В результате проведенной работы удалось разработать и испытать в компьютерных экспериментах основные принципы коллективной системы, позволяющей за небольшое число итераций выделять лучшие решения и акторов-экспертов. По сравнению с существующими платформами краудсорсинга наша система значительно экономичнее, поскольку в ней не требуется использование большого количества фасилитаторов.

Как показывают исследования, в большинстве случаев люди лучше оценивают чужие решения, чем создают собственные. Благодаря этому коллектив может справляться с некоторыми задачами значительно лучше отдельных людей. Внедрение самоуправляемых систем коллективного интеллекта позволит достаточно быстро решать большой спектр задач, используя только интеллектуальные ресурсы группы инициативных участников (акторов).

В настоящей работе, исходя из информационной технологии эволюционного согласования решений [1], предложены правила взаимодействия большого числа акторов, позволяющие построить иерархическую самоуправляемую систему, в которой акторы взаимодействуют в параллельно работающих небольших группах, выполняя общий проект. После окончания первой стадии по итогам работы лучшие акторы продвигаются на следующие уровни иерархии, принося с собой лучшие идеи, выделенные группой. Процесс продолжается до тех пор, пока не будет выделена единственная группа лучших акторов из всех, принимающих участие в проекте, и лучших решений.

Для оценки применимости различных подходов и выбора эффективных методик применялось компьютерное моделирование процесса решения задач виртуальными акторами с использованием метода эволюционного согласования решений [2] и модели Раша [3]. Оценка результативности метода производилась на основе многократных проведений экспериментов на модели с различным количеством акторов.

Рассмотрим применение краудсорсинга для нахождения новых идей или решений. Задача состоит в том, чтобы из большого количества идей выбрать лучшие, используя добровольную работу некоторого количества людей. Также необходимо выбрать лучших с точки зрения вклада людей.

На входе имеем N_{in} акторов, за каждым из которых закреплено M_{in} идей. Причем N_{in} может быть порядка миллиона, что гарантирует наличие большого количества разнообразных идей, даже при наличии повторений среди идей. Задача состоит в том, чтобы выдать M_{out} лучших идей и N_{out} лучших с точки зрения вклада в итоговое решение акторов, где $N_{\text{out}} \ll N_{in}$ и $M_{\text{out}} \ll M_{\text{in}}$. Все эти четыре параметра могут задаваться пользователем системы в зависимости от конкретной задачи.

Стандартный подход к формированию систем коллективного интеллекта не может работать с таким большим числом акторов, в отличие от иерархического. Этот подход аналогичен олимпийской системе проведения турнира. Все N_{in} акторов разбиваются на группы по G акторов. В каждой такой группе проходит три стадии.

1. Оценка решений (идей).
2. Выбор лучших решений.
3. Выбор лучших акторов.

На стадии 1 каждый актор независимо от других составляет рейтинг из решений всех участников группы. На стадии 2 по полученным рейтингам составляется решение (рейтинг) группы. На последней стадии по индивидуальным и групповому рейтингу выбираются акторы, которые внесли наибольший вклад в рейтинг группы, т.е. составили рейтинг, наиболее точно соответствующий итоговому. После чего N_{best} лучших акторов, за каждым из которых закрепляется M_{best} лучших вопросов, переходят на следующий уровень, т.е. снова проходят через те же стадии в составе новой группы. Мы будем рассматривать случай, в котором $M_{\text{best}} = M_{\text{in}}$.

Таким образом, учитывая, что все группы могут работать одновременно, понадобится не более $t \times log_G(N_{in})$ времени для нахождения лучших решений и лучших акторов (t – время работы одной группы).

Известно [2], что оптимальный размер группы G от 5 до 15 акторов. В данной конкретной задаче было решено выбрать G равным 9, учитывая, что для составления рейтинга акторы должны будут просмотреть и оценить $G \cdot M_{\text{in}}$ решений.

В такой постановке задачи наша цель в том, чтобы стадии 2 и 3 осуществлялись автоматически, без привлечения дополнительных квалифицированных работников. Причем на выходе должны оказываться действительно лучшие решения и акторы.

Также можно приблизить задачу к реальным условиям. Вместо того, чтобы задавать параметр N_{in}, можно разрешить акторам присоединяться к системе в течение некоторого времени T_{in}. В этом случае группы будут формироваться по мере появления достаточного количества акторов в системе. Кроме того, каждый актор может без уведомления выйти из системы в произвольный момент времени. В связи с этим возникает необходимость в еще одном временном параметре: T_{round} – максимальная продолжительность стадии 1. Если по истечении этого времени остались акторы, не оценившие решения, то они считаются выбывшими.

В результате проведенной работы удалось разработать и испытать в компьютерных экспериментах основные принципы коллективной системы, позволяющей за небольшое число итераций выделять лучшие решения и акторов-экспертов. По сравнению с существующими платформами краудсорсинга [3] наша система значительно экономичнее, поскольку в ней не требуется использование большого количества фасилитаторов. Система может быть применена для выполнения массовых социологических проектов, а также малым и средним бизнесом для решения своих задач с использованием интеллектуального потенциала как своих сотрудников, так и клиентов.

Работа опубликована при финансовой поддержке РФФИ, грант № 16-07-0076.

Литература

1. *Протасов В.И.* Конструирование метасистемных переходов. М.: Институт физико-технической информатики, 2009. 186 с.
2. *Протасов В.И.* Применение сетевого метода эволюционного согласования решений в управлении проектами. Управление проектами и программами. М.: ИД «Гребенников», 2011, Т. 1(25). С. 22–35.
3. http://www.tadviser.ru/index.php/Witology

УДК 004.912

Генерация описания синтаксиса с помощью методов машинного обучения

А.Г. Асташкин, К.В. Чувилин

Московский физико-технический институт (государственный университет)

В работе рассматриваются так называемые частично формализованные текстовые документы, для которых невозможно описать формальную грамматику. Как следствие, для построения синтаксического анализатора требуется внешнее описание элементов синтаксиса. Работа по созданию такого описания довольно трудоемкая и требует исполнителя с определенной квалификацией.

В данной статье предлагается подход, позволяющий упросить и автоматизировать эту процедуру, основывающийся на методах машинного обучения.

В качестве обучающей выборки используется корпус научных статей в формате LaTeX с известным описанием синтаксиса.

В современных информационных технологиях широко распространено применение текстовых файлов:

- для хранения и передачи данных (XML, JSON),
- для отображения данных (HTML, CSS, Markdown, BBCode, Textile),
- для обработки данных (C/C++, Python, JavaScript, C# и многие другие языки программирования).

Это порождает задачи обработки таких файлов, что непосредственно влечет за собой необходимость построения и анализа логической структуры синтаксического дерева [1].

В большинстве случаев этот процесс может быть автоматизирован благодаря формальному описанию грамматики.

Однако существуют так называемые частично формализованные текстовые файлы, для которых невозможно построить формальную грамматику, описывающую все случаи, в силу её отсутствия, большого количества разновидностей синтаксических конструкций или зависимости от контекста, определяемого внешними данными [2, 3]. Примером таких структурированных текстовых файлов являются документы в формате LaTeX, который представляет собой стандарт де-факто для научных публикаций.

Трудности при их анализе обусловлены эвристической природой древовидной структуры и тем, что набор элементов синтаксиса определяется подключаемыми внешними файлами стилей. С другой стороны, на практике количество разных типов элементов синтаксиса ограничено, а их назначение определяется положением в документе. Это создает предпосылки для автоматизации построения коллекции описаний элементов, пригодной для использования при синтаксическом анализе.

Задача извлечения описания элементов синтаксиса исходных кодов стилевых файлов чрезвычайно нетривиальная и сравнима, если не превосходит по сложности, с созданием компилятора TeX. Поэтому в этих случаях для построения синтаксического дерева используются дополнительные ресурсы, описывающие сигнатуры элементов синтаксиса. Множества сигнатур и синтаксических элементов значительно варьируются от одного издателя к другому, и в каждом случае содержат сотни элементов. Для создания подобных описаний требуется работа профессионалов и большое количество человеко-часов. Таким образом, актуальна задача автоматизации процесса генерации описаний синтаксиса.

На решение именно этой проблемы и направлено данное исследование.

Работа выполнена и опубликована при финансовой поддержке РФФИ, гранты № 16-37-60049, № 16-07-01267.

Литература

1. *Aho A., Lam M., Sethi R., Ullman J.* Compilers: Principles, Techniques, and Tools. 2nd Edition. Prentice Hall, 2006.
2. *Чувилин К.В*. Параметрический подход к построению синтаксических деревьев для частично формализованных текстовых документов // Машинное обучение и анализ данных. 2016. Т. 2, № 2. С. 201–217. doi:10.21469/22233792.2.2.06
3. *Chuvilin K.V.* The Construction of Syntax Trees Using External Data for Partially Formalized Text Documents // Proceedings of the 19th Conference of Open Innovations Association FRUCT, University of Jyvaskyla, Jyvaskyla, Finland. ISSN 2305-7254, ISBN 978-952-68397-5-2, P. 16–23. Url: http://fruct.org/publications/fruct19/files/Chu.pdf

УДК 658.5

Выявление проблем портала государственных услуг на основе анализа текстов обращений пользователей

А.С. Башков, С.В. Клименко

Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет

Единый портал государственных услуг ЕПГУ является сложной, многоуровневой и высоконагруженной информационной системой. Количество его пользователей составляет почти 50 млн граждан. Ежедневно службой поддержки ЕПГУ обрабатываются тысячи обращений от пользователей. Мониторинг и анализ этих обращений позволяет выявлять проблемы в работоспособности и удобстве использования портала и в дальнейшем планировать работы по улучшению портала.

В работе исследованы существующие методы анализа текстов и продемонстрированы результаты их работы на текстах обращений пользователей.

Суть любого проекта электронного правительства, реализуемого в стране, – это всегда внедрение корпоративной информационной системы национального масштаба. Ключевым различием взаимодействия бизнеса и государства с гражданами является их целевая ориентация. Для достижения эффективности бизнес ориентируется на потребности заказчика, в то время как большинство традиционных государств ориентируются на собственные нужды, в некоторой степени игнорируя потребности граждан. Ценность проектов *электронного правительства* заключается именно в конкретной пользе для граждан и бизнеса – в сокращении издержек, в сокращении затрат времени граждан, времени и денег бизнеса и в той добавленной стоимости, которую дают эти системы для общества. Следовательно, проект электронного правительства будет успешным тогда и только тогда, когда станет приносить реальную пользу гражданам, обществу и государству.

Для обеспечения взаимодействия граждан и бизнеса с государством был создан Единый портал государственных услуг (ЕПГУ). Портал представляет собой информационную систему государственного масштаба и ориентирован на пользователей всех возрастов и социальных категорий. На текущий момент их число составляет порядка 50-и млн человек. В целях консультирования и помощи пользователям работает техническая поддержка ЕПГУ. За первый квартал 2017 года в техподдержку поступило 120 тысяч обращений, то есть в среднем от 1000 до 1500 обращений в сутки.

В целях предоставления гражданам качественного сервиса встала задача проведения анализа текстов обращений пользователей для выявления проблем ЕПГУ и их последующего устранения.

Во-первых, такой анализ позволит выявлять имеющиеся массовые или вновь возникающие проблемы неработоспособности отдельных функций и сервисов. Портал обеспечивает маршрутизацию заявлений граждан к ведомствам, отслеживание статуса и получение ответа. Поэтому зачастую проблемы могут быть не на стороне портала, а на стороне ведомств, что можно узнать из реакции пользователей.

Во-вторых, обратная связь от пользователей позволит установить проблемные места портала в части удобства использования (usability), исправить их или дать

необходимые подсказки. В-третьих, анализ обращений позволит узнать об ожиданиях и потребностях граждан, которые впоследствии могут быть реализованы на портале.

Таким образом, анализ текстов обращений пользователей позволит повысить качество и удобство сервисов ЕПГУ.

Автоматизированный анализ текстов развивается высокими темпами в связи с ростом количества электронных документов, статей, текстовых комментариев и иных всевозможных носителей текстовой информации. Обилие такой информации делает актуальной задачу по ее упорядочиванию. Наиболее перспективный подход для решения этой задачи – применение технологий машинного обучения.

На текущий момент существует множество методов автоматического анализа текстов, при этом большинство из них можно разделить на три группы по подходам к анализу текста: вероятностный подход [1, 2], использование искусственных нейронных сетей [3, 4], использование деревьев решений [5].

Поскольку в большинстве случаев такие методы актуальны для решения задач аналитики большого объема данных, в том числе и big data, к методам извлечения знаний из текстов предъявляются требования эффективности и масштабируемости. Дополнительно необходимо учитывать, что зачастую первичные текстовые данные могут содержать большое количество лишней и не значащей для анализа информации («шум»), что также является проблемой, требующей решения.

Анализ текстов обращений пользователей в техническую поддержку портала позволяет в оперативном режиме отслеживать качество работоспособности портала. Внедрение методов анализа в систему мониторинга портала с соответствующими механизмами визуализации позволит диагностировать массовые проблемы, ход их разрешения. Также система может выявлять изменения набора в семантическом ядре и при наборе определенного критического веса диагностировать новую возникшую проблему, что особенно актуально в условиях постоянного развития и расширения функциональности портала.

Литература

1. *Вапник В.Н., Стерин А.М.* Об упорядоченной минимизации суммарного риска в задаче распознавания образов // Автоматика и телемеханика. 1978. № 10. С. 83–92.
2. *Hastie T, Tibshirani R., Friedman J.* The Elements of Statistical Learning: Data Mining, Inference, and Prediction. Verlag: Springer, 2009. 746 p.
3. *Bishop C.* Neural Networks for Pattern Recognition. Oxford: Oxford University Press, 1995. 77 p.
4. *Jordan M., Mitchell T.M.* Machine learning: Trends, perspectives, and prospects // Science. 2015. V. 349, N 6245. P. 255–260.
5. *Segaran T.* Programming Collective Intelligence. LA: O'REILLY, 2008. 368 p.

УДК 004.021

Разработка методов компьютерного зрения для навигации мобильных роботов

В.И. Берзин, М.И. Судейкин

Московский физико-технический институт (государственный университет)

В работе рассматриваются вопросы реализации indoor-навигации для мобильных роботов. Описывается алгоритм навигации, основанный на методах корреляционного экстремального регулирования на примере приводной платформы, оснащенной ультразвуковым дальномером.

Позиционирование мобильных роботов в закрытых помещениях с каждым днем становится все более актуальной научно-практической задачей в области транспортной робототехники. Существующие сегодня системы глобального позиционирования GPS и ГЛОНАСС незаменимы на открытых пространствах, но плохо или вовсе не работают в помещениях из-за сильного затухания сигнала. При этом большинство методов, которые используются для локальной навигации внутри помещений, работают так же по принципу

трилатерации, используя сигналы от заранее установленных источников, что требует специально подготовленной инфраструктуры. Поэтому для работы внешних навигационных систем необходимо передавать роботу априорную информацию о расположении источников сигнала, что делает затруднительным автономное построение карты роботом [1].

В то же время набирающие сегодня популярность методы компьютерного зрения, основанные на анализе стереоизображений и видеорядов, могут быть довольно мощным навигационным инструментом, но одновременно сложным, а порой даже избыточным. Также значительным недостатком такого подхода являются высокие требования к аппаратному обеспечению.

В качестве решения задачи определения местоположения робота в пространстве предлагается использовать алгоритмы, основанные на методах корреляционного экстремального регулирования.

Для передвижения автономного транспортного робота на значительные расстояния необходимо прокладывать маршрут его движения, определяя на каждом участке режим функционирования робота [2]. Поскольку навигационная аппаратура робота, как правило, базируется на инерциальных сенсорах, измеряющих угловые скорости и линейные ускорения, то для построения маршрута также необходимо задание начальных условий. Таким образом, текущее положение робота известно с некоторой ошибкой, которая увеличивается с возрастанием пройденного им расстояния.

В связи с вышеизложенным необходимо уточнение местоположения и перенастройка навигационной системы робота, функционирующего продолжительное время. Уточнение местоположения связано с сопоставлением априорных знаний о местности с воспринимаемой в процессе движения информацией от навигационного оборудования [2]. Другими словами, как человек способен ориентироваться на местности с помощью карты или плана, так и робот способен найти на цифровой карте фрагмент, наилучшим образом соответствующий текущим показаниям датчиков, а значит он способен себя локализовать. В результате, при регулярном уточнении местоположения можно избежать накопления ошибки, сделав ее зависимой лишь от плотности информационного поля. Далее будет описано построение методов корреляционно-экстремального регулирования для робота, оснащенного курсовым ультразвуковым дальномером.

Рассмотрим задачу локализации мобильного робота на местности, представляющей собой двухмерный лабиринт. Свяжем с данным лабиринтом прямоугольную систему координат XY. Таким образом, положение робота можно однозначно определить вектором:

$$q = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \varphi \end{pmatrix}.$$

Здесь $x, y \in XY$, φ – курсовой угол между диаметральной плоскостью робота и направлением оси абсцисс. Обозначим через $\mathbb{Q}$ векторное пространство таких векторов.

Типичной задачей транспортной робототехники является смена текущего положения на заданное:

$$q_0 \to q_1, \text{где } q_0, q_1 \in \mathbb{Q}.$$

Но для этого роботу необходимо сначала определить свое текущее местоположение. Как говорилось выше, это можно сделать, сопоставляя заранее заданную информацию о местности с текущими показаниями сенсоров. В нашем случае будут использоваться показания курсового дальномера, возвращающего расстояние от робота до объекта по курсу робота.

Описанные выше методы определения местоположения были реализованы на языке C для микроконтроллера Atmel SAM3X8E, управляющего платформой на гусеничном ходу (рис. 1), оснащенной курсовым дальномером, гироскопом и энкодерами вращения гусениц.

Скорость работы реализованного алгоритма поиска координат, оказалась довольно высокой и совпала с предварительной оценкой, приведенной ниже.

За один оборот на 2π робот успевает сделать ~1000 измерений. Количество сдвигов положим равным количеству сделанных измерений. Тогда, с учетом того что вычисление

одного коэффициента автокорреляции занимает порядка 1000 тактов, для разбиения 10×10 клеток прогонка циклов по вычислению автокорреляционной функции занимает 10^2 (*для каждой клетки*)$\times 10^3$(*для каждого сдвига*)$\times 10^3$(*вычисление коэффициента*)$=10^8$ *тактов*. Производительность микроконтроллера ≈ 100 MIPS. Откуда время работы алгоритма ≈ 1 с.

Точность определения координат оказалась высокой. При мелкости разбиения $0{,}5 \times 0{,}5$ м робот ни разу не путал соседние клетки между собой. В доле случаев он мог неверно определять координаты при первом предсказании, но во всех экспериментах после трех итераций робот верно определял свой квадрат.

Таким образом, методы корреляционной экстремальной навигации дали хорошие результаты на практике, показав высокое быстродействие, слабые требования к аппаратному обеспечению и точность, достаточную для навигации автономных мобильных роботов.

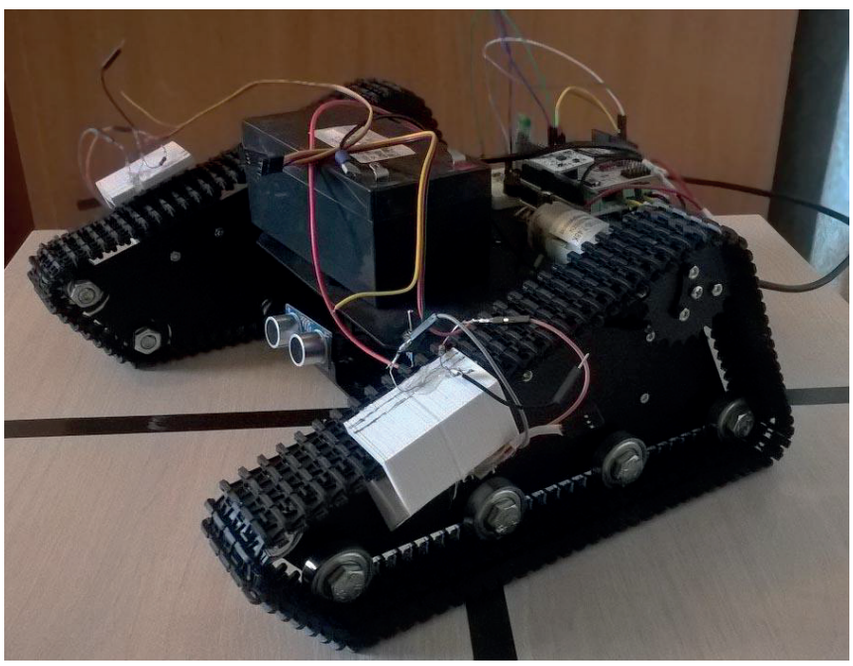


Рис. 1. Фотография экспериментальной платформы

Работа опубликована при финансовой поддержке РФФИ, грант № 16-07-00089.

Литература

1. *Берберова М.А., Берзин В.И., Судейкин М.И.* Разработка методов компьютерного зрения для навигации мобильных роботов // Материалы XVI Всероссийской молодежной научно-технической конференции «Будущее технической науки». 2017.
2. *Агафонов В.И., Судейкин М.И.* Идентификация местоположения автономного робота методом корреляционно-экстремальной навигации // Институт физико-технических проблем // Сборник научных трудов. 1990. С. 3

УДК 681.322

Применение методов глубокого обучения в задаче распознавания медицинских изображений

Р.А. Бурхонов, С.В. Клименко

Московский физико-технический институт (государственный университет)

В последнее время одним из актуальных направлений развития компьютерных технологий в медицине становится обработка цифровых изображений: улучшение качества

изображения, восстановление поврежденных изображений, распознавание отдельных элементов. Распознавание патологических процессов является одной из наиболее важных задач обработки и анализа медицинских изображений. Системы медицинских изображений, как правило, включает в себя сегментацию изображения, выделение объектов интереса («масс»), их анализ, параметрическое описание, их классификацию [1].

Глубокое обучение представляет собой набор алгоритмов машинного обучения, которые пытаются моделировать высокоуровневые абстракции в данных, иными словами, выделять из данных скрытые признаки.

Глубокое обучение – это класс алгоритмов машинного обучения, который:

– использует многослойную систему нелинейных фильтров для извлечения признаков с преобразованиями. Каждый последующий слой получает на входе выходные данные предыдущего слоя. Система глубокого обучения может сочетать алгоритмы обучения с учителем и без учителя, при этом анализ образца представляет собой обучение без учителя, а классификация – обучение с учителем;

– обладает несколькими слоями выявления признаков или параметров представления данных (обучение без учителя). При этом признаки организованы иерархически, признаки более высокого уровня являются производными от признаков более низкого уровня;

– является частью более широкой области машинного обучения изучения представлений данных;

– формирует в процессе обучения слои на несколько уровнях представлений, которые соответствуют различным уровням абстракции; слои образуют иерархию понятий [2].

Свёрточная нейронная сеть (англ. convolutional neural network, CNN) – специальная архитектура искусственных нейронных сетей, предложенная Яном Лекуном и нацеленная на эффективное распознавание изображений, входит в состав технологий глубинного обучения (англ. deep learning). Использует некоторые особенности зрительной коры, в которой были открыты т.н. простые клетки, реагирующие на прямые линии под разными углами, и сложные клетки, реакция которых связана с активацией определённого набора простых клеток. Таким образом, идея свёрточных нейронных сетей заключается в чередовании *свёрточных слоев* (англ. convolution layers) и *субдискретизирующих слоев* (англ. subsampling layers или англ. pooling layers, слоёв подвыборки). Структура сети является однонаправленной (без обратных связей), принципиально многослойной. Для обучения используются стандартные методы, чаще всего метод обратного распространения ошибки. Функция активации нейронов – любая передаточная функция, по выбору исследователя.

Название *архитектура сети* (рис. 1) получила из-за наличия операции свёртки, суть которой в том, что каждый фрагмент изображения умножается на матрицу (ядро) свёртки поэлементно, а результат суммируется и записывается в аналогичную позицию выходного изображения [3].

В обычном перцептроне, который представляет собой полносвязную нейронную сеть, каждый нейрон связан со всеми нейронами предыдущего слоя, причем каждая связь имеет свой персональный весовой коэффициент.

В свёрточной нейронной сети в *операции свёртки* используется лишь ограниченная матрица весов небольшого размера, которую «двигают» по всему обрабатываемому слою (в самом начале – непосредственно по входному изображению), формируя после каждого сдвига сигнал активации для нейрона следующего слоя с аналогичной позицией. То есть для различных нейронов выходного слоя используются одна и та же матрица весов, которую также называют *ядром свёртки*. Её интерпретируют как графическое кодирование какого-либо признака, например, наличие наклонной линии под определенным углом. Тогда следующий слой, получившийся в результате операции свёртки такой матрицей весов, показывает наличие данного признака в обрабатываемом слое и её координаты, формируя так называемую *карту признаков* (англ. *feature map*).

Естественно, в свёрточной нейронной сети набор весов не один, а целая гамма, кодирующая элементы изображения (например, линии и дуги под разными углами). При этом такие ядра свертки не закладываются исследователем заранее, а формируются

самостоятельно путём обучения сети классическим методом обратного распространения ошибки. Проход каждым набором весов формирует свой собственный экземпляр карты признаков, делая нейронную сеть многоканальной (много независимых карт признаков на одном слое). Также следует отметить, что при переборе слоя матрицей весов её передвигают обычно не на полный шаг (размер этой матрицы), а на небольшое расстояние. Так, например, при размерности матрицы весов 5 × 5 её сдвигают на один или два нейрона (пикселя) вместо пяти, чтобы не «перешагнуть» искомый признак [4].

Было проведено тестирование классификации медицинских изображений с применением свёрточной нейронной сети. На рис. 2 представлена архитектура свёрточной нейронной сети для распознавания медицинских изображений.

При использовании свёрточной нейронной сети можно существенно уменьшать количество обучаемых параметров и получать высокое качество классификации. Также удобно распараллеливать расчеты и, следовательно, возможность реализовать алгоритмы работы и обучения сети на графических процессорах.

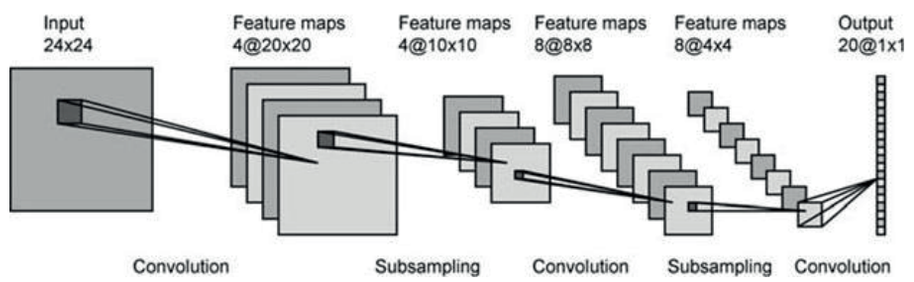


Рис. 1. Архитектура свёрточной нейронной сети

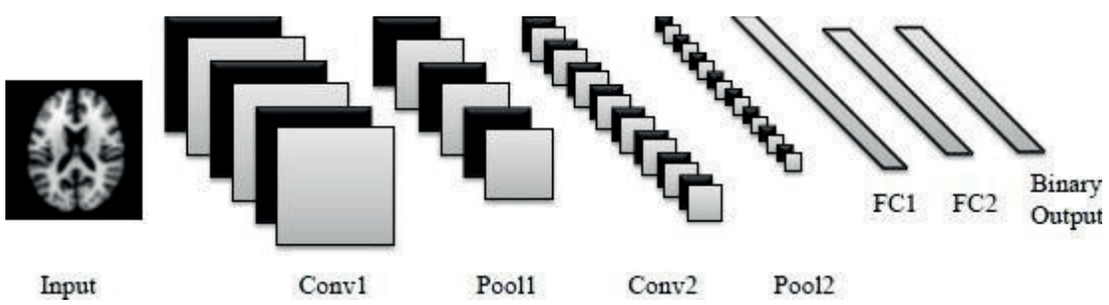


Рис. 2. Архитектура свёрточной нейронной сети для распознавания медицинских изображений

Литература

1. *Хайкин С.* Нейронные сети. Полный курс. 2006.
2. *Bengio Y.* Learning deep architectures for AI. Foundations and Trends in Machine Learning. 2009.
3. *Hinton G.E., Salakhutdinov R.R.* Reducing the dimensionality of data with neural networks // Science. 2006.
4. *LeCun Y.* LeNet-5, convolutional neural networks. 2013.

УДК 535.417; 778.38

Проектирование и разработка жестового интерфейса взаимодействия для работы с инструментом визуализации цифровых голограмм в виртуальной реальности

С.В. Клименко[1], В.А. Киселев[2]

[1]Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет
[2]Московский физико-технический институт (государственный университет)

В различных системах визуализации существует потребность в жестовых интерфейсах взаимодействия. В работе исследуется возможность внедрения жестового интерфейса на основе камеры leap motion в инструмент для визуализации цифровых голограмм в виртуальной реальности. При постановке задачи предложена модель описания жеста и формат его хранения. Описан процесс реализации программного модуля для распознавания жестов. Предложен интерфейс взаимодействия на основе данного жестового интерфейса с системой визуализации. Обозначены недостатки и предложен подход для их устранения.

В [1] предложена техника стерео-визуализации цифровых голограмм биообъектов. В очках виртуальной реальности Oculus Rift DK2 [2] оператор может рассматривать отдельные трёхмерные модели биообъектов и производить различные манипуляции со сценой и данными. Для таких манипуляций контроллер Leap Motion [3] был закреплён на очках, а поставляемое с контроллером SDK было задействовано для рендеринга моделей рук в режиме копирования. В виртуальной сцене были размещены объекты, и оператор мог взаимодействовать с ними подобно объектам из реального мира.

Однако, визуальное присутствие виртуальных объектов, размещённых для взаимодействий, мешает наблюдать изучаемый образец. Требуется реализация механизма, который бы позволил скрывать и вызывать подобные виртуальные объекты. При этом использование клавиатуры и прочих внешних устройств ввода не является удобным. Так как человек, находящийся в очках виртуальной реальности не видит внешнего мира то, и взаимодействовать с внешними объектами может только на ощупь. Реализация жестового интерфейса управления в этом случае является подходящим решением. Преследуя общую цель по исследованию и разработке человеко-машинного взаимодействия для виртуального окружения на основе датчика глубины, цель данной работы в исследовании возможностей внедрения жестового интерфейса на основе такой системы в инструмент для визуализации цифровых голограмм [1, 4]. В [5, 6] был проведён обзор по таким устройствам. Камера Leap Motion по-прежнему является эффективным средством для задач трекинга мелкой моторики рук. Поэтому разработка интерфейса взаимодействия с помощью жестов велась с использованием данной камеры.

Жесты мелкой моторики можно разделить на две категории: статичные и динамичные. Первое подразумевает определённую неподвижную позу, а второе выполнение жеста в движении. Для однозначного определения статичного жеста одной руки можно обрабатывать вектор нормали ладони в совокупности с расстояниями для каждого пальца от конца дистальной фаланги до центра запястья. Данная модель описания жеста довольно проста, и должна позволять проводить проверку в каждом кадре. Но, например, следующая пара поз может вызвать неоднозначность для алгоритма распознавания, на основе такой модели: поза, когда пястно-фаланговые суставы согнуты на 90 градусов, а все остальные суставы разогнуты, и поза когда все суставы согнуты, кроме пястно-фаланговых. Возможно, существуют и другие неоднозначности. Поэтому, предлагается реализовать алгоритм в виде программного модуля и проверить его работоспособность. Тогда постановку задачи можно разделить на два этапа. Первый этап заключается в создании приложения, которое позволяет

1. Распознавать жесты из базы данных, используя вышеописанную модель.

2. Записывать новые жесты в базу данных.
3. Управлять с помощью распознанных жестов виртуальным объектом.

Второй этап заключается в исследовании применимости данного метода, для работы с инструментом визуализации цифровых голограмм в виртуальной реальности [1], и проектировании жестового интерфейса управления для данного инструмента. На первом этапе в качестве виртуального объекта будем использовать примитив куб. Для наглядности предлагается визуализировать в сцене виртуальную кисть руки в режиме копирования с реальной руки и таким образом распознавать жесты для правой и левой рук по отдельности, а при нажатии на определённую клавишу – записывать параметры руки (соответствующей нажатой клавише) в базу данных. Для оперативного доступа к данным будем использовать SDK Leap Motion для среды unity в которой и будем вести разработку на языке c#.

Поднимая вопрос выбора формата данных для хранения жестов следует учитывать факт разработки приложения для исследования метода обработки, а также не исключать возможность последующего использования. Поэтому база данных должна легко поддаваться чтению человеком и быть многоплатформенной. Выбирая из текстовых форматов, XML и JSON имеют библиотеки для создания и обработки данных из многих языков программирования. Но за счёт своей лаконичности по сравнению с XML, формат JSON может быть более подходящим для сериализации сложных структур.

В реализованном программном модуле три жеста, были задействованы для вращения примитива куб. Каждый жест поворачивал виртуальный куб вокруг соответствующей оси. Суммарно было апробировано 36 жестов для анализа применимости данного метода и подбора коэффициентов погрешностей для распознавания. Поочерёдно тестируя каждую тройку жестов, формировалось абстрактное представление, как о распознаваемости жеста, так и об удобстве его использования. Подобные эксперименты не являются сильно показательными, тем не менее они прояснили, что для разных жестов следует использовать различные погрешности, а отслеживание направления нормали ладони ни всегда актуально. Поэтому модель описания жеста стоит усовершенствовать, добавив в её иерархию, кроме погрешностей справочную переменную, которая бы управляла количеством проверяемых параметров в алгоритме распознавания (который тоже стоит дополнить с учётом этого). Кроме того, вышеописанный процесс масштабирования предполагает, что направление может и должно меняться в ходе выполнения этого процесса. Было сформировано впечатление, что, используя интуитивно понятные жесты, управлять виртуальным объектом удобно. Метод распознавания продемонстрировал себя как быстрый, нересурсозатратный и пригодный для использования в инструменте визуализации цифровых голограмм.

Работа опубликована при финансовой поддержке РФФИ, гранты 15-29-01135 офиТ, 17-57-52011 МНТ

Литература

1. *Каленков Г.С.* [*и др.*]. Визуализация цифровых голограмм биообъектов в среде виртуального окружения // Труды Международной научной конференции «Ситуационные центры и ИАС4i для мониторинга и безопасности» (SCVRT1516). Москва–Протвино, 2016.
2. Официальная документация очков Oculus Rift DK2. URL: https://developer.oculus.com/
3. Официальная документация камеры leap motion. URL: https://developer.leapmotion.com/
4. *Каленков Г.С.* [*и др.*]. Виртуальное окружение как техника визуализации гиперспектральных голограмм // VI Международная конференция по фотонике и информационной оптике. Москва, 2017. ISBN 978-5-7262-2333-9.
5. *Хворов Н.С., Чувилин К.В.* Трекинг мелкой моторики в реальном времени // Труды Международной научной конференции по физико-технической информатике (СРТ2015). Москва–Протвино, 2016.
6. *Киселев В.А.* [*и др.*]. Аппаратные средства систем распознавания 3D жестов для комплекса виртуального окружения // Труды Международной научной конференции по физико-технической информатике (СРТ2016). Москва–Протвино, 2017.

УДК 004.946

Разработка методов статистического анализа данных для оценки характеристик «визуального восприятия – действия» в системе виртуального окружения тренажеров

Д.В. Кудрявцев, В.П. Алешин

Московский физико-технический институт (государственный университет)

В статье рассматривается одна из гипотез, объясняющая, как в мозгу происходит обработка изображения, полученного от глаза.

Чтобы изображение в шлемах или очках виртуальной реальности было лучше, нужно понять, как именно мозг обрабатывает изображение. До сих пор как это происходит понятно не до конца. Существует много исследований на эту тему. Нобелевские премии в области медицины и физиологии на тему глаза и мозга получило порядка пяти групп исследователей. Более того, сейчас всё больше и больше развиваются технологии виртуальной реальности, а вместе с ними и 3D-моделирование, стремящееся показывать нам именно то изображение, которое нужно мозгу для полноценного ощущения реальности смоделированного мира.

Для начала разработки методов статистического анализа данных для оценки характеристик «визуального восприятия – действия» в системе виртуального окружения тренажеров стоит измерить характеристики системы в точках входа виртуального окружения в «ощущение» и выхода из «действия». В качестве точки входа в «ощущение» выступает глаз. Встаёт вопрос о том, как видит человек и как мозг обрабатывает изображение, получаемое от глаз.

Человечество до сих пор до конца не разобралось, как именно происходит эта обработка, однако есть гипотезы и предположения, опирающиеся на различные опыты. Наш глаз не идеален. У него есть много различных дефектов, о которых далее пойдёт речь.

В человеческом глазу есть два типа фоторецепторов, от которых зависит, как мы видим – колбочки и палочки.

Колбочки в основном содержатся в центральной ямке. Они намного чувствительнее к мелким деталям и быстрому движению, нежели палочки, и поэтому отвечают за остроту зрения. Также они отвечают и за цветное зрение.

Палочки, в свою очередь, с большей плотностью расположены на периферии сетчатки, нежели в её середине. Они не различают цвет, однако приблизительно в 100 раз более чувствительны к свету и отвечают за ночное зрение [1]. К слову, поэтому ночью слабый свет легче заметить, если смотреть на него не прямо, а с боку (чтобы свет падал на палочки, а не на колбочки).

Из вышесказанного можно сделать вывод, что изображение, получаемое глазом в первую очередь, по бокам нечёткое и бесцветное, а в центре чёткое и цветное.

Однако это ещё не все недостатки человеческого глаза. Чтобы передать зрительные раздражения от колбочек и палочек в головной мозг нужны нервы. Зрительный нерв находится в каждом глазу и отвечает именно за это. Выходит он из диска зрительного нерва, под углом 15 градусов, считая от центра сетчатки [2]. Однако, поскольку на этом участке сетчатки нет никаких фоторецепторов, при попадании на него света не возникает никакой зрительной реакции. В этом месте возникает так называемое слепое пятно. Диаметр слепого пятна около 2 мм, что соответствует полю зрения 6 градусов. Это значит, что человек с расстояния 1 м может не увидеть предмета диаметром 10 см, если его изображение проектируется на слепое пятно. Обычно человек этого не замечает, так как мозг сглаживает изображение, и слепое пятно заполняется изображением, получаемым движением данного глаза, или изображением от другого глаза.

На сетчатке, кроме слепого пятна, есть ещё одна «аномальная» область: жёлтое пятно, или макула. Она представляет из себя эллипс с радиусом 2,5–3 мм вокруг центральной ямки и несколько выше места входа в глаз зрительного нерва [1]. Эта область имеет жёлтую пигментацию, служащую для защиты сетчатки глаза от ультрафиолета, ведь порядка 80 процентов света, попадающего в глаз, оказывается именно в этой области,

отсюда и название. Плотность фоторецепторов в этой области высокая, хоть и меньше, чем в центральной ямке.

В дополнение ко всему вышесказанному, свет в человеческом глазу проходит три отдельных преломления. Первое преломление происходит, когда свет пересекает роговицу. Далее свет проходит через хрусталик, имеющий две выпуклые поверхности. Изображение, проходя сквозь переднюю поверхность хрусталика, снова приводится в порядок. Но потом оно дальше преломляется, поскольку проходит сквозь заднюю поверхность хрусталика, в результате чего возникает конечное изображение на сетчатке, которое является перевернутым вверх дном [3]. Вдобавок ко всему, изображение на сетчатке получается сферическим из-за строения нашего глаза и положения сетчатки [4].

Итого, на рис. 1 можно увидеть, какое примерно изображение получает наш глаз (рассмотрим фото МФТИ). И это только для одного глаза. Кроме всего вышесказанного, у человека может быть ещё много различных заболеваний и дефектов глаз, напрямую влияющих на изображение, получающееся в мозгу: астигматизм, миопия, глаукома, катаракта, конъюнктивит и ещё несколько десятков других. Однако в данном случае, будем считать, что человек имеет идеальное зрение.

Человеческий мозг – удивительная вещь. Понимание, как он получает чёткое и объёмное изображение из того, что получает неидеальный глаз, до сих пор остаётся загадкой, которую ещё предстоит разгадать. С увеличением производительности современных компьютеров и быстрым развитием машинного обучения, стремящегося работать как человеческий мозг, есть все предпосылки и условия для будущего развития математических моделей работы мозга, в том числе и обработке изображений. А с развитием и увеличением точности медицинских инструментов и приборов возможно улучшение нашего понимания того, как работает глаз и мозг.

Рис. 1. Получаемое глазом изображение из внешнего мира (зелёные линии, с разницей в 15 градусов, глаз не видит, они нужны для того, чтобы заметить, где находится слепое пятно)

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 16-07-00637.

Литература

1. *Schiffman H.R.* Sensation and Perception – An Integrated Approach. Fifth edition. 2003.
2. *Gross H.* Human eye: Handbook of Optical Systems. V. 4. Survey of Optical Instruments, Weinheim: Wiley-VCH Verlag GmbH and Co. KGaA, 2008.
3. *Hubel D.H.* Eye, brain and vision. 1990.
4. *Roorda A.* Human visual system-image formation. P. 539–555.

УДК 004.588

Разработка программ на мобильных устройствах для анализа эффективности тренажеров и систем виртуального окружения

Е.В. Луничкин, В.П. Алешин

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Проблема визуального восприятия является фундаментальной научной задачей [1]. В данной статье рассматривается один из методов построения виртуального окружения, представляющего возможность лыжникам и сноубордистам производить осмотр горнолыжного склона перед спуском или прямо на склоне.

Вопросы компьютерного зрения, 3D-восприятия и построения легко воспринимаемых систем виртуального окружения исследуются различными учёными на протяжении многих лет, начиная с опубликованной в 1986 году книги советского академика Бориса Раушенбаха «Общая теория перспективы» [2], в которой он предложил довольно удачную математическую модель для создания различных систем отображения объёмного мира на плоскости. Нельзя также обойти вниманием работы известных нейрофизиологов Дэвида Хьюбела и Торстена Визеля, а также работы по изучению виртуального восприятия и использованию систем виртуального окружения [3–6].

Данная работа опирается на результаты, описанные в [7, 8], и продолжает серию работ по изучению 3D-восприятия в виртуальной среде.

Проблема создания реалистичного виртуального окружения для лыжных тренажёров привлекает к себе значительное внимание, так как требования к спортсменам растут всё больше и больше вместе с развитием современной электроники.

Качество визуализации, реалистичный физический движок, реалистичная поверхность и обработка перемещений пользователя – особо важные факторы, влияющие на восприятие виртуальной 3D-сцены. Методы реализации данной VR-системы окружения, которые берут во внимание все эти факторы, также описаны и реализованы в [7, 8].

Целью данной работы являются определение аппаратных и программных требований к системам виртуального окружения, используемых профессиональными спортсменами: лыжниками и сноубордистами. Так как на сегодняшний день виртуальные тренировочные системы очень важны для спортсменов, за последние годы появилось несколько решений для реализации подобного рода программных комплексов. Разработка таких комплексов часто довольно сложный и комплексный процесс, поскольку включает в себя как изучение и обработку аппаратной и программной составляющих, так и тесное взаимодействие со спортсменами, детальную проработку виртуальных трёхмерных сцен и оперативную обработку данных.

Для данной работы целесообразно использовать горнолыжный тренажёр SkyTec, установленный в лыжной секции Московского физико-технического института (ГУ). Он оснащён трёхмерной системой виртуального зрения, шлемами виртуальной реальности (описаны в разделе «Аппаратная часть проекта»), маркерами и камерами OPTITRACK [8].

Тренажёр Skytec обладает множеством достоинств, например: широкий панорамный дисплей, позволяющий реализовать возможности систем виртуальной реальности, продвинутая система безопасности в виде сетей по краям тренажёра, а также современная лыжная платформа с мощными моторами внутри.

Несмотря на имеющиеся недостатки данного комплекса (основным из которых является дороговизна), его можно успешно применять для выполнения задачи, описанной в данной статье, и тестирования получившейся системы.

Главной причиной, по которой существует множество реализаций виртуальных систем окружения, является то, что восприятие трёхмерной сцены – очень сложный и комплексный процесс. Вот несколько основных задач, влияющих на восприятие.

1. Какие задачи наиболее часто пользователь собирается решать, используя VR-устройство?
2. Какие качества пользователя влияют на производительность VR-системы?
3. Какие негативные последствия для пользователя, окружающих людей или среды

могут возникнуть при неправильном использовании устройства?

4. Какое количество данных может одновременно обработать пользователь?
5. Как необходимо улучшить систему, чтобы наиболее полно удовлетворить потребности пользователя?

Проанализировав и приняв к сведению эти факторы, можно составить достаточно полный список требований к реализуемому комплексу, который будет представлен в следующем разделе.

Горнолыжный спорт, как и любой другой вид спорта, неизбежно сопряжён с риском. Одним из основных правил безопасности как для профессионального спортсмена, так и для новичка является превосходное знание рельефа и сложности трассы, сопоставление её параметров с собственными возможностями. Быстрое развитие различных технологий виртуального окружения значительно упрощает процесс ознакомления лыжников и сноубордистов с трассой, а также помогает избежать внештатных ситуаций во время спуска по склону.

Нами были рассмотрены основные требования к подобного рода виртуальным системам и определены факторы, влияющие на восприятие пользователем трёхмерного окружения.

Основные выводы:

1. Разработка трёхмерных систем виртуальной реальности очень важна для спортсменов и начинающих лыжников и сноубордистов.
2. Для реализации и тестирования продукта вдали от реальных трасс можно использовать тренажёр SkyTec, расположенный в Московском физико-техническом институте (ГУ).
3. Шлемы виртуальной реальности (HMD) на основе смартфонов, такие как Samsung Gear VR, лучше всего удовлетворяют требованиям, накладываемым на подобные устройства (компактность и производительность).
4. Unity [9] является наиболее подходящим программным обеспечением для реализации задачи, так как сочетает в себе производительность, поддерживаемость и масштабируемость.

Выработку основных критериев при разработке горнолыжной трёхмерной системы виртуальной реальности с учётом всех вышеперечисленных факторов можно считать основным результатом данной работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 16-07-00637.

Литература

1. *Bülthoff H.* Going beyond vision: multisensory integration for perception and action // ICVS 2008, Santorini, May 12, 2008.
2. *Rauschenbach B.V*. Perspective Systems in Art. The general theory of perspective. – M.: Nauka, 1986. In Russian.
3. *David H. Hubel*. Eye, Brain and Vision. New York: Scientific American Library, F Division of HPHLP, 1988. 239 p.
4. *Hubel D.H., Torsten N. Wiesel*. Brain and Visual Perception. The Story of 25-Year Collaboration. Oxford: University Press, 2005, 826 p.
5. *Zaichkowsky L., Faubert J., Beauchamp P.*.Visual Perception Training: Cutting Edge Psychophysics and 3D Technology Applied to Sport Science // Association of Applied Sport Psychology Proceedings, Atlanta, GA. 2012.
6. *Bideau B., Kulpa R., Vignais N., Brault S., Multon F., Craig C.M.*. Virtual reality, a serious game for understanding performance and training players in sport // IEEE Computer Graphics Applications, 2010. P. 14–21.
7. *Aleshin V., Klimenko S., Bobkov A., Novgorodtsev D.* (2012). A Visual 3D-Perception Of The Ski Course And Skiing Results. // Proc. of the 5th ICSS 2010, St. Christoph, Austria. P. 59–68.
8. *Khlamov M.A., Chuvilin K.V.* The Use of Visual Technologies and Tracking Data to Improve Virtual Reality Perception in Training Simulator // Proc. of the FRUCT'18, 18-22 April 2016, Saint Petersburg, Russia.
9. Unity 3D official website. http://unity3d.com

УДК 331.56

Методы оценки NAIRU и кривая Филлипса для России в 2002–2016 гг.

М.К. Мавлютов, Ю.Н. Орлов

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Гипотеза естественного уровня безработицы часто используется для исследования кривой Филлипса и моделирования инфляции в различных странах. В данной статье рассматриваются гипотеза NAIRU, исследуются существующие методы оценивания NAIRU и предлагается собственный метод оценки. Также в работе получена модель краткосрочной кривой Филлипса для России в 2002–2016 гг.

Гипотеза естественного уровня безработицы впервые была сформулирована Робертом Лукасом [1] и получила дальнейшее развитие, став одним из основных инструментов для поиска кривой Филлипса и прогнозирования инфляции. Настоящая работа посвящена поиску уровня безработицы, не ускоряющего инфляцию, т.е. NAIRU (non-accelerating inflation rate of unemployment), являющегося продолжением идеи Лукаса о естественном уровне безработицы.

Целью данной работы является оценка уровня NAIRU в России в период 2002–2016 гг. и поиск свидетельств в пользу необходимости проведения подобных оценок при моделировании инфляции на основе краткосрочной кривой Филлипса вместо использования усредненных значений естественного уровня безработицы, что, по нашему мнению, позволит получить более точные прогнозы инфляции.

Актуальность данной работы обусловлена малой степенью проработанность данной проблемы для России. Так, например, последние известные авторам оценки уровня NAIRU на российских данных проводились в работе [2] и охватывают период 1994–2005 гг. В большинстве же работ, посвященных моделированию кривой Филлипса в России, естественный уровень безработицы обычно полагается постоянным, что, по всей видимости, не соответствует действительности.

Отметим, что ОЭСР предлагает ежегодные оценки уровня NAIRU в России, однако используемые методы моделирования остаются закрытыми, а частота дискретизации данных является слишком низкой, чтобы быть использованной для целей прогнозирования.

Как уже было сказано выше, гипотеза NAIRU подразумевает существование в экономике некоторого уровня безработицы, при котором инфляция не ускоряется. Во многих работах этот уровень также называют естественным, или натуральным уровнем безработицы, однако следует разграничивать две гипотезы. Гипотеза естественного уровня подразумевает существование естественного уровня безработицы, при котором мощности в экономике являются полностью загруженными (естественный уровень безработицы обычно соответствует так называемому потенциальному уровню выпуска), в то время как гипотеза NAIRU подразумевают существование уровня безработицы, при котором инфляция остается постоянной и не ускоряется.

В качестве примера, иллюстрирующего некорректность рассмотренного выше подхода, можно привести ситуацию, изображенную на рис. 1. Как видим, в случае, если NAIRU рассматривать не как константу, а как какую-то изменяющуюся во времени величину, положительный разрыв между безработицей (UN) и NAIRU наблюдается с 1 по 5 периоды, если же рассматривать NAIRU как константу, положительный разрыв наблюдается лишь на протяжении 3,5 периода, и результаты модели могут быть ошибочными.

Вполне естественно предположить, что уровень NAIRU, хотя и зависит от многих факторов, в рыночной экономике будет связан с текущим уровнем безработицы. На основе данных рассуждений и будет строиться модель для оценивания NAIRU в России за период с 2002 по 2016 гг.

Данные были взяты из архива ЦБ РФ [3] и единого архива социологических и экономических данных НИУ ВШЭ [4] за период с I квартала 1993 г. по I квартал 2016 г. Инфляция рассчитывается исходя из индекса потребительских цен. По безработице и ИПЦ данные были доступны в месячной, квартальной и годовой разбивке. В процессе

предварительной обработки данных было решено проводить исследование на квартальной разбивке начиная с I квартала 2002 г., поскольку до этого момента экономику нельзя было считать стабильной.

В данной работе была получена оценка NAIRU для России, которая использовалась в дальнейшем для нахождения краткосрочной взаимосвязи между инфляцией и безработицей и последующего прогнозирования инфляции в России.

Заметим, что в краткосрочном периоде на текущий момент инфляция растет вместе с ростом безработицы, однако это, вероятнее всего, связано со стагнацией в российской экономике, вследствие которой растет и NAIRU. Этим объясняется и тот факт, что в краткосрочном периоде инфляция отрицательно зависит от превышения уровня безработицы над уровнем NAIRU: на данный момент NAIRU в России растет.

Главный вывод из проведенных расчетов состоит в следующем: NAIRU не является постоянной во времени величиной и связана с фактическим уровнем безработицы. Использование корректных оценок уровня NAIRU в моделях прогнозирования инфляции позволяет улучшить качество прогнозов.

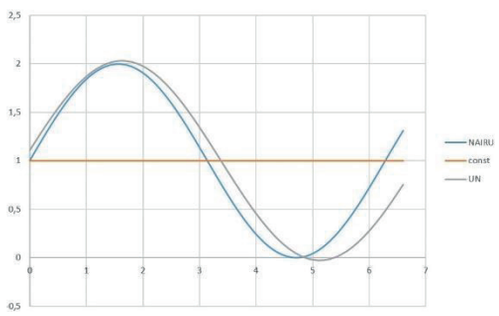


Рис. 1. Смоделированные уровни безработицы и NAIRU

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 16-07-00955.

Литература

1. *Lukas, R.E., Jr*. Some International Evidence on Output-Inflation Tradeoffs. // The American economic review. 1973. V. 63, N 3. P. 326–334.
2. *Палий А.А.* Оценка NAIRU для российской экономики в период с 1994 по 2005 год. // Макроэкономика, денежно-кредитная и валютная политика. ИЭП им. Е.Т. Гайдара. 2006, С. 31–49.
3. Архив ЦБ РФ [электронный ресурс] http://www.cbr.ru
4. Единый архив социологических и экономических данных НИУ ВШЭ [электронный ресурс] http://sophist.hse.ru
5. *Karanassou M., Sala H. Snower D.J.* Long-run inflation-unemployment dynamics: The Spanish Phillips curve and economic policy // Journal of Policy Modelling. 2008. V. 30. P. 279–300.
6. *Dritsaki, C., Dritsaki, M.* Inflation, Unemployment and the NAIRU in Greece // Procedia Economics and Finance. 2012. V. 1. P. 118–127.
7. *Welfe A.* Modeling inflation in Poland // Economic Modelling. 2000. V. 17. P. 375–385.
8. *Schiebe J., Vines. D.* A Phillips Curve for China // CAMA Working Paper Series. 2005. V. 2.
9. *Гафаров, Б.Н.* Кривая Филлипса и становление рынка труда в России // Экономический журнал Высшей школы экономики. 2011. Т. 15, № 2. С. 155–176.

УДК 621.039.58

Сравнительная оценка доз внешнего и внутреннего облучения и оценка ущерба населению, проживающему вокруг АЭС с реакторами типа ВВЭР (на примере Ростовской и Калининской АЭС)

А.С. Максимов[1], М.А. Берберова[2]

[1]Московский физико-технический институт (Государственный университет)
[2]Международный центр по ядерной безопасности

В работе рассматриваются дозы внешнего и внутреннего облучения и ущерб населению, проживающему вокруг АЭС с реакторами типа ВВЭР (на примере Ростовской и Калининской АЭС).

Мы живем в мире, в котором ядерная энергетика стала важной частью нашего общества. Энергия, которая вырабатывается АЭС, обеспечивает сотни тысяч домов, больниц, школ и других учреждений. Сложно представить наше общество без ядерной энергетики, но, к сожалению, все имеет свою цену. Достаточно вспомнить аварию на Чернобыльской АЭС 26 апреля 1986 года, 115 тысяч человек из 30-километровой зоны были эвакуированы, в ликвидации последствий участвовали более 600 тысяч человек.

В отличие от бомбардировок Хиросимы и Нагасаки, взрыв напоминал очень мощную и «грязную» бомбу. Основным поражающим фактором стало радиоактивное заражение. Облако, образовавшееся от горящего реактора, разнесло различные радиоактивные материалы, и прежде всего радионуклиды йода и цезия, по большей части территории Европы. Наибольшие выпадения отмечались на значительных территориях в Советском Союзе, расположенных вблизи реактора и относящихся теперь к территориям Республики Беларусь, Российской Федерации и Украины.

Чернобыльская авария стала событием большого общественно-политического значения для СССР. Всё это наложило определённый отпечаток на ход расследования её причин. Подход к интерпретации фактов и обстоятельств аварии менялся с течением времени, и полностью единого мнения нет до сих пор.

Но все-таки самое главное – это люди. Если мы научимся точно оценивать ущерб, который может нанести та или иная АЭС в первые мгновения после аварии, мы значительно уменьшим количество жертв среди населения.

Сравнительная оценка риска при аварии на различных АЭС дает представление о зависимости между количеством ущерба и внешними факторами (расположение, климатические условия и т.д.), в данном случае роза ветров.

Такая оценка актуальна, так как все АЭС являются источниками потенциальной опасности. Согласно приказу МЧС России от 04.11.2004 № 506 [1], необходимо проводить работы по оценке риска на соответствующих объектах. В связи с этим определение и сравнение риска при *чрезвычайном происшествии* (ЧП) на АЭС является актуальной темой.

Данная работа основывается на исследовании, дальнейшем сравнении и анализе оценок, полученных при расчетах для двух АЭС: Калининской и Ростовской. Сравнительная оценка ранее не проводилась, но именно она поможет понять, какие факторы играют ключевую роль при возникновении аварии. В связи с этим и были выбраны две схожие АЭС: Калининская и Ростовская. Они имеют аналогичный тип и могут дать нам полную картину для оценки.

Ростовская АЭС (рис. 1) расположена в Ростовской области в 12 км от города Волгодонска на берегу Цимлянского водохранилища.

Электрическая мощность трёх действующих энергоблоков составляет 3,1 ГВт.

Калининская АЭС (рис. 2) расположена на севере Тверской области в 120 км от города Тверь. Расстояние до Москвы – 360 км, до Санкт-Петербурга - 320 км. Площадка

АЭС находится на южном берегу озера Удомля и около одноимённого города. Общая площадь, занимаемая АЭС, составляет 287,37 га.

Сравнительная оценка будет производиться на основе формул, предложенных в [2]. Ущерб, нанесенный одному человеку, проживающему в кольцевом сегменте румба:

$$L(R) = \frac{L_\Sigma}{N_\Sigma} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{k} D_{E(i)}(R) \cdot N_{1/8(i)}(R)}{D_{E(year)}}, \quad (1)$$

где: L – ущерб, нанесенный одному человеку, проживающему в кольцевом сегменте румба;
R – расстояние от АЭС;
L_Σ – общий ущерб от аварии;
N_Σ – общая численность населения;
D_E – годовая эффективная доза облучения населения в кольцевом сегменте румба, с учетом розы ветров;
$N_{1/8}$ – количество людей в румбе;
$D_{E(\text{year})}$ – годовая эффективная доза облучения всего населения.

Риск:

$$R = \sum_{i=1}^{n} k \cdot F_i \cdot D_i < R_a, \quad (2)$$

где: R_a – уровень приемлемого риска (risk acceptable), 1/год;
F – вероятность (частота) возникновения опасных ситуаций;
D – уровень соответствующих опасных воздействий на людей (например, максимальная доза облучения человека, Зв);
k – коэффициент, связывающий вероятность (частоту) гибели людей с опасными воздействиями ($5{,}6 \cdot 10^{-2}$ 1/Зв в соответствии с [2]).

Годовая эффективная доза облучения населения в кольцевом сегменте румба, с учетом розы ветров:

$$D_E(\text{R}) = P_W \cdot \sum_{\text{i=1}}^{\text{k}} N_{1/8(\text{i})} \cdot D_{\text{E(year)(i)}}, \quad (3)$$

где: D_E – годовая эффективная доза облучения населения в кольцевом сегменте румба, с учетом розы ветров;
R – расстояние от АЭС;
P_W – вероятность направления ветра;
$N_{1/8}$ – количество людей в румбе;
$D_{E(\text{year})}$ – годовая эффективная доза облучения всего населения.

В результате расчетов получаем, что доза облучения для Калининской АЭС значительно выше, чем для Ростовской. Во-первых, это связано, конечно же, с количеством населения, которое проживает вокруг данных АЭС. Если мы посмотрим на данные для Калининской АЭС, то заметим, что со стороны наиболее возможного направления ветра на расстоянии 3 км от АЭС проживает очень большое количество людей: 16 158 человек. Что касается Ростовской АЭС, то со стороны наиболее возможного направления ветра на расстоянии 3 км от АЭС никто не живет. Во-вторых, Калиниская и Ростовкая АЭС имеют примерно одинаковые значения для $D_{E(year)}$, но существует достаточно большая разница в рельефе, которая может привести к совершенно разным последствиям. Большая часть территории Ростовской АЭС имеет пологий и плоский равнинный характер рельефа. В этом районе преимущественно преобладает сельскохозяйственное производство. Пахотные земли пересечены лесополосами 15–20 м, засаженными в основном лесокустраниковыми породами. Ростовская АЭС расположена в зоне континентального климата, с недостаточным увлажнением, жарким и сухим летом, сравнительно продолжительной и холодной зимой. Отличительной чертой климата является обилие солнца и тепла. В отличие от рельефа территории Ростовской АЭС, территория Калининской АЭС имеет

расчлененность рельефа, преобладание абсолютных высот и небольших по величине форм рельефа. В средней части района с юго-запада на северо-восток проходят поднятия Лесной гряды, являющейся отрогом Валдайской возвышенности. Лесная гряда разделяет две крупные зандровые равнины: на востоке – Среднемоложская низина с абсолютными высотами 130–140 м, на западе и юге – Вышневолоцкая низина с высотами 150–180 м. [3, 4].

На данный момент были рассмотрены дозы внешнего и внутреннего облучения для Калининской и Ростовской АЭС. Была проведена оценка материального ущерба. На основе данных были выдвинуты первоначальные предположения относительно расхождения в полученных результатах как для доз, так и для ущерба.

Рис. 1. Вид на Ростовскую АЭС

Рис. 2. Вид на Калининскую АЭС

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 16-07-00089.

Литература

1. Об утверждении типового паспорта безопасности опасного объекта: [приказ МЧС России № 506 от 4 ноября 2004 г.]. М., 2004. 1 с.
2. *Берберова М.А.* Оценка показателей риска для вторых очередей Смоленской и Курской АЭС: диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук: 05.14.03 / Берберова Мария Александровна. М., 2015. 130 с.
3. *Кабанов Л.П., Деревянкин А.А., Жуков И.В., Чулкова Е.В., Берберова М.*А. Разработка перечня мероприятий по управлению безопасностью и оценка показателей риска для АЭС с реакторами типа ВВЭР (Ростовская АЭС с реактором ВВЭР-1000). М.: Международный Центр по Ядерной Безопасности, 2010. 132 с.
4. *Берберова М.А., Жуков И.В., Иванов И.В., Чулкова Е.В., Цыкало Н.Б.* Разработка перечня мероприятий по управлению безопасностью и оценка показателей риска для АЭС с реакторами типа ВВЭР (Калининская АЭС с реактором ВВЭР-1000). М.: Международный Центр по Ядерной Безопасности, 2012. 109 с.

УДК 303.732.4

Построение визуальных карт предметной области для разведочного поиска (exploratory search)

Н.А. Меркурьева[1], М.М. Шарнин[2], Е.А. Слободюк[1], В.В. Цыганов[1]

[1]Московский физико-технический институт (государственный университет)
[2]Институт проблем информатики РАН

При разведочном поиске перед пользователем встает задача освоения новой, незнакомой для него темы. Одним из способов быстрого ознакомления с терминами и ключевыми словами по заданной теме является визуализация. Вопрос в том, как сделать ее максимально эффективной.

Современные поисковые системы хорошо справляются с задачей поиска в том случае, если пользователь понимает, что конкретно он хочет найти, если поиск происходит по ключевым словам с определенным заранее конечным результатом. Однако, если цель пользователя – разобраться в новой, пока неизвестной для него теме, возникают проблемы, так как ключевые слова отсутствуют, а, следовательно, результат поисковой выдачи не всегда является релевантным.

В соответствии с [1], разведочный поиск (exploratory search) – новая парадигма в информационном поиске, нацеленная на дальнейшее устранение барьеров между человеком и знанием. Разведочный поиск объединяет и автоматизирует процессы поиска, систематизации и усвоения знаний. Рассматривается вероятностное тематическое моделирование больших текстовых коллекций.

Концепция разведочного поиска:

1. пользователь может не знать ключевых терминов;
2. пользователя может интересовать множество ответов.

Цели поиска:

1. к каким темам относится запрос?
2. что известно по темам?
3. какова тематическая структура предметной области?
4. какие области являются смежными?
5. что еще есть понятного, обзорного, важного, свежего?

Сценарий поиска: имея любой текст под рукой, в любом приложении хотим получить картинку содержащихся в нем тем-подтем и «дорожную карту» предметной области в целом.

Результат:

1) двумерная карта;
2) оси: время → темы;
3) ось/кольцо тем: гуманитарные → естественные → точные;
4) иерархия разделения на подтемы.

Таким образом, встает задача наглядного представления коллекции документов по темам и терминам для получения ключевых слов и терминов, и возможности быстро разобраться в новой предметной области.

Сегодня методы визуализации больших текстовых коллекций имеют широкое применение как в научных, так и в развлекательных целях. Примером практического применения описанных выше методов может служить граф, полученный авторским коллективом, представленный на рис. 1. Он представляет из себя анализ информации объемом 514 МБ из социальных сетей на тему исламского экстремизма. Эта информация получена из системы IQBuzz с 2014 по 2017 год по запросу Кафиры. Построение проходило в два этапа: тематическое моделирование с помощью BigARTM и последующая визуализация программой Gephi. В результате на рисунке четко видны взаимосвязи основных подтем рассматриваемой предметной области. Рисунок 1 наглядно

демонстрирует эффективность применения методов тематического моделирования для целей визуализации больших текстовых коллекций на русском языке.

Таким образом, визуализация графов на плоскости позволяет решать различные задачи, причем метод визуализации подбирается индивидуально под конкретную поставленную задачу.

В заключении следует отметить, что несмотря на множество методов визуализации они не являются стандартизированными. На данный момент не существует единой концепции визуального представления коллекции текстовых документов. Следует отметить все более широкое использование методов тематического моделирования для целей визуализации в рамках разведочного поиска. В этой статье были рассмотрены лишь несколько методов, представляющих наибольший интерес, по мнению авторов, и имеющих открытый код. На данный момент ведут работы как в улучшении алгоритмов тематического моделирования, так и в создании новых, более полных методов визуализации, представляющих более полную картину связей текстов корпуса. Также хотелось бы отметить статью [2], содержащую сравнение большего числа методов визуализации.

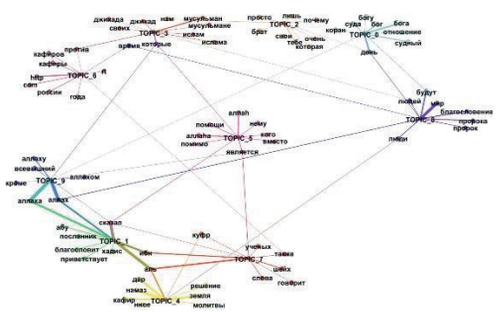


Рис. 1. Анализ информации из социальных сетей на тему исламского экстремизма

Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты №16-07-00756, 16-29-09527 и №15-07-06586.

Литература

1. *Воронцов К.В*. Тематическое моделирование на пути к разведочному информационному поиску. 2016.
2. *Айсина Р.М.* Обзор средств визуализации тематических моделей коллекций текстовых документов // Машинное обучение и анализ данных. 2015. С. 1584–1618.
3. *Jason Chuang, Christopher D.* Manning, and Jeffrey Heer. Termite: Visualization techniques for assessing textual topic models // Advanced Visual Interfaces, 2012.
4. *Gretarsson B., O'Donovan J., Bostandjiev S., Hollerer T., Asunion A., Newman D., Smyth P.,* Topicnets: Visual analysis of large text corpora with topic modeling // ACM Trans. Intelligent Syst. Technol (TIST), 2012, 3(2):23.
5. *Myers M., Smith A., Hawes T.* Interactive visualization for hierarchical topic models. 2014.
6. *Bastian M., Heymann S., Jacomy M.* Gephi: An open source software for exploringand manipulating networks. 2009.
7. *Меркурьева Н.А.* Использование векторной модели языка для построения векторной модели текстафиксированной размерности. 2016.
8. Технология визуализации графа соавторов по открытой информации из Интернета // Сборник трудов Международной конференции «Ситуационные центры и информационно-аналитические системы класса 4i для задач мониторинга и безопасности» SCVRT2015-16, Пущино, Царьград, 21–24 ноября 2015–2016 гг. С. 168–174.

Секция дискретной математики

УДК 519.233.35

О различении классов хвостовых распределений

И.В. Родионов

Московский физико-технический институт (государственный университет)
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

В статистике часто возникает задача различения близких распределений по неполным или цензурированным данным, в частности, в областях, связанных со страхованием, с задачами надежности, телекоммуникациями, computer science и даже науками о Земле. Задача, когда известны лишь наблюдения, которые выше какого-то заранее заданного порога, хорошо изучена. С другой стороны, статистика экстремумов утверждает, что для различения близких хвостов распределений могут быть использованы только максимальные члены вариационного ряда выборки, тогда как центральные значения выборки могут быть промоделированы с помощью стандартных статистических процедур.

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ – независимые одинаково распределенные случайные величины с непрерывной функцией распределения F. Обозначим через x_F правую крайнюю точку функции распределения F, $x_F = \sup\{x : F(x) < 1\}$ полагаем дальше $x_F = +\infty$. Будем говорить, что хвост функции распределения G легче хвоста функции распределения H с $x_G = x_H = +\infty$, если выполнено следующее соотношение:

$$\frac{1-H(x)}{1-G(x)} \to 0 \qquad \text{при } x \to +\infty.$$

Рассмотрим $X_{(1)} \le \ldots \le X_{(n)}$ – вариационный ряд выборки $X_1, \ldots, X_n$. С целью построения критерия различия рассмотрим статистику типа Хилла:

$$R_{k,n} = \ln(1 - F_0(X_{(n-k)})) - \frac{1}{k}\sum_{i=n-k+1}^{n} \ln(1 - F_0(X_{n-i})),$$

где F_0 – некоторая непрерывная функция распределения.

Будем говорить, что функции распределения G и H удовлетворяют условию *B(G,H),* если найдутся такие x_0 и ε, $0 < \varepsilon < 1$, что функция

$$\frac{1-G(x)}{(1-H(x))^{1-\varepsilon}}$$

не убывает при $x > x_0$. Если выполнено условие *B(G,H),* то в таком случае хвост функции распределения G тяжелее хвоста H, обратное неверно.

Сформулируем основную задачу настоящей работы. Рассмотрим два класса распределений A_0 и A_1, таких что хвосты распределений из класса A_0 легче, чем хвосты распределений из класса A_1. Предположим, что существует “разделяющая” функция распределения F_0, такая что хвост F_0 тяжелее хвостов всех распределений из класса A_0 и условие $B(F_0, H)$ выполнено при некоторых (возможно, различных) x_0 и ε для всех распределений H из класса A_1. Рассмотрим основную гипотезу H_0: F из A_0 и альтернативу H_1: F из A_1.

Теорема. *Критерий отвергнуть H_0, если $\sqrt{k}\cdot(R_{k,n}-1) > u_{1-\alpha}$, где $u_{1-\alpha}$ – квантиль стандартного нормального закона соответствующего уровня, является состоятельным критерием проверки гипотезы H_0 против альтернативы H_1 при $k,n\to\infty$, $k/n\to 0$ и асимптотически имеет уровень значимости α.*

Отдельно отметим, что в отличие от подавляющего большинства работ, связанных с проверкой гипотез и оцениванием параметров хвостовых распределений, мы не предполагаем, что распределение выборки удовлетворяет предельной теореме Гнеденко и принадлежит какой-либо из областей максимального притяжения.

Литература

1. *Fereira A., Haan L. de.* Extreme value theory. An introduction // Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. N. Y.: Springer, 2006.
2. *Rodionov I.V.* On discrimination between two close distribution tails. arXiv:1702.05641.

УДК 515.12

Hardness of almost embedding simplicial complexes in R^d

***A.B. Skopenkov*[1], *M. Tancer*[2]**

[1]Moscow Institute of Physics and Technology (State University)
[2]Charles University in Prague

A map $f: K \to R^d$ of a simplicial complex is an *almost embedding* if $f(\sigma) \cap f(\tau) = \varnothing$ whenever σ, τ are disjoint simplices of K.

Theorem. *Fix integers* $d, k \geq 2$ *such that* $d = \frac{3k}{2} + 1$.

(a) Assume that $P \neq NP$.

Then there exists a finite k*-dimensional complex* K *that does not admit an almost embedding in* R^d *but for which there exists an equivariant map* $\tilde{K} \to S^{d-1}$.

(b) The algorithmic problem of recognition almost embeddability of finite k*-dimensional complexes in* R^d *is NP hard.*

The proof is based on the technique from the Matoušek-Tancer-Wagner paper (proving an analogous result for embeddings), and on singular versions of the higher-dimensional Borromean rings lemma. The new part of our argument is a stronger *almost embeddings* version of the generalized van Kampen-Flores theorem.

References

1. *Matoušek J., Tancer M., Wagner U.* Hardness of embedding simplicial complexes in R^d // J. Eur. Math. Soc. (JEMS). 2011. V. 13. P. 259–295.

УДК 519.171

Алгоритм поиска гамильтонова цикла методом перебора гамильтоновых подграфов

А.В. Гавриков

ООО «Яндекс.Маркет Лаб»

Под орграфом понимается пара $G = (V, \alpha)$, где V – это конечное непустое множество (вершины орграфа), а α – это отношение на множестве V (дуги орграфа). Обозначим $|V|$ через n, а $|\alpha|$ через m. Все используемые ниже и необъясняемые в тексте понятия теории графов и теории сложности взяты из книг [1, 2]. Задача поиска гамильтонова цикла – одна из классических NP-полных задач. Решению поставленной задачи посвящено огромное количество исследований. Один из известных алгоритмов, реализующий метод ветвей и границ был разработан Литтлом, Мерти, Суини, Кэрелом [3]

в 1963 г. В книге [4] приводится изложение различных способов перебора, работающих за сверхполиномиальную асимптотику. Это алгоритмы Робертса и Флореса, а также мультицепной метод. Решение задачи методом динамического программирования за асимптотику $O(n2^n)$ предложено в работе [5]. В 2011 году группой авторов был предложен алгоритм [6], основанный на технике разбиения и раскраски вершин в графе на два цвета, асимптотическая сложность которого равна $O^*\left(4^{n+o(n)}\right)$. В 2016 году другая группа авторов разработала алгоритм [7] за асимптотику $O^*(2.851^n)$, основанный на эффективном вычислении представительных наборов (Representative Sets).

Отличительной чертой построенного в статье алгоритма является идея перебора гамильтоновых разбиений орграфа. Под гамильтоновым разбиением орграфа $G = (V, \alpha)$ понимается разбиение его вершин на непересекающиеся подмножества V_0, V_1, V_2, , V_{k-1} такие, что все индуцируемые ими подграфы орграфа G содержали гамильтоновы контуры. Например, в орграфе G на рис. 1.

В этом орграфе существует гамильтоново разбиение на подграфы из трех вершин, индуцируемые подмножествами $\{0, 1, 6\}$ и $\{2, 3, 4\}$, изображенное на рис. 2.а) и гамильтонов цикл, показанный на рис. 2.б).

Для нахождения различных гамильтоновых разбиений по заданному орграфу используются методы поиска стоимостных потоков в транспортных сетях. Для сокращения перебора приводится эвристика, которая позволяет объединять некоторой пары компонент связности в гамильтоновом разбиении. Пусть, как на рис. 3.а), в одной компоненте связности разбиения существует дуга (u_1, v_1), входящая в некоторый гамильтонов цикл, в другой компоненте связности существует дуга (u_2, v_2), а в орграфе есть при этом дуги (u_1, v_2) и (u_2, v_1). Тогда можно объединить две компоненты связности, заменим пару дуг (u_1, v_1) и (u_2, v_2) на (u_1, v_2) и (u_2, v_1), как показано на рис. 3.б). Такие действия можно проделывать повторно, пока не получен гамильтонов цикл.

Эвристика хорошо работает на случайных орграфах $G(n, p)$. Значение p выбиралось в интервале $[\ln n/n, 1]$ (иначе сгенерированный орграф не будет сильно связным [8]). В таблице 1 показана статистика работы алгоритма. Программа, реализующая выше описанные рассуждения, написана языке Java. Есть свидетельство о государственной регистрации ЭВМ [9]. В таблице приводится суммарное общее, среднее, минимальное и максимальное время работы алгоритма в минутах и секундах для 100 тестов для заданного количества вершин n в орграфе. Для большинства случайных орграфов $G(n, p)$ алгоритм заканчивается за полиномиальное время при рассмотрении первых нескольких гамильтоновых разбиений и применении к ним эвристики.

Перспективы исследования заключаются в поиске альтернативных эвристик объединения компонент в гамильтоновом разбиении и распараллеливании решения.

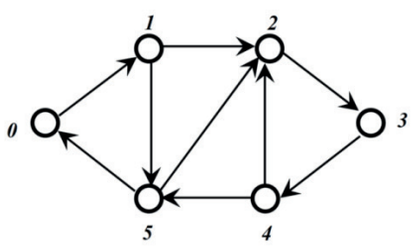


Рис. 1. Орграф G

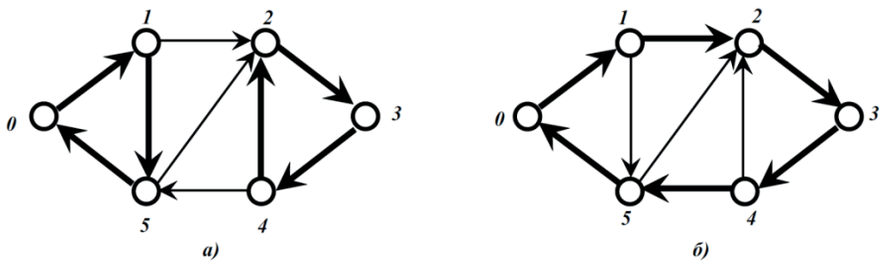


Рис. 2. Гамильтоновы разбиения в орграфе G

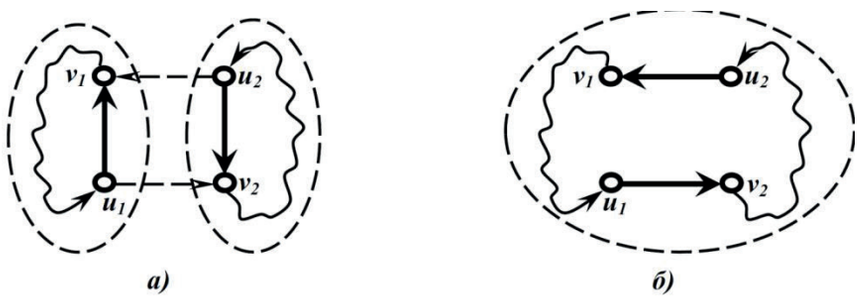


Рис. 3. Эвристика

Таблица. 1. Статистика работы алгоритма

Кол-во вершин в орграфе n	Общее время работы тестов	Среднее время работы теста	Минимальное время работы теста	Максимальное время работы теста
100	**0m 1s**	**0m 0s**	**0m 0s**	**0m 0s**
250	**0m 15s**	**0m 0s**	**0m 0s**	**0m 1s**
500	**1m 38s**	**0m 0s**	**0m 0s**	**0m 1s**
1000	**16m 8s**	**0m 9s**	**0m 1s**	**0m 17s**
2000	**127m 4s**	**0m 16s**	**0m 8s**	**2m 23s**

Литература

1. *Богомолов А. М., Салий В. Н.* Алгебраические основы теории дискретных систем. – М.: Наука. Физматлит, 1997.
2. *Кормен Т., Лейзерсон Ч., Риверс Р.* Алгоритмы: построение и анализ. М.: МЦНМО, 1990.
3. *Little J.D.C., Murty K.G., Sweeney D.W, and Karel C.*An algorithm for the Traveling Salesman Problem // Operations Research. 1963. No. 11. P. 972–989.
4. *Кристофидес Н.* Теория графов. Алгоритмический подход. – М.: Мир, 1978.
5. *Held M., KarpR. M.* A Dynamic programming approach to sequencing problems // Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, 1962, V. 10, № 1, 196–210
6. *Chena J., Feng Q., Liuc Y., Lub S., Wang J.* Improved deterministic algorithms for weighted matching and packing problems // Theoretical computer science. 2011, V. 412, I. 23. P. 2503-2512.
7. *Fomin F., Lokshtanov D., Panolan F., Saurabh S.* Efficient computation of representative families with applications in parameterized and exact algorithms // Journal of the ACM (JACM), 2016, V. 63. I. 4, N. 29.
8. *Bollobas B.* Random Graphs. 2nd ed. CambridgeUniv. Press. 2001.
9. *Гавриков А.В.* Алгоритм поиска гамильтонова цикла методом перебора разбиений орграфа на подграфы // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2017610078, выданное Роспатентом. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 09 января 2017 г.

УДК 519.224.24

Оценка параметров сдвига и масштаба хвоста распределения

П.И. Ахтямов[1], И.В. Родионов[1,2]

[1]Московский физико-технический институт (государственный университет)
[2]Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Классическая теория экстремумов изучает асимптотическое распределение максимумов независимых одинаково распределенных случайных величин. Центральным результатом в теории экстремумов является аналог центральной предельной теоремы для максимумов случайных величин, полученный Фишером, Типпетом и Б. В. Гнеденко. Известно, что в случае существования невырожденного предельного распределения у нормированного максимума выборки выполнено соотношение

$$P(M_n < a_n x + b_n) \to \exp\left(-(1+\gamma x)^{-\frac{1}{\gamma}}\right), \qquad n \to \infty,$$

где $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ – максимум рассматриваемой выборки, a_n и b_n – нормировочные константы.

Одним из важных параметров в теореме Гнеденко является параметр γ, называемый экстремальным индексом, который отвечает за поведение хвостов распределений. Известны состоятельные и асимптотически нормальные оценки параметра γ, полученные по k_n максимальным членам вариационного ряда выборки, где $k_n \to \infty$, $k_n / n \to 0$ при $n \to \infty$ (к примеру, оценки Хилла и Пикандса, см. подробнее [1]). Популярен также подход получения оценок экстремального индекса при $k / n \to C, C > 0$ (т.н. POT-метод, см. монографию [2]). Однако для большого класса популярных распределений (к примеру, для нормального, экспоненциального, гамма-распределения) параметр γ равняется 0, поэтому различать хвосты таких распределений с помощью оценок экстремального индекса не представляется возможным. В работе предлагается расширить функционал оценивания параметров хвостов распределений, введя в рассмотрение параметры сдвига и масштаба для хвостов распределений.

Пусть известно только k максимальных членов вариационного ряда выборки, где $k \to \infty, k / n \to 0$ при $n \to \infty$. В данной работе в качестве основного метода для получения оценок параметров сдвига и масштаба используется аналог метода моментов. Основным результатом работы является следующая

Теорема. *Пусть выборка* $X_1, \ldots, X_n$ *имеет функцию распределения* $F(x) = F_0((x-a)/b)$*, где либо параметр сдвига* $a = 0$*, либо параметр масштаба* $b = 1$*. Тогда при некоторых условиях регулярности на функцию распределения* F_0 *следующие оценки:*

$$\hat{a} = \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} X_{(n-i)} - \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} Y_{(n-i)}, \qquad (1)$$

$$\hat{b} = \exp\left\{\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} ln\left(X_{(n-i)}\right) - \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} ln\left(Y_{(n-i)}\right)\right\}, \qquad (2)$$

являются состоятельными и асимптотически нормальными для параметра сдвига a (*при* $b = 1$) *при условии* $\gamma < 0$ *и для параметра масштаба* b *(при* $a = 0$*) при условии* $\gamma \geq 0$ *соответственно, где выборка* $Y_1, \ldots, Y_n$ *сгенерирована из известного распределения с функцией распределения* F_0.

Условия регулярности выполняются для широкого класса распределений. К примеру, данные условия выполнены в случае если:

1) $F_0(x) = (1 - \exp(-x^{\alpha}))I(x > 0), k \sim n^{\beta}, \alpha > 0, \beta \in (0,1)$;
2) $F_0(x) = (1 - \exp(-T(x)), T(x)/x \to +\infty, x \to +\infty$.

В полученных оценках (1) и (2) асимптотическая дисперсия равняется 4 и $4b^2$ соответственно. В рамках работы проводится вычислительный эксперимент, в котором для экспоненциального и нормального распределений показывается зависимость асимптотической дисперсии от значения параметра $k\ /\ n$.

Литература

1. *De Haan L., Ferreira A.* Extreme Value Theory: An Introduction. Springer. 2006. 417 p.
2. *Beirlant J.*, et al. Statistics of Extremes: Theory and Applications. John Wiley & Sons, Ltd. 2004. 504 p.

УДК 519.214.6

Скорость сходимости в теореме Фишера-Типпета-Гнеденко

Н.Р. Попов, И.В. Родионов

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Теорема Фишера–Типпета–Гнеденко [1] в теории экстремальных значений является аналогом центральной предельной теоремы в классической теории вероятности: основное отличие – нормировка частичного максимума последовательности случайных величин, а не суммы. Сама теорема утверждает следующее: если для последовательности н.о.р.с.в. $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$существуют$a_n \geq 0, b_n$, для которых функция распределения нормированной последовательности частичных максимумов $M_n = \max_{i\leq n} X_i$ сходится к невырожденной функции распределения $G(x)$

$$P(M_n \leq a_n x + b_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} G(x)$$

тогда $G(x) = G_\gamma(ax + b)$, где

$$G_\gamma(x) = \exp\left\{-(1+\gamma x)^{\frac{1}{\gamma}}\right\}, 1 + \gamma x > 0.$$

Для оценки скорости сходимости в ЦПТ существует неравенство Берри–Эссеена [2], аналога которого в теории экстремальных значений не существует, однако есть результаты для частных случаев [3, 4, 5]. Задача нахождения скорости сходимости была рассмотрена в общем виде, были получены следующие результаты:

1. Для $\gamma \neq 0$ для функций распределения вида

$$F(x) = \exp\left\{-x^{\frac{1}{\gamma}} \exp\left\{\int_{x_0}^{x^{\frac{1}{\gamma}}} \frac{A(s)}{s}\, ds\right\}\right\}$$

скорость сходимости пропорциональна $A(n)$.

2. Для $\gamma = 0$ скорость сходимости определяется поведением $f(x) = -\ln(-\ln F(x))$:

a) равна $o((\ln n)^{-1})$, если$f(x) \sim x\varepsilon(x)$, где $\varepsilon(x)$меняется медленнее любой степени,

b) равна$\sim (\ln n)^{-1}$,, если$f(x) \sim x^C\varepsilon(x)$, где $C > 0, C \neq 1$, а $\varepsilon(x)$ меняется медленнее любой степени,

c) равна $\omega((\ln n)^{-1})$, если$f(x) = \omega(\ln x)$, но растет медленнее любой степени.

Литература

1. *Fisher R.A.,Tippett L.H C.* Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society.— Cambridge Univ Press. 1928. V. 24. P. 180—190.
2. *Фёллер В.* Введение в теорию вероятностей и её приложения. 2. Книжный дом «Либроком», 2009. Т. 2.
3. *Hall P.* On the rate of convergence of normal extremes // Journal of Applied Probability. 1979. P. 433–439.
4. *Hall W., Wellner J. A.*The rate of convergence in law of the maximum of an exponential sample //

Statistica Neerlandica. 1979. V. 33, N 3. P. 151—154.
5. *X. Liao [и др.]* Rates of convergence of extremes from skew-normal samples // Statistics& Probability Letters. 2014. V. 84. P. 40–47.

УДК 519.179.1

Онлайн предписанное хроматическое число многодольных гиперграфов

Д.А. Шабанов[1,2], А.Э. Хузиева[1]

[1]Московский физико-технический институт (государственный университет)
[2]Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Рассматривается задача о нахождении онлайн предписанного хроматического числа для гиперграфа *H(m,r,k)* – полного *r*-дольного *k*-однородного гиперграфа, в котором каждая доля содержит ровно *m* вершин и каждое ребро гиперграфа пересекается с каждой долей не более чем по одной вершине.

Онлайн предписанное хроматическое число гиперграфа $H = (V,E)$ определяется через интерактивную игру двух игроков, первого и второго, на гиперграфе H. Пусть задано некоторое число q, а X(0) – пустое множество. В раунде с номером j первый игрок в каждом раунде выбирает («называет») подмножество вершин V(j) из $V\setminus(X(0)\cup\ldots\cup X(j-1))$. Второй игрок в ответ должен выбрать независимое множество вершин $X(j)\subset V(j)$ и раскрасить его в цвет j. Если после окончания некоторого раунда оказалось, что есть еще не раскрашенная вершина, названная q раз, то выигрывает первый игрок. Если же этого не происходит и весь гиперграф оказывается раскрашенным, то выигрывает второй. Минимальное число q, для которого у второго игрока есть выигрышная стратегия при игре на гиперграфе H, называется онлайн предписанным хроматическим числом гиперграфа H и обозначается $\chi_{ol}(H)$.

Основным результатом является следующая теорема, обобщающая ранее известный результат для полных двудольных графов из [1].

Теорема 1. *Пусть* $2 \le k \le r$, *тогда* $\chi_{ol}(H(m,r,k)) = (1+o(1))\log_{\frac{r}{r-k+1}}(m)$ *при* $m\to\infty$

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта президента РФ № МД-5650.2016.1.

Литература

1. *Duraj L.L., Gebowski G., Kozik J.* Chip game and paintability. 2015. arXiv:1506.01148v2.

УДК 515.12

Дикие канторовы гребенки в R^n

О.Д.Фролкина[1]

[1]Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

Теория диких вложений восходит к работам Л.Антуана [1–5], П.С.Урысона [6, 7], Дж. Александера [8, 9].

Определение 1. Подмножество $P\subset R^n$, гомеоморфное полиэдру, называется *ручным*, если существует такой гомеоморфизм h пространства R^n на себя, что $h(P)$ – полиэдр в R^n, и *диким* в противном случае. Нульмерный компакт $K\subset R^n$ называется *ручным,* если существует такой гомеоморфизм h пространства R^n на себя, что $h(K)$ содержится в прямой в R^n, и *диким* в противном случае.

Знаменитая «рогатая» сфера Александера [8] представляет собой пример дикого вложения двумерной сферы в R^3. Ранее Л. Антуан определил первое дикое канторово

множества в R^3 (в настоящее время широко известного как ожерелье Антуана) и использовал это множество для построения дикой дуги в R^3 [1–5]. Фактически, Антуану принадлежит метод «последовательного вытягивания рогов», см. [2–5]. В краткой заметке [4] Антуан сформулировал (а в [5] доказал) соответствующую теорему и в качестве следствия указал на возможность построения дикой сферы в R^3. Фактически именно такой пример дан в работе Александера [9] – это дикая 2-сфера в R^3, содержащая ожерелье Антуана; этот пример принципиально отличается от «рогатой» сферы [8].

Дикое канторово множество в R^3, существенно отличное от ожерелья Антуана, было предложено П.С. Урысоном [6], см. также [7, с. 330–332]. Как пишет П.С. Александров [7, с. 488], Урысон написал эту работу в 1922 – 1923 г. В отличие от ожерелья Антуана, род множества Урысона бесконечен; Урысон замечает [7, с. 332], что, к сожалению, узнал о труде Антуана, уже почти закончив свою работу.

В 1959 г. Бинг доказал, что невозможно одновременно расположить в R^3 несчетное семейство попарно непересекающихся диких замкнутых поверхностей [10]. В 1960 г. Столлинг построил континуальное семейство попарно дизъюнктных диких 2-дисков в R^3 [11]. В 1968 г. Шер улучшил [12] конструкцию Столлингса, получив дополнительно, что все 2-диски семейства объемлемо негомеоморфны в следующем смысле

Определение 2. Подмножества $A, B \subset R^n$ называются *объемлемо гомеоморфными*, если существует такой гомеоморфизм h пространства R^n на себя, что $h(A) = B$.

Естественно ввести

Определение 3. Пусть $A, B \subset R^n$. Скажем, что A *объемлемо вкладывается* в B, если существует такой гомеоморфизм h пространства R^n на себя, что $h(A) \subset B$. Подмножества $A, B \subset R^n$ назовем *объемлемо сравнимыми*, если хотя бы одно из них объемлемо вложимо в другое.

В докладе будет представлен следующий результат автора. Здесь C – канторово множество.

Теорема. *Пусть* $n \geq 3$ *и* $X \subset R^{n-1}$ *– полиэдр,* $dim X \geq 1$. *Существует такое вложение* $A: X \times C \to R^n$, *что образы* $A(X \times \{s\})$, *где* $s \in C$, *являются дикими и попарно объемлемо несравнимыми множествами в* R^n.

Тем самым, получено обобщение теорем Столлингса и Шера на случай произвольного полиэдра X и произвольной размерности объемлющего пространства. Будут обсуждаться некоторые дальнейшие обобщения. Основой для построения служит найденное автором и представляющее самостоятельный интерес одновременное вложение в R^n, $n \geq 3$, попарно непересекающихся и попарно объемлемо несравнимых диких канторовых множеств – обобщенных ожерелий Антуана, определенных в [13] и [14].

Работа поддержана грантом РФФИ (проект N 15-01-06302).

Литература

1. *Antoine L.* Sur la possibilite d'etendre l'homeomorphie de deux figures a leur voisinages // C.R. Acad. Sci. Paris. 1920. V. 171. P. 661–663.
2. *Antoine L.* Sur l'homéomorphie de deux figures et de leurs voisinages. Thèses francaises de l'entre-deux-guerres. 1921. V. 28.
3. *Antoine L.* Sur l'homéomorphie de deux figures et de leurs voisinages // J. Math. Pures Appl. 1921. V. 86.
   P. 221 –325.
4. *Antoine L.* Sur les ensembles parfaits partout discontinus // C.R. Acad. Sci. Paris. 1921. V. 173. P. 284–285.
5. *Antoine L.* Sur les voisinages de deux figures homéomorphes // Fund. Math. 1924. V. 5. P. 265–287.
6. *Urysohn P.* Mémoire sur les multiplicités Cantoriennes // Fund. Math. 1925. V. 7. N 1. P. 30–137.
7. *Урысон П.С.* Труды по топологии и другим областям математики. Москва-Ленинград, ГИТТЛ, 1954. Т.1.
8. *Alexander J.W.* An example of a simply connected surface bounding a region which is not simply connected // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1924. V. 10, N 1. P. 8–10.

9. *Alexander J.W.* Remarks on a point set constructed by Antoine // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1924. V. 10, N 1. P. 10–12.
10. *Bing R.H.* Conditions under which a surface in E^3 is tame // Fund. Math. 1959. V. 47. P. 105–139.
11. *Stallings J.R.* Uncountably many wild disks // Annals of Math. 1960. V. 71, N 1. P. 185–186.
12. *Sher R.B.* A note on the example of Stallings // Proc. Amer. Math. Soc. 1968. V. 19, N 3. P. 619–620.
13. *Иванов А.А.* Изотопия компактов в евклидовых пространствах. Дисс. на соиск. уч. ст. канд. ф.-м. н. Ленинград. 1950.
14. *Blankinship W.A.* Generalization of a construction of Antoine // Ann. Math. 1951. V. 53, N 2. P. 276–297.

УДК 519.234.33

Свойства статистики критерия хи-квадрат в неоднородной полиномиальной схеме

М.П. Савелов

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
Московский физико-технический институт (государственный университет)

Рассматривается схема независимых испытаний с конечным числом исходов N, в которой вероятность j-го исхода в t-м испытании равна $p_j^t, 1 \le j \le N$. Пусть $\nu_j(n)$ h – частота исхода j в первых n испытаниях, $p_1, \dots, p_N$ – фиксированные положительные числа, $p_1 + \dots + p_N = 1$. Статистика Пирсона:

$$X(n) = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{np_j} \left(\nu_j(n) - np_j\right)^2$$

широко известна (см., например, [1, 2]). Пусть выполнены следующие условия:

1) $\sqrt{n}\left(\frac{p_j^1 + p_j^2 + \dots + p_j^n}{n} - p_j\right) \to 0$ при $n \to \infty$ для каждого фиксированного $1 \le j \le N$;

2) существует предел $\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} p_i^t p_j^t \right\|_{i,j=1}^{N}$, где предел понимается как поэлементный предел матриц.

Положим по определению $A = \lim_{n\to\infty} \left\| \delta_{ij} - \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} p_i^t p_j^t \right\|_{i,j=1}^{N}$. Через $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \dots \ge \lambda_N$ обозначим собственные значения матрицы A (вещественные в силу ее симметричности), расположенные в порядке неубывания. Установлена следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия 1–2. Тогда при $n \to \infty$ статистика X(n) по распределению сходится к случайной величине $\sum_{i=1}^{N-1} \lambda_i \xi_i^2$, где $\xi_i \sim N(0,1)$ – независимые стандартные нормальные величины, причем $\lambda_i \le 1$ и $\lambda_N = 0$.*

Таким образом, «слишком большое» значение статистики Пирсона предписывает отвергнуть не только гипотезу вида «$p_j^t = p_j$ при всех $1 \le j \le N, t \ge 1$», но и целый класс гипотез, задающихся условиями 1–2.

Пример. Если при каждом $1 \le j \le N$ величины p_j^t являются периодическими функциями переменной t, то условия 1–2 выполняются и, следовательно, применима теорема 1.

Автором также установлены предельные теоремы для некоторых модификаций статистики $X(n)$, которые будут представлены в докладе.

Литература

1. *Chernoff H., Lehmann E.L.* The Use of Maximum Likelihood Estimates in χ^2 Tests for Goodness of Fit // Ann. Math. Statist. 1954. V. 25, N 3. P. 579–586.
2. *Balakrishnan N., Voinov V., Nikulin M.S.* Chi-Squared Goodness of Fit Tests with Applications. Academic Press, 2013. 256 c.

УДК 330.42

Модель эндогенного роста капиталовооруженности фирм

***А.В. Леонидов*[1,2,3], *Е.Е. Серебрянникова*[1,3]**

[1]Физический институт им. П.Н.Лебедева РАН
[2]Университет Дмитрия Пожарского
[3]Московский физико-технический институт (государственный университет)

Исследование эндогенного экономического роста – одна из областей экономической теории, в которой находят применение методы теоретической физики. А именно с помощью уравнений математической физики описывается эволюция распределения фирм по уровням эффективности, воплощая идею Йозефа Шумпетера о возможности двунаправленного роста эффективности фирм: процессов инноваций и имитаций. Обзор данной области представлен в [1].

В ряде работ [2–5] эволюция распределения фирм была включена в равновесные модели экономического роста, так что эндогенный рост экономики в этих моделях результат решения агентами некоторой оптимизационной задачи. В данных моделях под эффективностью понимается единственный фактор – общая факторная производительность (ОФП).

В работе [1] предложена к дальнейшему исследованию модель центрального планирования с двумя показателями эффективности фирмы: уровнем капиталовооруженности (объемом капитала на одного работника) и ОФП. Задача такого рода с одним показателем эффективности (ОФП) была рассмотрена ранее в работе [4]. В данной работе рассматривается также задача с одним показателем эффективности, но, в отличие от [4], этот показатель – капиталовооруженность фирмы.

Пусть $f_n, n \in N$ – доля фирм на уровне капиталовооруженности *n*, а $F_n, n \in N$, – доля фирм с капиталовооруженностью не менее *n*. Модель формализуется в виде задачи оптимального управления:

$$W(t) = \int_t^T e^{-\rho(\tau - t)} U(c(\tau)) d\tau \longrightarrow \max_{s_n(\cdot), n \in N}, \tag{1}$$

$$c(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n f_n - \frac{dk}{d\tau}, \tag{2}$$

$$\frac{df_n}{d\tau} = -\varphi(F_n, s_n) f_n + \varphi(F_{n-1}, s_{n-1}) f_{n-1}, \; n \in N, \tag{3}$$

$$f_n(0) = \text{fix}, \; n \in N. \tag{4}$$

Задача центрального планировщика – максимизация общественного благосостояния $W(t)$ (1) на временном горизонте (*t,T*), где $c(\tau)$ – объем потребления репрезентативного потребителя в момент времени τ, $U(c(\tau))$ – мгновенная функция полезности, ρ – норма дисконтирования. Ограничениями в задаче максимизации выступают: уравнение материального баланса (2) и уравнение (3), описывающее эволюцию распределения. В этих соотношениях g_n – выпуск фирмы на уровне капиталовооруженности *n*, $\frac{dk}{d\tau}$ – объем инвестиций в изменение капитала, s_n – управление, определяющее объем затрат на переход с уровня *n* на уровень *n* + 1.

В работе рассмотрен случай убывающей отдачи от масштаба, заключающийся в том, что величина прироста выпуска фирмы при переходе с уровня *n* на уровень *n+1* ($\Delta_n = g_{n+1} - g_n$) убывает с ростом *n*. Показано, что при достаточно слабых ограничениях на вид функций $\varphi(F_n, s_n)$ возможны два типа решений:

1) тривиальное решение – инвестиции в рост капиталовооруженности отсутствуют, распределение фирм по уровням капиталовооруженности не меняется от периода к периоду;
2) инвестиции осуществляются только в наиболее отстающие фирмы, что приводит к росту их капиталовооруженности. Эффективность фирм, находящихся в «правом хвосте» распределения, не меняется.

В работе отмечается, что инвестиции в рост выгодно осуществлять только если величина Δ_n достаточно велика. Именно эта величина определяет, какое решение из перечисленных выше является оптимальным.

Иллюстрацией этого факта является численное решение задачи в случае, когда g_n определяется следующим образом:

$$g_1 = 1, g_n = g_{n-1} + \frac{g}{\gamma^{n-2}}, \; n > 1. \tag{5}$$

На рис. 1 представлена динамика распределения для двух случаев, отличающихся значением параметра g. В первом случае g = 100, во втором – 10. Можно заметить, что в случае 1 оптимальным является сдвиг на большее число уровней, что соответствует приведенному выше выводу.

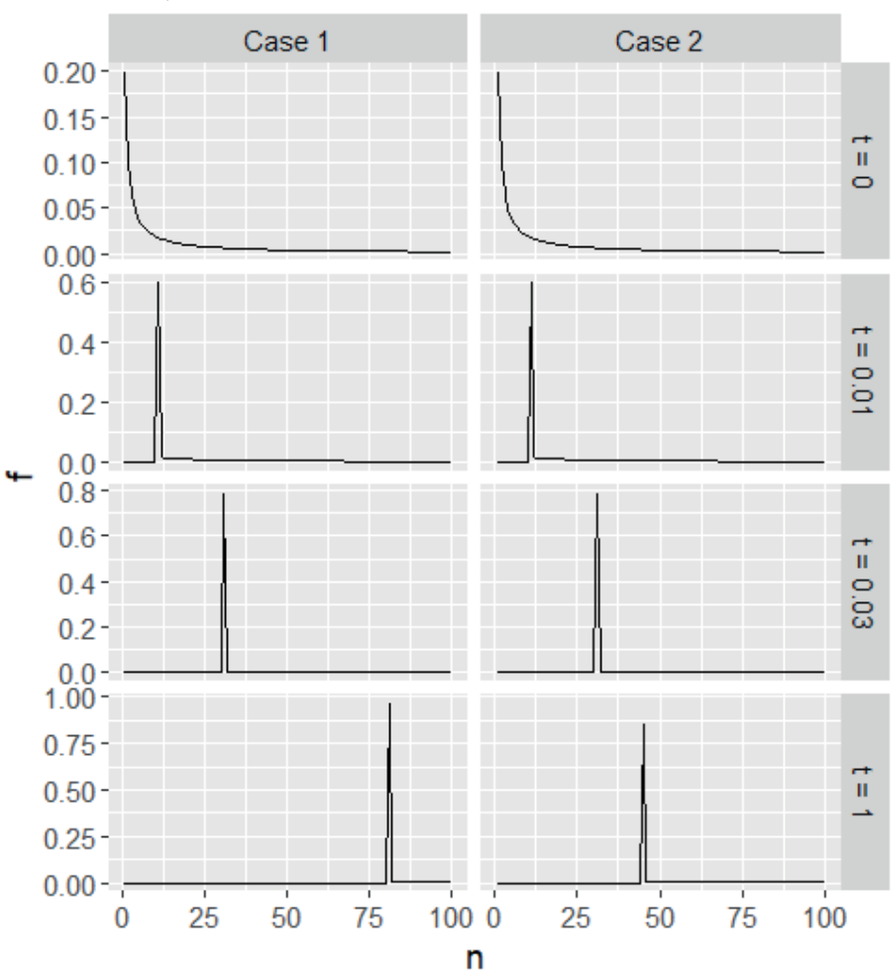


Рис. 1. Динамика распределения фирм по уровням эффективности для случаев, отличающихся величиной параметра g в соотношении (5). Case 1: g = 100, Case 2: g = 10

Литература

1. *Полтерович В.М.* Теория эндогенного экономического роста и уравнения математической физики // Журнал Новой Экономической Ассоциации. 2017. Т. 2, № 34. С. 193–201.

2. *Acemoglu, D., Cao, D.* Innovation by entrants and incumbents // Journal of Economic Theory. 2015. V. 157. P. 255–294.
3. *König, M. D., Lorenz, J., Zilibotti, F.* Innovation vs. imitation and the evolution of productivity distributions // Theoretical Economics. 2016. V. 11. P. 1053–1102.
4. *Lucas, R. E., Moll, B*. Knowledge Growth and the Allocation of Time // Journal of Political Economy. 2014. V. 122, N 1. P. 1–51.
5. *Luttmer, E. G. J.* Eventually, Noise and Imitation Implies Balanced Growth // Federal Reserve Bank of Minneapolis Working Paper. 2012. 699. P. 0–29.

УДК 519.21

Об оптимальном моменте продажи актива при наличии коридора колебаний цены

А.В. Куликов, К.С. Бальхаев

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Одной из важнейших задач теории случайных процессов и финансовой математики является задача об оптимальной остановке. Классическая постановка и ряд классических задач теории случайных процессов были введены и рассмотрены в работе [1].

Одна из классических задач финансовой математики является задача оптимальной продажи имеющегося актива. Пусть $(\Omega, F, (F_t)_{t\leq 1}, P)$ – фильтрованное вероятностное пространство, S_t – согласованный с фильтрацией случайный процесс, означающий цену актива. Тогда задачей оптимальной продажи в пределах интервала [0,1] будет нахождение оптимального момента τ, при котором впервые достигается $\sup_{\tau\leq t\leq 1}\{\mathrm{E}(S_t|S_\tau)\} \leq S_\tau$.

В случае рассмотрения в качестве случайного процесса броуновского движения относительно своей естественной фильтрации: $\mathrm{E}(S_t|S_\tau) = S_\tau, t \geq \tau$ – абсолютно всё равно, в какой момент реализовывать актив. Если же $\tilde{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t, B_1)_{t\leq 1}$, то данная задача означает наличие инсайдерской информации о цене базового актива в последний момент времени. Данная задача была рассмотрена в работе [2] с использованием подхода, рассмотренного А.Н. Ширяевым и Г. Пешкиром в работе [3].

В случае когда фильтрация $\tilde{\tilde{F}}_t = \sigma(B_s, s \leq t, b \leq B_\tau \leq a, \tau < 1)_{t\leq 1}$, то данная задача означает наличие инсайдерской информации о коридоре колебаний цен актива (a, b) на протяжении всего рассматриваемого отрезка времени. На практике цена актива может находится в коридоре, границы которого контролируются регулятором, одним из ярких примеров которого является валютный коридор [4].

В данной работе мы используем приближение броуновского движения с помощью случайного блуждания. Рассмотрим случайное блуждание X_n с симметричными границами a и $-a$, количеством шагов N, $X_n = (S_n | -a \leq S_k \leq a; k = 1, \dots, N)$, где S_n – обычное симметричное случайное блуждание. Далее введем функцию $m(n,k) = \sup_{n\leq\tau\leq N} E(X_\tau | X_n = k)$. Тогда можно заметить, что

$m(n,k) = \max(k, p(n,k)\bullet m(n+1, k+1) + (1 - p(n,k)\bullet m(n+1, k-1))$;

$p(n,k) = P(X_{n+1} > X_n | X_n = k), p(n,k)$ – вероятность пойти вверх;

$l(n,k) = (\text{количество траекторий из } X_n = k)$;

В работе были сформулированы и доказаны следующие свойства введенных функций.

1. $p(n,k) = 1 - p(n,-k)$.

$l(n,k) = l(n,-k)$.

$l(n,k)$ – невозрастающая функция по k при $k \geq 0$.

$p(n,k)$ – невозрастающая функция по k.

$l(n,k)$ – убывающая функция по n при фиксированном k.

$p(n,k)$ – неубывающая функция по n при фиксированном $k > 0$.

2. $m(n,k)$ – неубывающая функция по k при фиксированном n.
3. $m(n,k)$ – невозрастающая функция по n при фиксированном k.

4. $m(n-1,k+1) \le m(n,k)+1$.

Одним из аспектов работы является изучение *кривой принятия решения*. Кривой принятия решения называется совокупность точек $\{(t,x): x = \inf X_t : sup_{t\le\tau\le1} E(X_\tau|X_t)\} = X_t, 0 \le t \le 1\}$.

В работе рассмотрены свойства кривой принятия решения, а также приведен алгоритм для нахождения кривой принятия решения в непрерывном случае.

Литература

1. *Shepp L.A.* Explicit solutions for some problems of optimal stopping // Ann. Math. Statist. 1969. 40. P. 993–1010.
2. *Ekstrom E., Wanntrop H.* Optimal stopping of Brownian bridge // Journal Appl. Prob. 2009. 46. P. 170–180.
3. *Peskir G., Shiryaev A.N.* Optimal stopping and free-boundary problems. Lectures in Mathematics ETH. Zurich: Birkhauser Verlag, Basel. 2006.
4. https://www.sravni.ru/enciklopediya/banki/valjuta/valjutnyj-koridor-kak-metod-regulirovanija-kursa-nacionalnoj-valjuty/

УДК 519.114

Системы полиномов, порождаемые обобщенными автоморфизмами Шакона

В.В. Слюсарев

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Рассмотрены рекуррентные соотношения, описывающие системы полиномов $P_m^p(t)$, описывающих слабое замыкание последовательности степеней оператора Купмана для обобщённого автоморфизма Шакона. Подобно работе [1], вывод рекуррентных соотношений проведён при помощи анализа комбинаторных свойств функции $\phi: \Gamma\backslash\{(p-1,p-1,\dots)\} \to \mathbf{Z}$, заданной на группе p-адических чисел $\Gamma = \{x = (x_0, x_1, x_2, \dots),\ x_k \in \{0,1,\dots,p-1\}\}$ для произвольного простого числа p:

$$\phi(x) = x_i,\ x = (p-1, p-1, \dots, p-1, x_i,\ x_{i+1}, \dots). \quad (1)$$

Как показано в работе [1] для частного случая $p = 3$, искомая система полиномов связана со значениями функции ϕ соотношением:

$$P_m^p(t) = \mathbf{E}_x(t^{\phi^{(m)}(x)}), \quad (2)$$

$$\phi^{(m)}(x) = \phi(x) + \phi(x+1) + \dots + \phi(x+m-1), \quad (3)$$

здесь $\mathbf{E}_x$ – математическое ожидание при равномерном распределении $x \in \Gamma$.

В результате преобразований условия (2) были получены следующие рекуррентные соотношения на полиномы $P_m^p(t)$:

$$P^p_{pm+k}(t) = \frac{1}{p} t^m \left(P_m^p(t) t^{\frac{k(k-1)}{2}} \sum_{j=0}^{p-k-1} t^{jk} + P_{m+1}^p(t) \sum_{j=0}^{k-1} t^{\frac{(2p-k-2+j)(k-1-j)}{2}} \right),\ 1 \le k \le p-1. \quad (4)$$

Задание начальных условий позволяет получить полную систему полиномов для любого простого числа p. Непосредственная подстановка показывает соответствие общего соотношения (4) полученному в работе [1] частному случаю.

Литература

1. *Janvresse É., Prikhod'ko A.A., de la Rue T., Ryzhikov V.V.* Weak limits of powers of Chacon's automorphism. Ergodic Theory and Dynamical Systems. 2013. P. 1–14.

УДК 519.17

О графах, удовлетворяющих условию Гудмана–Хедетниеми

М.Б. Абросимов

Саратовский национальный исследовательский университет им. Н.Г. Чернышевского

В работе исследуется достаточное условие гамильтоновости графов Гудмана–Хедетниеми, сформулированное в терминах запрещенных подграфов. Дается описание всех графов, удовлетворяющих условию Гудмана–Хедетниеми, и доказывается, что при $n > 4$ существует только $\lfloor n/2 \rfloor + 2$ таких n-вершинных графов.

Гамильтоновым циклом называется остовной цикл в графе, то есть цикл, проходящий по всем вершинам графа. Граф, содержащий гамильтонов цикл, называется гамильтоновым. Основные определения даются по книге [1]. Задача проверки гамильтоновости графа является NP-полной, поэтому эффективного алгоритма для решения этой задачи неизвестно. В 1952 году Дирак предложил достаточное условие гамильтоновости.

Теорема 1 (Дирак, 1952 [2]). *Если в графе G с числом вершин $n \geq 3$ степень любой вершины $d(u) \geq n/2$, то граф G – гамильтонов.*

Очевидно, что графы, которые удовлетворяют условию теоремы 1, имеют достаточно много рёбер. В последующие годы было предложено много других достаточных условий гамильтоновости: Оре, Поша, Хватала, Бонди–Хватала и других [3, 4]. Многие из условий формулируются в терминах степеней вершин. Одна из немногих попыток предложить достаточное условие гамильтоновости в терминах запрещенных подграфов была предпринята в 1976 году Гудманом и Хедетниеми [5].

Подграфом графа $G = (V, \alpha)$, порожденным подмножеством вершин V', называется пара $G' = (V', \alpha')$, где $V' \subseteq V$ и $\alpha' = (V' \times V') \cap \alpha$. Подграф называется максимальным, если он получается из графа удалением одной вершины и всех инцидентных ей рёбер. Граф называется двусвязным, если все его максимальные подграфы связные. В двусвязном графе нет вершины, после удаления которой граф перестаёт быть связным. Двусвязность является необходимым условием гамильтоновости графа [1]. Связный n-вершинный граф, у которого все вершины имеют степень 2, называется циклом и обозначается C_n. Очевидно, что любой цикл C_n является гамильтоновым, однако при $n > 4$ не удовлетворяет условию теоремы Дирака.

Граф G называется двудольным, если множество его вершин можно разбить на два подмножества V_1 и V_2, такие что концы любого ребра графа G принадлежат разным подмножествам. Если граф G содержит все возможные рёбра, соединяющие вершины V_1 и V_2, то G называется полным двудольным графом и обозначается $K_{m,n}$, где m и n – число вершин в долях V_1 и V_2. На рис. 1 изображены графы $K_{1,3}$ и $K_{1,3} + x$. Граф $K_{1,3} + x$ получается из графа $K_{1,3}$ добавлением одного ребра.

Теорема 2 (Гудман–Хедетниеми, 1976 [5]). *Если двусвязный граф G не содержит подграфов вида $K_{1,3}$ и $K_{1,3} + x$, то граф G – гамильтонов.*

В своей работе вместе с элегантным доказательством, занимающим один абзац, авторы приводят и эффективный алгоритм проверки выполнения условия теоремы с одновременным построением гамильтонова цикла. Авторы также отмечают, что в отличие от графов, удовлетворяющих достаточным условиям гамильтоновости типа Дирака, Поша, Хватала и других, графы, удовлетворяющие предложенному условию, могут иметь меньше рёбер. Однако это утверждение ошибочно.

Очевидно, что любой цикл C_n удовлетворяет условию теоремы 2. Но, как показывают две следующие теоремы, эффективность условия Гудмана–Хедетниеми оказывается очень низкой.

Теорема 3. Если *n-вершинный граф G с числом вершин $n > 4$ удовлетворяет условию теоремы 9 и не является циклом, то он не содержит вершин степени ниже $n - 2$.*

Теорема 4. *Для заданного $n > 4$ количество графов, удовлетворяющих условию Гудмана–Хедетниеми, равно $\lfloor n/2 \rfloor + 2$.*

Замечание. При $n = 3$ число графов, удовлетворяющих условию Гудмана–Хедетниеми, равно 1 (полный граф K_3), а при $n = 4$ таких графов 3: цикл C_4, полный граф K_4 и унограф с вектором степеней (3, 3, 2, 2).

Рис. 1. Графы $K_{1,3}$ и $K_{1,3} + x$

Литература

1. *Харари Ф.* Теория графов. М: Мир, 1973. 300 с.
2. *Dirac G.A.* Some Theorems on Abstract Graphs // Proc. London Math. Soc. 1952. P. 69–81.
3. *DeLeon M.* A study of sufficient conditions for Hamiltonian cycles // Rose-Hulman Undergraduate Mathematics Journal. 2000. V. 6. P. 129–145.
4. *Li H.* Generalizations of Diracs theorem in Hamiltonian graph theory – a Survey // Discrete Math. 2013. V. 313. P. 2034–2053.
5. *Goodman S.E., Hedetniemi S.T.* Sufficient conditions for a graph to be Hamiltonian // J. Combin Theory. B. 1974. V. 16. P. 175–180.

УДК 517.938

Комбинаторика некоммутативных случайных блужданий на графах Кэли

А.А. Приходько, Е.С. Ракчеев, М.Ю. Тихонин

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Исследование динамики случайных блужданий играет большую роль в изучении геометрических и аналитических свойств графов и порождающих их алгебраических структур. Кестен [1], исследуя обобщенный оператор Лапласа, обнаружил аналитический критерий аменабельности для графов Кэли конечно-порождённых групп. Кайманович и Вершик [2] доказали, что группа G обладает нетривиальной гармонической функцией тогда и только тогда, когда энтропия случайного блуждания на графе Кэли G растёт линейно. В работе [3] Пак и Смирнова-Нагнибеда установили комбинаторный критерий аменабельности для счётных групп в терминах отсутствия единственной перколяции на графе Кэли для некоторого конечного множества образующих S. Случайное блуждание на группе Баумслага–Солитера BS (1,3) со значениями в алгебре полиномов используется в [5] для вычисления замыкания унитарного представления автоморфизма Шакона. В работе [6] авторы используют некоммутативное случайное блуждание со значениями в алгебре марковских операторов на группе BS(1,2) для изучения асимптотических свойств автокорреляций функции $S_2(x)$. Исследование работы [6] мотивировано хорошо известной в теории динамических систем конструкцией адических систем Вершика (см. [4]). Обобщая конструкцию Паскаль-адического автоморфизма, мы изучаем комбинаторные свойства некоммутативных случайных блужданий на решётках и графах Кэли некоторых конечно-порождённых аменабельных групп.

Литература

1. *Kesten H.* Symmetric random walks on groups. Trans. Amer. Math. Soc. 1959. V. 92. P. 336–354.
2. *Kaimanovich V.A., Vershik A.M.* Randon walks on discrete groups: boundary and entropy. Ann. Probab. 1983. V. 11, N 3. P. 457–490.
3. *Pak I., Smirnova-Nagnibeda T.* On non-uniqueness of percolation on non-amenable Cayley graphs // C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I Math. 2000. V. 330, N 6. P. 495–500.
4. *Вершик А.М.* Автоморфизм Паскаля имеет непрерывный спектр. Функц. анализ и его прил. 2011. Т. 45, 3. С. 173–186.
5. *Janvresse É., Prikhod'ko A.A., de la Rue T., Ryzhikov V.V.* Weak limits of powers of Chacon's automorphism. Ergodic Theory and Dynamical Systems. 2013. P. 1–14.
6. *Emme J., Prikhod'ko A.A.* On the asymptotic behaviour of the correlation measure of sum-of- digits function in base 2. P. 1–21. ArXiv: 1504.01701.

УДК 515.162.8

Некорректность определения связной суммы зацеплений

А.А. Асанов

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Широко известно, что операция связной суммы корректно определена для узлов. Также известно, что она некорректно определена для неупорядоченных либо неориентированных зацеплений [1].

Теорема. *Связная сумма зацеплений с ориентированными упорядоченными компонентами не является корректно определенной.*

Возможно, этот результат известен в фольклоре, но, по-видимому, не был опубликован. При доказательстве теоремы использован инвариант количества корректных раскрасок диаграммы узла/зацепления в три цвета [2].

Следствие. Существуют изотопные, но не стандартизованно изотопные зацепления.

В возможных дальнейших продвижениях интересно рассмотреть такие вопросы, как, например, корректность определения связной суммы для ориентированных упорядоченных зацеплений с попарным коэффициентом зацепления 0. Также интересно рассмотреть перечень других результатов, которые верны для связной суммы узлов, но не продолжаются на зацепления, к примеру, что связная сумма зацепления A с нетривиальным может быть изотопно A.

Литература

1. *Прасолов В.В., Сосинский А.Б.* Узлы, зацепления, косы и трёхмерные многообразия. М.: МЦНМО, 1997. 352 с.
2. *Прасолов В.В.* Наглядная топология. М.: МЦНМО, 1995. 111 с.

УДК 519.21

Расчет поправки к форвардной LIBOR ставке при ее ранней поставке в однофакторной модели Халла–Уайта

Н.О. Малых, И.Д. Измайлов

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Одной из основных задач, которую решает финансовая математика, является расчет справедливых цен производных финансовых инструментов. Решение классических задач были рассмотрены в работе [2].

Популярной внебиржевой сделкой на финансовом рынке является соглашение о будущей процентной ставке. В этом соглашении одна сторона условно занимает у второй стороны сумму под определённую процентную ставку на оговорённый срок. Участники соглашения обязуются провести на дату исполнения компенсационные выплаты в случае отличия текущего значения заранее оговорённой процентной ставки от значения указанной ставки-ориентира, указанной при заключении (например, LIBOR).

В случае рассмотрения обычного «ванильного» контракта выплата происходит в дату, на которую фиксируется ставка LIBOR. Если произвести расчет в момент фиксации, то данная задача означает что появляется некоторый спрэд, который зависит от волатильности ставок. Один из вариантов решения данной задачи был рассмотрен в работе [1].

Интересно рассмотреть однофакторную модель Халла–Уайта для моделирования мгновенной ставки:

$$dr(t) = [\theta(t) - a(t)r(t)]dt + \sigma dW(t)$$

и получить справедливую форвардную ставку:

$$LIA(0,T_{i-1},T_i) = \tau_i P(0,T_{i-1}) E_{Q_{T_{i-1}}}(L(T_{i-1},T_{i-1},T_i))$$

при данном способе выплаты.

Далее в работе используется переход к другой форвардной риск-нейтральной мере с помощью производной Радона–Никодима и теоремы Гирсанова.

Результатом работы является вычисленная теоретически поправка в однофакторной модели Халла–Уайта, подсчет ее значения на реальных контрактах и с помощью моделирования.

Литература

1. *Clark I.J.* Foreign exchange option pricing: a practitioner's guide. John Wiley & Sons, 2011.
2. *Hull J.C.* Options, futures, and other derivatives. Pearson Education India, 2006.

УДК 519.21

Американские деривативы. Расчет цены ОФЗ-н и риска корпоративного банка при возврате ОФЗ-н

Г.С. Стратилов, Н.О. Малых

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Возникновение в апреле 1973 года рынка биржевых опционов в Чикаго, открыло перед инвесторами новый мир инвестиционных возможностей. В связи с этим наиболее важным производным инструментом на финансовых рынках принято считать опционы. Принцип и порядок ценообразования опционов относится к числу основных финансовых теорий. Поэтому на сегодняшний день является актуальной задача быстрого и точного нахождения цены опциона в любой момент времени. Хотя оценить стоимость опциона в

момент окончания срока его действия довольно просто, оценка его стоимости в любой предшествующий момент представляет собой серьезную проблему. Принцип, при котором арбитражные возможности отсутствуют, хотя и пригодился при выводе различных оценок, оказывается недостаточным для определения точной стоимости опциона без дальнейших предположений о вероятностном поведении цен акций. Также традиционные методы, применяемые для других финансовых инструментов, не позволяют правильно определить стоимость опциона, так как риск изменяется при каждом изменении стоимости и срока жизни лежащего в его основе актива. Для решения этой задачи был разработан целый ряд различных моделей ценообразования опционов.

Самой первой и основной принято считать модель ценообразования европейского колл-опциона Блэка–Шоулза. Альтернативная биномиальная модель оценки стоимости опциона ограничивает движение цены двумя возможными значениями в периоде, заметно упрощая математику за счет некоторого удаления от действительности. Однако в результате ничего не теряется, поскольку биномиальная модель сходится к модели Блэка–Шоулза при уменьшении длины периода к нулю. И, что более важно, биномиальная модель приводит к эффективным численным алгоритмам оценки стоимости опциона.

В данной работе рассмотрен новый финансовый инструмент, появившийся на российском рынке – облигации федерального займа для населения (ОФЗ-н). Он представляет собой puttable-облигацию, что позволяет ее владельцу вернуть ее до финальной выплаты номинала, получив обратно деньги, за которые он ее купил при размещении. Очевидно, владелец облигации так поступает, когда рыночные ставки очень высокие по сравнению с купонами и рыночная цена облигации существенно ниже ее стоимости при ее выпуске. Интересным фактом является то, что если клиент возвращает облигацию в первый год после покупки, то возврат денег клиенту осуществляет корпоративный банк. Минфин обязуется вернуть эту сумму денег банку в дату, равную году с момента размещения возвращенной облигации. Фактически при исполнении банк дает беспроцентный кредит Минфину на сумму возврата по ОФЗ-н. Таким образом, у Минфина есть опция беспроцентно получить плавающую сумму денег на какой-то срок длительностью до года. Основываясь на биномиальной модели ценообразования активов, в данной работе реализован алгоритм для нахождения справедливой цены для облигаций федерального займа (ОФЗ-н) и рассчитан риск коммерческого банка при досрочном возврате ОФЗ-н клиентом.

Литература

1. Приказ Минфина России от 15.03.2017 № 38н «Об утверждении Условий эмиссии и обращения облигаций федерального займа для физических лиц».
2. *Lyuu Y.D.* Financial engineering and computation: principles, mathematics, algorithms. Cambridge University Press, 2001.
3. *Hull J.C.* Options, futures, and other derivatives. Pearson Education India, 2006.
4. *Shreve S.* Stochastic calculus for finance I: the binomial asset pricing model. Springer Science & Business Media, 2012.
5. Curran M. Accelerating American option pricing in lattices // The Journal of Derivatives. 1995. V. 3, N 2. C. 8–18.

Секция когнитивных технологий

УДК 004.932.2

Детектирование линий разметки в задаче распознавания дорожной разметки

Е.И. Панфилова, И.А. Кунина

Московский физико-технический институт (государственный университет)
Институт проблем передачи информации РАН

В настоящее время задача распознавания дорожной разметки играет важную роль в разработке искусственного интеллекта для частично или полностью автономных транспортных средств. Так, распознавание дорожной разметки используется при разработке системы помощи водителю (например, в системе предупреждения о сходе с полосы) или разработке системы определения собственного положения полностью автономного ТС во время проезда по заданному маршруту.

При решении задачи распознавания дорожной разметки можно выделить следующие подходы: выделение локальных особенностей на изображении и их аппроксимация на основе той или иной предложенной геометрической модели дорожной разметки. Для выделения локальных особенностей используются: цветовая сегментация [1], детектор границ Канни [2], вычисление производной в каждой точке изображения [3]. А для аппроксимации выделенных локальных особенностей предлагают такие подходы, как преобразование Хафа [2, 3], RANSAC [4] и др. Однако предложенные подходы чувствительны ко внешним условиям (тени, плохое качество разметки, солнечные блики, надписи и др.) и выбранной модели дорожной разметки. С развитием вычислительных мощностей, в последнее время появляются способы детектирования разметки с помощью машинного обучения. Например, обучение нейронных сетей [5] или структурное обучение [6]. Однако такие методы предполагают наличие заранее собранного набора данных и его своевременное пополнение для обучения и тестирования.

В данном докладе рассматривается способ детектирования линий дорожной разметки на изображении дороги, при этом геометрическая модель, описывающая наблюдаемую разметку, на каждом конкретном изображении сцены неизвестна.

Под дорожной разметкой будем подразумевать светлые по сравнению с фоном линии, изображенные на дороге (рис. 1а, 1в). Алгоритм принимает на вход изображение дороги, приведенное к виду сверху. Причем способ такого приведения остается за рамками доклада. Дополнительно будем считать, что ширина дорожной разметки и ее приблизительная длина нам известны. Выходом алгоритма является множество линий разметки, где под линией разметки подразумевается последовательность точек в системе координат изображения. Количество линий в сцене заранее неизвестно.

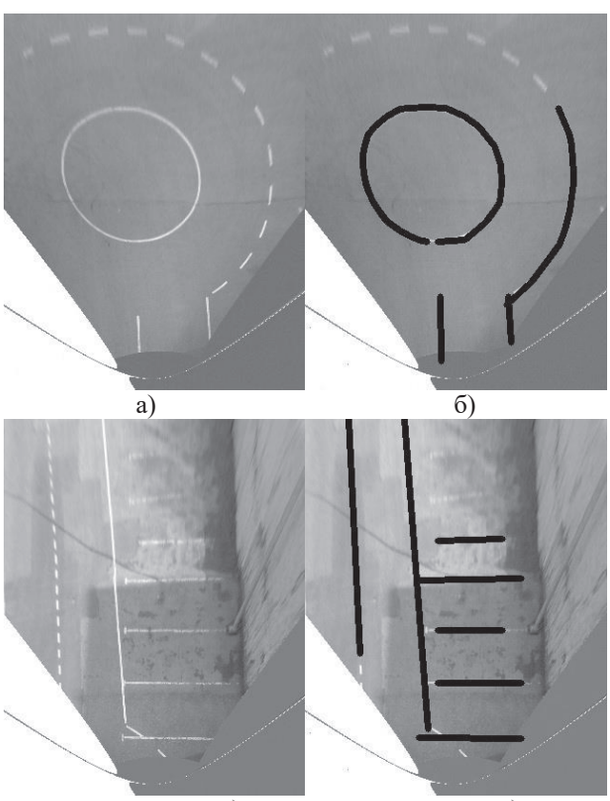
Алгоритм состоит из двух последовательных этапов.

На первом этапе подавляется фон входного изображения. Далее полученное изображение разбивается на участки одинакового размера с фиксированной областью перекрытия соседних участков. В каждом участке ищется доминирующая линия с помощью быстрого преобразования Хафа [7]. Преобразование Хафа неоднократно предлагалось для выделения линейных сегментов на изображении в силу своей робастности, но не нашло должного применения из-за вычислительной сложности наиболее распространенной версии алгоритма [8]. Мы используем аналогичный подход, но предлагаем применить быстрое преобразование Хафа [7], которое работает за $O(n^2 \log(n))$, в отличие от алгоритма [8], работающего за $O(n^3)$, где $n \times n$ – размер анализируемого участка. Найденная линия задается координатами двух точек, принадлежащих границам рассматриваемого участка, которые эта линия пересекает (далее, отрезок). Отрезку приписывается коэффициент уверенности в его принадлежности линии

разметки. Если коэффициент превышает некоторый заданный порог, то отрезок считается принадлежащим той или иной линии разметки и переводится в систему координат исходного изображения. Полученные отрезки группируются в неупорядоченные множества, соответствующие линиям разметки, анализируя их пространственное и угловое расположение друг относительно друга.

На втором этапе каждое полученное множество аппроксимируется последовательностью точек. Для этого, используя полученную на предыдущем этапе информацию о взаимном расположении отрезков, в множестве определяется порядок обхода. В процессе обхода ближайшие концы двух отрезков-соседей меняются на их точку пересечения. Таким образом, для каждой линии разметки на изображении мы получаем ее аппроксимацию в виде последовательности точек.

Предложенный алгоритм был протестирован на реальных данных и показал практическую применимость. Как видно (рис. 1б, 1г), алгоритм справляется с широким спектром геометрических моделей разметки: окружности (рис. 1а), многочисленные прямые линии (рис. 1в). А также продемонстрирована устойчивость к теням и плохому качеству разметки. Тем не менее алгоритм показал неудовлетворительное качество на прерывистой разметке. Планируется продолжить развитие алгоритма для более устойчивого детектирования разрывных линий разметки.



а) б) в) г)

Рис. 1. Пример детектирования линий разметки для дорожной разметки разных геометрических моделей

Литература

1. *Ma C.* [*et al.*]. Lane detection using heuristic search methods based on color clustering //Communications, Circuits and Systems (ICCCAS), 2010 International Conference on. IEEE, 2010. P. 368–372.
2. *Hou C., Hou J., Yu C.* An efficient lane markings detection and tracking method based on vanishing point constraints //Control Conference (CCC), 2016. 35th Chinese. IEEE, 2016. P. 6999–7004.
3. *Yoo H., Yang U., Sohn K.* Gradient-enhancing conversion for illumination-robust lane detection //IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems. 2013. V. 14, N 3. P. 1083–1094.

4. *Deng J., Han Y.* A real-time system of lane detection and tracking based on optimized RANSAC B-spline fitting // Proceedings of the 2013 Research in Adaptive and Convergent Systems. ACM, 2013. P. 157–164.
5. *He B.* [*et al.*]. Accurate and robust lane detection based on dual-view convolutional neutral network //Intelligent Vehicles Symposium (IV), 2016 IEEE. IEEE, 2016. P. 1041–1046.
6. *Xiao L.* [*et al.*]. Road marking detection based on structured learning //Intelligent Control and Automation (WCICA), 2016 12th World Congress on. IEEE, 2016. P. 2047 – 2051.
7. *Nikolaev D.P.* [*et al.*]. Hough transform: underestimated tool in the computer vision field //Proceedings of the 22th European Conference on Modelling and Simulation. – 2008. – V. 238.
8. *Hough P.V.C.* Method and means for recognizing complex patterns. – 1962. – N US 3069654.

УДК 004.021

Оценка достоверности распознавания символа в видеопотоке

О.О. Петрова[1], В.В. Шихеева[2], К.Б. Булатов[1,3]

[1]Московский физико-технический институт (государственный университет)
[2]Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС»
[3]Институт системного анализа РАН

Рассмотрена задача построения критерия достоверности распознавания отдельных символов в видеопотоке на примере символов машиночитаемой зоны. Исходные данные представлялись в виде множества Ψ различных клипов длины N, для которых известны результаты распознавания на заданной позиции, представленные в виде множества $F=\{F_1,\dots,F_N\}$ наборов альтернатив $c_{i,j}$:

$$F_1=\{(c_{1,1},c_{1,2},\dots,c_{1,K})\},\ F_2=\{(c_{2,1},c_{2,2},\dots,c_{2,K})\},\dots,\ F_N=\{(c_{N,1},c_{N,2},\dots,c_{N,K})\},$$
$$c_{i,j}=(q_{i,j},g_{i,j}),\ q_{i,j}\in[1,2,\dots,K],\ g_{i,j}\in[0,1],\ \sum_{j=1}^{K}g_{i,j}=1, \quad (1)$$

где N – число кадров видеоряда; K – мощность алфавита; $q_{i,j}$ – индекс класса распознавания;

$g_{i,j}$ – оценка принадлежности распознаваемого символа к классу $q_{i,j}$ [1]. Также известна правильная альтернатива (класс) для распознаваемого символа.

Задача построения отбраковывающего правила была разбита на два этапа: сбор статистических данных о количестве верно распознанных кадров для видеоклипов разной длины и анализ нового клипа с учётом собранной статистики.

Для реализации первого этапа брались видеоклипы, для которых правильный класс распознавания, обозначаемый как j_0, считался известным. По результатам распознавания строилась матрица

$$A=\|a_{i,j}\|,\ i\in M=\{1,2,\dots,N\},\ j\in G=\{1,2,\dots,K\},\ \sum_{j=1}^{K}a_{i,j}=1, \quad (2)$$

где $a_{i,j}$ – оценка альтернативы символа, имеющего в алфавите номер j, в кадре i; N – количество кадров в видеоряде; K – размер алфавита распознавания. Каждый столбец матрицы представляет собой функцию оценки альтернативы конкретного символа в зависимости от кадра.

По матрице $A=\|a_{i,j}\|$ строились матрица интегрированных результатов распознавания $B=\|b_{i,j}\|$ и величины n_j, одним из следующих способов:

Вариант 1: $b_{i,j}=\frac{\sum_{k=1}^{i}a_{k,j}}{i};\ n_j=\sum_{i=1}^{N}\left[1-(\max_{k=1,2,\dots,K}b_{i,k}-b_{i,j})\right].$ (3)

Вариант 2: $b_{i,j}=\frac{\sum_{k=1}^{i}a_{k,j}}{i};\ n_j=\sum_{i=1}^{N}b_{i,j}.$ (4)

Вариант 3: $b_{i,j}=\prod_{k=1}^{i}a_{k,j};\ n_j=\sum_{i=1}^{N}b_{i,j}.$ (5)

Вариант 4: $b_{i,j} = \prod_{k=1}^{i} a_{k,j};\ n_j = b_{N,j}$. (6)

Вариант 5: $b_{i,j} = \frac{\sum_{k=1}^{i} a_{k,j}}{i};\ n_j = b_{N,j}$. (7)

Матрица $B = \|b_{i,j}\|$ строилась согласно принципу суммы или принципу произведения комбинирования классификаторов, описанных в [2]. Величины n_j представлялись либо как непрерывный аналог количества распознанных кадров в клипе, в которых альтернатива j оказалась старшей (вариант 1), либо как оценки альтернатив для интегрированного результата распознавания (варианты 4 и 5), либо как сумма этих оценок, что позволяет уменьшить влияние возможных случайных выбросов (варианты 2 и 3).

В качестве статистической характеристики бралось экспериментальное среднее величины n_{j_0} для видеоклипов разной длины, обозначаемое $M(N)$.

Для анализа видеоряда, для которого правильная альтернатива считалась неизвестной, также строились матрица B и величины n_j. Последовательно выбирались

$$n_{j_0} = \max_{j=1,2,\ldots,K} n_j \ \text{ и } \ n_{j_1} = \max_{j=1,2,\ldots,K;\, j \neq j_0} n_j . \quad (8)$$

Альтернатива j_0 считалась правильной, если выполнялись неравенства

$$n_{j_0} \geq \min(M(N) + \rho N;\, N) \ \text{ и } \ n_{j_1} \leq \max(M(N) - \rho N;\, 0), \quad (9)$$

где $M(N)$ – вычисленное на этапе сбора статистики среднее величины n_{j_0} для видеоряда длины N; ρ – параметр, подбираемый экспериментально.

Было предложено следующее отбраковывающее правило для клипа $\psi \in \Psi$:

$$R(\psi, \theta) = \begin{cases} 1, \text{ если } n_{j_0} \geq \min\,(M(N) + T(\theta)N;\, N), \\ 0, \text{ если } n_{j_0} < \min\,(M(N) + T(\theta)N;\, N), \end{cases} \quad (10)$$

где θ – набор параметров для ‘настройки’ правила; $T(\theta)$ – подбираемый экспериментально порог.

В качестве эталонного отбраковывающего правила, с которым сравнивались предложенные, бралось правило первой альтернативы

$$R_{fq}(\psi, \theta) = \begin{cases} 1, \text{ если } \max\limits_{j=1,2,\ldots,K} b_{N,j} \geq T(\theta) \\ 0, \text{ если } \max\limits_{j=1,2,\ldots,K} b_{N,j} < T(\theta) \end{cases}, \quad b_{i,j} = \frac{\sum_{k=1}^{i} a_{k,j}}{i}. \quad (11)$$

Для оценки уместности дальнейшего применения сформулированного правила отбраковки были построены изображённые на рис.1 ER-графики ошибок первого и второго рода для вариантов 2 – 5 построения матрицы B и величин n_j и для эталонного варианта.

Вариант 1 был исключён из рассмотрения в силу практически полного совпадения с дискретным случаем. Сравнение полученных ER-графиков выявило, что поскольку ошибки второго рода, как правило, гораздо более критичны, чем ошибки первого рода, то в рабочем диапазоне систем оптического распознавания символов (примерно от 0,5% до 2% ошибок второго рода) [3] построенные правила позволяют снизить количество ошибок первого и второго рода по сравнению с обычно используемым методом первой альтернативы.

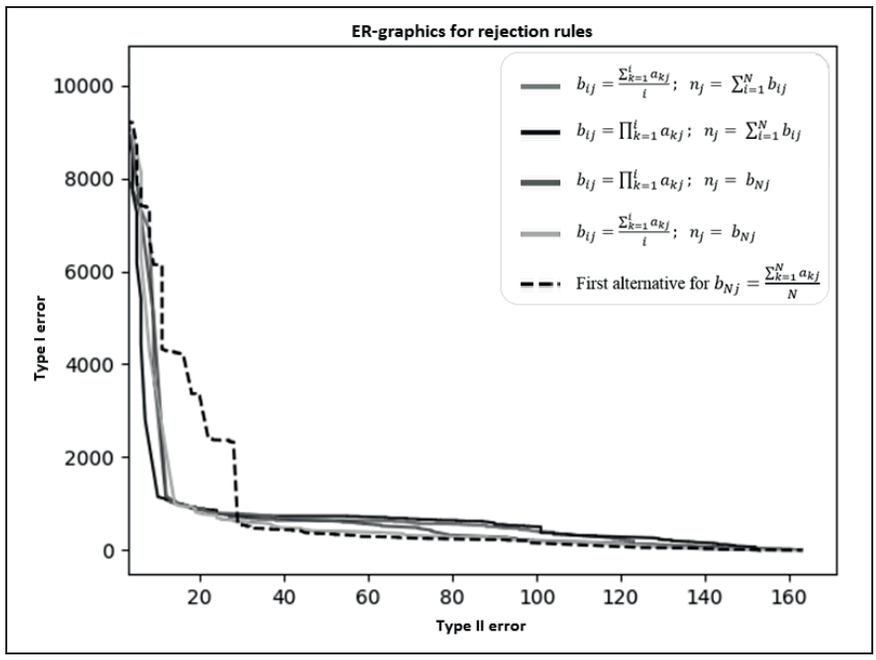


Рис. 6. ER-графики для правил отбраковки

Литература

1. *Арлазаров В.В., Булатов К.Б., Карпенко С.М.* Метод определения надежности распознавания в задаче распознавания тисненных символов // Труды ИСА РАН 2013. Т. 63, № 3. С. 117–122.
2. *Kittler J., Hatef M., Duin R. P.W., Matas J.* On Combining Classifiers // IEEE Trans Pattern Anal Mach Intell. 1998. V .20, N 3. P. 226–239.
3. *Арлазаров В.В., Кляцкин В.М.* Определение достоверности результатов распознавания символа в системе Cognitive Forms //Документооборот. Концепции и инструментарий. М.: URSS, 2004.

УДК 004.932

Сравнение отсканированных изображений документов с использованием OCR Tesseract

Е.И. Андреева[1], Т.В. Манжиков[1,2], О.А. Славин[2,3]

[1]Московский физико-технический институт (государственный университет)
[2]ООО «Смарт Энджинс Сервис»
[3]Институт системного анализа федерального исследовательского центра «Информатика и управление» РАН

Рассмотрена задача сравнения отсканированных изображений документов, которая возникает, например, при проверке на идентичность двух экземпляров бумажных договоров, подписываемых двумя сторонами, одна из которых могла внести изменения с целью выгоды.

Входные изображения представляют собой отсканированные страницы договора, которые являются либо идентичными экземплярами одного документа, отсканированными по-разному, либо в один из экземпляров внесены некоторые изменения. Рассматривается пара двух изображений, одно из которых назовем эталонным, а другое тестовым. Изменения, которые были внесены в тестовый документ, могут быть связанными как с отдельными словами, так и с целыми строками, такие как слова с ошибками, изменения целых слов, удаление существующих и вставка новых слов в строки, удаление или вставка целых строк, которых нет в эталонном документе.

Сравнение документов происходит на основе результатов распознавания изображений с использованием программы OCR Tesseract 4.0, которая была выбрана, как и в работе [1], по причине свободного распространения и представления результатов распознавания в формате HOCR (HTML OCR), в котором содержится информация о координатах распознанных элементов. При этом имеются ошибки распознавания, описанные в [2], которые мешают корректно воспринимать исходные данные. Используются данные о рамках, ограничивающих слова и строки, и сам распознанный текст.

Чтобы избежать ошибок распознавания в эталонном документе, сначала производится распознавание и исправление ошибок в полученном HOCR-файле. Далее производится сравнение документов на основе извлекаемой из HOCR информации. Из-за ошибок распознавания в тестовом документе возникают ложные срабатывания; чтобы уменьшить их количество, используются перечисленные ниже факторы.

Сравнение может осуществляться в двух режимах: в первом, нечувствительном, игнорируются некоторые несущественные ошибки, во втором, чувствительном, выводятся более мелкие ошибки. В первом режиме есть возможность настройки игнорирования односимвольных слов, являющихся буквами, которые часто бывают ошибками распознавания, а в противном случае с большой вероятностью не дают существенного смыслового вклада в различие документов. При этом никакие цифры не игнорируются, так как изменение цифры может быть очень существенно в важных документах. Также при сравнении не учитывается регистр, так как одной из ошибок распознавания является изменение регистра случайных букв внутри слова. Разный регистр символов не является существенным различием в двух документах. Кроме того, происходит отождествление некоторых символов, которые одинаковы, с точки зрения распознавания, такие как буква О и цифра 0, буква З и цифра 3, различные виды кавычек, длинные и короткие тире, дефис и знак минуса и другие, как и в работе [3]. Игнорируется пунктуация, так как возможные ошибки несущественны при сравнении двух документов.

Сравнение любого текста, как внутри слов, так и внутри строк, происходит на основе расстояния Левенштейна. Слова считаются похожими, если коэффициент сходства слов, равный отношению расстояния Левенштейна и длины эталонного слова, меньше настраиваемого порога.

Сравнение рамок происходит на основе коэффициента их перекрытия, который должен быть больше, чем настраиваемый параметр, для того, чтобы рамки можно было считать схожими.

Итак, делим текст на строки и сравниваем построчно. Для каждой строки эталонного документа ищется строка в тестовом документе, для этого сравниваются рамки, ограничивающие строки. Если они сходны, то сравнивается текст внутри строк. Если тексты в этих строках сходны, то строки также считаются похожими. Таким образом, строкам в эталонном документе ставим в соответствие строки в тестовом документе. Если строки поставлены в соответствие друг другу, то сравниваем каждое слово в них. Как и для строк, сравниваем рамки слов и текст в них, сопоставляем слова и выводим различия.

Изменяя параметры алгоритма, а также режим работы, можно добиться либо высокой чувствительности и большого количества ложных срабатываний, либо, наоборот, пропусков несущественных ошибок и уменьшения числа ложных срабатываний.

Для уменьшения числа ложных срабатываний было проведено комбинирование с другим механизмом сравнения образов, основанном на сиамских нейронных сетях. Нами использовалась нейронная сеть, обученная на образах человеческих лиц и дообученная на изображениях текстовых символов.

На вход сиамской нейронной сети подавались только пары изображений, являющихся набором из нескольких символов, окружающих группу различающихся

символов в паре слов. Например, для эталонного $W_E = \{s_1, s_2, \dots, s_k, \dots, s_n\}$ и тестового слов

$W_T = \{s_1, s_2, \ldots, s'_k, \ldots, s_n\}$ на сравнение подавались образы, соответствующие символам

$\{s_{k-1}, s_k, s_{k-1}\}$ и $\{s_{k-1}, s'_k, s_{k-1}\}$. При этом на сравнение не подавались образы, соответствующие парам символов, сходными с точки зрения механизма распознавания, например, такие как буква О и цифра 0.

Приведем результаты эксперимента. Тестовое изображение является модифицированным эталонным изображением. В таблице 1 приведены оценки сравнения,

где A_M – полнота детектирования модификаций, равная отношению количества найденных

модификаций к известному заранее числу модификаций в тестовой странице, D_F – доля ложных срабатываний, равная отношению количества ложных срабатываний к известному заранее числу слов в эталонной странице.

Универсальность алгоритма и высокая точность сравнения являются достоинствами данного алгоритма, но его успешность зависит от гарнитуры и размера шрифта в документах.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 16-07-00616, 16-29-09508 и 16-07-01051).

Таблица 1

Результаты эксперимента

№	Были ли модификации	Нечувствительный режим		Чувствительный режим	
		A_M	D_F	A_M	D_F
1	Да	0,88	0,002	1	0,01
2	Да	1	0,016	1	0,04
3	Да	1	0,004	1	0,01
4	Да	1	0,004	1	0,02
5	Нет	1	0	1	0
6	Нет	1	0,002	1	0,02

Литература

1. *Смирнов С.В.* Технология и система автоматической корректировки результатов при распознавании архивных документов: дис. на соиск. учен. степ. к.т.н.: 05.13.11: защищена 04.06.2015 / Смирнов Сергей Владимирович. СПб., 2015. 130 с.
2. *Славин О.А.* Метод классификации распознанных страниц деловых документов на основе метода template matching // Труды Седьмой Международной конференции «Системный анализ и информационные технологии» САИТ – 2017 (13–18 июня 2017 г. Светлогорск, Калининградской области, Россия): Труды конференции. – Светлогорск: 2017. С. 667–671.
3. *Булатов К.Б., Ильин Д.А., Полевой Д.В., Чернышова Ю.С.* Проблемы распознавания машиночитаемых зон с использованием малоформатных цифровых камер мобильных устройств. // Труды Института системного анализа РАН. 2016. Т. 66, № 3. С. 85–93.

УДК 004.93`12

Определение ориентации машиночитаемой зоны документа при помощи искусственной нейронной сети

Ю.С. Чернышова[1], А.В. Шешкус[2]

[1] Национальный исследовательский технологический университет “МИСиС”
[2] ООО “Смарт Энджинс Сервис”

Машиночитаемая зона (МЧЗ) – это часть машиночитаемого персонального документа, например паспорта (рис. 1). Рекомендации по формату МЧЗ представлены в документе Doc 9303 международной организации гражданской авиации (ИКАО) [1].

При распознавании МЧЗ документа при помощи камеры мобильного телефона важным аспектом является определение ее ориентации. Типичная МЧЗ содержит 2 или 3 строки символов, напечатанных шрифтом OCR-B. В ней нет элементов, кроме символов, анализируя которые можно понять, перевернут ли документ. Возможным и используемым решением данной задачи является двойное распознавания МЧЗ. То есть сначала выполняется распознавание МЧЗ в исходной ориентации, после чего изображение поворачивают на 180 градусов и распознают МЧЗ повторно. Из двух результатов ответом выбирают тот, где сеть более уверенно распознавала символы. Основным недостатком данного метода является повторный запуск распознающей искусственной нейронной сети, так как это занимает неоправданно много времени. Архитектура распознающей сети представлена на рис. 2.

Для ускорения выполнения данной задачи предлагается обучить искусственную нейронную сеть, которая по символам МЧЗ будет определять, перевернуто ли изображение. После ее применения на изображении с исправленной ориентацией один раз запустить распознающую сеть.

В нашем подходе следует отметить две важные черты:

1) мы обучаем ориентационную сеть на синтетических данных, т.е. нам не требуется собирать обучающую выборку и размечать ее;
2) в результате мы получаем содержащую мало весов и, следовательно, быстродействующую сеть.

Алфавит МЧЗ состоит из 37 символов: заглавных латинских букв, цифр и знака ”<”. С помощью системы генерации искусственных данных, основанной на моделях букв и реальных фонах [2], была сгенерирована обучающая выборка из 2700 экземпляров для каждого класса. Также были сгенерированы их перевернутые аналоги.

У данной сети всего один выходной нейрон, который принимает положительное значение, если символ изображён верно, и отрицательное, если символ перевернут.

После обучения ориентационной сети, был проведен эксперимент, где сравнивалось качество и время работы системы с двумя проходами распознающей сетью и системы с использованием ориентационной сети и одного прохода распознающей. В результате было выяснено, что

1. качество работы второго подхода не хуже, чем первого;
2. скорость работы предложенного метода в 3–4 раза быстрее.

Таким образом, можно утверждать, что предложенный способ показал свою работоспособность и применимость на практике.

Далее была обучена ориентационная сеть, чья архитектура представлена на рис. 4.

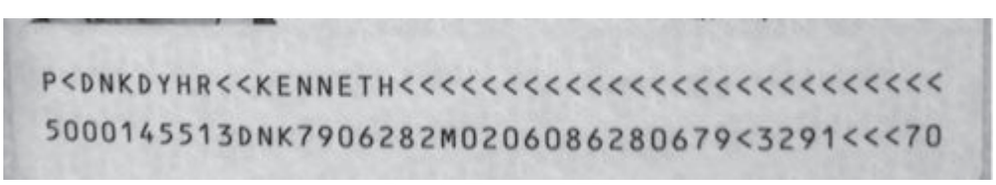


Рис. 1. Пример МЧЗ

Рис. 2. Архитектура распознающей сети

Рис. 3. Пример синтезированных данных

Рис. 4. Архитектура ориентационной сети

Литература

1. ICAO Doc 9303 Part 1. Machine Readable Travel Documents — Machine Readable Passports. Sixth Edition. In two volumes. International Civil Aviation Organization. 2006.
2. *Гайер А.В., Чернышова Ю.С., Шешкус А.В.* Генерация искусственной обучающей выборки для задачи распознавания символов полей паспорта РФ // Информационные технологии и системы 2017. 2017.

УДК 004.896

Детектирование печатей на изображении документа с помощью каскадного алгоритма классификации на примере паспорта гражданина РФ

***Д.П. Маталов*[1], *В.В. Арлазаров*[1], *С.А. Усилин*[2]**

[1]Московский физико-технический институт (государственный университет)
[2]Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН

На текущем этапе развития промышленных систем документооборота автоматическая обработка изображений документов стала их неотъемлемой частью, с помощью которой решается не только задача оптического распознавания текста (OCR), но и проверка правильности оформления документов. Одним из важных критериев правильности оформления является наличие (или отсутствие) печати.

Детектирование печатей (в том числе гербовых) является нетривиальной задачей, что обуславливается целым рядом факторов: нарушение целостности печати, большое количество шумовых элементов, физическое выцветание со временем и т.п. Поиск печати на документах, выполненных на защищенных бланках (к которым относится паспорт гражданина РФ), дополнительно осложняется наличием в зоне печати различных элементов защиты (голограммы, гильоширные рисунки и т.п.). Классический подход решения задачи поиска печати основан на комбинировании методов цветовой сегментации и анализа геометрических особенностей [1–2]. Однако такой подход обладает рядом недостатков. Во-первых, такой подход неприменим для поиска монохромных печатей, а также для работы с изображениями черно-белых ксерокопий документов. Во-вторых, анализ геометрических особенностей хорошо применим на сканах документов высокого разрешения, что накладывает существенные ограничения на применимость метода для анализа фотографий документов.

В рамках данной работы предложен метод поиска гербовых печатей на изображении паспорта гражданина РФ методом Виолы и Джонса [3]. Данный алгоритм изначально разрабатывался для поиска лиц на изображениях. Он рассматривает задачу детектирования как задачу бинарной классификации в каждой точке, то есть для каждого возможного сдвига на изображении при помощи предварительно обученного распознавателя (классификатора) проверяется гипотеза о присутствии искомого объекта в данном положении. В качестве пространства признаков использовались контурные признаки Хаара, предложенные в работе [4], а в качестве модели слабого классификатора – кусочно-постоянная функция.

Метод Виолы и Джонса относится к статистическим методом машинного обучения, что подразумевает наличие обучающего набора данных. В качестве таких данных использовались 100 изображений паспорта гражданина РФ, полученные с помощью сканера и малоразмерных камер смартфонов, из которых были сгенерированы как положительная, так и отрицательная выборки. В отрицательную выборку вошли области изображений, не содержащие печать целиком. Для обеспечения робастности к ориентации печати на документе была выполнена аугментация путем поворота каждого элемента положительной выборки на углы, кратные 5 градусам, в результате чего общий размер положительной выборки составил 7300 элементов.

Обученный в результате каскадный классификатор печати состоит из 5 уровней (сильных классификаторов) и содержит суммарно 148 слабых классификаторов.

Оценка качества работы обученного детектора печати выполнялась на тестовом наборе, содержащем 157 изображений паспортов граждан РФ, полученных также с помощью сканера и малоразмерных камер смартфонов. Ниже представлены результаты тестирования:

– число верно найденных печатей (true positive): 137;
– число ложных пропусков печатей (false negative): 11;
– число ложных детекций (false positive): 13.

Таким образом, обученный классификатор обладает следующими точностью (precision) и полнотой (recall): 0.91 и 0.93 соответственно. Значение F-меры равно 0.92.

На рис. 1 приведен пример работы обученного детектора гербовой печати на 2-й странице паспорта гражданина РФ.

В данной работе предложен метод поиска печати на изображении документа на основе обучения каскадного классификатора семейства Виолы и Джонса. Полученные экспериментальные данные продемонстрировали высокое качество работы представленного детектора в задаче поиска печати как на сканах, так и на фотографиях паспорта гражданина РФ. В дальнейшем планируется провести исследование по расширению класса документов.

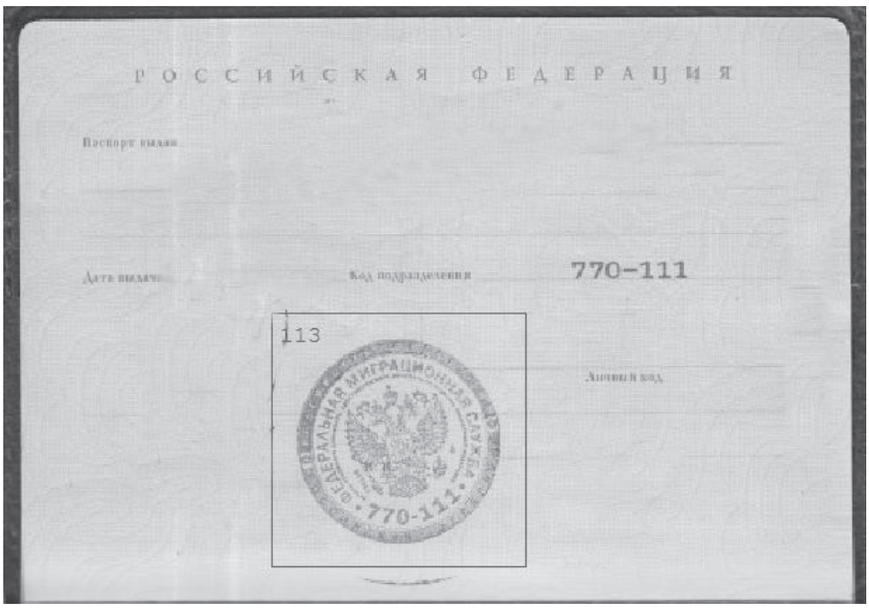


Рис. 1. Пример детектирования гербовой печати на странице паспорта гражданина РФ

Литература

1. *Micenkov´a B., van Beusekom J.* Stamp detection in color document images // Proc. of the 11th Int. Conf. on Document Analysis and Recognition. Beijing. China. 2011.
2. *Forczmański P., Frejlichowski D.* Robust Stamps Detection and Classification by Means of General Shape Analysis // Computer Vision and Graphics. ICCVG 2010. Lecture Notes in Computer Science. Springer, Berlin, Heidelberg, 2010. V. 6374.
3. *Viola P., Jones M.* Robust Real-time Object Detection // International Journal of Computer Vision. 2001.
4. *Котов А., Усилин С., Гладилин С., Николаев Д.* Построение устойчивых признаков детекции и классификации объектов, не обладающих характерными яркостными контрастами // Информационные технологии и вычислительные системы. № 1. 2014. С. 61–72.

УДК 004.932

Совмещение изображений максимизацией функционала резкости усредненного изображения

Д.В. Тропин[1], Д.П. Николаев[1,2], Д.В. Полевой[3,4], Д.Г. Слугин[4]

[1]Московский физико-технический институт (государственный университет)
[2]Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН
[3] Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС»
[4]Институт системного анализа ФИЦ ИУ РАН

Задача совмещения пары изображений (опорного и локального) включает в себя два функциональных параметра: модель оптического потока и критерий качества совмещения, поскольку решение данной задачи сводится к оценке оптического потока, переводящего локальное изображение в опорное в соответствии с критерием качества совмещения. Например, в алгоритме Лукаса–Канаде [1] модель оптического потока кусочно-сдвиговая, а критерий качества основан на условии минимальности невязки между опорным и преобразованным локальным изображениями:

$$\arg\min_p \left\| I_0 - T_p I_1 \right\|_2, \qquad (1)$$

где T_p – преобразование с параметрами p, I_0 – опорное изображение, I_1 – локальное изображение.

В рамках задачи совмещения изображений, содержащих плоский псевдоригидный объект, образ которого занимает все изображение, можно выписать глобальную аналитическую модель оптического потока. В зависимости от ограничений на взаимное расположение и движение объекта сцены и камеры в ней будут использоваться разные преобразования двумерной плоскости. Например, сдвиг в случае работы с данными, полученными со сканера, или проективное преобразование, возникающее при съемке с камеры мобильного устройства.

В данной работе критерием качества совмещения являлось условие максимизации функционала резкости:

$$\arg\max_p \left\| \vec{\nabla}(I_0 + T_p I_1) \right\|_2, \tag{2}$$

где T_p – преобразование с параметрами p, I_0 – опорное изображение, I_1 – локальное изображение.

На начальном этапе исследования глобально-сдвиговой модели оптического потока был реализован «наивный» алгоритм полного перебора сдвига $\vec{p}$. Вычислительная сложность этого алгоритма пропорциональна W^2H^2, где W и H – ширина и высота входных изображений. Однако «наивная» схема вычисления может быть усовершенствована. Преобразуем функционал резкости (2):

$$\begin{aligned}
\arg\max_p \left\| \vec{\nabla}(I_0 + T_p I_1) \right\|_2 &= \arg\max_p \left[\sum_v \left(\vec{\nabla} I_0(v) + T_p \vec{\nabla} I_1(v) \right)^2 \right] = \\
= \arg\max_p \left[\sum_v \left(\vec{\nabla} I_0(v) \right)^2 + 2\sum_v \vec{\nabla} I_0(v) \cdot T_p \vec{\nabla} I_1(v) + \sum_v \left(T_p \vec{\nabla} I_1(v) \right)^2 \right] &= \\
= \arg\max_p \sum_v \vec{\nabla} I_0(v) \cdot T_p \vec{\nabla} I_1(v),
\end{aligned} \tag{3}$$

где после последнего преобразования остается свертка $\vec{\nabla} I_0 * \vec{\nabla} I_1$, которая эффективно вычисляется с помощью теоремы о свертке и быстрого преобразования Фурье. Сложность такого алгоритма оказывается $O(WH \log_2(WH))$.

Для работы с более сложными преобразованиями предлагается ввести кусочно-сдвиговую аппроксимацию проективной модели оптического потока. Алгоритм оценки параметров проективного преобразования разделяется на несколько этапов: фрагментация опорного (рис. 1) и локального (рис. 2) изображений с малым шагом (рис. 3), определение сдвигов для соответствующих областей опорного и локального изображений в рамках глобально-сдвиговой модели (показаны стрелками на рис. 3), оценка параметров проективного преобразования по полученным сдвигам с помощью RANSAC (Random Sample Consensus) [2] (сдвиги, отвечающие результирующему проективному преобразованию, обозначены стрелками черного цвета на рис. 3). Результат усреднения опорного и преобразованного локального изображений приведен на рис. 4.

Предложенное решение задачи совмещения изображений показало хорошие результаты для ограниченных по величине проективных искажений и существенных изменений локальной освещенности. Дальнейшим развитием данной идеи является итеративная модификация алгоритма, основанного на кусочно-сдвиговой модели проективного оптического потока, которая будет обладать большей устойчивостью к сильным проективным искажениям.

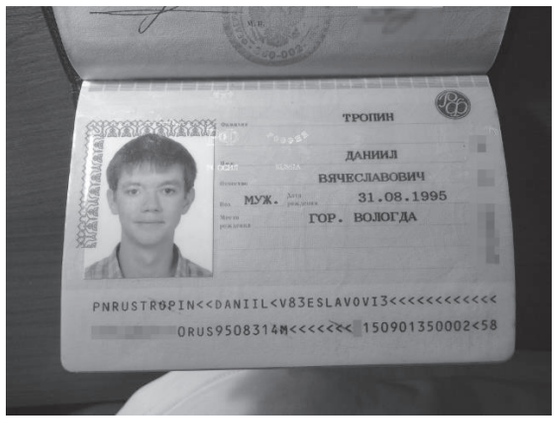


Рис. 1. Опорное изображение

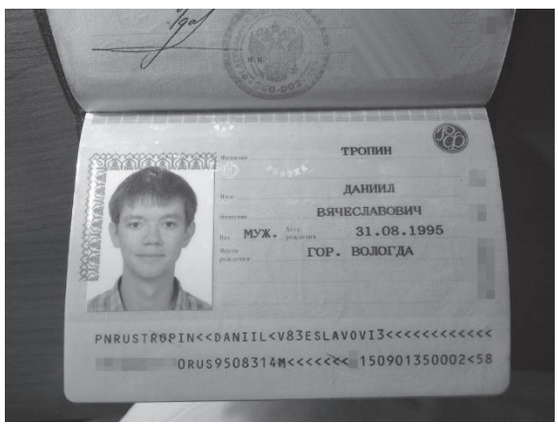


Рис. 2. Локальное изображение

Рис. 3. Найденные сдвиги на локальном изображении

Рис. 4. Совмещенное изображение

Литература

1. *Lucas B.D., Kanade T.* An iterative image registration technique with an application in stereo vision // Seventh International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI-81). Vancouver. 1981. P. 674–679.
2. *Fischler M.A., Bolles R.C.* Random sample consensus: a paradigm for model fitting with applications to image analysis and automated cartography // Communications of the ACM. 1981. V. 24. P. 38–395.

Секция концептуального анализа и проектирования

УДК 65.01

О подходе к автоматизации сквозного проектирования систем организационного управления

И.Р. Борисов

Московский физико-технический институт (государственный университет)
НП ЦИВТ КОНЦЕПТ

Концептуальное проектирование систем организационного управления (далее – КП СОУ) представляет собой методологию организации деятельности для решения задач в крупных сферах управления, в том числе государственного регулирования. КП СОУ позволяет преодолеть сложность предметной области и заключается в последовательном итеративном применении набора операций, технологий и автоматизированных средств [1]. Отличительной чертой такого проектирования является использование систем понятий как основы для моделирования предметной области и как структурообразующего элемента при создании проекта СОУ. Система понятия эксплицируется (описывается) в строгом математическом виде, что позволяет осуществлять контроль корректности разрабатываемой теории предметной области. Такое описание предметной области отличается отсутствием двусмысленностей, пробелов и логических противоречий, что позволяет вырабатывать прозрачные решения относительно организации деятельности в предметной области.

Автоматизация технологий КП СОУ ранее происходила дробно, обслуживая отдельные проектные этапы [2]. Полная автоматизация КП СОУ предполагает создание комплекса технологий, который представляет собой сложную интегрированную организационно-техническую систему.

С развитием информационных технологий в начале XXI века значительно расширились возможности информационной интеграции технических и организационных систем. Это позволяет поставить задачу использования современных технологических достижений для разработки автоматизированных средств проектирования, позволяющих быстро и безошибочно вносить изменения, не нарушая работоспособность.

Анализ научных работ позволил установить, что используемые технологии КП СОУ могут быть объединены в рамках одной информационной модели. Также показано, что математический аппарат, успешно решающий задачу формальной экспликации систем понятий, недостаточен для задач проектирования СОУ.

Выработанный подход в дальнейшем позволит на основании существующих наработок осуществить переход к созданию сквозной технологии КП СОУ. Под сквозной технологией понимается совокупность моделей, алгоритмов и автоматизированных средств, впервые объединенная общей схемой информационного взаимодействия, позволяющая получать проект СОУ для широкого спектра задач управления и вносить изменения в полученный проект целостным образом.

Подход заключается в последовательном решении следующих задач:

- исследование возможности автоматизации сквозного проектирования СОУ и установление связей между отдельными элементами методологии КП СОУ;
- разработка структуры комплексной информационной модели КС и алгоритма информационного взаимодействия технологий КП СОУ;
- разработка требований к формам экспликации и представления КС, охватывающих всю номенклатуру операций КП СОУ;
- создание инструментальных средств работы с КС в математической и текстовой формах представления.

При работе использованы концептуальный анализ, методы системного анализа, компьютерного моделирования, компьютерной лингвистики, нормографии, объектно-ориентированного проектирования программных систем.

Для создания программных модулей используется среда разработки Visual Studio 2015 и язык программирования C++. Отдельные модули технологии реализованы с использованием библиотек Python, средств автоматизации Microsoft Office и языка программирования Visual Basic for Applications.

Литература

1. *Кучкаров З.А*. Некоторые методические аспекты концептуализации предметных областей // Scientific Light. Wroclaw, 2017, № 5 Vl.1. С. 22–28. ISSN 0548-7110.
2. *Кононенко А.А., Кучкаров З.А.* [и др.]. Технология концептуального проектирования. М.: Концепт, 2008. 580 с.

УДК 16

Рефлексия освоения концептуального метода как диалектического

К.В. Федосеев

Московский физико-технический институт (государственный университет)
НП ЦИВТ КОНЦЕПТ

Концептуальное научно-техническое направление обладает почти 50-летней яркой историей, в ходе которой оно сложилось и развилось в мощную методологию. В её основе лежит работа с понятиями, причём осуществляющаяся с такой позиции, что все понятия существуют только в тесных взаимосвязанных отношениях с другими понятиями. Вследствие этого, одна из уникальных черт направления состоит в том, что единицами мышления методологов-концептуалистов являются не единичные понятия, а системы понятий.

В собирательном смысле концептуальный метод используется для решения проблем, состоящих в неадекватности применяемых понятийных схем. В общем виде такие проблемы могут быть сформулированы, как «люди не понимают, что (почему) …». При этом, несмотря на то, что в философии, логике, психологии, лингвистике накоплен огромный опыт исследования мышления «в понятиях», такое мышление, продуктами которого были бы целостные понятийные системы, пригодные для решения постоянно появляющихся новых задач, не приобщено человеческой культурой и практикой. Кроме того, глобально не осознаётся необходимость освоения такого типа мышления и выработки методов обучения ему.

Особый тип мышления уже определил целую культуру, которая передаётся и распространяется в концептуальном направлении. Однако, несмотря на то, что метод имеет инструментальный характер, и явно выделены шаги использования концептуального мышления в различных формах жёсткости и операциональности, автору данной работы представляется необходимым дальнейшее осознание освоения метода и его отражения в мышлении, понимание его возможностей и ограничений вообще и как встраиваемого в человеческий интеллект, вскрытие симптоматически существующих проблем. В частности, требуется рассмотрение особенностей мышления человека, приступающего к освоению метода в сложившейся среде его преподавания. Такой средой является Московский физико-технический институт (государственный институт) со свойственной ему интеллектуальной культурой.

Концептуалист при работе с очередной предметной областью для её понимания и объяснения находится в рефлексивной плоскости. Таким же образом для понимания процесса освоения метода необходимо выйти на следующий уровень рефлексии и рассмотреть шаги использования метода при его рефлексивном применении к предметным областям. Это позволит выявить методологические проблемы, так же, как выявляются

проблемы в предметных областях. В перспективе необходима концептуализация концептуального метода. В качестве эмпирических примеров могут выступить концептуалисты, на этапах своего становления в разной степени овладевшие методом и различными его формами.

В данной работе рассматривается диалектическая сторона концептуального метода. В общем виде анализ понятий – это и есть диалектика [1]. Действительно, рефлексия концептуального метода показывает, что в нём имеются черты метода диалектического. Однако не весь накопленный диалектикой опыт реализован в концептуальном методе. В связи с этим необходимо явно выделить в нём эти черты и подготовить направления развития метода и его освоения с использованием опыта диалектики.

Особое внимание уделяется тому факту, что понятия являются идеальными объектами и частью психического мира, значимые аспекты и свойства которого учитываются при анализе шагов освоения концептуального метода и проявления в них диалектики.

С этой точки зрения в концептуальном методе также раскрывается использование методов, выработанных в философии и логике на основе диалектики. В частности, вскрывается использование философского метода восхождения от абстрактного к конкретному, чьей инженерной версией является концептуальный метод. Кроме того, в явном виде показывается использование формальной логики и содержательной, в том числе содержательно-генетической, сопоставляется концептуальный метод с гегелевским понятием «метод».

Работа выступает как подготовительная для последующего синтеза данной точки зрения с точкой зрения на концептуальный метод как позитивистский, рассмотрения становления концептуалиста как этапа в развитии личности в его отношениях с другими этапами, а также использования концептуального метода для инструментализации логических и философских методов и приведения их к практике.

Литература

1. *Никаноров С.П.* Концептуальный анализ – ключ к инструментализации диалектической методологии. – М.: Концепт, 1999. 64 с.
2. *Малахов А.И.* Основания интеллектуальной культуры человечества: история зарождения натуралистического мышления. – М.: Концепт, 2010. 132 с.
3. *Гегель Г.В.Ф.* Энциклопедия философских наук. Т. 1. Наука логики. – М.: Мысль, 1974. 452 с. (Филос.Наследие. Т. 63).
4. *Щедровицкий Г.П.* О различии исходных понятий «формальной» и «содержательной» логик // Методология и логика наук. Ученые зап. Том. ун-та. Томск, 1962, № 41.
5. *Щедровицкий Г.П.* О принципах анализа объективной структуры мыслительной деятельности на основе понятий содержательно-генетической логики // Вопросы психологии. 1964, № 2.
6. *Ильенков Э.В.* Понимание абстрактного и конкретного в диалектике и формальной логике / Диалектика и логика. Формы мышления. М., Издательство Академии наук, 1962. С. 208.
7. *Ильенков Э.В.* Что же такое личность? // «С чего начинается личность». – М., 1984, С. 319-358.
8. *Кучкаров З.А.* Методы концептуального анализа и синтеза в теоретическом исследовании и проектировании социально-экономических систем / учебное пособие. В 2-х т. Т. 1. Методология концептуального анализа и синтеза. Методология концептуального проектирования систем организационного управления. Организационное консультирование. 3-е издание, дополненное и исправленное. – М.: Концепт, 2008. 264 с.
9. *Пономарёв И.Н.* Введение в математическую логику и роды структур: учебное пособие. – М.: МФТИ, 2007. 240 с.

УДК 16

Рефлексия освоения концептуального метода как позитивистского

И.В. Емельянов

Московский физико-технический институт (государственный университет)
НП ЦИВТ КОНЦЕПТ

Концептуальное научно-техническое направление обладает почти 50-летней яркой историей, в ходе которой оно сложилось и развилось в мощную методологию. В её основе лежит работа с понятиями, причём осуществляющаяся с такой позиции, что все понятия существуют только в тесных взаимосвязанных отношениях с другими понятиями. Вследствие этого, одна из уникальных черт направления состоит в том, что единицами мышления методологов-концептуалистов являются не единичные понятия, а системы понятий.

По мере развития методологических направлений в современной науке онтологию (модель реальности) стали понимать как произвольно полагаемую исследователем. Ученый стал пониматься не как абсолютно пассивная и лишь наблюдающая сторона, а как явно самоопределяющийся центр в выборе предмета исследования. Постулаты онтологии больше не рассматриваются, как непосредственные свойства самой реальности, теперь они задаются исследователем.

Постулирование любой онтологии почти всегда происходит в рамках онтологии объективного научного метода. То есть постулирование происходит как конкретизация самой абстрактной онтологии – «объективной реальности». Но она является не самой реальностью, а ее моделью.

Таким образом, научные модели постулируются как форма отнологии, то есть они являются концептуальными моделями. Поскольку исследователь может иметь дело не самой реальностью, а лишь с ее моделью, которую он «приносит с собой», то объект исследования является конструктом исследователя, а не объективно существующей частью реальности. То есть свойства реальности можно изучать только по свойствам используемых для ее изучения моделей.

Каждая наука имеет свою онтологию, проблематизируя ее, она получает свой предмет исследования. А к предмету исследования прилагают методы и модели данной науки.

Таким образом, исследователь пользуется онтологией – системой из категорий – и интерпретирует ее на реальные жизненные ситуации. При этом используется философский метод восхождения от абстрактного к конкретному, который может быть описан методом концептуального анализа. В данном докладе рассматривается эта сторона концептуального анализа – использование моделей для исследования реальности с последующим их дополнением и расширением. Эта методика подробно представлена в философском направлении – позитивизме, в котором знания о реальности строго организованы и операционализируемы.

Позитивизм концептуального метода воплощается в его способности формально выражать восхождение от абстрактного к конкретному при использовании онтологий научных дисциплин при исследовании реальности. Сам концептуальный метод богат модельными конструктами, такими, как сеть процессов, целенаправленная система, целеустремленная система, функционально-методное моделирование и другие инструменты системного анализа.

Доклад выступает как подготовительная работа для последующего синтеза данной точки зрения с точкой зрения на концептуальный метод как диалектический, рассмотрения становления концептуалиста как этапа в развитии личности в его отношениях с другими этапами, а также использования концептуального метода для инструментализации логических и философских методов и приведения их к практике.

Литература

1. *Никаноров С.П.* Концептуальный анализ – ключ к инструментализации диалектической методологии. – М.: Концепт, 1999. 64 с.
2. *Малахов А.И.* Основания интеллектуальной культуры человечества: история зарождения натуралистического мышления. – М.: Концепт, 2010. 132 с.
3. *Гегель Г.В.Ф.* Энциклопедия философских наук. Т. 1. Наука логики. – М.: Мысль, 1974. 452 с. (Филос.Наследие. Т. 63).
4. *Щедровицкий Г.П.* О различии исходных понятий «формальной» и «содержательной» логик // Методология и логика наук. Ученые зап. Том. ун-та. Томск, 1962, № 41.
5. *Щедровицкий Г.П.* О принципах анализа объективной структуры мыслительной деятельности на основе понятий содержательно-генетической логики // Вопросы психологии. 1964, № 2.
6. *Ильенков Э.В.* Понимание абстрактного и конкретного в диалектике и формальной логике / Диалектика и логика. Формы мышления. М., Издательство Академии наук, 1962. С. 208.
7. *Ильенков Э.В.* Что же такое личность? // «С чего начинается личность». – М., 1984, С. 319-358.
8. *Кучкаров З.А.* Методы концептуального анализа и синтеза в теоретическом исследовании и проектировании социально-экономических систем / учебное пособие. В 2-х т. Т. 1. Методология концептуального анализа и синтеза. Методология концептуального проектирования систем организационного управления. Организационное консультирование. 3-е издание, дополненное и исправленное. – М.: Концепт, 2008. 264 с.
9. *Пономарёв И.Н.* Введение в математическую логику и роды структур: учебное пособие. – М.: МФТИ, 2007. 240 с.

УДК 519.816

Концептуализация и построение разнообразия механизмов выбора путем голосования

Д.Ф. Идрисов

Московский физико-технический институт (государственный университет)
НП ЦИВТ КОНЦЕПТ

Принятие решения в жизни человека связано с выбором в некотором смысле «наилучшего» варианта из множества альтернатив. Интерес к проблемам теории выбора сохраняется по нескольким причинам. Во-первых, значительная часть задач теории управления и прикладной математики сводится к выбору, основанному на каком-либо критерии оптимальности. Во-вторых, во многих экономических моделях и моделях социальных явлений используются предположения о том, каким образом осуществляется выбор индивидуумом или коллективом.

Интересны не только прикладные задачи и методы, но и фундаментальные свойства. Поэтому основой исследования станет концептуальная схема «Абстрактный выбор», конкретизация которой позволит описать многообразие процедур и механизмов голосования.

Особый интерес представляют исследования процедур голосования, лежащих в основе коллективного принятия решения. Понимание свойств таких процедур позволит выявить основные нюансы избирательных систем, в частности, мажоритарной, пропорциональной и смешанной. При коллективном голосовании можно проследить явления, когда, вопреки интуиции, разумные действия голосующих могут приводить к парадоксальным результатам. Самым известным примером является парадокс Эрроу, доказывающий «невозможность демократии» при коллективном голосовании.

Таким образом, производится попытка переосмыслить классическую аксиоматику рационального выбора, которая не универсальна, а представляет лишь ограниченную часть общечеловеческих оснований выбора, на которых могут строиться различные механизмы выбора.

Литература

1. *Кучкаров З.А.* Методы концептуального анализа и синтеза в теоретическом исследовании и проектировании социально-экономических систем: учебное пособие. В 2-х т. Т. 1. Методология концептуального анализа и синтеза. Методология концептуального проектирования систем организационного управления. Организационное консультирование. 3-е издание, дополненное и исправленное. – М.: Концепт, 2008. 264 с.
2. *Пономарёв И.Н.* Введение в математическую логику и роды структур. – М.: МФТИ, 2007. 240 с.
3. *Айзерман М.А., Алескеров Ф.Т.* Выбор вариантов: основы теории. – М.: Наука, 1990. 236 с.
4. *Айзерман М.А.* Динамические аспекты теории голосования (обзор проблемы) // Автомат. и телемех. 1981. Вып. 12. С. 103–118.

УДК 336.74

Проблема понимания сущности криптовалют и их места в современной экономике

А.И. Никитин

Московский физико-технический институт (государственный университет)
НП ЦИВТ КОНЦЕПТ

Сегодня все чаще мы слышим такие слова, как *криптовалюта*, *цифровые деньги* и *блокчейн*. Ещё несколько лет назад подобным лексиконом пользовался очень узкий круг людей – математики, программисты, специалисты по платежным и коммуникационным системам, шифровальщики из банков и спецслужб. Сегодня о криптовалютах и биткойнах рассуждают уже руководители центральных банков, международных финансовых организаций и политические деятели высшего уровня.

Все перечисленные выше термины описывают новации, которые захватили мир финансов XXI века. Речь идет о новейших «альтернативных» операциях и инструментах финансового рынка. Криптовалюта в понимании тех, кто её создаёт и пользуется ею, – это новый вид денег, который существует параллельно с традиционными деньгами (наличными и безналичными), но существенно от них отличается.

Правовой статус криптовалют в большинстве стран до сих пор не определен. Есть страны, которые без всяких оговорок запрещают криптовалюты, но среди них нет ведущих экономически развитых стран. В основном это небольшие государства (Боливия, Эквадор). В России отношение к данному явлению крайне сдержанное. У государства еще нет ответа для самого себя и для своих граждан на вопрос о том, что же такое криптовалюта. А пока этому явлению не будет придан легальный статус, говорить о работе в данной сфере преждевременно.

В связи с этим в последнее время государствами активно предпринимаются попытки урегулировать данную сферу, но юристы, работающие над задачей определить это явление через старые, имеющиеся у них законы, акты и определения, сталкиваются с большими трудностями. Они с удивлением узнают, что к *криптомонетам* прикладывается *смарт-контракт*, который выполняется сам по себе. Монета разделяется на две части: одна уходит тому, кто выполнял работу, а другая — агенту по привлечению первого, и это его комиссия за труд. В этот момент все, что знал юрист, рушится. Потому что он не может описать то, что произошло, никакими существующими терминами, для этого требуется новое определение. Но так как они опираются на существующую регуляторную практику, придумать это определение им очень сложно. Из того, что есть сейчас, оно не выводится, поэтому они пытаются найти максимально близкое соответствие, например – еще одну валюту. Так поступить можно, но это означает, что государство не понимает, с чем имеет дело.

Литература

1. *Satoshi N.* Bitcoin: A Peer-to-Peer Electronic Cash System. 2009. https://bitcoin.org/bitcoin.pdf

2. *Кучкаров З.А.* Методы концептуального анализа и синтеза в теоретическом исследовании и проектировании социально-экономических систем: учебное пособие. В 2-х томах. Т. 1. Методология концептуального анализа и синтеза. Методология концептуального проектирования систем организационного управления. Организационное консультирование. 3-е изд., дополненное и исправленное. М.: Концепт, 2008. 264 с.

УДК 336.7

Цифровая экономика. Блокчейн, как инструмент устранения посредников в сделках

И.А. Самсонов

Московский физико-технический институт (государственный университет)
НП ЦИВТ КОНЦЕПТ

Современная система, которая используется для обмена материальных и нематериальных активов, была придумана еще во времена эпохи Ренессанса, когда банки заняли доминирующее положение в денежно-экономической сфере Европы. Они сделались официальными посредниками, гарантирующими прозрачность различных сделок с активами.

Соединив большое количество долгов и долговых требований в едином учетном реестре одного банка, банкиры имплементировали централизованную систему взаимного доверия в общественный строй. По итогу, банки смогли получить мощнейший инструмент, создав централизованную систему доверия и поставив себя в ее центр – я считаю, что, в итоге они стали даже чрезмерно могущественными. Регистрационные книги стали первостепенным инструментом контроля, который позволяет отслеживать долговые обязательства и платежи между субъектами. У любого, кто хотел получить или отправлять деньги, был единственный выход - сотрудничать с банками.

Современная глобальная экономическая система, где большое количество субъектов должны друг другу, попросту рухнет, если посредники прекратят свою деятельность. И тут в 2009 году начинает функционировать первая публичная версия технологии способной заменить традиционных посредников. Гениальность этой технологии заключается в следующем - устраняется участие посредника, блокчейн имеет необходимые инструменты, чтобы люди незнакомые друг с другом могли вести бизнес. Это получается в следствии того, что главная функция ведения учетных регистров переходит от финансовых учреждений с единым центром, в сеть децентрализованных компьютеров, которые формируют распределенную схему доверия, неподконтрольных какому-то единому субъекту. В своей сути блокчейн базируется на идее безопасного и открытого учетного регистра, единого для общего пользования и постоянно проходит контроль специализированной вычислительной техникой, и эти аппараты функционируют автономно друг от друга.

Теоретически это означает, что нам больше не нужны финансовые институты и другие традиционные посредники, чтобы обеспечить достаточный уровень доверия между субъектами сделки. Блокчейн – это учетный регистр, сформированный в распределенной сети. По сути, он устраняет потребность в участии третьего доверенного лица.

За счет ухода от посредников и их комиссионных сборов, появляется возможность сократить издержки на проведение транзакций, а также предотвращает коррупцию, которая существует в посреднических и политических структурах. Масштабы влияния данной технологией распространяются гораздо шире сферы денежного оборота и платежей. По своей сути блокчейн представляет собой форму социального самоорганизующегося объекта, способного передать контроль денежно-информационных потоков от могущественной привилегированной касты обычным людям, которым он и должно принадлежать право распоряжаться личными финансовыми и интеллектуальными активами.

Для более глубокого понимания и дополнительного развития технологии с помощью методов концептуального анализа и проектирования будут определена сущность технологии блокчейн. А так же установлено, во-первых как работает новая система с исключенным посредником в лице банков и других сторонних организаций, а во-вторых кто ее участники и каковы их функции.

Литература

1. *Майкл Кейси* Эпоха криптовалют. Как биткоин и блокчейн меняют мировой экономический порядок - Манн, Иванов и Фербер, 2015. 328 с.
2. *Кучкаров З. А.* Методы концептуального анализа и синтеза в теоретическом исследовании и проектировании социально-экономических систем / Учебное пособие. В 2-х т. – Т. 1. Методология концептуального анализа и синтеза. Методология концептуального проектирования систем организационного управления. Организационное консультирование. 3-е издание, дополненное и исправленное. – М.: Концепт, 2008. 264 с.

Секция наукоемких проектов и инноваций

УДК 004.93'12

Проверка применимости нейросетей для распознавания рентгеновских изображений с интроскопов

П.И. Ахтямов, А.Н. Юшманов, Н.А. Зинов, И.В. Сошилов

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Задачи детектирования и сегментирования объектов применяются в различных областях Computer Vision (детектирование злокачественных опухолей [1], детектирование дорожных знаков [2], детектирование людей на улице [3]). В данной работе рассматривается вопрос о возможности применения задачи детектирования для нахождения опасных объектов (пистолеты, холодное оружие, гранаты и пр.). Для задачи обнаружения запрещенных к провозу объектов важным критерием является вероятность пропуска (к примеру, не найден особо опасный предмет в чемодане), кроме того, необходимо снизить количество ложных срабатываний, поэтому основной метрикой для данной задачи является F1-score.

В данной работе рассматривается задача распознавания объектов на рентгеновских снимках, полученных с интроскопа. Изображения содержат 2 черно-белых слоя, полученных на разных энергиях, а также цветное изображение с условным окрашиванием в зависимости от материала. Поскольку датасетов с изображениями опасных объектов (пистолеты, холодное оружие) в достаточном объеме не представлено, то в качестве целевых объектов были выбраны ботинки и стеклянные бутылки, так как объекты этих классов сложно различимы на изображении. В ходе ручной разметки было получено 1000 изображений, на которых отмечены прямоугольные границы для 1350 бутылок и 1250 ботинок (в итоге 2600 объектов).

Для решения задачи классификации полученные в ходе разметки прямоугольники сжимаются до размера 64×64 пикселя с добавлением случайных прямоугольников, не содержащих целевых объектов в равной пропорции. В ходе работы проведены эксперименты по аугментации исходных прямоугольников. Для этого использовались следующие подходы:

- D4-group аугментация (движения прямоугольника, сохраняющие вершины прямоугольника) для тренировочного датасета:
- D4-group аугментация для тестовой части датасета, где итоговый результат классификации может быть получен двумя способами:
  1) максимум по средним вероятности по предсказаниям;
  2) голосование методом большинства по восьми результатам предсказания.

  В итоге получены следующие результаты:
- Аугментация тренировочного датасета дает прирост 2% по метрике F1-score.
- Аугментация тестового датасета дает дополнительный прирост 2% по метрике F1-score по каждому из результирующих способов выбора предсказания.

В ходе данной работы проводились эксперименты по обучению нейронных сетей с использованием разного набора слоев исходного изображения. В результатах работы описывается, что при обучении на двухслойных черно-белых картинках и псевдо-окрашенных картинках наблюдается незначительная разница в качестве классификации.

Для решения задачи проводилась серия экспериментов по использованию state-of-the-art сетей для детектирования размеченных объектов для решения поставленной задачи. Для исследования проводилось дообучение предобученных ранее сетей tiny-YOLO [4] (с дополнительным уменьшением вдвое числа каналов на каждом внутреннем слое с целью борьбы с переобучением) и FasterRCNN [5].

В конце работы дается вывод о применимости данных сетей для распознавания рентгеновских снимков, при условии увеличения размера датасета до объема не менее 100 тысяч изображений с опасными объектами.

Литература

1. *Ronneberger O., Fischer P., Brox T.* U-Net: Convolutional Networks for Biomedical Image Segmentation // Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention (MICCAI), Springer, LNCS. 2015. V. 9351. P. 234–241.
2. *Rongqiang Q., Qianyu L., Yong Y.* Road Surface Traffic Sign Detection with Hybrid Region Proposal and Fast R-CNN // 12th International Conference on Natural Computation, Fuzzy Systems and Knowledge Discovery. 2016. P. 555–559.
3. *Stewart R., Andriluka M., Ng A.* // The IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). 2016. P. 2325–2333.
4. *Redmon, J.* [et al.]. You only look once: Unified, real-time object detection. // The IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). 2016. P. 779–788.
5. *Girshick R.* [et al.]. Faster R-CNN: Towards Real-Time Object Detection with Region Proposal Networks // NIPS'15 Proceedings of the 28th International Conference on Neural Information Processing Systems. V. 1. 2015. P. 91–99.

УДК 004.93

Алгоритмы компьютерной обработки и изучения импульсно-тональных сигналов афалин

В.В. Слюсарев, Н.А. Зинов, Н.В. Волков, П.С. Кошкин, Е.С. Ракчеев, И.В. Пилюгин, Е.А. Адаменко, Е.Л. Ухлинова

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Природа «речи дельфинов» – импульсно-тональных сигналов – интересует учёных с середины XX века и остаётся неразгаданной до сих пор. Использование технологий компьютерной обработки сигналов и машинного обучения может помочь в проверке гипотезы о наличии у афалин языка, разделяемого на элементарные сигналы – «слова». В данной работе рассматриваются и сравниваются различные компьютерные алгоритмы и технологии, решающие ряд прикладных задач, возникающих при исследовании языка дельфинов: нахождение импульсно-тональных сигналов в аудиозаписи, измерение структуры сигнала, отображение в пространство признаков и поиск похожих сигналов.

Методы цифровой обработки основаны на представлении импульсно-тональных сигналов как коротких гармонических колебаний плавно меняющейся частоты, разделённых паузами [1]. Известный вид преобразования Фурье такого сигнала [2] позволяет эффективно обрабатывать сигналы в частотной области. Для распознавания сигналов использовались следующие методы: сканирование дисперсии спектра, поиск периодических структур с использованием второго преобразования Фурье, нейронные сети различных архитектур: FCNN (Fully-connected neural network), RNN (Recurrent neural network), CNN (Convolutional neural network). В табл. 1 отражены метрики качества предсказания, осуществляемого нейронной сетью, обученной на различных наборах данных. Для измерения структуры сигналов рассмотрены алгоритмы, основанные на построении бинарной спектрограммы, вычислении бинарной эрозии [3], применении фильтра Калмана [4] к спектру сигнала. На рис. 1 показаны примеры синтеза спектральных линий, распознанных разными версиями алгоритма. В качестве алгоритма отображения в пространство признаков (embedding) использовались нейронные сети-автоэнкодеры [5].

В работе использовались аудиозаписи Лаборатории морских млекопитающих Института океанологии им. П.П. Ширшова Российской академии наук, полученные в ходе экспериментов с дельфинами [6].

Результаты представлены в виде сравнительных таблиц эффективности и некоторых примеров работы наиболее эффективных алгоритмов.

Таблица 1.

Метрики качества предсказаний нейронной сети для распознавания сигналов, обученной на различных наборах данных

Порог доли импульсно-тонального сигнала в обучающей выборке	Precision	Recall
0.6	0.19	0.74
0.7	0.88	0.35
0.8	0.81	0.47

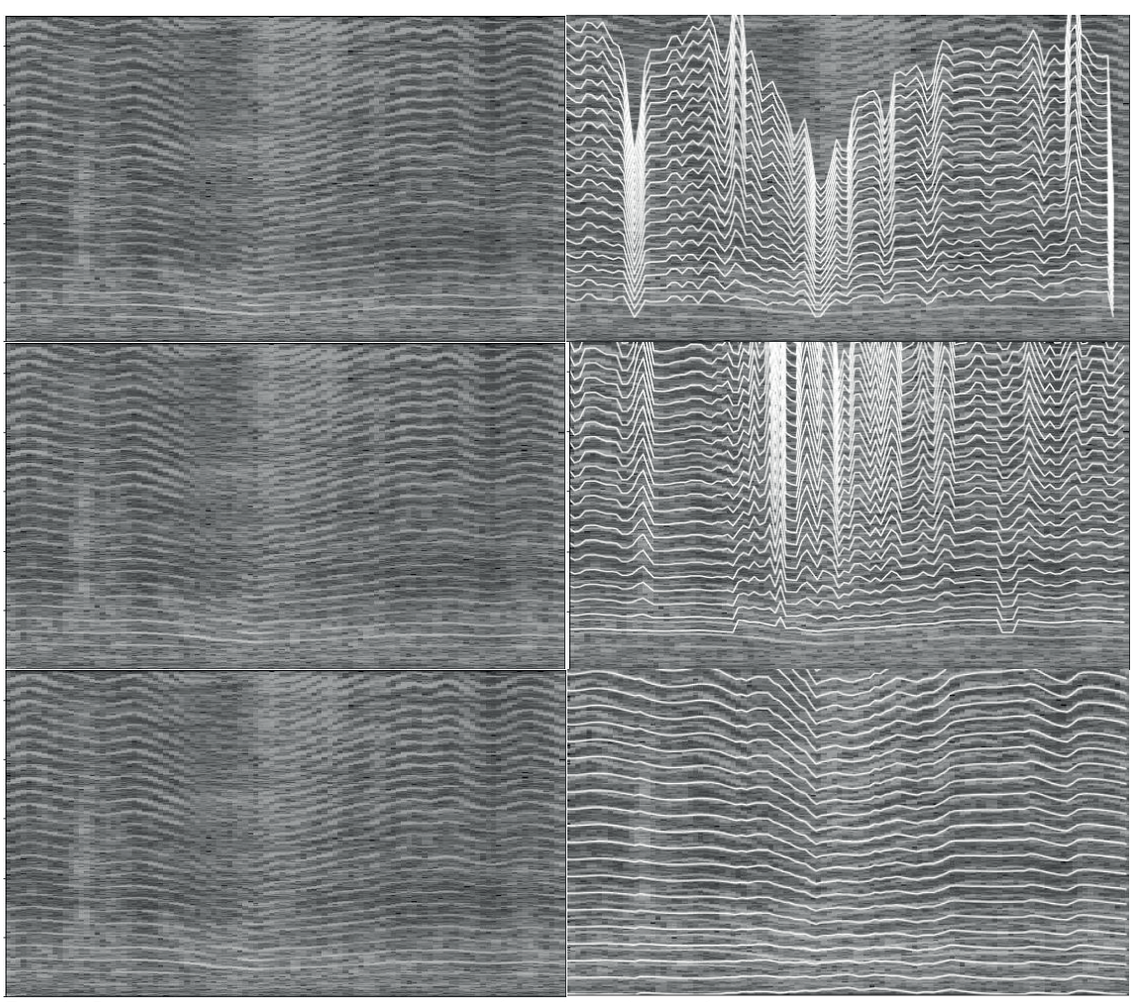


Рис. 1. Фрагмент спектрограммы речи дельфина (слева) и графики синтезированных спектральных линий, распознанных различными версиями алгоритма (белые линии, справа)

Литература

1. *Caldwell M.C., Caldwell, D.K., Tyack P.L.* Review of the signature-whistle-hypothesis for the Atlantic bottlenose dolphin, Tursiops truncatus. The Bottlenose Dolphin (Ed. by S. Leatherwood & R. R. Reeves). 1990. P. 199–234.
2. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. 3. Электричество. – М.: Наука, 1983. 655 с.
3. *Serra J.* Image Analysis and Mathematical Morphology. Academic Press, 1982. 610 c.
4. *Kalman R.E.* A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems // Journal of Basic Engineering. 1960. V. 82, N 1. P. 35–45.
5. *Bengio Y.* Learning Deep Architectures for AI // Foundations and Trends® in Machine Learning. 2009. V. 2, N 1. P. 1–127.
6. *Агафонов А.В., Панова Е.М.* Индивидуальный репертуар тональных (свистовых) сигналов афалин, содержащихся в дельфинарии в условиях относительной изоляции // Известия РАН. Серия биологическая. № 5. С. 509–520.

УДК 004.81

Адаптация топологии и параметров обучения традиционных нейронных сетей для создания спайковых нейронных сетей

А.И. Кисленко

Московский физико-технический институт (государственный университет)

В работе исследуются различные подходы к созданию спайковых нейронных сетей на основе существующих архитектур традиционных нейронных сетей. Возможность такого создания спайковых сетей может позволить использовать их аппаратные реализации, отличающиеся высокими энергоэффективностью и быстродействием, для решения хорошо изученных задач машинного обучения.

Несмотря на существование различных подходов к обучению спайковых сетей, таких как SpikeProp и STDP [1], эта задача является трудоёмкой и для больших сетей занимает длительное время. При этом спайковые сети представляют как теоретический, так и практический интерес, и чтобы сократить время, затрачиваемое на их обучение, можно использовать уже существующие модели нейронных сетей, получая таким образом их спайковые аналоги, способные решать ту же задачу.

При составлении результирующей конфигурации спайковой нейронной сети также следует учитывать, что она устроена согласно Spike Response Model, которая, в свою очередь, имеет свой набор параметров, которые могут меняться в зависимости от задачи. В то же время спайковые сети могут иметь различные стратегии кодирования входных данных и декодирования последовательностей импульсов, исходящих из сети.

Поиск и проверка алгоритма адаптации исходной сети выполняется с использованием свёрточных нейронных сетей для классификации и детектирования объектов на изображении, которые берутся в качестве исходных.

В качестве результатов работы будут представлены:

1. Алгоритм изменения топологии сети при переходе от традиционной архитектуры к спайковой.
2. Алгоритм изменения весов связей в полносвязных и свёрточных слоях исходной сети при переходе от традиционной архитектуры к спайковой.
3. Алгоритм изменения процедуры субдискретизации и свёртки при переходе от традиционной архитектуры к спайковой.

Литература

1. *Paugam-Moisy H., Bohte S.* Computing with spiking neuron networks // Handbook of natural computing. Springer Berlin Heidelberg, 2012. P. 335–376.
2. *Gerstner W.* Spiking neurons. MIT-press, 1998. N LCN-CHAPTER-1998-004. P. 3–53.

3. *Ponulak F., Kasinski A.* Introduction to spiking neural networks: Information processing, learning and applications // Acta neurobiologiae experimentalis. 2011. T. 4. N 71.
4. *Booij O.* Temporal pattern classification using spiking neural networks // Unpublished master's thesis, University of Amsterdam (August 2004). 2004.

УДК 004.021

Анализ методов кластеризации произвольных текстовых коллекций

Н.И. Кривчанский, А.А. Жарков, И.С. Гавенко, Д.С. Зверева, М.Д. Ивахненко, И.В. Холопов, П.М Воропаев, О.А. Сопильняк,С.В. Вручтель, Е.А. Шишкин, Е.В. Бояркина

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Цель работы – нахождение механизма кластеризации текстовых документов, который стабильно показывает хорошее качество без дополнительной информации о задаче.

В ходе исследования был проведен сравнительный анализ качества работы различных методов кластеризации на коллекциях различной тематики и на разных языках. Для предобработки текстов сравнивалось применение лемматизации и стеммизации. Затем документы векторизовывались с помощью tf-idf или же эмбеддингов, после чего уменьшалась размерность с помощью SVD-разложения и затем уже применялся один из базовых алгоритмов.

Рассматривались следующие алгоритмы: BIRCH, Affinity Propagation, иерархические методы, Spectral clustering, K-means и их комбинации.

Тестирование проводилось с подборкой оптимальных параметров, с использованием и без использования различных эмбеддингов, с разной предобработкой данных.

За меру качества была взята *V*-мера, которая является адаптацией F-меры под анализ кластеров и вычисляется следующим образом.

$$V_\beta = (1+\beta)\frac{hc}{\beta h + c},$$

где *h* – мера однородности кластера, *c* – мера полноты кластера.

По результатам тестирования стабильно одни из лучших результатов показывали обычная иерархическая кластеризация и иерархия, построенная уже на результатах алгоритма Affinity Propagation (Affinity Propagation + Hierarchy). Но вторая комбинация несколько проигрывает по качеству и существенно проигрывает по скорости работы.

Были проведены тесты с использованием эмбеддингов, однако существенного улучшения качества они не дают.

Полученный алгоритм:

- Определение языка.
- Нормализация слов: русский язык – лемматизация, остальные языки – стеммизация.
- Извлечение признаков на основе tf-idf.
- Уменьшение размерности пространства признаков при помощи SVD.
- Применение собственно алгоритма кластеризации (иерархия).

Таким образом, найден более-менее стабильный алгоритм, позволяющий получить хороший результат без дополнительной информации о задаче.

По результатам исследования был создан web-сервис, на котором можно протестировать предложенную технологию.

Таблица 1. Средняя V-мера иерархической кластеризации на различных коллекциях

Корпоративные документы ABBYY	0.69
Российская государственная библиотека	0.79
BBC news	0.60
Brazilian news	0.82

Литература

1. *Akter R., Chung Y.* An Evolutionary Approach for Document Clustering // International Conderence on Electronic Engineering and Computer Science, 2013.
2. *Issal C., Ebbesson M*. Document Clustering // Master of Science Thesis, 2010.
3. *Lonnberg M., Yregard L.* Large Scale news article clustering // Master of Science Thesis, 2013.
4. *Steinbach M., Karypis G., Kumar V.* Comparison of Document Clustering Techniques // KDD Workshop on Text Mining.
5. *Campello R.J.G.B., Moulavi D., Zimek A., Sander J.* A framework for semi-supervised and unsupervised optimal extraction of clusterd from hierarchies // Data Mining and Knowledge Discovery, 2013.
6. *Greene D., Cunnigham P.* Practical Solution to the Problem of Diagonal Dominance in Kernel Document Clustering // International Conference on Machine Learning, 2006.

УДК 658.147.2

Феномен «Долина смерти» и особенности перехода инновационного проекта через эту стадию

Д.А. Шафигуллин

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Наукоёмкие проекты, ставящие перед собой цель коммерциализации на рынке товаров и услуг (далее, для краткости, продукт), испытывают проверку периодом особо сильного финансового голода в промежуток между принятием решения разработать продукт и получением инвестиций или заёмного капитала. В этот промежуток, называемый «Долиной смерти», который длится от полугода до трёх лет, происходит закрытие до половины проектов. Остальная часть закрывается в течение следующих 5–7 лет, и лишь 10% от начавших разработку инновационных проектов доживает до отметки в десятилетие [1].

Для наукоёмких технологических проектов характерны признаки высокой степени неопределённости окружающей среды. Перед проектом возникают сложности, основными из которых являются: отсутствие гарантии в привлекательности продукта, отсутствие достаточного капитала для обеспечения долгосрочных кассовых разрывов, наличие конфликтов внутри команды проекта, это в свою очередь приводит к упадку духа основателей [2], что только увеличивает срок разработки и уменьшает темпы работы.

Таким образом, стратегия пересечения «Долины смерти» сводится к: поиску инвестиций в необходимом количестве, определению и привлечению платёжеспособной аудитории, в достаточном для проверки гипотез, количестве, решению проблем формирующейся команды до их возникновения – это 7 параметров на раннем этапе проекта, когда продукта ещё нет [3].

В работе рассматриваются 7 взаимосвязанных тактик, образующих стратегию для пересечения наиболее опасного для проекта этапа. Эти же правила применимы на всем жизненном пути проекта и их соблюдение позволит повысить вероятность достижения основателями успеха, т.к. развитие проекта происходит закономерно, циклично, вновь и вновь наращивая капитализацию и привлекательность для инвестирования, переходя на новые уровни технологического развития. В общем виде эти этапы можно описать как: идея, прототип, готовый продукт, масштабирование, выход. В свою очередь, каждый из этапов можно разбить минимум на 3–4 стадии, каждая из которых, по сути, является вехой.

Преодоление вышеуказанных трудностей ставит перед собой цель – достижение итеративного экономического успеха – увеличение капитализации. Эта метрика является, с одной стороны, достаточно субъективной (у разных экономических экспертов при независимой оценке результат всегда будет разным), с другой стороны, позволяет комплексно оценить успешность команды основателей.

В ходе работы были выявлены наиболее эффективные и доступные молодому инновационному проекту тактики (и их особенности) для преодоления «Долины смерти»,

метрики для отслеживания состояния проекта, «маркеры», сигнализирующие о необходимых изменениях.

Литература

1. *Коршунов И.А., Гапонова О.С.* Анализ причин гибели и долгосрочные стратегии развития стартапов // Экономический анализ: теория и практика. – 2014. 46 (397). С.38–49.
2. *Иноземцева Е.* Стартап без купюр. 2014. С.50–62.
3. *Dr. Markham S.K.* [*et al.*]. Traversing The Valley of Death. 2014. P. 140.

Секция высшей математики

УДК 517.95

Резонансы линейных дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами и многомерным временем

В.В. Мартынов, В.В. Мартынов (мл.)

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Ограничимся ДУ второго порядка, с классическими производными, со скалярными вещественными функциями, аргументами и параметрами. Отправным является следующий факт для ОДУ.

Определение 1. *Дифференциальное выражение* (далее ДВ)

$$e\left[u(t)\right] = au''+bu'+cu, (a \neq 0, t \in (\alpha, \beta), -\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty), \quad (1)$$

допускает непрерывный гармонический резонанс (далее НГР) (мы опускаем здесь случай «разрывного гармонического резонанса», связанного с уравнением $e\left[u(t)\right] = \text{signum}(\sin(\Omega_0 t))$), если неоднородное уравнение

$$e\left[u(t)\right] = \sin(\Omega_0 t), \quad (2)$$

имеет решение $A_o t\cos(\Omega_0 t)$, (при некоторых $\Omega_0 \neq 0, A_0 \neq 0$) .

Утверждение 1. ДВ (1) допускает НГР, лишь если $ac > 0$ и $b = 0$. Причем тогда $\Omega_0 = \pm\sqrt{c/a}$ *и* $A_0 = -1/(2a\Omega_0)$.

Определение 2. *Гиперболическое ДВ*

$$e\left[u(t_1,t_2)\right] = au_{t_1t_2} + b_1u_{t_1} + b_2u_{t_2} + cu, (a \neq 0, (t_1,t_2) \in \Pi = (\alpha_1,\beta_1)\times(\alpha_2,\beta_2) \subseteq R^2), \quad (3)$$

допускает НГР, если уравнение

$$e\left[u(t_1,t_2)\right] = \sin(\Omega_1 t_1 + \Omega_2 t_2) \quad (4)$$

имеет решение $(A_1t_1 + A_2t_2)\cos(\Omega_1t_1 + \Omega_2t_2)$ (при некоторых $\Omega_1\Omega_2 \neq 0, A_1A_2 \neq 0$).

Утверждение 2. ДВ (3) допускает НГР лишь в двух случаях: либо $ab_1b_2c < 0$ (тогда $\Omega_1 = \pm\sqrt{-(cb_2)/(ab_1)}, \Omega_2 = c/(a\Omega_1) = -(b_1\Omega_1)/b_2; A_1 = -1/(2a\Omega_2)$, $A_2 = -1/(2a\Omega_1)$), либо $c \neq 0$ и $b_1 = b_2 = 0$ (тогда $\forall\Omega_1 \neq 0, \Omega_2 = c/(a\Omega_1)$; $\forall A_1 \neq 0$ и $A_1 \neq -\Omega_1/c, A_2 = -(cA_1)/(a\Omega_1^2) - 1/(a\Omega_1)$).

Аналогично рассматриваются гиперболическое ДВ, эллиптическое ДВ, параболическое ДВ следующих видов:

$$m^2u_{t_1t_1} - n^2u_{t_2t_2} + b_1u_{t_1} + b_2u_{t_2} + cu(t_1,t_2)\,(mn \neq 0), \quad (5)$$

$$m^2u_{t_1t_1} + n^2u_{t_2t_2} + b_1u_{t_1} + b_2u_{t_2} + cu(t_1,t_2)\,(mn \neq 0), \quad (6)$$

$$au_{t_1t_1} + b_1u_{t_1} + b_2u_{t_2} + cu(t_1,t_2)\,(a \neq 0). \quad (7)$$

Утверждение 3. Уравнение

$$\sum_1^n\sum_1^n a_{ij}u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m b_{ij}u_{x_it_j} + \sum_1^m\sum_1^m c_{ij}u_{t_it_j} + \sum_1^n d_iu_{x_i} + \sum_1^m e_iu_{t_i} + fu(x,t) = \sin([\omega,x]+[\Omega,t]), \quad (8)$$

(где $x = (x_i) \in R^n, t = (t_i) \in R^m; n \geq 1, m \geq 1; (x,t) \in \Pi = \bigcup(p_i,q_i)\times(\alpha_j,\beta_j) \subseteq R^{n+m}$; матрицы $a = (a_{ij})$ *и* $c = (c_{ij})$ симметрические; $\omega \in R^n, \Omega \in R^m; [\omega,x]$ – скалярное произведение) имеет решение $([A,x]+[B,t])\cos([\omega,x]+[\Omega,t])$ (где $A \in R^n, B \in R^m$), лишь если

$$\begin{cases} [a\omega,\omega]+[b\omega,\Omega]+[c\Omega,\Omega]=f, \\ [d,\omega]+[e,\Omega]=0, \\ 2[a\mathrm{A},\omega]+[b\mathrm{A},\Omega]+[b\omega,\mathrm{B}]+2[c\mathrm{B},\Omega]=-1, \\ [d,\mathrm{A}]+[e,\mathrm{B}]=0. \end{cases} \tag{9}$$

Три основных эффекта: (1) на пересечении гиперплоскостей $[\mathrm{A},x]+[\mathrm{B},t]=\mathrm{C}_1$, $[\omega,x]+[\Omega,t]=\mathrm{C}_2$ с Π может теряться осцилляторность и неограниченность решения (если, конечно, Π имеет выход на ∞); (2) на пересечении $[\mathrm{A},x]+[\mathrm{B},t]=\mathrm{C}_1$ с Π при условии $[\omega,x]+[\Omega,t]\neq\mathrm{const}$ остается осцилляторность, но может теряться неограниченность (если Π имеет выход на ∞); (3) на пересечении $[\omega,x]+[\Omega,t]=\mathrm{C}_2$ с Π при условии $[\mathrm{A},x]+[\mathrm{B},t]\neq\mathrm{const}$ теряется осцилляторность и неограниченность становится монотонной (если Π имеет выход на ∞).

Две основные алгебраические задачи: (1) по известным коэффициентам уравнения найти спектры $\{(\omega,\Omega)\}$ и амплитуды $\{(\mathrm{A},\mathrm{B})\}$; (2) (обратная) по известным спектрам и амплитудам восстановить ДВ.

Важные частные случаи: (1) (A,B) взаимозаменяемы с (ω,Ω), т.е. $\exists k\neq 0:\mathrm{A}=k\omega\, u\ \mathrm{B}=k\Omega;(2)$, x и t взаимозаменяемы, т.е. $n=m, b=0$ (или b симметрическая), $a=c, d=e$ и $p_i=\alpha_i, q_i=\beta_i;(3)$ параметризация Э.А. Милна: $n=3, m=2;(4)$ параметризация Рио ди Бартини: $n=3, m=3;(5)$ ультрагиперболическое и другие уравнения.

УДК 517.95

О естественности операции взятия следа в классе интегральных операторов Фурье

П.А. Сипайло

Российский университет дружбы народов

След оператора – центральное понятие в относительной эллиптической теории [1, 2], т.е. эллиптической теории, ассоциированной с парой многообразие–подмногообразие. Пусть имеется гладкое вложение многообразий $i: X \hookrightarrow M$ и дан оператор A, действующий на M. Тогда след $i^!(A)$ оператора A на подмногообразии X определяется как композиция

$$i^* A\, i_*,$$

где i^* и i_* – операторы ограничения и коограничения соответственно. Оператор ограничения i^* сопоставляет функции на объемлющем многообразии M её сужение на подмногообразие X, а оператор коограничения i_* сопоставляет функции на подмногообразии X (обобщённую) функцию на объемлющем многообразии M, сосредоточенную на X. След $i^!(A)$ корректно определён как действующий в пространствах $H^{s+\nu/2}(X)\to H^{s-d-\nu/2}(X)$, если оператор A действует в пространствах $H^s(M)\to H^{s-d}(M), s<-\nu/2\,, s-d>\nu/2, \nu=codim X$.

Впервые конструкции, близкие к следам, появились в работах Б.Ю. Стернина [1], где они с необходимостью возникали при исследовании фредгольмовости задачи Соболева (т.е. псевдодифференциальной задачи с граничными условиями, заданными на подмногообразии произвольной коразмерности). Встал вопрос об изучении структуры следа для различных классов операторов.

Первым результатом такого рода является утверждение о том, что след псевдодифференциального есть оператор снова псевдодифференциальный. Однако для операторов, не являющихся псевдодифференциальными, ситуация существенно меняется. Например, следы операторов сдвига (или, более общо, операторов, ассоциированных с

действием группы) оказываются *сосредоточенными* на некотором подмножестве, т.е. являются сглаживающими вне произвольной окрестности этого множества.

В настоящей работе мы изучаем операцию взятия следа в одном из наиболее широких из известных классов операторов – в классе интегральных операторов Фурье (далее – ИОФ) [3, 4]. Напомним, что основным свойством ИОФ является то, что они ассоциированы с (погруженными) лагранжевыми подмногообразиями в кокасательном расслоении. Аналогично, следы ИОФ также ассоциированы с некоторыми подмногообразиями в кокасательном расслоении (последние естественно называть *следами лагранжевых подмногообразий*), однако на этот раз соответствующие подмногообразия могут быть устроены довольно сложно, например, иметь особенности или границу. Поэтому отправной точкой в нашем исследовании становится задача, состоящая в том, чтобы сформулировать условия, при которых операция следа является естественной в классе ИОФ, т.е. в каком случае след ИОФ – снова ИОФ. Этому вопросу посвящена настоящая работа.

Приведём формулировку основного результата.

Определение. Пусть L – лагранжево подмногообразие в $T^*(M\times M)\setminus\{0\}$, $\pi: T^*(M\times M)\to T^*(X\times X)$ – отображение, индуцированное вложением $i: X\times X\hookrightarrow M\times M$. Тогда *следом* $i^!(L)$ подмногообразия L называется множество

$$i^!(L) = \pi(L\cap T^*(M\times M)|_{X\times X}).$$

Теорема. *Пусть ИОФ $\Phi=\Phi(L)$ действует в пространствах $H^s(M)\to H^{s-d}(M), s<-\nu/2, s-d>\nu/2$, $\nu=codimX$ и ассоциирован с погруженным лагранжевым подмногообразием $L\subset T^*(M\times M)\setminus\{0\}$. Пусть выполнены условия:*

1) *пересечение $L\cap T^*(M\times M)$ является чистым (см. [4]),*
2) *$i^!(L)$ не пересекает нулевое сечение в $T^*(X\times X)$.*

Тогда $i^!(L)$ – погруженное лагранжево подмногообразие в $T^*(X\times X)\setminus\{0\}$ и след $i^!(\Phi)\colon H^{s+\nu/2}(X)\to H^{s-d-\nu/2}(X)$ является ИОФ, ассоциированным с ним:

$$i^!\big(\Phi(L)\big)=\Phi\Big(i^!(L)\Big).$$

Применим приведённую теорему к квантованным каноническим преобразованиям, т.е. ИОФ, ассоциированным с графиками однородных канонических преобразований ([3, 4]).

Следствие. *Пусть $g\colon T^*M\setminus\{0\}\to T^*M\setminus\{0\}$ – однородное каноническое преобразование, $\Phi=\Phi(graph\ g)$ – соответствующее квантованное каноническое преобразование. Пусть Φ имеет порядок d, так что для $s<-\nu/2$, $\nu=codimX$, выполнено $s-d>\nu/2$. Пусть g удовлетворяет условиям:*

1) *многообразия $T^*M|_X\setminus\{0\}$ и $g(T^*M|_X\setminus\{0\})$ пересекаются в $T^*M\setminus\{0\}$ чисто.*
2) *$i^!(graph\ g)$ не пересекает нулевое сечение в $T^*(X\times X)$,*

Тогда $i^!(graph\ g)$ – погруженное лагранжево подмногообразие в $T^*(X\times X)\setminus\{0\}$ и след $i^!(\Phi)\colon H^{s+\nu/2}(X)\to H^{s-d-\nu/2}(X)$ является ИОФ, ассоциированным с ним:

$$i^!\big(\Phi(graph\ g)\big)=\Phi\Big(i^!(graph\ g)\Big).$$

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 16-01-00373 А.

Литература

1. *Стернин Б.Ю.* Эллиптические и параболические задачи с границей, состоящей из компонент различной коразмерности // Труды Моск. Мат. общ-ва. 1966. № 15. С. 346–382.
2. *Nazaikinskii V.*, Sternin B. Relative Elliptic Theory // Aspects of Boundary Problems in Analysis and Geometry. V. 151 / ed. by J. Gil, T. Krainer, I. Witt. Basel-Boston-Berlin: Birkhäuser, 2004. P. 495–560.
3. *Мищенко А.С, Стернин Б.Ю, Шаталов В.Е.* Лагранжевы многообразия и метод канонического оператора. – М.: Наука, 1978. 352 с.
4. *Хёрмандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Интегральные операторы Фурье. – М.: Мир, 1988. Т. 4. 446 с.

УДК 517.9

Об эллиптичности операторов, ассоциированных с диффеоморфизмами

Н.Р. Изварина

Российский университет дружбы народов

Объектом изучения является класс нелокальных операторов, ассоциированных с действием дискретных групп диффеоморфизмов на замкнутых многообразиях.

В частности, рассматриваются операторы, порожденные псевдо-дифференциальными операторами (ПДО) и операторами сдвига вдоль траекторий параболического диффеоморфизма:

$$g : S^m \to S^m, \qquad x \mapsto x + e, \tag{1}$$

где $e \in \mathbb{R}$ – ненулевой вектор, или

$$f : \mathrm{S}^2 \to \mathrm{S}^2, \tag{2}$$

где f – диффеоморфизм Морса–Смейла, A – двумерная матрица.

Рассматриваемые операторы представляются в виде конечной суммы:

$$D = \sum_k D_k T^k : \quad H^s(\mathrm{S}^m) \to H^{s-d}(\mathrm{S}^m), \tag{3}$$

где $Tu(x) = u(g(x))$, $Tu(x) = u(f(x))$, т.е. T – оператор сдвига, отвечающий диффеоморфизму (1) или (2), D_k – это ПДО порядка d на сфере S^m, $k \in \mathbb{Z}$.

Хорошо известно, что показатель гладкости s пространства Соболева играет важную роль в эллиптической теории операторов, ассоциированных с действием дискретных групп диффеоморфизмов, а именно, фредгольмовость и, как следствие, эллиптичность операторов зависит от этого показателя. Также хорошо известно, что оператор (3) фредгольмов тогда и только тогда, когда его символ обратим.

В работе даётся явное выражение для символа оператора (3), а также приводятся результаты, отражающие зависимость (или независимость) обратимости символа и, как следствие, фредгольмовости оператора (3) от показателя гладкости s пространства Соболева.

Литература

1. *Antonevich A.B.* Linear functional equations. Operator approach. Operator Theory: Advances and Applications. Basel: Birkhäuser Verlag, 1996. V. 83.
2. *Savin A.Yu., Sternin B.Yu.* Elliptic theory for operators associated with diffeomorphisms of smooth manifolds. Pseudo-Differential Operators, Generalized Functions and Asymptotics, Operator Theory: Advances and Applications. 231, Basel:Springer, 2013. P. 1–26.
3. *Савин А.Ю., Стернин Б.Ю.* Об индексе эллиптических операторов для группы растяжений // Матем. сб. 2011. Т. 202, № 10. С. 99–130.
4. *Grines V.Z., Medvedev T.V., Pochinka O.V.* Dynamical Systems on 2- and 3-Manifold. Developmentsin Mathematics. Springer, 2016. V. 46.
5. *Smale S.*, Differentiable dynamical systems // Bull. Amer. Math. Soc., 1967. V. 73. P. 747–817.

УДК 517

Алгоритм построения трансляционно-инвариантных мер на бесконечномерных пространствах и свойства интегрируемых функций

Д.В. Завадский

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Рассмотрена задача построения трансляционно-инвариантных мер на бесконечномерных линейных топологических пространствах, которые являются аналогами

меры Лебега. В статье [1] доказано, что в бесконечномерных линейных топологических пространствах не существует меры, которая обладает всеми свойствами меры Лебега. В данной работе предлагается алгоритм построения трансляционно-инвариантных и счетно-аддитивных мер на различных пространствах последовательностей. Также было установлено, какими свойствами меры Лебега построенные по предложенному алгоритму меры не обладают. Было показано, что построенная по рассмотренному алгоритму мера на пространстве R^∞ отличается от той, которая предложена в статье [2]. Таким образом, был решен вопрос о единственности трансляционно-инвариантной и счетно-аддитивной меры на пространстве R^∞. От мер, предложенных в статьях [3, 4], построенные меры отличаются наличием счетной аддитивности. Отметим, что, в отличие от предложенных в данной работе, меры из статьи [4] являются инвариантными относительно поворотов.

Также были рассмотрены различные классы непрерывных и интегрируемых по построенным мерам функций. Установлены некоторые плотные подмножества функциональных пространств L_p.

Литература

1. *Вейль А.* Интегрирование в топологических группах и его применение. – М.: Изд. иностр. лит. 1950.
2. *Baker R.* Lebesgue measure on $\mathbb{R}^\infty$. Proceedings of the AMS. 1991. V. 113, N 4. P. 1023–1029.
3. *Сакбаев В.Ж.* Меры на бесконечномерных пространствах, инвариантные относительно сдвигов // Труды МФТИ. 2016. Т. 8, № 2. С. 1–7.
4. *Сакбаев В.Ж.* Усреднение случайных блужданий и меры на гильбертовом пространстве, инвариантные относительно сдвига // ТМФ, 2016. 191(2): 724–747.

УДК 517.518.232

Аддитивные и мультипликативные анизотропные оценки интегральных норм функций из пространств Соболева на нерегулярных областях

А.Ю. Головко

Московский физико-технический институт (государственный университет)
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

В докладе будут обсуждаться аддитивные (теоремы вложения) и мультипликативные (мультипликативные неравенства типа Гальярдо–Ниренберга) оценки лебеговских норм функций (и их обобщенных производных) из анизотропных по порядку производных и показателям суммируемости пространств Соболева на областях с условием гибкого -конуса. Введем соответствующее определение и сформулируем основные теоремы.

Определение ([1]). При $\sigma \geq 1$ область $G \subset \mathbb{R}^n$ называют областью с условием гибкого -конуса, если при некоторых $T > 0, \kappa > 0$ для любого $x \in G$ существует кусочно-гладкий путь $\gamma : [0,T] \longrightarrow G$, $\gamma(0) = x$, $|\gamma'| \leq 1$ почти всюду, такой, что $dist(\gamma(t), \mathbb{R}^n \backslash G)) \geq \kappa t^\sigma$ при $0 < t \leq T$.

Теорема 1. *Пусть G - область с условием гибкого -конуса, $\sigma \geq 1$, $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$, $s_j \in \mathbb{N}$, $|\beta| < s_j$ при $j = \overline{1,n}$; $1 \leq q, r < \infty$, $r < q$, $1 < p_j < \infty$, $p_j < q$ при $j = \overline{1,n}$. Тогда справедлива оценка*

$$\left\|D^\beta f\right\|_{L_q(G)} \leq C\left(\sum_{j=1}^{n} \left\|\frac{\partial^{s_j} f}{\partial x_j^{s_j}}\right\|_{L_{p_j}(G)} + \|f\|_{L_r(G)}\right)$$

для функций f с конечной правой частью при выполнении для всех $j = \overline{1,n}$ соотношений

$$\sigma|\beta| - \frac{n}{q} \leq s_j - (\sigma - 1)\sum_{i=1, i\neq j}^{n}(s_i - 1) - \frac{\sigma(n-1)+1}{p_j}.$$

Теорема 2. *Пусть* G *- область с условием гибкого -конуса,* $\sigma \geq 1$, $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$, $s_j \in \mathbb{N}$, $|\beta| < s_j$ *при* $j = \overline{1,n}$, $0 < \theta < 1$; $1 \leq q, r < \infty$, $r < q$, $1 < p_j < \infty$, $p_j < q$ *при* $j = \overline{1,n}$. *Тогда справедлива оценка*

$$\left\|D^{\beta} f\right\|_{L_q(G)} \leq C\left(\|f\|_{L_r(G)}^{1-\theta}\left(\sum_{j=1}^{n}\left\|\frac{\partial^{s_j} f}{\partial x_j^{s_j}}\right\|_{L_{p_j}(G)}\right)^{\theta} + \|f\|_{L_r(G)}\right)$$

для функций f *с конечной правой частью при выполнении для всех* $j = \overline{1,n}$ *соотношений*

$$\sigma|\beta| - \frac{n}{q} \leq \theta\left(s_j - (\sigma-1)\sum_{i=1, i\neq j}^{n}(s_i - 1) - \frac{\sigma(n-1)+1}{p_j}\right) +$$

$$+ (1-\theta)\left(-\frac{n\sigma}{r} - (\sigma-1)\left(\sum_{i=1}^{n} s_i - n\right)\right).$$

Первая теорема является обобщением результата, полученного Бесовым О.В. в работе [2].

Получены оценки и для анизотропных пространств Соболева более общего вида, а также и некоторые необходимые условия выполнения оценок из теорем (см., например, [3]).

Исследования выполнены за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00443).

Литература

1. *Бесов О.В.* Теорема вложения Соболева для областей с нерегулярной границей // Математический сборник. 2001. Т. 192, № 3. С. 3–26.
2. *Бесов О.В.* Интегральные оценки дифференцируемых функций на нерегулярных областях // Математический сборник. 2010. Т. 201, № 12. С. 69–82.
3. *Головко А.Ю.* Аддитивные и мультипликативные анизотропные оценки интегральных норм дифференцируемых функций на нерегулярных областях // Труды МИАН. 2015. Т. 290. С 293–303.

УДК 517.9

Уравнения магнитогидродинамического пограничного слоя нелинейно вязкой жидкости в модификации О.А. Ладыженской [1]

Р.Р. Булатова

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

В докладе рассматривается модифицированная система стационарного плоскопараллельного пограничного слоя электропроводной жидкости в присутствии магнитного поля $B(x)$:

$$\begin{cases} \nu \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\left(1+k\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) - u\dfrac{\partial u}{\partial x} - v\dfrac{\partial u}{\partial y} + B^2(U-u) = -U\dfrac{dU}{dx}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

в области $D = \{0 < x < X, 0 < y < \infty\}$.

Здесь ν — вязкость, плотность жидкости и проводимость предполагаются равными единице, $B(x), U(x)$ — заданные функции. Скорость $U(x)$ внешнего потока определяется из соотношения

$$U\frac{dU}{dx} = -\frac{dp}{dx} - \sigma EB - B^2U,$$

обобщающего уравнение Бернулли на случай магнитной гидродинамики.
Система уравнений (1) рассматривается с граничными условиями

$$u(0,y) = u_0(y), \quad u(x,0) = 0, \quad v(x,0) = v_0(x), \quad u(x,y) \to U(x) \quad \text{при} \quad y \to \infty. \tag{2}$$

С помощью преобразования Мизеса система (1) с условиями (2) сводится к одному квазилинейному уравнению вида

$$\nu\sqrt{w}\left(1+\frac{3}{4}k\left(\frac{\partial w}{\partial \psi}\right)^2\right)\frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2} - \frac{\partial w}{\partial x} - v_0\frac{\partial w}{\partial \psi} + 2B^2(U-\sqrt{w}) = -2U\frac{dU}{dx},$$

где $w(x,\psi) = u^2(x,y)$. Область D переходит в область $G = \{0 < x < X, 0 < \psi < \infty\}$, а граничные условия (2) - в условия

$$w(0,\psi) = w_0(\psi), \quad w(x,0) = 0, \quad w(x,\psi) \to U^2(x) \quad \text{при} \quad \psi \to +\infty.$$

При некоторых естественных предположениях относительно $U(x), B(x), u_0(x), v_0(x)$ доказаны существование и единственность классического решения задачи (1), (2), установлен ряд свойств полученного решения.

Найдены условия безотрывного течения, установлен характер влияния магнитного поля на отрыв пограничного слоя. Доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть задача (1),(2) имеет решение в области* $D = \{0 < x < X, 0 < y < \infty\}$.

Тогда $X < x_0$, *где* x_0 *определяется условиями*

$$\max_y u_0^2(y) - 2\int_0^{x_0} U(x)\left(-\frac{dU(x)}{dx} - B^2(x)\right)dx \equiv 0 \qquad u \qquad \frac{dU(x_0)}{dx} < 0.$$

Работа частично поддержана грантом РФФИ 15-01-07920.

Литература

1. *Ладыженская О.,А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука. Физматлит, 1970.
2. *Самохин В.Н., Фадеева Г.М., Чечкин Г.А.* Уравнения пограничного слоя для модифицированной системы Навье–Стокса // Труды семинара им. И.Г. Петровского. Вып. 28. -М.: Изд-во Моск.ун-та, 2011. С. 329–361.
3. *Самохин В.Н., Фадеева Г.М., Чечкин Г.А.* Модификация О.А. Ладыженской уравнений Навье–Стокса и теория пограничного слоя // Вестник МГУП, 2009. № 5. С. 127–143.

УДК 519.716.5

О свойствах функциональных систем k-значной логики специального вида

Д.Е. Стародубцев

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Исследуются замкнутые классы функций k-значной логики [1, 2]. Известно, что семейство замкнутых классов булевых функций имеет счётную мощность [3, 4], а семейство замкнутых классов функций k-значной логики при $k \geq 3$ имеет мощность континуума [1, 5]. В ряде работ (см., например, обзор [6]) рассматриваются различные усиления операции суперпозиции, что позволяет получить более “просто” устроенную решётку классов функций, замкнутых относительно новых операций. Данная работа также относится к этому направлению исследований. Классы булевых функций, замкнутые относительно суперпозиции, введения фиктивной переменной и операций $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, были описаны в 2011 г. в дипломной работе Н.Т. Мартыновой, выполненной на механико-математическом факультете МГУ им. М.В. Ломоносова в 2011 г.; классы функций k-значной логики при $k > 2$, замкнутые относительно суперпозиции и операции $\tilde{\Delta}_{all}$, были описаны в работе [7].

Пусть $k \geq 2$. Обозначим через E_k множество $\{0,1,\dots,k-1\}$, через P_k – множество всех функций -значной логики. Через $\tilde{\alpha}^n$ обозначим набор значений $(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in E_k^n$, будем также употреблять более простое обозначение $\tilde{\alpha}$ в случае, если длина набора понятна из контекста. На множестве P_k рассматриваются операции суперпозиции, переименования переменных, отождествления переменных, введения и удаления фиктивных переменных, подстановки констант, определённые стандартным образом, а также операция обращения, определённая ниже. Рассматриваются замыкания классов функций из P_k относительно различных наборов операций и классы, инвариантные относительно соответствующих замыканий. Исследуется мощность соответствующего множества (решётки) замкнутых классов.

Определим операцию обращения следующим образом. Обозначим через A_n множество всех таких наборов $(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in E_k^n$, что $\alpha_n = \alpha_i$ для некоторого i, $1 \leq i \leq n--1$. Рассмотрим функцию $f(x_1,\dots,x_n) \in P_k$. Будем говорить, что функция $g(x_1,\dots,x_{n+1})$ получена из функции f с помощью операции обращения, если $\mathrm{g}(\alpha_1,\dots,\alpha_{n+1}) = \mathrm{f}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ при $(\alpha_1,\dots,\alpha_{n+1}) \in \mathrm{A}_{n+1}$. Операцию обращения будем обозначать через Δ. Заметим, что если функция $g(x_1,\dots,x_{n+1})$ получена из функции $f(x_1,\dots,x_n)$ при помощи операции обращения, то f можно получить из g путём отождествления переменной x_{n+1} с любой из переменных $x_1,\dots,x_n$. Заметим также, что приведённое условие не определяет значение функции g на наборах, не принадлежащих A_{n+1}. Доопределить функцию g на этих наборах можно различными способами, при этом будут меняться свойства соответствующего множества замкнутых классов.

Пусть $k = 2$. Тогда при каждом n в множестве $E_2^n \setminus A_n$ содержится ровно два набора: $(0,\dots,0,1)$ и $(1,\dots,1,0)$. В этом случае получаем четыре способа доопределить функцию g. Операцию обращения с каждым конкретным способом доопределения функции g будем обозначать символом Δ с индексом, который приведён в таблице.

	Δ_0	Δ_1	Δ_2	Δ_3
$g(0,\ldots,0,1)$	0	0	1	1
$g(1,\ldots,1,0)$	0	1	0	1

Рассмотрим замыкание относительно переименования переменных (без отождествления), подстановки констант, введения и удаления фиктивных переменных (такое замыкание использовано в инвариантных классах Яблонского). Добавим к этому набору операций операцию обращения Δ_c с произвольным индексом $0 \le c \le 3$. Тогда получим множество замкнутых классов, имеющее мощность континуума.

Рассмотрим замыкание относительно суперпозиции функций и введения фиктивных переменных (такое замыкание использовано в замкнутых классах Поста). Добавим к этому набору произвольное непустое множество операций из списка $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$. Получим, что решётка замкнутых классов имеет счётную мощность в случае, если добавлены множества операций $\{\Delta_0\},\{\Delta_1\},\{\Delta_3\},\{\Delta_0,\Delta_1\},\{\Delta_1,\Delta_3\}$ и конечную мощность во всех остальных случаях. Заметим, что при добавлении всех четырёх приведённых операций остаётся четыре замкнутых класса: $P_2, T_0, T_1, T_0 \cap T_1$, где T_i – множество всех функций, сохраняющих константу $i \in E_2$.

Пусть теперь $k > 2$. Рассмотрим следующие разновидности операции обращения. Через $\tilde{\Delta}_c$, $c \in E_k$, обозначим операцию обращения, предполагающую доопределение функции g константой c на наборах, не принадлежащих A_{n+1}. Через $\tilde{\Delta}_{\text{const}}$ обозначим операцию обращения, предполагающую доопределение функции g константой, не заданной заранее. В этом случае из заданной функции f при применении операции обращения могут быть получены k различных функций g. Через $\tilde{\Delta}_{\text{all}}$ обозначим операцию обращения, предполагающую доопределение функции g произвольным образом. В этом случае из заданной функции f при применении операции обращения может быть получена любая функция g, принимающая нужные значения на наборах из A_{n+1}.

Рассмотрим замыкание относительно операции суперпозиции функций. Добавим к этой операции одну из разновидностей операции обращения, определённых выше. Получим, что решётка замкнутых классов имеет мощность континуума в случае, если добавлена операция $\tilde{\Delta}_c$ для произвольного $c \in E_k$, и конечную мощность в случае, если добавлена операция $\tilde{\Delta}_{\text{const}}$ или $\tilde{\Delta}_{\text{all}}$. Заметим, что при добавлении операций $\tilde{\Delta}_{\text{const}}$ или $\tilde{\Delta}_{\text{all}}$ остаются следующие замкнутые классы: $P_k, \bigcap_{i \in I} T_i$ для произвольного непустого множества $\mathrm{I} \subseteq \mathrm{E_k}$.

Литература

1. *Яблонский С.В.* Введение в дискретную математику. – М.: Высшая школа, 2001.
2. *Lau D.* Function algebras on finite sets: a basic course on many-valued logic and clone theory. – Berlin: Springer, 2006.
3. *Post E.L.* Introduction to a general theory of elementary propositions // Amer. J. Math. 1921. V. 43, N 3. P. 163–185.
4. *Post E.L.* The two-valued iterative systems of mathematical logic // Ann. Math. Stud. 1941. V. 5.
5. *Янов Ю.И., Мучник А.А.* О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса // Докл. АН СССР. 1959. Т. 127, № 1. С. 44–46.
6. *Угольников А.Б.* О некоторых задачах в области многозначных логик // Материалы X международного семинара «Дискретная математика и её приложения». 2010. С. 18–34.
7. *Стародубцев Д.Е.* Классы функций многозначной логики, замкнутые относительно операций суперпозиции и обращения // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механика. 2017. № 2. С. 3–6.

УДК 517.929.4, 517.929.5, 517.984.32

Собственные значения фундаментальной матрицы системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами

А.Н. Соколова

Российский университет дружбы народов

Мотивом исследования, проведенного в данной работе, является проблема, возникающая при исследовании свойств периодических решений дифференциально-разностного уравнения (ДРУ) с одним запаздыванием вида $x'(t) = f\big(x(t), x(t-1)\big)(dde)$. Одним из наиболее эффективных способов отыскания мультипликаторов Флоке (собственных значений соответствующего оператора запаздывания) для ДРУ является сведение к краевой задаче для системы обыкновенных ДУ (JakeHale) [1]. В работах Вальтера Х.-О. и Скубачевского А.Л. [2] и Журавлева Н.Б. [3] разрабатывался подход, основанный на аппроксимации оператора монодромии, применимый даже в случае, когда период несоизмерим с запаздыванием. Но все еще остается проблема точности такой аппроксимации.

В данной работе разобран пример для автономной нелинейной системы ОДУ как подготовка для более сложного случая дифференциально-разностного уравнения. Целью было отыскание контрпримера, иллюстрирующего нарушение гладкости (липшивости) зависимости собственных значений оператора сдвига на период от коэффициентов этой матрицы, для системы ОДУ. При рассмотрении данного примера был использован метод составления системы уравнений в вариациях, и для получения явной формулы коэффициентов фундаментальной матрицы использована формула Лиувилля, несмотря на возникновение расходящихся несобственных интегралов. Полученный результат показывает, в каком направлении можно проводить исследование более сложного случая (уравнений с запаздыванием), а именно, чем определяется показатель Гельдера для зависимости собственных значений от величины сдвига.

В работе рассмотрена автономная систему ОДУ

$$\begin{cases} \dot{x} = y + 1 - (x^2 + y^2), \\ \dot{y} = -x \end{cases} \tag{1}$$

с периодическим решением $\begin{cases} \tilde{x}(t) = \sin t \\ \tilde{y}(t) = \cos t \end{cases}$. Система уравнений в вариациях для этой системы [4] имеет вид

$$\begin{cases} \dot{u} = -2\tilde{x} \cdot u + (1 - 2\tilde{y}) \cdot v, \\ \dot{v} = -u. \end{cases} \tag{2}.$$

Тогда $(\tilde{u}, \tilde{v}) = \left(\dot{\tilde{x}}, \dot{\tilde{y}}\right) = (\cos t, -\sin t)$ является его периодическим решением, что можно непосредственно проверить. Далее для составления фундаментальной матрицы системы уравнений в вариациях необходимо найти второе линейно независимое решение $\bar{v}$. Это можно сделать, сведя данную линейную систему к одному уравнению и применив формулу Лиувилля: $\ddot{v} + 2\sin t \cdot \dot{v} + (1 - 2\cos t) \cdot v = 0 \to \bar{v} = C\tilde{v}(t) \int \frac{e^{-\int a(s)ds}}{\tilde{v}^2} dw + B\tilde{v}$, где $a(t) = 2\sin t$ – коэффициент полученного линейного уравнения, константы C и B произвольны. Получаем фундаментальную матрицу системы уравнений в вариациях (2): $\Phi(t) = \begin{pmatrix} -\dot{\bar{v}} & -\dot{\tilde{v}} \\ \bar{v} & \tilde{v} \end{pmatrix}$.

Обратим внимание на появившиеся неопределенные интегралы в первом столбце $\Phi(t)$. Каждая первообразная (обобщенная) функции $g(w) = \frac{\exp(-\int_{\pi/2}^{w} a(s)ds)}{\tilde{v}^2(w)}$ имеет разрыв: записав эту первообразную в виде интеграла с переменным верхним пределом, мы получаем расходящийся интеграл с особенностью в нулях функции. Как следствие, необходимо при разных значениях аргумента использовать разные первообразные.

Преодолев эти трудности, получаем, что фундаментальная матрица при $t \in (2\pi, 3\pi)$ примет вид

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos t \int_{5\pi/2}^{t} \frac{e^{2\cos w}}{\sin^2 w} dw + \sin t \cdot \frac{e^{2\cos t}}{\sin^2 t} + B_2 \cos t & \cos t \\ -\sin t \int_{5\pi/2}^{t} \frac{e^{2\cos w}}{\sin^2 w} dw - B_2 \sin t & -\sin t \end{pmatrix}$$

где $B_2 = -4 \lim_{t\to\pi-0} \left[\cos t \int_{\pi/2}^{t} \frac{e^{2\cos w}}{\sin^2 w} dw + \sin t \cdot \frac{e^{2\cos t}}{\sin^2 t}\right]$.

Заметим, что [4]: $\Phi(\pi/2) = \begin{pmatrix} -\bar{v}(\pi/2) & -\dot{\bar{v}}(\pi/2) \\ \bar{v}(\pi/2) & \dot{\bar{v}}(\pi/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \Phi^{-1}(\pi/2)$.

Обозначим через $C(\varepsilon)$ матрицу оператора сдвига вдоль решений линеаризованной системы от момента времени $t = \frac{\pi}{2}$ до момента времени $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi + \varepsilon$. При $\varepsilon \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ получаем

$$C(\varepsilon) = \Phi^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right) \Phi\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi + \varepsilon\right) = \begin{pmatrix} a(\varepsilon) & b(\varepsilon) \\ c(\varepsilon) & d(\varepsilon) \end{pmatrix},$$

где

$b(\varepsilon) = \cos t, d(\varepsilon) = \sin t,\ a(\varepsilon) = \cos t \int_{5\pi/2}^{t} \frac{e^{2\cos w}}{\sin^2 w} dw + \sin t \cdot \frac{e^{2\cos t}}{\sin^2 t} + B_2 \cos t\ , c(\varepsilon) = =$
$\sin t \int_{5\pi/2}^{t} \frac{e^{2\cos w}}{\sin^2 w} dw + B_2 \sin t$

.

Тогда собственные значения матрицы $C(\varepsilon)$ вычисляются по формуле

$$\lambda_{\pm} = \frac{a(\varepsilon) + d(\varepsilon) \pm \sqrt{D(\varepsilon)}}{2}, \qquad \text{где } D(\varepsilon) = [a(\varepsilon) + d(\varepsilon)]^2 - 4\,[a(\varepsilon)d(\varepsilon) - b(\varepsilon)c(\varepsilon)].$$

Заметим, что компоненты матрицы $C(\varepsilon)$ являются решениями линейной системы дифференциальных уравнений с непрерывными коэффициентами. Следовательно, условие Липшица для функции $\lambda_{\pm}$ может нарушаться только за счет негладкости функции $\sqrt{D(\varepsilon)}$.

В рассмотренном случае удается показать, что $D(\varepsilon) = 0$ и $D'(\varepsilon) \neq 0$. Т.е. $\left(\sqrt{D(\varepsilon)}\right)'$ не ограничена, а следовательно, $\lambda(\varepsilon)$ не удовлетворяет условию Липшица в окрестности точки $\varepsilon = 0$. В частности, результат данной работы иллюстрирует, что при использовании рациональной аппроксимации (при замене периода $T \notin \mathbb{Q}$ на близкое $p \in \mathbb{Q}$) оценка вида $|\lambda(T) - \lambda(p)| \leq K|T - p|$ может не иметь места.

В заключение отмечу, что я обобщила данный результат в совместной работе с Журавлевым Н.Б. [5] в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $f(x, y) \in C^2(\mathbb{R}^2)$ *из (dde). Пусть* $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$*- T-периодические решения системы* (1). *Тогда не существует такой константы K и* $\varepsilon_0 > 0$*, что для всех* p: $|p - T| < \varepsilon_0$
$\left|\lambda_{\pm}(T) - \lambda_{\pm}(p)\right| \leq K|T - p|$
тогда и только тогда, когда система (2) *имеет непериодическое решение* $(\bar{u}, \bar{v})$ *и* $\int_0^T f'\left(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)\right) dt = 0$.

Полученный результат помог мне понять, что в общем случае (уравнения с запаздыванием) зависимость $\lambda(p)$ удовлетворяет условию Гельдера. При этом показатель Гельдера определяется индексом исследуемого собственного значения.

Литература

1. *Хейл Д.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Мир. 1984.
2. *Skubachevskii A.L., Walther H.-O.* On the Floquet multipliers of periodic solutions to nonlinear functional differential equations // J.Dynam.Differential Equations. 2006. V.18, N 2. P.257–355.
3. *Журавлев Н.Б.* Критерий гиперболичности периодических решений функционально-дифференциальных уравнений с несколькими запаздываниями // Современная математика. Фундаментальные направления. 2007. С. 37–61.

4. *Журавлев Н.Б.* Гиперболические периодические решения нелинейных дифференциально-разностных уравнений: учеб. пособие. – М.: РУДН, 2008. С. 195.
5. *Соколова А.Н., Журавлев Н.Б.* Об изменении собственных значений оператора сдвига вдоль решений системы дифференциальных уравнений // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы Международной конференции: Воронежская зимняя математическая школа (26 января – 1 февраля 2017 г.). Воронеж: ВГУ, 2017. 239 с.

УДК 517.925.51

Об устойчивости решений системы уравнений газовой динамики в поле силы Кориолиса

М.К. Турцынский

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

В работе мы изучаем двумерную модель газовой динамики в лагранжевых координатах при условии, что скорость является линейной функцией от координат. Эта модель описывается системой уравнений [1, 2]:

$$F_{ik}'' + \frac{\partial U}{\partial F_{ik}} = \sum_j \mathrm{L}_{ij} F_{jk}, \tag{1}$$

где $F = (F_{ij})_{i,j=1..2}$ – матрица перехода от лагранжевых координат частицы газа x_i к эйлеровым w_i, т. е. $x_i = \sum_k F_{ik} w_k$; U – внутренняя энергия частиц газа, $U = U_0 (\det F)^{1-\gamma}$, $\gamma \in (1, 2]$ – показатель адиабаты; матрица $\mathrm{L} = lL, L = (L_{ij})_{i,j=1..2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, l = const > 0 – параметр Кориолиса.

Мы обобщаем результаты [3], где решается задача о расширении газового облака в вакууме в случае отсутствия вращения координатной системы (т.е. при l = 0). Изучение роли вращения координатной системы важно, в частности, для нахождения параметров, обеспечивающих существование таких больших долгоживущих атмосферных вихрей, как тропические циклоны.

Аналогично [2] мы показываем, что система (1) при всех значениях показателя адиабаты имеет три первых интеграла:

$$\frac{1}{2}\sum_{i,k} (F_{ik}')^2 + U = E;$$

$$F_{11}F_{12}' + F_{21}F_{22}' - F_{12}F_{11}' - F_{22}F_{21}' - l \det F = B;$$

$$F_{11}F_{21}' + F_{12}F_{22}' - F_{21}F_{11}' - F_{22}F_{12}' + \frac{l}{2}\sum_{i,k} F_{ik}^2 = A.$$

В случае, когда $\gamma = 2$, существует еще один первый интеграл вида

$$\sum_{i,k} F_{ik}^2 = \tilde{C}_1 \cos lt + \tilde{C}_2 \sin lt + \frac{4E + 2lA}{l^2}.$$

Для случая $\gamma = 2$ при l > 0 (так же, как и в случае l = 0) при помощи замены

$$\begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v \\ \sin v & \cos v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s\cos u & 0 \\ 0 & s\sin u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos w & -\sin w \\ \sin w & \cos w \end{pmatrix}$$

исходную систему удается свести к одному уравнению $u'(t) = \pm\sqrt{f(u,t)}$, где:

$$f(u,t) = \frac{2E - (s')^2 + Al}{s^2} - \frac{l^2}{4} - \frac{4U_0}{s^4 \sin 2u} - \frac{A^2 + B^2 + 2AB\sin 2u}{s^4 \cos^2 2u}.$$

В работе [4], где система (1) изучается в эйлеровых координатах, найдены положения равновесия. В лагранжевых координатах им соответствуют точки $\tilde{u} = \pm\frac{\pi}{4} + \pi n$. Исследование особых точек на устойчивость показывает, что в зависимости от соотношения ω / l, где ω – величина завихренности, особые точки могут быть или неустойчивыми (при $\omega / l \in (-\infty, \frac{1-\sqrt{2}}{2})$ или $\omega / l \in (\frac{1+\sqrt{2}}{2}, +\infty)$), или устойчивыми по Ляпунову (но не асимптотически) (при $\omega / l \in (\frac{1-\sqrt{2}}{2}, 0) \cup (1, \frac{1+\sqrt{2}}{2})$).

Отметим, что пользуясь лагранжевыми координатами, нам полностью удается разрешить вопрос о нелинейной устойчивости положений равновесия в промежутках $\frac{1-\sqrt{2}}{2} < \omega / l < 0$ и $1 < \omega / l < \frac{1+\sqrt{2}}{2}$, что не удавалось сделать в эйлеровых координатах. Оказывается, что вращение координатной системы приводит к новому эффекту: появлению однопараметрического семейства нелинейно устойчивых положений равновесия.

Литература

1. *Овсянников Л.В.* Новое решение уравнений гидродинамики //ДАН СССР. Т. 111, №1. 1956. С. 47–49.
2. *Dyson F.* Dynamics of a spinning gas cloud // J. Math. And Mech., 1968. V. 18, N 1.
3. *Анисимов С.И., Лысиков Ю.И.* Распространение газового облака в вакууме // ПММ, Т. 34, № 5, 1970. С. 926–929.
4. *Rozanova O.S., Yu J.-L.,Turzynsky M.K., Hu C.-K.* Nonlinear stability of two-dimensional axisymmetric vortices in compressible inviscid medium in a rotating reference frame // ArXiv:1511.07039.

УДК 512.745

Группы автоморфизмов аффинных многообразий, состоящие из алгебраических элементов

М.Г. Зайденберг[1], А.Ю. Перепечко[2,3], А.О. Регета[4]

[1]Инситут Фурье
[2]Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН
[3]Московский физико-технический институт (государственный университет)
[4]Кёльнский университет

Автоморфизм аффинного многообразия X называется *алгебраическим*, если он лежит в алгебраической подгруппе. Рассмотрим следующие условия:

1) связная компонента группы автоморфизмов состоит из алгебраических элементов;
2) она равна индуктивному пределу алгебраических подгрупп;
3) она равна полупрямому произведению алгебраического тора и абелевой унипотентной группы;
4) касательная алгебра группы автоморфизмов состоит из локально конечных элементов;
5) подгруппа, порождённая унипотентными элементами, коммутативна.

Мы доказали эквивалентность условий 1 – 5 в ситуации $dim X \leq 2$, опираясь на результаты [1].

В случае произвольной размерности нам удалось доказать некоторые зависимости между данными условиями, описываемые с помощью следующей теоремы.

Теорема. *Пусть X – аффинное алгебраическое многообразие над алгебраически замкнутым полем k нулевой характеристики, $SAut(X) \subseteq Aut(X)$ – подгруппа автоморфизмов, порождённая 1-параметрическими унипотентными подгруппами, $Der^{lf}(k[X]) \subseteq Der(k[X])$ – подмножество локально конечных дифференцирований. Тогда*

подгруппа $SAut(X)$ *коммутативна если и только если* $Der^{lf}(k[X])$ *является подалгеброй. В этом случае* $Der^{lf}(k[X]) = h + u$ *как пространство, где*

- h *– максимальная абелева подалгебра, состоящая из полупростых дифференцирований,*
- u *– абелева подалгебра, состоящая из всех локально-нильпотентных дифференцирований.*

Литература

1. *Kovalenko S.*, *Perepechko A.*, *Zaidenberg M.* On automorphism groups of affine surfaces // ASPM 2017. V. 99. P. 207.

УДК 517.9

Стационарные решения системы уравнений Власова–Пуассона под действием внешнего магнитного поля в полупространстве

Ю.О. Беляева

Российский университет дружбы народов

Возрастание интереса к изучению системы уравнений Власова–Пуассона связано с их многочисленными приложениями, среди которых: кинетическая теория частиц в электрических, магнитных и гравитационных полях, волны в бесстолкновительной плазме, высокотемпературная и разреженная плазма, процессы управления термоядерным синтезом и т.д. Как в физике, так и в математике уравнениям Власова посвящена обширная литература. Важную роль играют стационарные решения уравнений Власова.

Рассмотрим стационарную систему уравнений Власова–Пуассона в полупространстве:

$$-\Delta\varphi(x) = 4\pi e \int\limits_{\mathbb{R}^3} \sum_{\beta} \beta f^{\beta}(x, \mathrm{p}) dp, \tag{1}$$

$$\frac{1}{m_\beta}(\mathrm{p}, \nabla_x f^{\beta}) + \beta e \left(-\nabla_x \varphi + \frac{1}{m_\beta c}[\mathrm{p}, B], \nabla_p f^{\beta} \right) = 0, \tag{2}$$

$$(x \in \mathbb{R}^3_+,\ p \in \mathbb{R}^3,\ \beta = \pm 1)$$

с краевым условием Дирихле

$$\varphi(x)\big|_{x_1=0} = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}^3_+). \tag{3}$$

Здесь $f^{\beta} = f^{\beta}(x, \mathrm{p}, t)$ – функция плотности распределения положительно заряженных ионов, если $\beta = +1$, и электронов, если $\beta = -1$, в точке $\boldsymbol{x}$ с импульсом p в момент времени t; $\varphi = \varphi(x, t)$ – потенциал самосогласованного электрического поля; ∇_x и ∇_p – градиенты по x и p соответственно; m_{+1} и m_{-1} – массы иона и электрона; e – заряд электрона; c – скорость света; B – индукция внешнего магнитного поля; $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$; $[\cdot,\cdot]$ – векторное произведение в $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^3_+ = \left\{ x = (\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3) \in \mathbb{R}^3 : \mathrm{x}_1 > 0 \right\}$.

Для того чтобы удерживать плазму внутри реактора, важно рассматривать двукомпонентную модель плазмы под действием внешнего магнитного поля, при этом носители плотностей распределения частиц не должны пересекать границу. Наличие внешнего магнитного поля обуславливает существование решений системы уравнений Власова–Пуассона с носителями, лежащими на некотором расстоянии от границы. Стационарные решения, обладающие описанным выше свойством в цилиндре, для случая нулевого потенциала электрического поля построены в работах [1, 2]. Однако построенные стационарные решения не зависят от пространственной переменной x_3, совпадающей с

осью цилиндра. Этот факт можно интерпретировать следующим образом: плазма имеет бесконечную массу.

Для случая полупространства и для достаточно большой индукции внешнего магнитного поля построены стационарные решения с нулевым потенциалом самосогласованного электрического поля, с носителями плотностей распределения, лежащими на некотором расстоянии от гиперплоскости $x_1 = 0$ и имеющими компактный носитель. В этом случае решения построены в виде произведения пяти срезающих функций, аргументами которых являются первые интегралы стационарной системы Власова.

Публикация выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России (Соглашение № 02.A03.21.0008.)

Литература

1. *Беляева Ю.О.* Стационарные решения уравнений Власова для высокотемпературной двукомпонентной плазмы // Труды семинара по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям в РУДН под руководством А. Л. Скубачевского, СМФН, 2016. 62. С. 19–31.
2. *Скубачевский А.Л.* Уравнения Власова–Пуассона для двукомпонентной плазмы в однородном магнитном поле // УМН. 2014. 69:2(416). С. 107–148.

УДК 517.972

О нарушении принципа суперпозиции для знакопеременных решений уравнения неразрывности

Н.А. Гусев

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Пусть $b:[0,T]\times R^d \to R^d$ – ограниченное борелевское векторное поле.

Рассмотрим уравнение неразрывности:

$$\partial_t \mu_t + div(b\mu_t) = 0$$

относительно измеримого семейства $\{\mu_t\}_{t\in[0,T]}$ мер R^d (уравнение следует понимать в смысле обобщённых функций).

Если решение μ_t неотрицательно, то справедлив принцип суперпозиции: μ_t можно разложить на точечные меры (Дирака), сосредоточенные на интегральных кривых поля *b*. Для гладких *b* этот результат является следствием метода характеристик, а в общем случае он был установлен Л. Амброзио [1].

Частичное обобщение этого результата на случай знакопеременных решений μ_t было получено в работе Л. Амброзио и П. Бернарда [2], в которой также был поставлен вопрос: справедлив ли принцип суперпозиции для знакопеременных решений μ_t, если через каждую точку пространства–времени проходит одна и только одна интегральная кривая поля *b*? С помощью контрпримера, построенного совместно с П. Боникатто, будет продемонстрировано, что в общем случае ответ на этот вопрос отрицательный.

Литература

1. *Ambrosio L.* Transport equation and Cauchy problem for non-smooth vector fields // International Mathematical Summer Course «Calculus of variations and nonlinear partial differential equations» (Cetraro, Jun 27–Jul 2, 2005), 40 p.
2. *Ambrosio L., Bernard P.* Uniqueness of signed measures solving the continuity equation for Osgood vector fields // Rendiconti Lincei – Matematica E Applicationi. 2008. V. l, 19, I. 3. P. 237–245.

УДК 517.982.252

Аппроксимативно-геометрические свойства слабо выпуклых множеств в пространствах с несимметричной полунормой

М.С. Лопушански

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Различные понятия слабо выпуклых множеств подробно исследованы в работах **Ошибка! Источник ссылки не найден.**, **Ошибка! Источник ссылки не найден.**, **Ошибка! Источник ссылки не найден.**. В работах [4], **Ошибка! Источник ссылки не найден.**, **Ошибка! Источник ссылки не найден.** показано, что методы параметрически выпуклого анализа можно развить на пространства с несимметричной полунормой, при этом роль шара играет несимметричный квазишар. Рассмотрение задач в таких пространствах позволяет применять развиваемые здесь методы к надграфикам функций, которые являются неограниченными множествами. Под квазишаром в нормированном пространстве E понимается выпуклое замкнутое множество $M \subset E$, для которого ноль является внутренней точкой и $M \neq E$. Функция Минковского $\mu_M(x) = \inf\{t > 0 \mid x \in tM\}$ такого квазишара представляет собой несимметричную полунорму и используется в определениях сильно выпуклых и слабо выпуклых множеств.

Напомним, что *суммой Минковского* множеств $A \subset E$ и $B \subset E$ называется множество

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}.$$

Пусть $M \subset E$ – квазишар. *M-расстоянием* от точки $x \in E$ до множества $A \subset E$ называется величина

$$\rho_M(x, A) = \inf_{a \in A} \mu_M(x - a).$$

M-проекцией точки $x \in E$ на множество $A \subset E$ называется множество

$$P_M(x, A) = A \bigcap (x - \rho_M(x, A)M).$$

Множеством единичных *проксимальных нормалей* к множеству $A \subset E$ в точке $a \in A$ относительно квазишара $M \subset E$ называется

$$N_M^1(a, A) = \{z \in E \mid \mu_M(z) = 1, \quad \exists t > 0 : a \in P_M(a + tz, A)\}.$$

Множество $C \subset E$ называется *сильно выпуклым относительно квазишара* $M \subset E$, если C выпукло, замкнуто и существует множество $C_1 \subset E$ такое, что $C + C_1 = M$.

Множество $A \subset E$ называется *слабо выпуклым относительно квазишара* $M \subset E$, если

$$a \in P_M(a + z, A) \qquad \forall a \in A, \quad \forall z \in N_M^1(a, A).$$

Обозначим через $\mathrm{SC}(M)$ и $\mathrm{WC}(M)$ классы множеств, соответственно сильно и слабо выпуклых относительно квазишара M.

Множество $M \subset E$ называется *параболичным*, если для любого вектора $b \in E$ множество $\left(b + \frac{1}{2}M\right) \setminus M$ ограничено. *Модулем ограниченной равномерной гладкости* квазишара $M \subset E$ называется

$$\beta_M(t, R) = \left\{ \frac{\mu_M(x + ty) + \mu_M(x - ty)}{2} - 1 \mid x \in \partial M \cap B_R(0), y \in \partial B_1(0) \right\}, \quad t \geq 0,\ R > \sigma_M,$$

где $B_r(a) = \{x \in E : \|x - a\| \leq r\}$ – замкнутый шар, а σ_M – максимальный радиус шара с центром в нуле, содержащегося в квазишаре M.

Квазишар называется *ограниченно равномерно гладким*, если для любого числа $R > 0$ $\lim_{t \to +0} \dfrac{\beta_M(t, R)}{t} = 0.$

Множество $M \subset E$ называется *ограниченно равномерно выпуклым*, если $\forall R > 0,\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\colon\ \forall x, y \in M \cap B_R(0)\colon\ \|x - y\| \geq \varepsilon\ \rightarrow\ B_\delta\left(\frac{x+y}{2}\right) \subset M.$

Пусть задан квазишар $M \subset E$. Множество $A \subset E$ называется *M-замкнутым*, если для любой точки $x \in E \setminus A$ справедливо неравенство $\rho_M(x, A) > 0$.

Множество $A \subset E$ называется *M-квази-ограниченным*, если оно *M*-замкнуто и

$$\sup_{\substack{a \in \partial A \\ \|a\| \leq d}} \sup_{z \in N_M^1(a, A)} \|z\| < +\infty, \quad \forall d > 0.$$

Задача $\min_{x \in E} f(x)$ называется корректной, если любая минимизирующая последовательность сходится к решению данной задачи.

Следующие результаты получены в предположении, что квазишар M является параболичным и ограниченно равномерно выпуклым, пространство E – банахово.

Теорема 1. *Пусть множество* $A \in \mathrm{WC}(RM)$ *замкнуто и задана точка* $x \in E$ *такая что.* $0 < \rho_M(x, A) < R$. *Тогда множество* $P_M(x, A)$ *одноэлементно.*

Теорема 2. *Пусть множество* $A \in \mathrm{WC}(RM)$ *замкнуто,* $C \in \mathrm{SC}(-rM)$, *где* $0 < r < R$. *Пусть* $0 < \rho_M(C, A) < R - r$. *Тогда задача* $\min\limits_{\substack{c \in C, \\ a \in A}} \mu_M(c - a)$ *корректна.*

Теорема 3. *Пусть* M *– ограниченно равномерно гладкий квазишар,* $C \in \mathrm{SC}(-rM)$, $A \in \mathrm{WC}(RM)$, *где* $0 < r < R$. *Пусть* $A \bigcap \mathrm{int}\, C = \varnothing$, $\mathrm{int}\, C \neq \varnothing$, A *- M-квази-ограниченное множество. Тогда существуют точки* $a, c \in E$ *такие, что* $\mathrm{int}\, C \subset c - \mathrm{int}\, rM \subset a - \mathrm{int}\, RM \subset E \setminus A$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 16-01-00259.

Литература

1. *Иванов Г.Е.* Слабо выпуклые множества и функции: теория и приложения. М.: Физматлит, 2006.
2. *Clarke F.H., Stern R.J., Wolenski P.R.* Proximal Smoothness and Lower–C^2 Property // J. Convex Anal. 1995. V. 2, N 1, 2. P. 117–144.
3. *F. Bernard, L. Thibault, N. Zlateva.* Characterization of proximal regular sets in super reflexive Banach spaces // J. Convex Anal. 2006. V. 13, N 3, 4. P. 525–559.
4. *Иванов Г.Е.* Перестановочность операций суммы и разности Минковского для множеств в равномерно выпуклом банаховом пространстве // Современные проблемы фундаментальной и прикладной математики. М.: МФТИ, 2008. С. 32–55.
5. *Иванов Г.Е., Лопушански М. С.* Аппроксимативные свойства слабо выпуклых множеств в пространствах с несимметричной полунормой // Труды МФТИ. Т. 4, № 4. 2012. С. 94–104.
6. *Иванов Г.Е., Лопушански М. С.* О корректности задач аппроксимации и оптимизации для слабо выпуклых множеств и функций // Фундамент. и прикл. матем. 2013. Т. 18, № 5. С. 66–87.

УДК 517.982

Пространства Соболева обобщенных функций на гильбертовом пространстве с трансляционно-инвариантной мерой

В.Ж. Сакбаев

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Исследованы конечно-аддитивные меры на вещественном сепарабельном гильбертовом пространстве *E*, инвариантные относительно сдвигов и ортогональных преобразований. Определены гильбертово пространство *H* квадратично интегрируемых по трансляционно-инвариантной мере комплекснозначных функций на пространстве *E* и аналоги пространств Соболева для функций, имеющих квадратично интегрируемые обобщенные производные по направлениям базисных векторов некоторого

ортонормированного базиса. Введенные функциональные пространства использованы для изучения свойств групп сдвигов вдоль векторных полей и диффузионных полугрупп, действующих в гильбертовом пространстве H.

Изучаются меры на банаховом пространстве E, инвариантные относительно сдвигов на произвольные векторы пространства, являющиеся аддитивным продолжением функции множества, заданной на совокупности брусов со сходящимся произведением длин ребер, но не удовлетворяющие условию сигма-конечности и счетной аддитивности.

В случае гильбертова пространства E исследованы такие меры, удовлетворяющие также условию инвариантности относительно ортогональных преобразований. Определено гильбертово пространство H комплекснозначных функций на пространстве E, квадратично интегрируемых по инвариантной относительно сдвигов мере. Исследованы свойства полугрупп операторов сдвига в пространстве H и соответствующих им генераторов и резольвент. Получен критерий сильной непрерывности таких полугрупп. Определены и исследованы математические ожидания операторов сдвига вдоль случайных векторов по однопараметрическому семейству гауссовских мер, образующих полугруппу относительно свертки. Установлено, что рассмотренное семейство математических ожиданий образует однопараметрическую полугруппу линейных самосопряженных сжатий пространства H, найдены инвариантные подпространства операторов этой полугруппы и получены условия ее сильной непрерывности.

Научное издание

Труды
60-й Всероссийской научной конференции МФТИ

Прикладная математика и информатика

20-26 ноября 2017 года

Составители:
М.В. Милов, Е.Г. Молчанов, В.Н. Логинов

Редакторы:
В.А. Дружинина, И.А. Волкова, О.П. Котова, Н.Е. Кобзева

Корректоры:
И.А. Волкова, О.П. Котова, Н.Е. Кобзева

Набор и вёрстка:
М.А. Чайковский

Подписано в печать 12.12.2017. Фомат 60 × 84 $^{1}/_{8}$.
Усл. печ. л. 39,25. Тираж 70 экз. Заказ № 608.
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт
(государственный университет)»
141707, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495)408-58-22

"Полиграфия "ПРОДВИЖЕНИЕ"
123592, г. Москва, ул. Кулакова дом 20, стр. 1Б
E-mail: info@prodv.pro
Тел. (495) 988-93-68

ISBN 978-5-7417-0652-7