ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2009, том 427, № 2, с. 160–164

МАТЕМАТИКА

УДК 512.643.5+519.614+519.674

О ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ АСПЕКТАХ ТЕОРИИ СОВМЕСТНОГО СПЕКТРАЛЬНОГО РАДИУСА

© 2009 г. В. С. Козякин

Представлено академиком Н.А. Кузнецовым 02.12.2008 г.

Поступило 05.12.2008 г.

Различные задачи теории управления [1], неавтономных и многозначных линейных динамических систем [2], теории вейвлетов [3] и многих других разделов математики приводят к необходимости анализа скорости роста матричных произведений с сомножителями из некоторого набора матриц. Одной из характеристик, описывающих экспоненциальную скорость роста произведений матриц, является так называемый совместный или обобщенный спектральный радиус. Вопросу получения эффективных оценок совместного спектрального радиуса посвящена настоящая работа.

Пусть $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_r\}$ – набор $(d \times d)$-матриц с элементами из поля $\mathbb{K}$ вещественных или комплексных чисел. Через $\mathcal{A}^n$ обозначим множество всех произведений матриц из $\mathcal{A}$, состоящих из n сомножителей. Если в $\mathbb{K}^d$ задана некоторая норма $\|\cdot\|$, то предел

$$\rho(\mathcal{A}) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \|\mathcal{A}^n\|^{\frac{1}{n}}, \qquad (1)$$

где $\|\mathcal{A}^n\| = \max\limits_{A \in \mathcal{A}^n} \|A\|$, называется совместным спектральным радиусом набора матриц $\mathcal{A}$ [4]. Формула (1) часто называется обобщенной формулой Гельфанда.

Помимо (1) для вычисления $\rho(\mathcal{A})$ предложено множество других формул. Так, в [4, 5] установлено, что $\rho(\mathcal{A}) = \inf\limits_{\|\cdot\|} \|\mathcal{A}\|$, где infimum берется по всем нормам в $\mathbb{K}^d$. Для неприводимых наборов матриц $\mathcal{A}$ infimum в последнем равенстве достигается. (Напомним, что набор матриц $\mathcal{A}$ называется неприводимым, если матрицы из $\mathcal{A}$ не имеют общих инвариантных подпространств, отличных от $\{0\}$ и $\mathbb{K}^d$.) Согласно [2], для неприводимых наборов матриц число ρ совпадает с $\rho(\mathcal{A})$ тогда и только тогда, когда найдется такая норма $\|\cdot\|$ (норма Барабанова) в $\mathbb{K}^d$, что

$$\rho\|x\| \equiv \max_i \|A_i x\|.$$

Дуальный результат установлен в [6], где показано, что число ρ совпадает с $\rho(\mathcal{A})$, если и только если для некоторого центрально-симметричного телесного множества S (множество называется телесным, если оно содержит хотя бы одну внутреннюю точку) справедливо равенство $\rho S = \operatorname{conv}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{r} A_i S\right)$, где $\operatorname{conv}(\cdot)$ – выпуклая оболочка множества. В [7] показано, что $\rho(\mathcal{A}) = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \max\limits_{A\in\mathcal{A}^n} (\rho(A))^{\frac{1}{n}}$, а согласно [8] $\rho(\mathcal{A}) = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \max\limits_{A\in\mathcal{A}^n} |\operatorname{tr}(A)|^{\frac{1}{n}}$, где $\operatorname{tr}(\cdot)$ – след матрицы. В [9] было отмечено, что при определении совместного спектрального радиуса вместо нормы можно рассматривать положительные однородные полиномы четной степени. В [10] установлено, что в том случае, когда элементы всех матриц из $\mathcal{A}$ неотрицательны, справедливы неравенства

$$r^{-1/n}\rho^{1/n}(\Sigma_n) \le \rho(\mathcal{A}) \le \rho^{1/n}(\Sigma_n), \qquad (2)$$

где $\Sigma_n = A_1^{\otimes n} + A_2^{\otimes n} + \ldots + A_r^{\otimes n}$, а $A^{\otimes n}$ обозначает n-кратное кронекерово (тензорное) произведение матрицы A на себя. Неравенства (2) теоретически позволяют вычислить спектральный радиус $\rho(\mathcal{A})$ с любой требуемой точностью. Однако с ростом n размерность матрицы Σ_n растет столь быстро, что даже при умеренных значениях величин $d = 3, 4$, $r = 5, 6$ вычисления становятся практически невыполнимыми. Для случая, когда матрицы из $\mathcal{A}$ произвольны, справедлив [10] несколько более сложный аналог формулы (2).

*Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича
Российской Академии наук, Москва*

Первые алгоритмы вычисления $\rho(\mathscr{A})$ были предложены в [1–3] и улучшены в [11, 12]. К сожалению, ни один из этих алгоритмов, за исключением, возможно, алгоритма, основанного на формуле (2), не дает априорной оценки числа шагов, требуемых для достижения заданной точности приближения $\rho(\mathscr{A})$. В связи с этим задача получения явных оценок аппроксимации величины $\rho(\mathscr{A})$ остается актуальной. Кроме того, во многих приложениях важны оценки скорости сходимости именно в обобщенной формуле Гельфанда (1), имеющей прозрачную интерпретацию в теории динамических систем.

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ

Целью настоящего раздела является получение явной оценки скорости сходимости величин $\|\mathscr{A}^n\|^{\frac{1}{n}}$ к обобщенному спектральному радиусу $\rho(\mathscr{A})$.

Здесь несколько особую роль играет ситуация, когда $\rho(\mathscr{A}) = 0$. Для ответа на вопрос, при каких условиях $\rho(\mathscr{A}) = 0$, можно воспользоваться утверждением из [13], согласно которому существует такая зависящая только от размерности пространства константа $C_d > 1$, что для любого ограниченного множества матриц $\mathscr{A}$ и для любой нормы $\|\cdot\|$ в $\mathbb{K}^d$ имеет место неравенство

$$\|\mathscr{A}^d\| \le C_d \rho(\mathscr{A}) \|\mathscr{A}\|^{d-1}. \tag{3}$$

Отсюда и из (1) следует, что равенство $\rho(\mathscr{A}) = 0$ равносильно равенству $\mathscr{A}^d = \{0\}$ или же нильпотентности семейства матриц $\mathscr{A}$. Таким образом, теоретически проверить условие $\rho(\mathscr{A}) = 0$ можно за конечное число шагов: достаточно убедиться, что все произведения матриц из $\mathscr{A}$ с числом сомножителей, равным d, обращаются в нуль.

Если же $\rho(\mathscr{A}) \ne 0$, то при каждом $n \ge 1$ справедлива [14] оценка

$$\gamma_*^{\frac{1+\ln n}{n}} \|\mathscr{A}^n\|^{\frac{1}{n}} \le \rho(\mathscr{A}) \le \|\mathscr{A}^n\|^{\frac{1}{n}} \tag{4}$$

с некоторой константой $\gamma_* \in (0, 1)$. К сожалению, точного значения или хотя бы эффективно вычислимых оценок для константы γ_* в [14] не приводится. Этот пробел до известной степени восполняет следующая теорема, доказательство которой основано на использовании неравенств Боши (3).

Т е о р е м а 1. *Для любого множества матриц $\mathscr{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_r\}$ размерности $d \times d$, $d \ge 2$, с элементами из поля $\mathbb{K}$ и для любой нормы $\|\cdot\|$ в $\mathbb{K}^d$ при каждом $n = 1, 2, \ldots$ справедливы оценки*

$$C_d^{-\frac{\sigma_d(n)}{n}} \left(\frac{\|\mathscr{A}^d\|}{\|\mathscr{A}\|^d}\right)^{\frac{\nu_d(n)}{n}} \|\mathscr{A}\|^{\frac{1}{n}} \le \rho(\mathscr{A}) \le \|\mathscr{A}\|^{\frac{1}{n}}, \tag{5}$$

где $C_d = 2^d - 1$ при $r = 1$, $C_d = (2^d - 1)^{2d} d^d$ при $r > 1$, а константы $\sigma_d(n)$, $\nu_d(n)$ при $d = 2$ определяются равенствами

$$\sigma_d(n) = \frac{1}{2}\log_2 2n \cdot \log_2 4n, \quad \nu_d(n) = \log_2 2n,$$

а при $d > 2$ – равенствами

$$\sigma_d(n) = \frac{(d-1)^3}{(d-2)^2} \cdot n^{\frac{\ln(d-1)}{\ln d}}, \quad \nu_d(n) = \frac{(d-1)^2}{d-2} \cdot n^{\frac{\ln(d-1)}{\ln d}}.$$

Утверждение теоремы 1, по-видимому, ново даже для случая наборов $\mathscr{A}$, состоящих из одной матрицы. В то же время оценки (5) слабее, чем оценки (4). Вызвано ли это способом доказательства оценок (5) или тем фактом, что участвующие в этих оценках константы C_d, $\sigma_d(n)$ и $\nu_d(n)$ универсальны, т.е. не зависят ни от семейства матриц, ни от выбора нормы $\|\cdot\|$, неясно.

Подчеркнем еще раз, что количество вычислений, необходимых для оценки величины $\|\mathscr{A}^d\|$, быстро растет с ростом d и уже при $d = 3, 4$, $r = 5, 6$ необходимые вычисления становятся практически невыполнимыми. Поэтому оценки (5) вряд ли пригодны для практического вычисления спектрального радиуса семейства матриц и могут представлять скорее теоретический интерес. При этом оценки (5) существенно “конечномерны" и едва ли могут быть обобщены на семейства линейных операторов в бесконечномерных пространствах.

Для неприводимых семейств матриц $\mathscr{A}$ неравенства (4) допускают существенное усиление [14, 6] : $\gamma^{1/n}\|\mathscr{A}^n\|^{1/n} \le \rho(\mathscr{A}) \le \|\mathscr{A}^n\|^{1/n}$ где $\gamma \in (0, 1)$.

Некоторые оценки для константы γ получены в [6]. Ниже будут получены другие, на наш взгляд более конструктивные, явные априорные оценки совместного спектрального радиуса для неприводимых семейств матриц. Назовем p-мерой неприводимости (в норме $\|\cdot\|$) семейства матриц $\mathscr{A}$ число

$$\chi_p(\mathscr{A}) = \\ = \inf_{\substack{x \in \mathbb{K}^d \\ \|x\| = 1}} \sup\{t\colon S(t) \subseteq \operatorname{conv}\{\mathscr{A}_p(x) \cup \mathscr{A}_p(-x)\}\},$$

где $S(t)$ обозначает шар радиуса t в норме $\|\cdot\|$. Мера неприводимости $\chi_p(\mathscr{A})$ под именем мера квазиуправляемости была введена и исследована в [15] в связи с задачами оценки “всплесков” совокупностей переходных режимов линейных систем управления. Основанием для названия “мера неприводимости" для величины $\chi_p(\mathscr{A})$ является тот факт, что при $p \geq d - 1$ семейство матриц $\mathscr{A}$ неприводимо, если и только если $\chi_p(\mathscr{A}) > 0$.

Теорема 2. *Для любых* $n \geq 1$, $p \geq d - 1$ *справедливы оценки*

$$(\nu_p(\mathscr{A}))^{-1/n}\|\mathscr{A}^n\|^{1/n} \leq \rho(\mathscr{A}) \leq \|\mathscr{A}^n\|^{1/n},$$

где $\nu_p(\mathscr{A}) = \dfrac{\max\{1, \|\mathscr{A}\|^p\}}{\chi_p(\mathscr{A})}$.

Отметим, что величина $\nu_p(\mathscr{A})$ эффективно вычисляется непосредственно по $\mathscr{A}$ за конечное число алгебраических операций. Отметим также, что утверждение теоремы 2 за одним исключением справедливо лишь для матричных семейств, состоящих из более чем одной матрицы. Это связано с тем, что одноматричные семейства $\mathscr{A} = \{A\}$ могут быть неприводимыми только в том случае, когда размерность матрицы A равна 2×2, причем A не имеет вещественных собственных значений.

ИТЕРАЦИОННЫЕ ПРОЦЕДУРЫ

Как отмечалось в предыдущем разделе, результаты теорем 1 и 2 вряд ли пригодны для практического применения даже в случае матриц достаточно низких размерностей. В связи с этим ниже предлагаются две итерационные процедуры, позволяющие не только вычислять с любой наперед заданной степенью точности совместный спектральный радиус, но и одновременно производить приближенное построение норм Барабанова соответствующих наборов матриц.

Непрерывную функцию $\gamma(t, s)$, $t, s > 0$, обладающую свойствами $\gamma(t, t) = t$, $\min\{t, s\} < \gamma(t, s) < \max\{t, s\}$ при $t \neq s$ будем называть в дальнейшем функцией усреднения. Примерами функций усреднения являются функции $\gamma(t, s) = \dfrac{t + s}{2}$, $\gamma(t, s) = \sqrt{ts}$,

$\gamma(t, s) = \dfrac{2ts}{t + s}$.

Пусть в $\mathbb{K}^m$ заданы некоторая норма $\|\cdot\|_0$ и произвольный элемент $e \neq 0$, для которого $\|e\|_0 = 1$, и пусть $\gamma(\cdot, \cdot)$ – некоторая функция усреднения. Построим рекурсивно последовательность норм $\|\cdot\|_n$ по следующим правилам:

MR_1: считая, что норма $\|\cdot\|_n$ уже известна, вычислим величины

$$\rho_n^+ = \max_{x \neq 0} \frac{\max_i \|A_i x\|_n}{\|x\|_n}, \quad \rho_n^- = \min_{x \neq 0} \frac{\max_i \|A_i x\|_n}{\|x\|_n};$$

MR_2: положим $\gamma_n = \gamma(\rho_n^-, \rho_n^+)$, $\mu_n = \max\{\|e\|_n, \gamma_n^{-1}\max_i \|A_i e\|_n\}$ и определим новую норму

$$\|x\|_{n+1} = \mu_n^{-1}\max\{\|x\|_n, \gamma_n^{-1}\max_i \|A_i x\|_n\}.$$

Теорема 3. *Для любого неприводимого набора матриц* $\mathscr{A}$ *и любой функции усреднения* $\gamma(t, s)$ *последовательности* $\{\rho_n^{\pm}\}$, *определяемые итерационной процедурой* MR_1, MR_2, *сходятся к* $\rho(\mathscr{A})$, *а последовательность норм* $\|\cdot\|_n$ *равномерно на каждом ограниченном множестве сходится к некоторой норме Барабанова* $\|\cdot\|^*$ *набора матриц* $\mathscr{A}$. *При этом последовательность* $\{\rho_n^-\}$ *не убывает, а последовательность* $\{\rho_n^+\}$ *не возрастает и* $\rho_n^- \leq \rho(\mathscr{A}) \leq \rho_n^+$ *при* $n = 1, 2, \ldots$, *что предоставляет апостериорную оценку погрешности вычисления* $\rho(\mathscr{A})$.

Таким образом, итерационная процедура MR_1, MR_2 приводит к построению нормы Барабанова и нахождению совместного спектрального радиуса набора матриц $\mathscr{A}$. Процедура построения чисел $\rho_n^{\pm}$ сходна с методом приближения совместного спектрального радиуса, предложенным в [11]. В то же время метод численного построения норм Барабанова предлагается, по-видимому, впервые.

Поскольку в процедуре MR_1, MR_2 в качестве очередного приближения к норме Барабанова выбирается максимум значений уже построенного приближения и некоей вспомогательной нормы, то она будет называться в дальнейшем процедурой по методу max-релаксации. В некоторых ситуациях может оказаться более предпочтительным другой вариант итерационной процедуры построения норм Барабанова и вычисления совместного спектрального радиуса, которую естественно назвать итерационной процедурой по методу линейной релаксации.

Пусть снова $\|\cdot\|_0$ – некоторая норма в $\mathbb{K}^m$ и $e \neq 0$ – произвольный элемент из $\mathbb{K}^m$, для которого $\|e\|_0 = 1$. Пусть заданы числа λ^- и λ^+, удовлетворяющие соотношениям $0 < \lambda^- \leq \lambda^+ < 1$, которые будут играть в дальнейшем роль границ параметров линейной релаксации. Построим рекурсивно последовательность норм $\|\cdot\|_n$ по следующим правилам:

LR_1: совпадает с MR_1;

LR_2: положим $\gamma_n = \max_i \|A_i e\|_n$, выберем произвольным образом число $\lambda_n \in [\lambda^-, \lambda^+]$ и определим новую норму

$$\|x\|_{n+1} = \lambda_n\|x\|_n + (1 - \lambda_n)\gamma_n^{-1}\max_i \|A_i x\|_n.$$

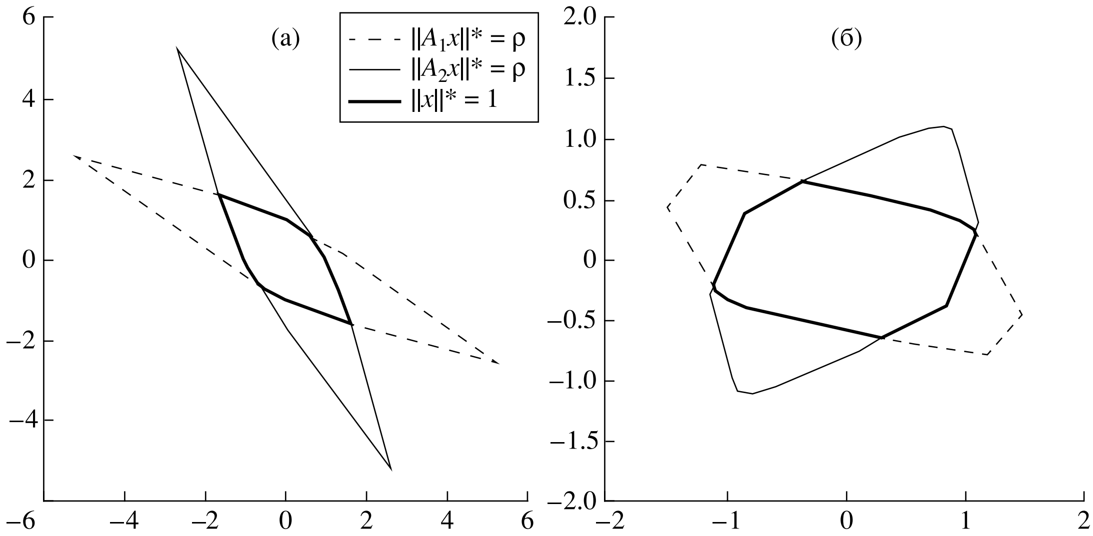

Рис. 1. Примеры вычисления нормы Барабанова для пары двумерных матриц.

Отметим, что норма $\|x\|_{n+1}$ корректно определена при любом выборе γ_n, поскольку в силу неприводимости набора матриц $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_r\}$ векторы $A_1x, A_2x, \ldots, A_rx$ ни при каком $x \neq 0$ не могут одновременно обратиться в нуль, а тогда $\rho_n^- > 0$ и $\gamma_n \geq \rho_n^- \|e\|_n > 0$.

Процедура LR_1, LR_2 отличается от процедуры MR_1, MR_2 лишь методом пересчета норм $\|\cdot\|_n$ на втором шаге. При этом в отличие от процедуры MR_1, MR_2 величины $\rho_n^{\pm}$ не используются для пересчета норм $\|\cdot\|_n$, а согласно приводимой ниже теореме 4, нужны лишь для оценки точности вычисления $\rho(\mathcal{A})$.

Т е о р е м а 4. *Для любых последовательностей чисел* $\{\rho_n^{\pm}\}$ *и норм* $\|\cdot\|_n$, *определяемых итерационной процедурой* LR_1, LR_2, *справедливы все утверждения теоремы* 3.

Вместо итерационной процедуры LR_1, LR_2 можно было бы рассмотреть формально более общую процедуру, в которой числа γ_n выбирались бы произвольным образом, лишь бы для них выполнялись включения $\gamma_n \in [\rho_n^-, \rho_n^+]$, а нормировка получающихся норм осуществлялась бы принудительно:

LR_1': совпадает с MR_1 и LR_1;

LR_2': выберем произвольным образом числа $\lambda_n \in [\lambda^-, \lambda^+]$, $\gamma_n \in [\rho_n^-, \rho_n^+]$ и определим сначала вспомогательную норму

$$\|x\|'_{n+1} = \lambda_n\|x_n\| + (1-\lambda_n)\gamma_n^{-1}\min_i\|A_ix\|_n,$$

а затем норму

$$\|x\|_{n+1} = \frac{\|x\|'_{n+1}}{\|e\|'_{n+1}}.$$

Если выписать явные формулы для пересчета норм $\|x\|_{n+1}$ через $\|x\|_n$ в условии LR_2', то они будут совпадать с условиями LR_2. Таким образом, рассмотрение итерационных процедур вида LR_1', LR_2' не добавляет общности!

ПРИМЕРЫ

Приведем два примера результатов вычислений по схеме MR_1, MR_2, реализованных с помощью программы MATLAB®. В первом примере рассматривалось семейство $\mathcal{A} = \{A_1, A_2\}$ двумерных матриц $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Для вычисления $\rho(\mathcal{A})$ с абсолютной погрешностью 10^{-3} потребовалось 13 итераций алгоритма MR_1, MR_2. При этом было получено значение $\rho(\mathcal{A}) = 1.617$. Приближение для нормы Барабанова $\|\cdot\|^*$ после 13-й итерации алгоритма MR_1, MR_2 представлено на рис. 1а.

Во втором примере рассматривалось семейство $\mathcal{A} = \{A_1, A_2\}$ двумерных матриц $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$. Для вычисления $\rho(\mathcal{A})$ с абсолютной погрешностью 10^{-3} потребовалось 24 итерации алгоритма MR_1, MR_2. При этом было получено значение $\rho(\mathcal{A}) = 1.228$. Приближение для нормы Барабанова $\|\cdot\|^*$ после 24-й итерации алгоритма MR_1, MR_2 представлено на рис. 1б.

ЗАМЕЧАНИЯ

Вопрос о точности приближения норм Барабанова нормами $\|\cdot\|_n$ остается открытым. Одна из трудностей в получении соответствующих оценок заключается в том, что в общем случае нормы Барабанова семейства матриц определяются неоднозначно. Именно поэтому выше и были предложены релаксационные, а не прямые схемы вычислений. Более того, если положить $\lambda_n \equiv 0$ при реализации алгоритма LR_1, LR_2, то полученная прямая схема построения норм Барабанова может не обладать свойством сходимости. Открыт и вопрос о скорости сходимости последовательностей $\{\rho_n^{\pm}\}$ к совместному спектральному радиусу.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 06–01–00256).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Brayton R.K., Tong C.H.* // IEEE Trans. Circuits Syst. 1980. V. 27. P. 1121–1130.
2. *Барабанов Н.Е.* // АиТ. 1988. № 2. С. 40–46.
3. *Daubechies I., Lagarias J.C.* // SIAM J. Math. Anal. 1992. V. 23. № 4. P. 1031–1079.
4. *Rota G.-C., Strang G.* // Indag. Math. 1960. V. 22. P. 379–381.
5. *Elsner L.* // Linear Algebra Appl. 1995. V. 220. P. 151–159.
6. *Протасов В.Ю.* // Фундам. и прикл. математика. 1996. Т. 2. № 1. С. 205–231.
7. *Berger M.A., Wang Y.* // Linear Algebra Appl. 1992. V. 166. P. 21–27.
8. *Chen Q., Zhou X.* // Linear Algebra Appl. 2000. V. 315. № 1–3. P. 175–188.
9. *Parrilo P.A., Jadbabaie A.* // Linear Algebra Appl. 2008. V. 428. № 10. P. 2385–2402.
10. *Blondel V.D., Nesterov Y.* // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 2005. V. 27. № 1. P. 256–272.
11. *Gripenberg G.* // Linear Algebra Appl. 1996. V. 234. P. 43–60.
12. *Maesumi M.* // Linear Algebra Appl. 1996. V. 240. P. 1–7.
13. *Bochi J.* // Linear Algebra Appl. 2003. V. 368. P. 71–81.
14. *Wirth F.* // Intern. J. Robust Nonlin. Control. 1998. V. 8. № 12. P. 1043–1058.
15. *Козякин В.С., Покровский А.В.* // ДАН. 1992. Т. 324. № 1. С. 60–64.