

Описание пространства дизайна в задачах представления и анализа данных с помощью экстремальных эллипсоидов

Бедринцев Алексей Александрович
Институт проблем передачи
информации им. А.А. Харкевича
Российской академии наук
alekseybed@phystech.edu

Чепыжов Владимир Викторович
Институт проблем передачи
информации им. А.А. Харкевича
Российской академии наук
chep@iitp.ru

Аннотация

В настоящей статье ставится задача нахождения эллипсоида минимального объема, содержащего наибольшее количество точек из заданного множества и лежащего в выпуклом многограннике. Приводится двухэтапный метод решения задачи. На первом этапе строится эллипсоид по точкам, а на втором этапе он изменяется так, чтобы принадлежал многограннику ограничений. В статье проведено сравнение различных подходов к решению задачи каждого этапа.

1. Введение

В прикладных задачах часто приходится моделировать сложные объекты, которые параметризуются большим числом переменных. На значения этих переменных накладывается множество ограничений, связанных с геометрическими особенностями и физическими свойствами моделируемых объектов.

Для эффективного решения задач анализа данных применяют методы снижения размерности. При применении этих методов множество допустимых значений переменных в исходном пространстве переходит в допустимое множество в пространстве меньшей размерности. При таком преобразовании структура и геометрические свойства допустимого множества могут существенно усложниться. Тем более при переходе в сжатое пространство теряется информация о физическом и геометрическом смысле отдельных координат цифрового описания объекта.

Задача в большом количестве случаев может быть сформулирована как поиск такого вектора \hat{x} из некоторого множества Ω (пространства дизайна), при котором некоторая функция $f(x)$ принимает наименьшее (наибольшее) значение. В литературе методам оптимизации уделяется широкое внимание, тогда как методы построения пространства дизайна

менее освещены.

В связи с этим актуальна задача аппроксимации имеющегося набора данных, принадлежащего допустимому множеству, какими-либо более простыми геометрическими телами. Часто в приложениях данные представляют собой конечный набор точек фазового пространства, а допустимое множество является выпуклым многогранником.

Самый простой в реализации и часто используемый на практике метод аппроксимации – параллелепипед с гранями, параллельными координатным плоскостям. В случае, если данные образуют наклоненное узкое облако, внутри параллелепипеда имеются большие области, которые не соответствуют реальным объектам. С ростом размерности, объем «полезного множества» внутри параллелепипеда убывает экспоненциально.

Другой возможный подход связан с построением выпуклой оболочки данных. В пространствах размерности больше трех построение выпуклой оболочки – вычислительно сложная задача [1]. Кроме того, выпуклая оболочка может иметь достаточно сложную структуру и большое число граней, что не позволяет эффективно с ней работать.

В связи с этим весьма перспективным аппроксимирующим выпуклым множеством представляется эллипсоид, поскольку он лишен многих из перечисленных выше недостатков. Говоря неформально, задача заключается в нахождении «хорошего» эллипсоида, принадлежащего допустимому множеству, содержащего большинство точек выборки и имеющего наименьший объем.

В данной статье изложено несколько подходов к аппроксимации множества данных с помощью различных эллипсоидов. Эллипсоиды строятся в два этапа. На первом строится эллипсоид по точкам. Он не учитывает наличие допустимого множества. На втором этапе применяется одна из предлагаемых процедур «вписывания» эллипсоидов в допустимое

множество. В работе рассмотрен случай, когда допустимое множество представляет собой выпуклый многогранник.

Разработанные процедуры были использованы для решения конкретной инженерной задачи — построение эллипсоида вокруг выборки точек, где каждая точка есть описание профиля крыла самолета, и вписанного в выпуклый многогранник, образованный линейными ограничениями, которые отражают условия корректности формы профилей. Множество профилей для решения задачи было отобрано экспертами. В работе приводится анализ полученных результатов.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 приводится постановка задачи. В разделе 3 рассказано о подходе к решению задачи в два этапа. В разделе 4 описаны различные алгоритмы построения эллипсоидов по точкам, а в разделе 5 приводятся методы построения эллипсоида, вписанного в допустимое множество. Раздел 6 содержит результат сравнения разработанных алгоритмов на реальном и искусственном наборе данных. В разделе 7 проводится сравнение предложенного в статье метода со случайной генерацией эллипсоидов. Раздел 8 подводит итоги статьи.

2. Постановка задачи

Исходными данными для задачи являются:

1. Множество точек $X = \{x_i \in \mathbf{R}^d\}_{i=1}^N$ — цифровых описаний объектов.
2. Многогранник ограничений $D = \{x \in \mathbf{R}^d | Ax \leq b\}$, заданный системой линейных неравенств. Ограничения, задающие D , являются необходимыми условиями корректности цифрового описания объекта, включают в себя ограничения на физические и геометрические характеристики объекта, известные из предметной области.

Требуется построить эллипсоид $E = \{x \in \mathbf{R}^d | (x-c)^T P^{-1} (x-c) \leq 1\}$, где симметричная положительная определенная матрица P размера $d \times d$ — матрица эллипсоида, а вектор $c \in \mathbf{R}^d$ — центр эллипсоида. Эллипсоид должен принадлежать многограннику D и минимизировать следующие функции:

1. Объем эллипсоида:

$$Vol(E) = w_d (\det P)^{\frac{1}{2}}, \quad (1)$$

где w_d — объем d -мерного единичного шара.

2. Количество точек из X вне эллипсоида:

$$K(E) = \#\{x \in X | (x-c)^T P^{-1} (x-c) > 1\}. \quad (2)$$

Одновременно минимизировать оба критерия невозможно. Решением поставленной задачи

$$\begin{aligned} \min_{P,c} (Vol(E), K(E)) \\ \text{s.t. } E \subset D \end{aligned} \quad (3)$$

будет набор оптимальных по Парето эллипсоидов. Это множество эллипсоидов, таких что не существует допустимых эллипсоидов E' , которые лучше эллипсоидов из этого набора по обоим критериям (1) и (2).

3. Метод решения задачи

Особенностью двухкритериальной задачи (3) является дискретный критерий (2) количества точек вне эллипсоида. Задача может быть решена перебором подмножеств $G \subseteq 2^X$ тех точек, которые принадлежат эллипсоиду. В этом случае получим семейство задач

$$\begin{aligned} \min_{P,c} (Vol(E)) \\ \text{s.t. } E \subset D, \\ G \subset E. \end{aligned} \quad (4)$$

Легко привести пример, подтверждающий, что ограничения в задаче (4) задают невыпуклое пространство дизайна. Поиск глобального минимума в этих задачах затруднен, так как задачи являются невыпуклыми. Поэтому точное решение поставленной задачи вычислительно сложно. Рассмотрим методы приближенного решения задачи (3).

В [2] предложен подход построения искомого эллипсоида в два этапа. На первом шаге строится базовый эллипсоид на основе выборки X точек без учета многогранника D . В работе [2] использовались классические эллипсоиды небольшого объема, содержащие все точки — эллипсоид Лёвнера минимального объема, содержащий все точки, эллипсоид с минимальным следом его матрицы, а также эллипсоид главных компонент, гомотетично растянутый относительно центра так, чтобы все точки из X лежали в эллипсоиде.

В работе [3] обобщаются результаты работ [4] и [5], в которых предложены различные методы описания множества точек с помощью эллипсоидов специального вида. В результате сформулированы две более общих постановки задачи, которые дают эллипсоиды, имеющие меньший объем при том же количестве точек выборки вне эллипсоида.

В работе [2] также предложено три метода учета многогранника, с помощью которых эллипсоид, построенный по точкам, видоизменяется так, чтобы он принадлежал многограннику. При этом объем базового эллипсоида уменьшается, и вне эллипсоида оказывается немного больше точек.

В разделе 4 базовые эллипсоиды рассмотрены более подробно. В разделе 5 описаны процедуры улучшения эллипсоидов, чтобы они принадлежали заданному выпуклому многограннику.

4. Базовые эллипсоиды

Известны классические эллипсоиды, которые описывают множество точек, имея небольшой объем. Они рассмотрены в первых подразделах 4.1, 4.2, 4.3. В разделах 4.4 и 4.5 описаны способы выпуклой аппроксимации задачи (3) для случая $D = \mathbf{R}^d$.

4.1. Эллипсоид главных компонент

Самым распространенным и простым в реализации является эллипсоид главных компонент [6][7]. Его центр есть среднее арифметическое точек выборки:

$$c = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i ,$$

а матрица эллипсоида пропорциональна ковариационной матрице выборке:

$$P = \gamma \text{Cov}(X, X) ,$$

где коэффициент γ подбирается так, чтобы все точки из X принадлежали эллипсоиду:

$$\gamma = \max_{i, \dots, N} (x_i - c) \text{Cov}^{-1}(X, X) (x_i - c)^T .$$

4.2. Эллипсоид минимального объема

Также известен классический эллипсоид минимального объема, содержащий заданные точки (эллипсоид Лёвнера) [8]. Его построение осуществляется с помощью решения следующей задачи:

$$\begin{aligned} \min_{P, c} \det P \\ \text{s.t. } (x_i - c) P^{-1} (x_i - c)^T \leq 1, \quad i = 1, \dots, N . \end{aligned} \quad (5)$$

Данная задача может быть переписана в виде задачи выпуклого программирования [8].

4.3. Эллипсоид с минимальным следом его матрицы

Определитель матрицы $\det P$ - произведение собственных чисел матрицы P . Другой мерой малости эллипсоида может служить сумма собственных значений матрицы P - ее след. Задача поиска эллипсоида, содержащего точки выборки X , с минимальным следом его матрицы имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \min_{P, c} \text{tr } P \\ \text{s.t. } (x_i - c) P^{-1} (x_i - c)^T \leq 1, \quad i = 1, \dots, N . \end{aligned} \quad (6)$$

Путем соответствующей замены переменных, задача (6) может быть сведена к выпуклой [8].

4.4. Двухкритериальная задача поиска эллипсоидов, описывающих множество точек

Эллипсоиды главных компонент, минимального объема и с минимальным следом его матрицы дают эллипсоиды, лежащие в области меньших значений количества (2) точек из X вне эллипсоида. В работе [3] предложен подход получения эллипсоидов с различным количеством точек, лежащих вне эллипсоида.

Задача (3) приближенно сводится к семейству однокритериальных задач следующим образом. Уравнение эллипсоида переписывается путем ввода новой величины - эффективного квадрата радиуса R :

$$E = \{x \in \mathbf{R}^d \mid (x - c)^T P^{-1} (x - c) \leq R\} ,$$

Критерий объема заменяется на величину R , а функция $K(E)$ заменяется на сумму величин ξ_i , характеризующих удаленность точек, лежащих вне эллипсоида, от его границы. Получается задача

$$\begin{aligned} \min_{P, R, \xi} \left(R, \sum_{i=1}^N \xi_i \right) \\ \text{s.t. } (x_i - c)^T P^{-1} (x_i - c) \leq R + \xi_i, \quad i = 1 \dots N, \\ P = P^T \succ 0, \det P \leq 1, R \geq 0, \xi_i \geq 0, \quad i = 1 \dots N . \end{aligned} \quad (7)$$

Ограничение $\det P \leq 1$ введено, потому что размеры эллипсоида задаются и матрицей P , и квадратом радиуса R . При этом в уравнении эллипсоида можно умножить элементы матрицы P на некоторую константу $z > 1$, тем самым уменьшив величины R и $\sum_{i=1}^N \xi_i$ сколь угодно близко к нулю.

Так как задача (7) может быть переписана в виде задачи выпуклого программирования, то, перебирая различные значения $\nu \in [0; 1]$, можно получить точки на её Парето-фронте:

$$\begin{aligned} \min_{P, R, \xi} R + \frac{1}{N\nu} \sum_{i=1}^N \xi_i \\ \text{s.t. } (x_i - c)^T P^{-1} (x_i - c) \leq R + \xi_i, \quad i = 1 \dots N, \\ P = P^T \succ 0, \det P \leq 1, R \geq 0, \xi_i \geq 0, \quad i = 1 \dots N . \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь параметр скаляризации ν имеет ясный физический смысл - это максимальная доля тех точек множества X , которые не принадлежат эллипсоиду: $K(E) \leq \nu N$ [3].

Отметим связь данного эллипсоида с классическим эллипсоидом минимального объема.

Теорема 1 При $v \rightarrow 0$ эллипсоид, построенный с помощью задачи (8), стремится к эллипсоиду минимального объема, содержащему точки выборки (см. задачу (5)).

Доказательство. При малых значениях $v < \frac{1}{N}$ все точки выборки лежат внутри или на границе эллипсоида [3]. Следовательно, $\xi_i = 0$. Поэтому задача (8) эквивалентна следующей задаче:

$$\begin{aligned} \min_{P,R} R \\ \text{s.t. } (x_i - c)^T P^{-1} (x_i - c) \leq R, i = 1 \dots N, \\ P = P^T \succ 0, \det P \leq 1, R \geq 0 . \end{aligned}$$

В оптимальной точке квадрат R эффективного радиуса эллипсоида минимален, следовательно, определитель $\det P$ матрицы эллипсоида максимален и принимает значение 1. Так как в этом случае объем эллипсоида вычисляется по формуле $Vol(E) = R^d$, то получающийся эллипсоид имеет наименьший объем и содержит все точки. ■

4.5. Эллипсоид главных компонент с перемещенным центром

Как показывают результаты [3], заслуживает внимания сужение задачи (8) на множество эллипсоидов, подобных эллипсоиду главных компонент. А именно, матрица P фиксируется равной ковариационной матрице выборки. Центр эллипсоида и квадрат эффективного радиуса подбираются путем решения оптимизационной задачи:

$$\begin{aligned} \min_{c,R,\xi} R + \frac{1}{Nv} \sum_{i=1}^N \xi_i \\ \text{s.t. } (x_i - c)^T Cov^{-1}(X, X) (x_i - c) \leq R + \xi_i, i = 1 \dots N, \\ R \geq 0, \xi_i \geq 0, i = 1 \dots N . \end{aligned}$$

5. Процедуры учета многогранника

Эллипсоиды, рассмотренные в предыдущем разделе, строятся по множеству точек и могут не принадлежать многограннику. В настоящем разделе рассмотрено три процедуры получения эллипсоида, принадлежащего выпуклому многограннику D . Входными данными для этих процедур являются эллипсоид E , построенный по точкам, и система линейных неравенств, задающая D . Выходными данными этих процедур являются параметры эллипсоида $E' \subseteq D \cap E$, лежащего в пересечении базового эллипсоида и многогранника ограничений.

5.1. Последовательные сжатия базового эллипсоида

Данная процедура состоит в итеративном повторении до тех пор, пока эллипсоид не принадлежит многограннику, следующих шагов:

1. Перейти в систему координат, в которой эллипсоид будет шаром с единичным радиусом.
2. Найди гиперплоскость C (грань многогранника D) с наименьшим расстоянием до центра шара.
3. Сжать шар относительно центра вдоль направления \vec{n} нормали к C так, чтобы грань C стала касательной к шару.
4. Вернуться в исходную систему координат.

Так как количество граней многогранника D конечно, то данный алгоритм завершится за конечное число итераций.

5.2. Эллипсоид максимального объема, вписанный в пересечение базового эллипсоида и многогранника

Результатом данной процедуры будет эллипсоид E' с максимальным объемом среди тех, которые принадлежат одновременно и базовому эллипсоиду E , и многограннику D . Условия принадлежности $E' \subseteq E$ одного эллипсоида другому и условие $E' \subseteq D$ того, что эллипсоид лежит внутри многогранника, могут быть записаны так, что вместе образуют выпуклое множество допустимых эллипсоидов E' . Объем эллипсоида выражается через определитель его матрицы. Функция $\ln \det P$ является вогнутой, поэтому задача ее максимизации на выпуклом множестве является задачей выпуклого программирования [8].

5.3. Эллипсоид, вписанный в пересечение двух эллипсоидов

Если базовый эллипсоид не принадлежит многограннику, то проделать следующие шаги:

1. Построить эллипсоид E_{max} максимального объема, вписанный в многогранник D .
2. Построить эллипсоид E' , имеющий максимальный объем и вписанный в пересечение базового эллипсоида E и построенного на предыдущем шаге E_{max} .

Указанные эллипсоиды могут быть построены с помощью соответствующих задач выпуклого программирования [8].

6. Численные эксперименты

В разделе 4 описаны 5 методов построения базовых эллипсоидов. Метод, описанный в разделе 4.1, назовем *Classic PCA*, метод из раздела 4.2 – *MINVOL*, метод из раздела 4.3 – *MINTRACE*, в разделе 4.4 описан метод, который мы назовем *Optimal ellipsoid*, а метод из раздела 4.5 для краткости обозначим *PCA*.

Базовые эллипсоиды строятся по множеству точек X и могут не принадлежать многограннику D . В связи с этим к каждому базовому эллипсоиду может быть применена одна из трех процедур – *Tangent* (см. раздел 5.1), *Maxvol* (раздел 5.2) или *Two ellipsoids* (см. 5.3).

Задачи выпуклого программирования решались с помощью пакета CVX для MATLAB [9].

Таким образом, в совокупности имеем 15 алгоритмов описания пространства дизайна с помощью эллипсоидов.

Данные методы были применены к набору данных, взятому из реальной инженерной задачи моделирования профилей крыла самолета. Профиль представляет собой форму сечения крыла плоскостью, параллельную плоскости симметрии самолета. Он параметризуется ординатами точек верхнего y_u^i и нижнего y_l^i контуров в n фиксированных (одинаковых для всех профилей) значениях абсцисс (см. рисунок 1).

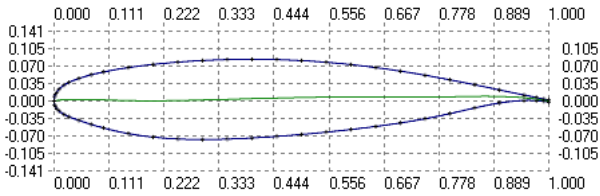


Рис. 1. Типичный профиль крыла самолета.

Необходимым условием корректности цифрового описания профиля является условие несамопересечения. Точки верхнего контура должны лежать выше точек нижнего:

$$y_u^i - y_l^i \geq 0, i = 1, \dots, n. \quad (9)$$

Экспертами отобрано $N = 206$ профилей. В работе [10] показано, что с помощью метода главных компонент можно с достаточной для практики точностью уменьшить размерность описания профиля от начального значения 57 до $d = 6$. При этом в сжатом пространстве допустимыми будут точки многогранника D , которые после восстановления удовлетворяют условиям (9).

На графике 2 по оси абсцисс отложен d -мерный объем эллипсоида, а по оси ординат – доля $\frac{K(E)}{N}$ то-

чек из множества X , которые не принадлежат эллипсоиду.

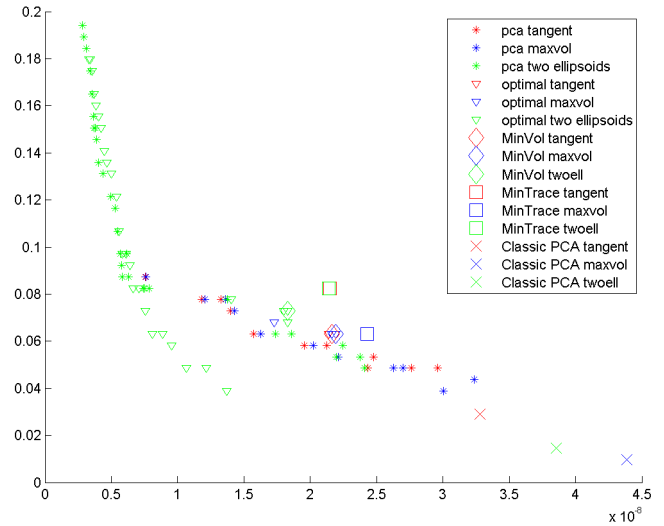


Рис. 2. Применение процедур к набору профилей крыла самолета.

Аналогичное сравнение произведем на искусственном наборе данных. Выборка X точек представляет из себя смесь двух двумерных нормальных распределений с единичной ковариационной матрицей и имеющих смещенные друг от друга центры. Многогранник D есть многоугольник, в котором лежат данные точки. Тестовые данные показаны на рисунке 3

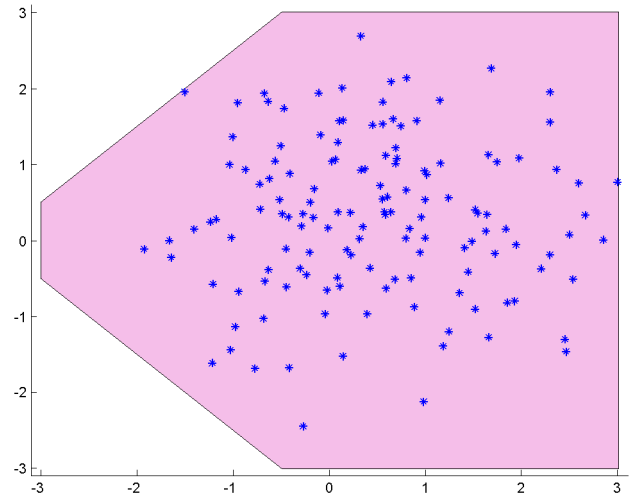


Рис. 3. Тестовый набор данных: смесь двух нормальных распределений.

Метрики объема и количества точек вне эллип-

соидов, построенных для этих наборов данных, отображены на рисунке 4.

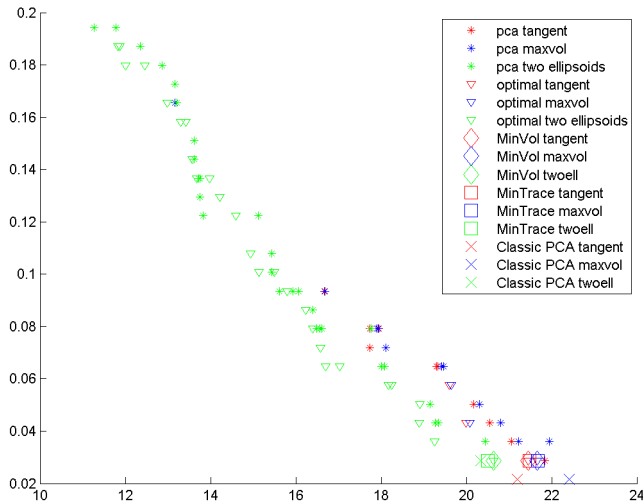


Рис. 4. Применение процедур к искусственному набору данных смеси двух нормальных распределений.

По графикам видно, что метод *Optimal Ellipsoid* позволяет получить эллипсоиды наименьшего объема при одинаковом количестве точек, лежащих вне эллипсоида. При достаточно больших значениях v построенные с помощью методов *Optimal* и *PCA* эллипсоиды принадлежат многограннику D , поэтому процедуры для построения эллипсоидов, вписанных в многогранник, не изменяют базовых эллипсоидов. При малых значениях v видно, что при одинаковом количестве точек вне эллипсоида наименьшим объемом обладает эллипсоид, для построения которого базовым эллипсоидом выбран *Optimal ellipsoid*.

На графиках видно подтверждение теоремы 1, так как для каждой процедуры вписывания эллипсоида в многогранник для эллипсоида минимального объема, содержащего все точки выборки, есть точка, получающаяся с помощью процедуры (8) при малом значении v .

7. Сравнение с методом Монте-Карло

Для решения задачи (3) возможен следующий подход:

1. Сгенерировать M эллипсоидов.
2. Для каждого эллипсоида E из полученного набора:
 - (a) Если эллипсоид не принадлежит многограннику D , применить одну из процедур, описанных в разделе 5.

- (b) Вычислить значения функций объема $Vol(E)$ и количества $K(E)$ точек из множества X , лежащих вне эллипсоида.

3. Найти среди эллипсоидов набор оптимальных по Парето.

Такой подход возможен в пространствах небольшой размерности [11].

В случае, если случайный эллипсоид выходит за грани многогранника, используется метод последовательных сжатий эллипсоида, описанный в разделе 5.1. Такой выбор процедуры изменения эллипсоида обусловлен его наименьшей вычислительной сложностью.

Увеличивая M , возможно приблизиться к решению задачи сколь угодно близко. В пространствах малой размерности для достижения необходимой плотности заполнения пространства параметров случайными точками требуется умеренное количество M итераций. С ростом размерности, при той же плотности заполнения пространства параметров (и, следовательно, точности метода) число M необходимых эллипсоидов растет экспоненциально.

Проведем два сравнения метода генерации случайных эллипсоидов и совокупности методов *Optimal Ellipsoid* (см. раздел 4.4) и метода построения эллипсоида максимального объема, вписанного в пересечение базового эллипсоида и эллипсоида максимального объема, лежащего внутри многогранника D (см. раздел 5.3). Входными данными для сравнения будет искусственный набор данных, который состоит из объединения двух выборок с 6-мерным нормальным распределением со смещенным друг относительно друга центрами. Многогранник ограничений имеет вид куба.

Во время первого сравнения подберем число случайных эллипсоидов M так, чтобы время работы алгоритмов было примерно одинаковым. Результат сравнения позволит сделать выводы о быстродействии нашего метода.

На графике 5 показаны характеристики эллипсоидов, полученных этими методами. По графику видно, что случайно сгенерированные эллипсоиды имеют больший объем при том же количестве точек вне эллипсоида.

При втором сравнении зададим число итераций M равным большому числу, чтобы получить приближение истинного Парето-фронта, и сравнить точность методов. На графике 6 показано сравнение результатов, полученных с помощью алгоритма из разделов 4.4 и 5.3 и случайной генерации достаточно большого количества эллипсоидов. По графику видно, что при одинаковом количестве точек из X вне эллипсоидов средняя разность объемов эллипсоидов ожидаемо уменьшилась, но при этом несмотря на

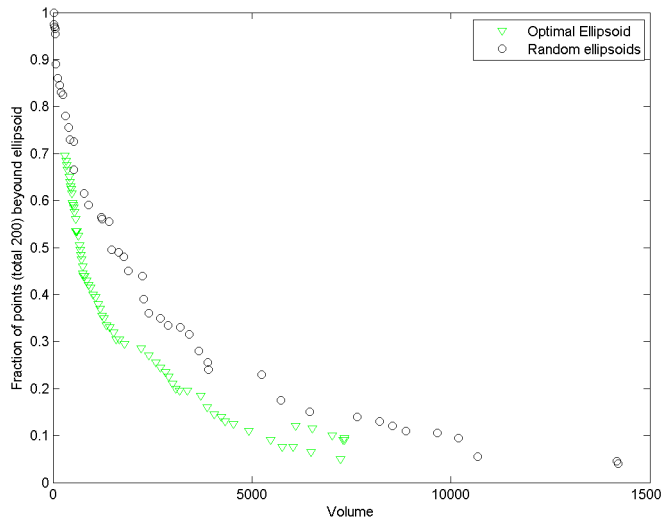


Рис. 5. Сравнение метода *Optimal Ellipsoid (two ellipsoids)* с Монте-Карло при одинаковом времени вычислений. $d = 6$.

большую вычислительную сложность метод случайной генерации и отбора оптимальных эллипсоидов не смог построить более качественное приближение к фронту Парето для 6-мерных данных.

В пространстве более низкой размерности ($d = 2$) процедура на основе генерации случайных эллипсоидов при равном времени выполнения дает примерно одинаковые приближения к Парето-фронту задачи (3) (см. рис. 7).

Однако при значительном увеличении количества случайных эллипсоидов метод Монте-Карло дает лишь немногим более хорошее решение задачи, чем предлагаемые в настоящей статье методы (см. рис. 8). Таким образом, предложенные в статье приближенные методы дают достаточно точное решение задачи (3) в исходной точной формулировке.

8. Заключение

В работе проведено сравнение различных методов описание множества точек, принадлежащих допустимому множеству, заданному в виде выпуклого многогранника. Предлагаемый метод в сравнении с другими методами дает более качественные результаты.

Направление дальнейших исследований может заключаться в разработке новых методов построения базовых эллипсоидов, в более точных аппроксимациях поставленной двухкритериальной задачи.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00150).

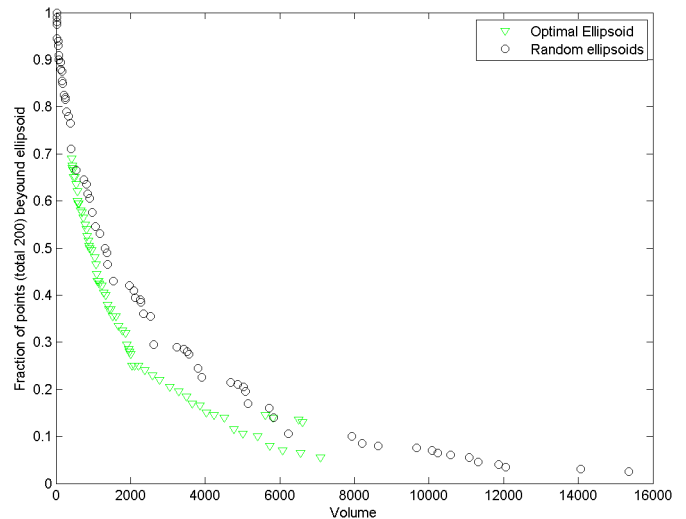


Рис. 6. Сравнение метода *Optimal Ellipsoid (two ellipsoids)* с Монте-Карло при большом количестве итераций. $d = 6$.

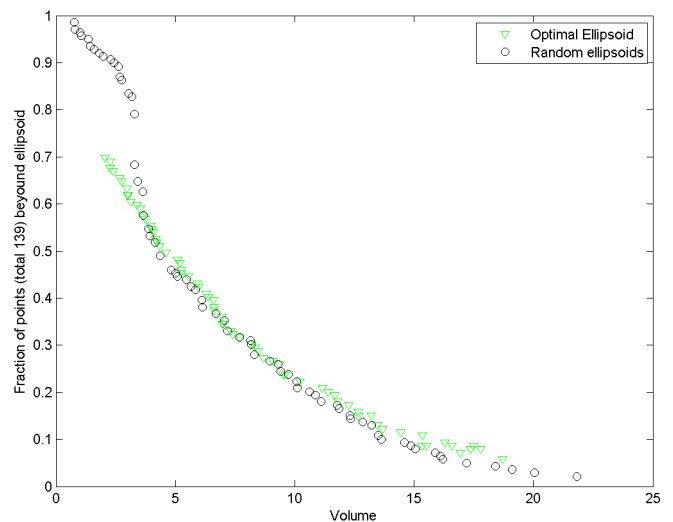


Рис. 7. Сравнение метода *Optimal Ellipsoid (two ellipsoids)* с Монте-Карло при большом количестве итераций. $d = 2$.

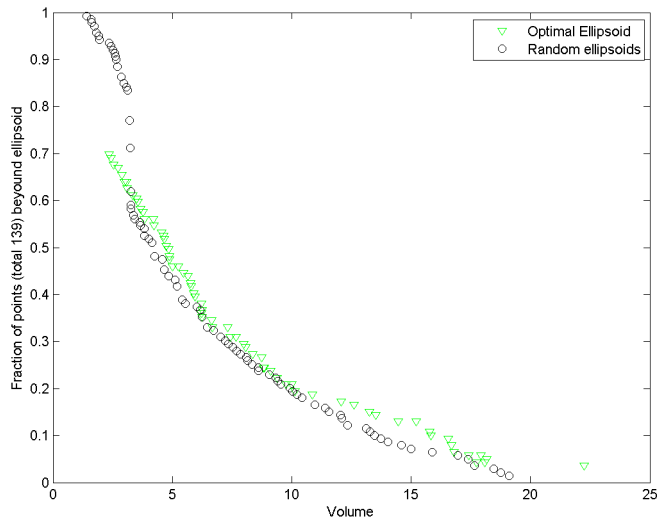


Рис. 8. Сравнение метода *Optimal Ellipsoid (two ellipsoids)* с Монте-Карло при большом количестве итераций. $d = 2$.

Список литературы

- [1] C. Bradford Barber et al., *The Quickhull Algorithm for Convex Hull*, ACM Transactions on Mathematical Software, 1996. Vol. 22, No. 4, pp. 469–483.
- [2] А.А. Бедринцев, В.В. Чепыжов, С.С. Чернова, *Экстремальные эллипсоиды как аппроксиматоры пространства дизайна в задачах предсказательного мета-моделирования*, Искусственный интеллект и принятие решений, 2015, №2, стр. 35–44.
- [3] А.А. Бедринцев, В.В. Чепыжов, *Описание пространства дизайна с помощью экстремальных эллипсоидов в задачах представления данных*, Информационные процессы, 2015, т. 4, стр. 402–413.
- [4] Wei-Cheng Chang, Ching-Pei Lee and Chih-Jen Lin, *A Revisit to Support Vector Data Description*. Technical report, National Taiwan University of Science and Technology, 2013.
- [5] Yang Zhang, Nirvana Meratnia, Paul J.M. Havinga, *Distributed online outlier detection in wireless sensor networks using ellipsoidal support vector machine*, Ad Hoc Networks, 2012, vol. 11, issue 3, pp. 1063–1074.
- [6] T. Jollie, *Principal Component Analysis*, New-York, Springer, 2002.
- [7] T. Jolliffe, *Principal Component Analysis*, Springer Series in Statistics, Berlin, Springer-Verlag, 1986.
- [8] S. Boyd, L. Vandenberghe, *Convex Optimization*, Cambridge, University Press, 2004.
- [9] CVX: Matlab Software for Disciplined Convex Programming, <http://cvxr.com/cvx/>
- [10] Е.В. Бурнаев, С.С. Чернова, *Об итеративном алгоритме подсчета главных компонент*, Информационные процессы, том 8, №2, 2008, с. 99–107.
- [11] А.А. Бедринцев, В.В. Чепыжов, *Двухкритериальная задача построения оптимальных эллипсоидов*