О сходимости траекторных аттракторов 3D систем Навье–Стокса со случайными быстро осциллирующими внешними силами

А. Ю. Горицкий

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, г. Москва
goritsky@mech.math.msu.su

В. В. Чепыжов

Институт проблем передачи информации им. А.А.Харкевича, г.Москва
и
Воронежский государственный университет, г.Воронеж
chep@iitp.ru

Г. А. Чечкин[1]

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, г. Москва
chechkin@mech.math.msu.su

Аннотация

Рассматриваются 3D системы Навье–Стокса в ограниченной области со случайными внешними силами, которые быстро осциллируют по пространственным переменным. Предполагается, что внешние силы являются статистически однородными и обладают свойством эргодичности. Доказано, что с вероятностью 1 траекторные аттракторы рассматриваемых 3D систем Навье–Стокса сходятся в соответствующей слабой топологии к траекторному аттрактору гомогенизированной 3D системы Навье–Стокса, внешняя сила которой получается гомогенизацией случайных внешних сил исходных систем Навье–Стокса. Для рассматриваемых систем единственность решения соответствующей задачи Коши не доказана и не предполагается.

Введение

При изучении математических задач в неоднородных средах со сложной микроструктурой, которые описываются уравнениями в частных производных, основными методами исследования являются асимптотический анализ и теория гомогенизации и усреднения (см., например, [4, 7, 11, 33, 37, 38, 40]). Эти методы позволяют существенно упростить моделирование композитов, армированных структур, перфорированных материалов, пористых сред, ячеистых структур, тел с вкраплениями концентраций массы, стратифицированных потоков (как ньютоновских, так и неньютоновских жидкостей), смесей жидкостей с разными вязкостями или плотностями, а также смесей жидкостей и газов и многих других сред и материалов. Теория гомогенизации и усреднения позволяет рассматривать как периодические или квазипериодические, так и случайные среды (см. случайные варианты, например, в [1, 12, 13, 14, 15, 16]).

[1]Исследования А.Ю.Горицкого и Г.А.Чечкина выполнены при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 17-01-00515 и 18-01-00046).

В настоящем работе изучаются аттракторы систем дифференциальных уравнений, которые моделируют долговременное поведение подобных сложных сред со случайной микроструктурой.

Аттракторы описывают поведение решений диссипативных эволюционных уравнений на больших интервалах времени, а так же в пределе, когда время стремится к бесконечности. С помощью аттракторов также бывает удобно исследовать устойчивость и неустойчивость возникающих предельных структур в изучаемых динамических системах, которые могут быть как конечномерными в случае обыкновенных дифференциальных уравнений, так и бесконечномерным в случае уравнений с частными производными. Аттракторы дают возможность выделить наиболее важные и существенные предельные множества траекторий, которые характеризуют рассматриваемую сложную модель, которая описывается данными эволюционными уравнениям (см., например, монографии [3, 22, 41] и цитируемую в них литературу).

Более конкретно, в данной работе наш интерес связан с асимптотическим поведением траекторий (слабых решений) 3D систем Навье–Стокса со случайными быстро осциллирующими внешними силами.

Первые результаты, связанные с аттракторами эволюционных уравнений с быстро (но не случайно) осциллирующими членами периодической, квазипериодической или почти периодической структуры, были получены в работах [32, 34, 35] с применением принципа усреднения Боголюбова. Усреднение глобальных аттракторов автономных и неавтономных 2D систем Навье–Стокса изучалось в [22, 23, 25, 42]. Некоторые проблемы, связанные с усреднением и гомогенизацией равномерных аттракторов диссипативных волновых уравнений, рассматривались в работах [18, 26, 34, 43, 47] для случая осцилляций по времени и в работах [22, 39, 42, 46] для осцилляций по пространственным переменным. Для уравнений и систем параболического типа, аналогичные задачи изучались в [22, 28, 29, 30, 31]. Работы [19, 20, 24, 25, 44] посвящены изучению аттракторов УрЧП, содержащих сингулярно осциллирующие члены.

Теория траекторных аттракторов для эволюционных УрЧП была разработана в [21, 22] (см. также обзор [45]). Эти методы особенно продуктивны при изучении долговременного поведения решений эволюционных уравнений, для которых теорема единственности соответствующей начально-краевой задачи не доказана (например, для неоднородной системы Навье–Стокса) или не имеет места (например, для эллиптических уравнений в полосе). Некоторые задачи об усреднении траекторных аттракторов эволюционных уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами изучались в [22, 42].

Работа [6] посвящена гомогенизации траекторных аттракторов автономных и неавтономных 3D систем Навье–Стокса со случайными осциллирующими внешними силами (см. также [5] случайную гомогенизацию систем реакции–диффузии). В работе [17] рассматривается аналогичная задача для комплексных уравнений Гинзбурга–Ландау со случайными быстро осциллирующими членами.

В настоящей работе рассматриваются автономные 3D системы Навье–Стокса, в которых внешние силы $g\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, \omega\right)$ являются случайными функциями, которые быстро осциллируют по пространственным переменным. Здесь ω — это элемент стандартного вероятностного пространства $(D, \mathcal{B}, \mu)$. Параметр $\varepsilon > 0$ характеризует частоту осцилляции. Вместе со случайными системами рассматриваются соответствующие гомогенизированные 3D системы Навье–Стокса с внешними силами $g^{hom}(x)$, где $g^{hom}(x)$ — это математическое ожидание функции $g\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, \omega\right)$.

Доказано, что траекторные аттракторы $\mathfrak{A}_\varepsilon$ систем со случайными осциллирующими членами сходятся почти всюду при $\varepsilon \to 0$ к траекторному аттрактору $\overline{\mathfrak{A}}$ гомогенизированной системы в подходящем функциональном пространстве. При выполнения условия, что случайная функция $g\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, \omega\right)$ является статистически однородной и удовлетворяет условию эргодичности с гладкой реализацией (см. подробнее следующие параграфы), доказано, что математическое ожидание совпадает с детерминированным пространственным средним.

Опишем содержание следующих параграфов. В § 1 дана формулировка задачи и основные обозначения. В § 2 сформулированы необходимые определения и утверждения, связанные с рассматриваемым случайным пространством, в частности, сформулирована эргодическая теорема Биркгофа. В § 3 приведены основные понятия и теоремы, связанные с траекторными аттракторами автономных эволюционных уравнений. § 4 посвящен изучению гомогенизации траекторных аттракторов 3D систем Навье–Стокса со случайными быстро осциллирующими членами.

1 Обозначения и постановка задачи

Рассматривается 3D система Навье–Стокса в ограниченной области $D \Subset \mathbb{R}^3$:

$$\partial_t u_\varepsilon + \nu L u_\varepsilon + B(u_\varepsilon) = P g_\varepsilon, \quad \operatorname{div} u_\varepsilon = 0, \quad u_\varepsilon|_{\partial D} = 0, \tag{1.1}$$

где $x = (x_1, x_2, x_3) \in D,\ g_\varepsilon = g_\varepsilon(x) = (g_\varepsilon^1, g_\varepsilon^2, g_\varepsilon^3)$ — это известная внешняя сила и $u_\varepsilon = u_\varepsilon(x,t) = (u_\varepsilon^1, u_\varepsilon^2, u_\varepsilon^3)$ — это неизвестное поле скоростей и $\varepsilon > 0$ — это малый параметр.

Мы уже исключили из 3D системы Навье–Стокса функцию давления, используя стандартный проектор Лэре P. В частности, в правой части системы (1.1) стоит Pg_ε — проекция внешней силы.

В автономной системе (1.1) присутствуют осцилляции по пространственным переменным во внешней силе:

$$g_\varepsilon = g\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, \omega\right), \text{ где } g^j = g^j(x, \xi, \omega),\ x \in D,\ \xi \in \mathbb{R}^3,\ j = 1, 2, 3.$$

Предполагается, что g_ε является случайной статистически однородной (по пространственным переменным) эргодической функцией с гладкой реализацией, ω — это элемент стандартного вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ (см. подробные определения в § 2).

В системе (1.1) оператор L — это оператор Стокса, $Lu = -P\Delta u$, и

$$B(u) = B(u,u), \quad B(u,v) := P(u,\nabla)\, v = P\sum_{i=1}^{3} u_i\, \partial_{x_i} v.$$

Оператор Лапласа $\Delta := \partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2$ действует в x-пространстве. Фиксированная величина $\nu > 0$ обозначает кинематическую вязкость, причем предполагается, что жидкость имеет постоянную плотность, которая равна 1. В дальнейшем мы будем часто опускать индекс ε функций u_ε.

Обозначим через H и H^1 замыкание в $(L_2(D))^3$ и $(H^1(D))^3$ множества

$$\mathcal{V}_0 = \{v \mid v \in (C_0^\infty(D))^3,\ \operatorname{div} v = 0\}.$$

Выше использовался ортогональный проектор Лэре P в $(L_2(D))^3$ на гильбертово пространство H. Скалярные произведения в H и H^1 обозначаются

$$(u,v) := \int_D (u(x), v(x))\, dx \quad \text{и} \quad (u,v)_1 := \langle Lu, v\rangle = \int_D (\nabla u(x), \nabla v(x))\, dx$$

а нормы $\|u\| := (u,u)^{1/2}$ и $\|u\|_1 := \langle Lu, u\rangle^{1/2}$, соответственно.

2 Свойства случайных функций

Обратимся к некоторым известным определениям и результатам, которые будут использоваться в дальнейшем. Пусть $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ – это вероятностное пространство, т.е., множество Ω снабжено σ-алгеброй $\mathcal{B}$ своих подмножеств, на которой задана σ-аддитивная мера μ такая, что $\mu(\Omega) = 1$.

Определение 2.1 *Семейство измеримых отображений $\mathcal{T}_\xi : \Omega \to \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^3$ называется* пространственной динамической системой*, если выполнены следующие свойства:*

1) групповое свойство*: $\mathcal{T}_{\xi_1+\xi_2} = \mathcal{T}_{\xi_1}\mathcal{T}_{\xi_2}$, $\forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^3$; $\mathcal{T}_0 = Id$, где Id – это тождественное отображение на Ω;*

2) изометрия *($\mathcal{T}_\xi$ сохраняют меру μ на Ω): $\mathcal{T}_\xi B \in \mathcal{B}$, $\mu(\mathcal{T}_\xi B) = \mu(B)$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^3$, $\forall B \in \mathcal{B}$;*

3) измеримость*: для любой измеримой функции $\psi(\omega)$ на Ω функция $\psi(\mathcal{T}_\xi\omega)$ измерима на $\Omega \times \mathbb{R}^3$ и непрерывна по ξ.*

Рассмотрим пространство $L_q(\Omega, \mu)$ ($q \geqslant 1$) измеримых функций на Ω, абсолютная величина которых интегрируема в степени q относительно меры μ. Если $\mathcal{T}_\xi : \Omega \to \Omega$ – некоторая пространственная динамическая система, то на пространстве $L_q(\Omega, \mu)$ определена группа операторов $\{\mathcal{T}_\xi\}$, зависящая от параметра $\xi \in \mathbb{R}^3$ и действующая по формуле

$$(\mathcal{T}_\xi \psi)(\omega) := \psi(\mathcal{T}_\xi \omega), \quad \psi \in L_q(\Omega, \mu).$$

Заметим, что из свойства 3) в Определении 2.1 следует, что группа $\mathcal{T}_\xi$ является сильно непрерывной, т.е.,

$$\lim_{\xi \to 0} \|\mathcal{T}_\xi \psi - \psi\|_{L_q(\Omega,\mu)} = 0$$

для любого элемента $\psi \in L_q(\Omega, \mu)$.

Определение 2.2 *Пусть $\psi(\omega)$ – измеримая функция на Ω. Функция*

$$\xi \mapsto \psi(\mathcal{T}_\xi \omega) \quad (\xi \in \mathbb{R}^n, \psi \in \mathbb{R})$$

при фиксированном $\omega \in \Omega$ называется реализацией функции *ψ.*

Следующее утверждение доказано, например, в работе [33] (см. также [11]).

Утверждение 2.1 *Если $\psi \in L_q(\Omega, \mu)$, то при почти всех $\omega \in \Omega$ реализация $\xi \mapsto \psi(\mathcal{T}_\xi\omega)$ принадлежит $L_q^{loc}(\mathbb{R}^3)$. Если последовательность $\{\psi_k\} \subset L_q(\Omega, \mu)$ сходится в $L_q(\Omega, \mu)$ к функции ψ, то найдется подпоследовательность $\{\psi_{k'}\}$ такая, что при почти всех $\omega \in \Omega$ реализация $\xi \mapsto \psi_{k'}(\mathcal{T}_\xi\omega)$ также сходится в $L_q^{loc}(\mathbb{R}^3)$ к реализации $\xi \mapsto \psi(\mathcal{T}_\xi\omega)$.*

Определение 2.3 *Измеримая функция $\psi(\omega)$ на Ω называется* инвариантной*, если при всех $\xi \in \mathbb{R}^3$ выполнено $\psi(\mathcal{T}_\xi\omega) = \psi(\omega)$ при почти всех $\omega \in \Omega$.*

Определение 2.4 *Пространственная динамическая система $\mathcal{T}_\xi$ называется* эргодической*, если любая инвариантная функция является константой.*

Обозначим через $\mathcal{R}$ стандартную борелевскую σ-алгебру подмножеств из $\mathbb{R}^3$.

Определение 2.5 *Пусть $\mathcal{F}(\xi)$ – произвольная функция из пространства $L_1^{loc}(\mathbb{R}^3)$. Говорят, что $\mathcal{F}(\xi)$ имеет* пространственное среднее*, если предел*

$$M(\mathcal{F}) := \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{|R|}\int\limits_R\dots\int \mathcal{F}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\,dx$$

существует для любого борелевского множества $R\in\mathcal{R}$ положительной меры и не зависит от выбора множества R. Число $M(\mathcal{F})$ называется ПРОСТРАНСТВЕННЫМ СРЕДНИМ *функции $\mathcal{F}$.*

Пространственное среднее определяется эквивалентным образом по формуле

$$M(\mathcal{F}) := \lim_{s\to+\infty}\frac{1}{|R_s|}\int\limits_{R_s}\dots\int \mathcal{F}(\xi)\,d\xi, \quad \text{где} \quad R_s = \left\{\xi\in\mathbb{R}^n \;\middle|\; \frac{\xi}{s}\in R\right\}.$$

Справедливо следующее утверждение (доказательство приведено в [11]).

Утверждение 2.2 *Пусть P — измеримое множество из $\mathbb{R}^3$. Пусть $p\geqslant 1$. Предположим, что измеримая функция $\mathcal{F}(x,\xi)$, $x\in P$, $\xi\in\mathbb{R}^3$, имеет пространственное среднее $M(\mathcal{F})(x)$ в $\mathbb{R}^3_\xi$ при каждом $x\in P$, и семейство $\{\mathcal{F}\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right),\ 0<\varepsilon\leqslant 1\}$, $x\in\mathcal{K}$, ограничено в $L_p(\mathcal{K})$, где $\mathcal{K}$ — произвольный компакт из P. Тогда $M(\mathcal{F})(\cdot)\in L_p^{loc}(P)$ и при этом*

$$\mathcal{F}\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right) \rightharpoonup M(\mathcal{F})(x) \text{ слабо в } L_p^{loc}(P) \ \text{ при } \ \varepsilon\to 0.$$

Замечание 2.1 *Отметим, что если функция $\mathcal{F}(x,\xi)$ является периодической или квазипериодической по x, то соответствующее пространственное среднее $M(\mathcal{F})(x)$ также является периодической или квазипериодической функцией.*

В следующий параграфах Утверждение 2.2 будет применяться для случая области $P=D$, в которой рассматривается система Навье–Стокса.

Нам понадобится следующее простое обобщение классической теоремы Биркгофа (см. [2, 8], а также [11, 33]). Следуя работе [27, Ch. VIII, § 7], эту теорему можно получить в следующем виде (см. также [48]).

Теорема 2.1 ***(Эргодическая теорема Биркгофа)*** *Пусть $P\subset\mathbb{R}^3$ и пусть пространственная динамическая система $\mathcal{T}_\xi$ ($\xi\in\mathbb{R}^3$) удовлетворяет определению 2.1. Рассмотрим вещественную измеримую функцию $\psi=\psi(x,\omega)$, $x\in P$, $\omega\in\Omega$, такую, что при всех $x\in P$ функция $\psi(x,\cdot)\in L_q(\Omega,\mu)$ при $q\geqslant 1$. Тогда при всех $x\in P$ и при почти всех $\omega\in\Omega$ реализация $\psi(x,\mathcal{T}_\xi\omega)$ имеет пространственное среднее $M(\psi(x,\mathcal{T}_\xi\omega))$. Кроме того, пространственное среднее $M(\psi(x,\mathcal{T}_\xi\omega))$ является условным математическим ожиданием функции $\psi(x,\omega)$ относительно σ-алгебры инвариантных подмножеств. Следовательно, $M(\psi(x,\mathcal{T}_\xi\omega))$ — инвариантная функция и*

$$\mathbb{E}(\psi)(x)\equiv\int\limits_\Omega \psi(x,\omega)\,d\mu = \int\limits_\Omega M(\psi(x,\mathcal{T}_\xi\omega))\,d\mu.$$

В частности, если динамическая система $\mathcal{T}_\xi$ является эргодической, то при почти всех $\omega\in\Omega$ выполнено тождество

$$\mathbb{E}(\psi)(x) = M(\psi)(x).$$

Отметим, что в Теореме 2.1 переменная $x \in P$ играет роль параметра. В следующих параграфах будет рассматриваться случай области $P = D$.

Определение 2.6 *Случайная функция $\psi(x, \xi, \omega)$, $x \in P$, $\xi \in \mathbb{R}^3$, $\omega \in \Omega$, называется* статистически однородной *при любом x, если $\psi(x, \xi, \omega) = \Psi(x, \mathcal{T}_\xi \omega)$ для некоторой функции $\Psi : P \times \Omega \to \mathbb{R}$, где $\mathcal{T}_\xi$ — пространственная динамическая система на Ω.*

2.1 Некоторые примеры

Периодический случай. Пусть Ω — это единичный куб $\{\omega \in \mathbb{R}^d, 0 \leq \omega_j \leq 1, j = 1, \dots, d\}$, μ — мера Лебега на нем. На Ω зададим пространственную динамическую систему $\mathcal{T}_\xi \omega = \omega + \xi \, (\mathrm{mod}\, 1)$. Мера Лебега является инвариантной. Эта динамическая система, очевидно, является эргодической. Реализация функции $f(\omega) \in L_q(\Omega)$, которую следует периодически продолжить на все пространство $\mathbb{R}^d$, имеет вид $f(\xi + \omega)$.

Квазипериодический случай. Пусть опять Ω — единичный куб в $\mathbb{R}^d$. Для $\xi \in \mathbb{R}^3$ положим $\mathcal{T}_\xi \omega = \omega + \lambda \xi \, (\mathrm{mod}\, 1)$, где $\lambda = \{\lambda_{ij}\}$ – это матрица $n \times d$. Очевидно, отображение $\mathcal{T}_\xi$ сохраняет меру Лебега на Ω. Эта динамическая система эргодична, если и только если $\lambda_{ij} k_j \neq 0$ для любого целого вектора $k \neq 0$.

Следовательно, $L_q(\Omega)$ – это пространство периодических функций с d переменными, и реализации имеют вид form $f(\omega + \lambda \xi)$. Эти реализации называются *квазипериодическими функциями*, если $f(\omega)$ непрерывна на $\mathbb{R}^d$.

3 Траекторные аттракторы эволюционных уравнений

В этом параграфе будет кратко дана общая схема построения траекторных аттракторов для автономных эволюционных уравнений (см. [22, 45]). В следующем параграфе эта схема будет применяться к изучению траекторных аттракторов случайных 3D систем Навье–Стокса с быстро осциллирующими внешними силами и соответствующих гомогенизированных систем.

Рассмотрим абстрактное эволюционное уравнение

$$\partial_t u = A(u), \quad t \geq 0. \tag{3.1}$$

Здесь $A(\cdot) : E_1 \to E_0$ — это нелинейный оператор, E_1, E_0 — банаховы пространства и $E_1 \subseteq E_0$ (see § 4).

Мы будем исследовать решения $u(s)$ уравнения (3.1), как функции переменной $s \in \mathbb{R}_+$ в целом. Здесь $s \equiv t$ обозначает переменную времени. Множество решений (3.1) называется *пространством траекторий* $\mathcal{K}^+$ уравнения (3.1). Опишем пространство траекторий $\mathcal{K}^+$ более подробно.

Сначала рассмотрим решения $u(s)$ уравнения (3.1), определенные на фиксированном отрезке времени $[0, M]$ из $\mathbb{R}_+$. Изучаем решения (3.1) из банахова пространства $\mathcal{F}_{0,M}$, которое зависит от числа M. Пространство $\mathcal{F}_{0,M}$ состоит из таких функций $f(s), s \in [0, M]$, что $f(s) \in E$ при почти всех $s \in [0, M]$, где E — некоторое банахово пространство. Предполагается, что $E_1 \subseteq E \subseteq E_0$.

Например, $\mathcal{F}_{0,M}$ может быть пространством $C([0,M];E)$, или $L_p(0,M;E)$, при $p \in [1,\infty]$, или пересечение некоторых пространств такого вида (см. также § 4). Предполагается, что $\Pi_{0,m}\mathcal{F}_{0,M} \subseteq \mathcal{F}_{0,m}$ и

$$\|\Pi_{0,m}f\|_{\mathcal{F}_{0,m}} \leq \|f\|_{\mathcal{F}_{0,M}}, \quad \forall f \in \mathcal{F}_{0,M}, \tag{3.2}$$

где $m < M$ и $\Pi_{0,M}$ обозначает оператор ограничения на отрезок $[0,M]$.

Пусть $S(h)$ обозначает оператор трансляции при любом $h \in \mathbb{R}_+$:

$$S(h)f(s) = f(h+s).$$

Очевидно, если аргумент s функции $f(\cdot)$ принадлежит $[0,M]$, то аргумент s функции $S(h)f(\cdot)$ можно брать из $[0,M-h]$ при $0 \leq h < M$. Предполагается, что $S(h)$ является непрерывным отображением из $F_{0,M}$ в $F_{0,M-h}$, и, кроме того,

$$\|S(h)f\|_{\mathcal{F}_{0,M-h}} \leq \|f\|_{\mathcal{F}_{0,M}}, \quad \forall f \in \mathcal{F}_{0,M}. \tag{3.3}$$

Это предположение вполне естественно и обосновано.

Предполагается, что, если $f(s) \in \mathcal{F}_{0,M}$, то $A(f(s)) \in \mathcal{D}_{0,M}$, где $\mathcal{D}_{0,M}$ — это более широкое банахово пространство, $\mathcal{F}_{0,M} \subseteq \mathcal{D}_{0,M}$. Производная $\partial_t f$ понимается как обобщенная функция (распределение) со значениями в $E_0, \partial_t f(\cdot) \in D'((0,M);E_0)$, причем предполагается, что $\mathcal{D}_{0,M} \subseteq D'((0,M);E_0)$ при всех $(0,M) \subset \mathbb{R}_+$. Функция $u(s) \in \mathcal{F}_{0,M}$ называется *решением* уравнения (3.1) из пространства $\mathcal{F}_{0,M}$ (на интервале $(0,M)$), если $\partial_t u(t) = A(u(t))$ в смысле обобщенных функций пространства $D'((0,M);E_0)$.

Определим также пространство

$$\mathcal{F}_+^{loc} = \{f(s),\, s \in \mathbb{R}_+ \mid \Pi_{0,M}f(s) \in \mathcal{F}_{0,M}, \quad \forall\, [0,M] \subset \mathbb{R}_+\}. \tag{3.4}$$

Например, если $\mathcal{F}_{0,M} = C([0,M];E)$, то $\mathcal{F}_+^{loc} = C(\mathbb{R}_+;E)$, а если $\mathcal{F}_{0,M} = L_p(0,M;E)$, то $\mathcal{F}_+^{loc} = L_p^{loc}(\mathbb{R}_+;E)$.

Функция $u(s) \in \mathcal{F}_+^{loc}$ называется *решением* уравнения (3.1) из $\mathcal{F}_+^{loc}$, если $\Pi_{0,M}u(s) \in \mathcal{F}_{0,M}$ и эта функция является решением (3.1) на любом интервале $[0,M] \subset \mathbb{R}_+$.

Обозначим через $\mathcal{K}^+$ некоторое фиксированное множество решений (3.1) из $\mathcal{F}_+^{loc}$. Отметим, что $\mathcal{K}^+$ не обязательно множество *всех* возможных решений из $\mathcal{F}_+^{loc}$, но может быть и лишь какой-то частью всех решений. Элементы множества $\mathcal{K}^+$ называются *траекториями*, а само множество $\mathcal{K}^+$ называется *пространством траекторий* уравнения (3.1).

Предполагается, что пространство траекторий $\mathcal{K}^+$ является *трансляционно инвариантным* в следующем смысле: если $u(s) \in \mathcal{K}^+$, то $u(h+s) \in \mathcal{K}^+$ при всех $h \geq 0$. Это предположение очень естественно для решений автономных уравнений.

Рассмотрим теперь трансляционные операторы $S(h)$ на $\mathcal{F}_+^{loc}$:

$$S(h)f(s) = f(s+h), \quad h \geq 0.$$

Легко видеть, что отображения $\{S(h), h \geq 0\}$ образуют полугруппу на $\mathcal{F}_+^{loc}$, то есть,

$$S(h_1)S(h_2) = S(h_1+h_2) \quad \forall h_1, h_2 \geq 0,$$

и $S(0)$ является тождественным отображением. Поменяем переменную h на переменную времени t. Полугруппа $\{S(t), t \geq 0\}$ называется *трансляционной полугруппой.* По сделанному предположению, трансляционная полугруппа отображает пространство траекторий $\mathcal{K}^+$ на себя:

$$S(t)\mathcal{K}^+ \subseteq \mathcal{K}^+, \quad \forall t \geq 0. \tag{3.5}$$

Будем изучать свойства притяжения трансляционной полугруппы $\{S(t)\}$, которая действует на пространстве траекторий $\mathcal{K}^+ \subset \mathcal{F}_+^{loc}$. Для этого зададим топологию в пространстве $\mathcal{F}_+^{loc}$.

Пусть на пространстве $\mathcal{F}_{0,M}$ при каждом $[0,M] \subset \mathbb{R}_+$ задана метрика $\rho_{0,M}(\cdot,\cdot)$. Аналогично (3.2) и (3.3) будем предполагать, что

$$\rho_{0,m}\left(\Pi_{0,m}f, \Pi_{0,m}g\right) \leq \rho_{0,M}\left(f,g\right), \quad \forall f,g \in \mathcal{F}_{0,M},\ m \leq M,$$
$$\rho_{0,M-h}(S(h)f, S(h)g) \leq \rho_{0,M}(f,g), \quad \forall f,g \in \mathcal{F}_{0,M},\ 0 \leq h \leq M.$$

Обозначим через $\Theta_{0,M}$ полученное метрическое пространство с точками из $\mathcal{F}_{0,M}$. Например, $\rho_{0,M}$ может быть метрикой, порожденной нормой $\|\cdot\|_{\mathcal{F}_{0,M}}$ банахова пространства $\mathcal{F}_{0,M}$. Однако в приложениях, обычно, $\rho_{0,M}$ порождает топологию, которая слабее сильной топологии сходимости по норме пространства $\mathcal{F}_{0,M}$.

Рассмотрим индуктивный предел пространств $\Theta_{0,M}$, который порождает топологию Θ_+^{loc} в $\mathcal{F}_+^{loc}$, то есть, по определению, последовательность $\{f_n(s)\} \subset \mathcal{F}_+^{loc}$ сходится к элементу $f(s) \in \mathcal{F}_+^{loc}$ при $n \to \infty$ в Θ_+^{loc}, если $\rho_{0,M}(\Pi_{0,M}f_n, \Pi_{0,M}f) \to 0$ при $n \to \infty$ для каждого $M > 0$. Легко проверить, что топология Θ_+^{loc} является метризуемой посредством, например, следующей метрики Фреше:

$$\rho_+(f_1,f_2) := \sum_{m\in\mathbb{N}} 2^{-m} \frac{\rho_{0,m}(f_1,f_2)}{1+\rho_{0,m}(f_1,f_2)}. \tag{3.6}$$

Если известно, что метрическое пространство $\Theta_{0,M}$ — полное, то пространство Θ_+^{loc} также является полным.

Мы утверждаем, что трансляционная полугруппа $\{S(t)\}$ является непрерывной в топологии Θ_+^{loc}. Это утверждение непосредственно вытекает из определения топологии Θ_+^{loc}.

Рассмотрим также следующее банахово пространство

$$\mathcal{F}_+^b := \{f(s) \in \mathcal{F}_+^{loc} \mid \|f\|_{\mathcal{F}_+^b} < +\infty\}, \tag{3.7}$$

в котором норма задается формулой

$$\|f\|_{\mathcal{F}_+^b} := \sup_{h\geq 0} \|\Pi_{0,1}f(h+s)\|_{\mathcal{F}_{0,1}}. \tag{3.8}$$

Например, если $\mathcal{F}_+^{loc} = C(\mathbb{R}_+;E)$, то пространство $\mathcal{F}_+^b = C^b(\mathbb{R}_+;E)$ имеет норму

$$\|f\|_{\mathcal{F}_+^b} = \sup_{h\geq 0} \|f(h)\|_E,$$

а если $\mathcal{F}_+^{loc} = L_p^{loc}(\mathbb{R}_+;E)$, то $\mathcal{F}_+^b = L_p^b(\mathbb{R}_+;E)$ с нормой

$$\|f\|_{\mathcal{F}_+^b} = \left(\sup_{h\geq 0} \int_h^{h+1} \|f(s)\|_E^p ds\right)^{1/p}.$$

Напомним, что $\mathcal{F}_+^b \subseteq \Theta_+^{loc}$. Банахово пространство $\mathcal{F}_+^b$ потребуется лишь для того, чтобы ввести понятие *ограниченного подмножества* в траекторном пространстве $\mathcal{K}^+$. При построении траекторного аттрактора в $\mathcal{K}^+$ нам не понадобиться рассматривать соответствующую топологию банахова пространства $\mathcal{F}_+^b$. Вместо этого будет использоваться топология локальной сходимости Θ_+^{loc}, которая значительно слабее топологии равномерной сходимости на всей полуоси.

Будем предполагать, что $\mathcal{K}^+ \subseteq \mathcal{F}_+^b$, т.е., каждая траектория $u(s) \in \mathcal{K}^+$ уравнения (3.1) имеет конечную норму (3.8). Дадим определение притягивающего множества и траекторного аттрактора трансляционной полугруппы $\{S(t)\}$, действующей на $\mathcal{K}^+$.

Определение 3.1 *Множество $\mathcal{P} \subseteq \Theta_+^{loc}$ называется* притягивающим множеством *полугруппы $\{S(t)\}$, действующей на $\mathcal{K}^+$, в топологии Θ_+^{loc}, если для любого ограниченного в $\mathcal{F}_+^b$ множества $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{K}^+$ множество $\mathcal{P}$ притягивает $S(t)\mathcal{B}$ при $t \to +\infty$ в топологии Θ_+^{loc}, т.е., для любой ε-окрестности $O_\varepsilon(\mathcal{P})$ в Θ_+^{loc} найдется такое число $t_1 \geq 0$, что $S(t)\mathcal{B} \subseteq O_\varepsilon(\mathcal{P})$ при всех $t \geq t_1$.*

Ясно, что свойство притяжения к $\mathcal{P}$ можно сформулировать в следующем эквивалентном виде: для любого множества $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{K}^+$, ограниченного в $\mathcal{F}_+^b$, и для каждого $M > 0$ выполнено предельное соотношение

$$\mathrm{dist}_{\Theta_{0,M}}(\Pi_{0,M}S(t)\mathcal{B}, \Pi_{0,M}\mathcal{P}) \to 0 \quad (t \to +\infty),$$

где

$$\mathrm{dist}_{\mathcal{M}}(X, Y) := \sup_{x \in X} \mathrm{dist}_{\mathcal{M}}(x, Y) = \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} \rho_{\mathcal{M}}(x, y)$$

обозначает хаусдорфово полурасстояние от множества X до множества Y в метрическом пространстве $\mathcal{M}$.

Определение 3.2 *(см. [22]) Множество $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{K}^+$ называется* траекторным аттрактором *трансляционной полугруппы $\{S(t)\}$ на $\mathcal{K}^+$ в топологии Θ_+^{loc}, если **(i)** $\mathfrak{A}$ ограничено в $\mathcal{F}_+^b$ и компактно в Θ_+^{loc}, **(ii)** множество $\mathfrak{A}$ строго инвариантно относительно полугруппы: $S(t)\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$ при всех $t \geq 0$, и **(iii)** $\mathfrak{A}$ является притягивающим множеством для $\{S(t)\}$ на $\mathcal{K}^+$ в топологии Θ_+^{loc}, то есть, при каждом $M > 0$*

$$\mathrm{dist}_{\Theta_{0,M}}(\Pi_{0,M}S(t)\mathcal{B}, \Pi_{0,M}\ \mathfrak{A}) \to 0 \quad (t \to +\infty).$$

Замечание 3.1 *Используя терминологию, введенную в [3], можно сказать, что траекторный аттрактор $\mathfrak{A}$ является* глобальным $(\mathcal{F}_+^b, \Theta_+^{loc})$-аттрактором *трансляционной полугруппы $\{S(t)\}$, действующей на $\mathcal{K}^+$, то есть, $\mathfrak{A}$ притягивает $S(t)\mathcal{B}$ при $t \to +\infty$ в топологии Θ_+^{loc} для любого ограниченного (в $\mathcal{F}_+^b$) множества $\mathcal{B}$ из $\mathcal{K}^+$:*

$$\mathrm{dist}_{\Theta_+^{loc}}(S(t)\mathcal{B}, \mathfrak{A}) \to 0 \quad (t \to +\infty).$$

Теперь сформулируем центральную теорему о траекторном аттракторе уравнения (3.1).

Теорема 3.1 *Предположим, что пространство траекторий $\mathcal{K}^+$, отвечающее уравнению (3.1), принадлежит $\mathcal{F}_+^b$, причем выполнено(3.5). Пусть трансляционная полугруппа $\{S(t)\}$ имеет притягивающее множество $\mathcal{P} \subseteq\mathcal{K}^+$, которое ограничено в $\mathcal{F}_+^b$ и компактно в Θ_+^{loc}. Тогда трансляционная полугруппа $\{S(t), t \geq 0\}$, действующая в $\mathcal{K}^+$ имеет траекторный аттрактор $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{P}$. Множество $\mathfrak{A}$ ограничено в $\mathcal{F}_+^b$ и компактно в Θ_+^{loc}.*

Идея доказательства. Полугруппа $\{S(t)\}$ непрерывна на $\mathcal{K}^+$ в метрическом пространстве Θ_+^{loc}. Множество $\mathcal{P}$ является $(\mathcal{F}_+^b, \Theta_+^{loc})$-притягивающим, компактным в пространстве Θ_+^{loc} и ограниченным в $\mathcal{F}_+^b$. Тогда полугруппа $\{S(t)\}$ имеет глобальный $(\mathcal{F}_+^b, \Theta_+^{loc})$-аттрактор $\mathfrak{A}$, который, очевидно, является искомым траекторным аттрактором (см. полное доказательство в [3, 21, 22]). Этот аттрактор можно построить из притягивающего множества $\mathcal{P}$ по стандартной формуле ω-предельного множества

$$\mathfrak{A} = \omega(\mathcal{P}) := \bigcap_{h\geq 0} \left[\bigcup_{t\geq h} S(t)\mathcal{P} \right]_{\Theta_+^{loc}}.$$

Опишем структуру траекторного аттрактора $\mathfrak{A}$ уравнения (3.1) с помощью понятия полной траектории этого уравнения.

Рассмотрим уравнение (3.1) на всей оси времени

$$\partial_t u = A(u),\ t \in \mathbb{R}. \tag{3.9}$$

Мы уже определили траекторное пространство $\mathcal{K}^+$ уравнения (3.9) на полуоси времени $\mathbb{R}_+$. Распространим это определение на $\mathbb{R}$. Если функция $f(s),\ s \in \mathbb{R}$, определена на всей оси времени, то операторы трансляции $S(h)f(s) = f(s+h)$ также определены при отрицательных h. Функция $u(s), s \in \mathbb{R}$ называется *полной траекторией* уравнения (3.9), если $\Pi_+ S(h)f(s) = \Pi_+ u(s+h) \in \mathcal{K}^+$ при всех $h \in \mathbb{R}$. Здесь $\Pi_+ = \Pi_{0,\infty}$ обозначает оператор ограничения на полуось $\mathbb{R}_+$.

Мы уже ввели пространства $\mathcal{F}_+^{loc}, \mathcal{F}_+^b$ и Θ_+^{loc}. Определим пространства $\mathcal{F}^{loc}, \mathcal{F}^b$ и Θ^{loc} тем же способом:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{loc} &:= \{f(s), s \in \mathbb{R} \mid \Pi_{0,M} S(h) f(s) \in\ \mathcal{F}_{0,M}\ \forall h \in \mathbb{R},\ M > 0\}; \\ \mathcal{F}^b &:= \{f(s) \in \mathcal{F}^{loc} \mid \|f\|_{\ \mathcal{F}^b} < +\infty\}, \end{aligned}$$

где

$$\|f\|_{\mathcal{F}^b} := \sup_{h\in\mathbb{R}} \|\Pi_{0,1} f(h+s)\|_{\mathcal{F}_{0,1}}. \tag{3.10}$$

Топологическое пространство Θ^{loc} совпадает (как множество) с $\mathcal{F}^{loc}$, и, по определению, $f_n(s) \to f(s)$ в Θ^{loc} если $\Pi_{0,M} S(h) f_n(s) \to \Pi_{0,M} S(h) f(s)$ $(n \to \infty)$ в $\Theta_{0,M}$ при любом $M > 0$ и при всех $h \in \mathbb{R}$. Ясно, что Θ^{loc} является полным метрическим пространством так же, как и Θ_+^{loc}.

Определение 3.3 Ядро $\mathcal{K}$ *уравнения (3.9) в пространстве* $\mathcal{F}^b$ *есть объединение всех полных траекторий* $u(s), s \in \mathbb{R}$, *уравнения (3.9), которые ограничены в пространстве* $\mathcal{F}^b$ *относительно нормы (3.10):*

$$\|\Pi_{0,1} u(h+s)\|_{\mathcal{F}_{0,1}} \leq C_u, \quad \forall h \in \mathbb{R}. \tag{3.11}$$

Теорема 3.2 *Пусть выполнены условия теоремы 3.1. Тогда*

$$\mathfrak{A} = \Pi_+ \mathcal{K}, \tag{3.12}$$

причем множество $\mathcal{K}$ *компактно в* Θ^{loc} *и ограничено в* $\mathcal{F}^b$.

Доказательство этой теоремы приведено в [21, 22].

Теоремы 3.1 и 3.2 показывают, что для построения траекторного аттрактора достаточно найти притягивающее множество $\mathcal{P}$, которое компактно в Θ_+^{loc} и ограничено в $\mathcal{F}_+^b$. Обычно в приложениях таким притягивающим (и даже поглощающим) множеством служит шар достаточно большого радиуса $B_R = \{\|f\|_{\mathcal{F}_+^b} \le R\}$ в пространстве $\mathcal{F}_+^b$ ($R \gg 1$). Существование такого поглощающего шара B_R часто следует из неравенства вида

$$\|S(t)u\|_{\mathcal{F}_+^b} \le Q(\|u\|_{\mathcal{F}_+^b})e^{-\gamma t} + R_0, \quad \forall t \ge 0, \quad (\gamma > 0) \tag{3.13}$$

которое выполнено для любой траектории $u(\cdot)$ уравнения (3.1). Здесь величина $Q(y)$ зависит от y, в то время как R_0 и γ не зависят от траектории u. Неравенства вида (3.13) выводятся обычно из априорных оценок для уравнения (3.1), и которых выводится существование решений уравнения.

В различных приложениях, чтобы доказать компактность шара из $\mathcal{F}_+^b$ в топологии Θ_+^{loc}, бывает полезной следующая лемма. Пусть E_0 и E_1 — это банаховы пространства, причем $E_1 \subset E_0$. Рассмотрим следующие банаховы пространства

$$W_{p_1,p_0}(0,M;E_1,E_0) = \{\psi(s), s \in 0, M \mid \psi(\cdot) \in L_{p_1}(0,M;E_1),\ \psi'(\cdot) \in L_{p_0}(0,M;E_0)\},$$
$$W_{\infty,p_0}(0,M;E_1,E_0) = \{\psi(s), s \in 0, M \mid \psi(\cdot) \in L_{\infty}(0,M;E_1),\ \psi'(\cdot) \in L_{p_0}(0,M;E_0)\},$$

(где $p_1 \ge 1$ и $p_0 > 1$) с нормами

$$\|\psi\|_{W_{p_1,p_0}} := \left(\int_0^M \|\psi(s)\|_{E_1}^{p_1} ds\right)^{1/p_1} + \left(\int_0^M \|\psi'(s)\|_{E_0}^{p_0} ds\right)^{1/p_0},$$

$$\|\psi\|_{W_{\infty,p_0}} := \operatorname{ess\,sup}\{\|\psi(s)\|_{E_1} \mid s \in [0,M]\} + \left(\int_0^M \|\psi'(s)\|_{E_0}^{p_0} ds\right)^{1/p_0}.$$

Лемма 3.1 (Обен–Лионс–Саймон, [9]) *Предположим, что $E_1 \Subset E \subset E_0$. тогда следующие вложения являются компактными:*

$$W_{p_1,p_0}(0,M;E_1,E_0) \Subset L_{p_1}(0,M;E), \tag{3.14}$$
$$W_{\infty,p_0}(0,M;E_1,E_0) \Subset C([0,M];E). \tag{3.15}$$

В следующем параграфе будут исследоваться эволюционные уравнения и их траекторные аттракторы в зависимости от малого параметра $\varepsilon > 0$.

Определение 3.4 *Мы будем говорить, что траекторные аттракторы $\mathfrak{A}_\varepsilon$ сходятся к траекторному аттрактору $\overline{\mathfrak{A}}$ при $\varepsilon \to 0$ в топологическом пространстве Θ_+^{loc}, если для любой окрестности $\mathcal{O}(\mathfrak{A})$ в Θ_+^{loc} найдется такое число $\varepsilon_1 > 0$, что $\mathfrak{A}_\varepsilon \subseteq \mathcal{O}(\overline{\mathfrak{A}})$ при всех $\varepsilon < \varepsilon_1$, то есть, при каждом $M > 0$*

$$\operatorname{dist}_{\Theta_{0,M}}(\Pi_{0,M}\mathfrak{A}_\varepsilon, \Pi_{0,M}\overline{\mathfrak{A}}) \to 0\ (\varepsilon \to 0).$$

4 Гомогенизация 3D системы Навье–Стокса

Рассматривается автономная 3D система Навье–Стокса со случайной внешней силой:

$$\partial_t u + \nu L u + B(u) = Pg\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, \omega\right), \quad \operatorname{div} u = 0, \quad u|_{\partial D} = 0. \tag{4.1}$$

Пусть задана некоторая пространственная динамическая система $T_\xi, \xi \in \mathbb{R}^3$, действующая в вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$, которая является эргодической.

Для случайной внешней силы $g(x, \frac{x}{\varepsilon}, \omega)$ предполагается, что

$$g\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, \omega\right) = g_0\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, \omega\right) + \sum_{i=1}^{3} \partial_{x_i} g_i\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, \omega\right), \tag{4.2}$$

где все вектор-функции $g_i(x, \xi, \omega)$ являются статистически однородными, т.е.,

$$g_i(x, \xi, \omega) = \mathbf{G}_i(x, \mathcal{T}_\xi \omega),\ i = 0, \ldots, 3,$$

причем вектор-функции $\mathbf{G}_i : D \times \Omega \to \mathbb{R}^3$ измеримы и выполнено следующее неравенство для почти всех $x \in D$:

$$|\mathbf{G}_i(x, \omega)| \leqslant \phi(x),\ \forall \omega \in \Omega, i = 0, \ldots, 3, \tag{4.3}$$

где положительная мажоранта $\phi(\cdot) \in L_2(D)$.

Из эргодической теоремы Биркгофа следует что функции $g_i(x, \xi, \omega),\ i = 0, \ldots, 3$, имеют пространственные средние $g_i^{\mathrm{hom}}(x) = \mathbb{E}(\mathbf{G_i})(x)$ при почти каждом $x \in D$. Из (4.3) вытекает, что

$$|g_i^{\mathrm{hom}}(x)| \leqslant \phi(x),\ i = 0, \ldots, n,$$

для почти всех $x \in \mathbb{T}^n$, и, следовательно, $g_i^{\mathrm{hom}}(\cdot) \in (L_2(D))^3$.

Из неравенства (4.3) следует, что вектор-функции $g_i\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, \omega\right)$ принадлежат пространству $(L_2(D))^3$ и они равномерно (по $\varepsilon \in (0, 1]$) ограничены в нем. Тогда применимо Утверждение 2.2 при $P = D$ и $p = 2$, из которого получается, что почти всюду в Ω

$$g_i\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, \omega\right) \rightharpoonup g_i^{\mathrm{hom}}(x)\ (\varepsilon \to 0+) \text{ слабо в } (L_2(D))^3, i = 0, \ldots, 3, \tag{4.4}$$

то есть,

$$\int_D \left(g_i\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, \omega\right), \varphi(x)\right) dx \longrightarrow \int_D \left(g_i^{\mathrm{hom}}(x), \varphi(x)\right) dx \quad (\varepsilon \to 0+)$$

для любой функции $\varphi \in (L_2(D))^3$.

В итоге заключаем, что вектор-функция

$$g\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, \omega\right) = g_0\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, \omega\right) + \sum_{i=1}^{3} \partial_{x_i} g_i\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, \omega\right)$$

принадлежит пространству $(H^{-1}(D))^3$, равномерно в нем ограничена (по $\varepsilon \in (0, 1]$) и почти всюду в Ω

$$g\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, \omega\right) \rightharpoonup g^{\mathrm{hom}}(x)\ (\varepsilon \to 0+) \text{ слабо в } (H^{-1}(D))^3, \tag{4.5}$$

то есть,

$$\left\langle g\left(x,\frac{x}{\varepsilon},\omega\right),\varphi(x)\right\rangle \to \left\langle g^{hom}\left(x\right),\varphi(x)\right\rangle \quad \text{при } \varepsilon\to 0, \quad \forall\varphi\in (H_0^1(D))^3. \tag{4.6}$$

где

$$g^{\mathrm{hom}}(x)=g_0^{\mathrm{hom}}(x)+\sum_{i=1}^{3}\partial_{x_i}g_i^{\mathrm{hom}}(x).$$

Эта функция, очевидно, также принадлежит пространству $(H^{-1}(D))^3$.

Отметим, что L_2-нормы функций

$$\partial_{x_i}g_i\left(x,\frac{x}{\varepsilon},\omega\right)=g_{i\,x_i}\left(x,\frac{x}{\varepsilon},\omega\right)+\frac{1}{\varepsilon}g_{i\,\xi_i}\left(x,\frac{x}{\varepsilon},\omega\right)$$

могут неограниченно расти при $\varepsilon\to 0+$. Эти функции ограничены только в $(H^{-1}(D))^3$.

Замечание 4.1 *В качестве простых, но содержательных примеров можно рассмотреть функции g, которые являются периодическими или квазипериодическими по $\omega\in\Omega$, где вероятностное пространство Ω является единичным кубом в $\mathbb{R}^d$ с лебеговой мерой и с соответствующей трансляционной динамической системой на нем (см. § 2.1).*

Применяя к уравнению (4.1) общую схему из § 2, положим $E_1=H^1,\ E_0=H^{-1},\ E=H$, где H^{-1} — это пространство, сопряженное к H^1.

Чтобы определить пространство траекторий $\mathcal{K}_\varepsilon^+$ системы (4.1), рассмотрим слабые решения (траектории) этой системы из пространства $L_2^{loc}(\mathbb{R}_+;H^1)\cap L_\infty^{loc}(\mathbb{R}_+;H)$. Если $u(s)\in L_2^{loc}(\mathbb{R}_+;H^1)\cap L_\infty^{loc}(\mathbb{R}_+;H)$, то уравнение (4.1) имеет смысл в пространстве обобщенных функций (распределений) $D'(\mathbb{R}_+;H^{-1})$, (см., например, [36]).

Определение 4.1 *Пространство траекторий $\mathcal{K}_\varepsilon^+$ состоит из всех слабых решений (траекторий) $u(\cdot)\in L_2^{loc}(\mathbb{R}_+;H^1)\cap L_\infty^{loc}(\mathbb{R}_+;H)$ уравнения (4.1), которые удовлетворяют почти всюду (для почти всех $\omega\in\Omega$ или с вероятностью 1) следующему энергетическому неравенству:*

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2+\nu\|u(t)\|_1^2\le\langle g_\varepsilon,u(t)\rangle\,,\quad t\in\mathbb{R}_+. \tag{4.7}$$

Здесь $g_\varepsilon=g\left(x,\frac{x}{\varepsilon},\omega\right)$ удовлетворяет (4.2). Неравенство (4.7) понимается в следующем смысле: для любой пробной функции $\psi(s)\in C_0^\infty(0,+\infty),\psi\ge 0$, выполнено

$$-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\|u(s)\|^2\psi'(s)ds+\nu\int_0^{+\infty}\|u(s)\|_1^2\psi(s)ds\le\int_0^{+\infty}\langle g,u(s)\rangle\,\psi(s)ds. \tag{4.8}$$

Для любого $u_0\in H$, существует слабое решение $u(s)$ уравнения (4.1), принадлежащее пространству $L_2^{loc}(\mathbb{R}_+;H^1)\cap L_\infty^{loc}(\mathbb{R}_+;H)$ такое, что $u(0)=u_0$, причем $u(s)$ удовлетворяет энергетическому неравенству (4.8). Доказательство приведено, например, в [21, 22, 36].

Замечание 4.2 *Как известно, для 3D системы Навье–Стокса проблема единственности слабого решения остается открытой, как и соответствующая проблема миллениума. Неизвестно также, будет ли произвольное слабое решение* (4.1) *удовлетворять энергетическому неравенству* (4.7). *Тем не менее, слабые решения $u(t),t\ge 0$, которые строятся методом галеркинских приближений, удовлетворяют* (4.7).

Напомним, что для любого слабого решения $u(s) \in L_2^{loc}(\mathbb{R}_+; H^1) \cap L_\infty^{loc}(\mathbb{R}_+; H)$ системы (4.1) производная по времени $\partial_t u \in L_{4/3}^{loc}(\mathbb{R}_+; H^{-1})$ (см. [22, 36]).

Следуя общей схеме из § 2, определим банаховы пространства

$$\mathcal{F}_{0,M} := L_2(0, M; H^1) \cap L_\infty(0, M; H) \cap \{v \mid \partial_t v \in L_{4/3}(0, M; H^{-1})\}.$$

Ясно, что равенства (3.2) имеют место для пространств $\mathcal{F}_{0,M}$, а трансляционная полугруппа $\{S(h)\}$ удовлетворяет (3.3).

Очевидно, что

$$\mathcal{F}_+^{loc} = L_2^{loc}(\mathbb{R}_+; H^1) \cap L_\infty^{loc}(\mathbb{R}_+; H) \cap \{v \mid \partial_t v \in L_{4/3}^{loc}(\mathbb{R}_+; H^{-1})\}.$$

Зададим метрики $\rho_{0,M}(\cdot,\cdot)$ на пространствах $\mathcal{F}_{0,M}$ воспользовавшись нормами из пространств $L_2(t_1, t_2; H)$, то есть,

$$\rho_{0,M}(u, v) = \left(\int_{0,M} \|u(s) - v(s)\|^2 ds\right)^{1/2}, \quad \forall u(\cdot), v(\cdot) \in \mathcal{F}_{0,M}.$$

Эти метрики порождают топологию Θ_+^{loc} в $\mathcal{F}_+^{loc}$. Напомним, что, по определению, последовательность $\{v_n\} \subset \mathcal{F}_+^{loc}$ сходится к элементу $v \in \mathcal{F}_+^{loc}$ при $n \to \infty$, если

$$\|v_n(\cdot) - v(\cdot)\|_{L_2(0,M;H)} \to 0 \ (n \to \infty)$$

для любого $M > 0$. Как уже отмечалось, топология Θ_+^{loc} является метризуемой (см. (3.6)) и соответствующее метрическое пространство полно.

Для того, чтобы ввести понятие ограниченного множества в $\mathcal{K}_\varepsilon^+$, мы воспользуемся нормой банахова пространства

$$\mathcal{F}_+^b = L_2^b(\mathbb{R}_+; H^1) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; H) \cap \{v \mid \partial_t v \in L_{4/3}^b(\mathbb{R}_+; H^{-1})\}, \tag{4.9}$$

которое, очевидно, является подмножеством $\mathcal{F}_+^{loc}$. Напомним, что

$$\|v\|_{L_p^b(\mathbb{R}_+;E)} = \sup_{h \in \mathbb{R}_+} \|v\|_{L_p(h,h+1;E)}.$$

Заметим, что пространство траекторий $\mathcal{K}_\varepsilon^+$ является трансляционно инвариантным: если $u(s) \in \mathcal{K}_\varepsilon^+$, то $u(h+s) \in \mathcal{K}_\varepsilon^+$ при всех $h \geq 0$. Следовательно,

$$S(t)\mathcal{K}_\varepsilon^+ \subseteq \mathcal{K}_\varepsilon^+, \quad \forall t \geq 0.$$

Утверждение 4.1 *Для любого $u(s) \in \mathcal{K}_\varepsilon^+$ выполнено следующее неравенство:*

$$\|S(t)u(\,\cdot\,)\|_{\mathcal{F}_+^b} \leq C\|u(\,\cdot\,)\|^2_{L_\infty(0,1;H)} \exp(-\nu\lambda t) + R_0, \quad \forall t \geq 0, \tag{4.10}$$

где λ — это первое собственное значение оператора Стокса L; величина C зависит от $\nu\lambda$, а R_0 зависит от $\nu\lambda$ и от нормы $\|Pg_\varepsilon\|_{H^{-1}}$ (см. [21, 22]).

Как уже отмечалось, нормы $\|Pg_\varepsilon\|_{H^{-1}}$ равномерно ограничены по $\varepsilon \in (0, 1]$, поэтому из неравенства (4.10) следует, что шар $B_0 = \|v\|_{\mathcal{F}_+^b} \leq 2R_0$ в пространстве $\mathcal{F}_+^b$ является поглощающим множеством трансляционной полугруппы $\{S(t)\}$, действующей в $\mathcal{K}_\varepsilon^+$. Множество B_0 ограничено в $\mathcal{F}_+^b$ и компактно в Θ_+^{loc}. Рассмотрим множество $\mathcal{P}_\varepsilon = B_0 \cap \mathcal{K}_\varepsilon^+$. Ясно, что множество $\mathcal{P}_\varepsilon \subset \mathcal{K}_\varepsilon^+$ также является поглощающим и

$$S(t)\mathcal{P}_\varepsilon \subseteq \mathcal{P}_\varepsilon, \quad \forall t \geq 0. \tag{4.11}$$

Воспользовавшись леммой 3.1 и рассуждениями из [22], получаем

Утверждение 4.2 *Множество $\mathcal{P}_\varepsilon \subset \mathcal{K}_\varepsilon^+$ компактно в топологии Θ_+^{loc} (см. [21, 22]).*

Ядро $\mathcal{K}_\varepsilon$ уравнения (4.1) состоит из всех его слабых решений $u(s), s \in \mathbb{R}$, которые удовлетворяют неравенству (4.8) при любом $\psi(s) \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \psi \geq 0$, и которые ограничены в пространстве

$$\mathcal{F}^b = L_2^b(\mathbb{R}; H^1) \cap L_\infty(\mathbb{R}; H) \cap \{v \mid \partial_t v \in L_{4/3}^b(\mathbb{R}; H^{-1})\}.$$

С помощью утверждений 4.1 и 4.2, можно применять теоремы 3.1 и 3.2.

Теорема 4.1 *При любом $\varepsilon > 0$ и при почти каждом $\omega \in \Omega$ система (4.1) имеет траекторный аттрактор $\mathfrak{A}_\varepsilon$ в топологическом пространстве $\Theta_+^{loc} = L_2^{loc}(\mathbb{R}_+; H)$. Множество $\mathfrak{A}_\varepsilon$ с вероятностью 1 равномерно (по $\varepsilon \in (0,1)$) ограничено в $\mathcal{F}_+^b$ и компактно в Θ_+^{loc}. Кроме того,*

$$\mathfrak{A}_\varepsilon = \Pi_+ \mathcal{K}_\varepsilon, \tag{4.12}$$

и с вероятностью 1 ядро $\mathcal{K}_\varepsilon$ не пусто, равномерно (по $\varepsilon \in (0,1)$) ограничено в $\mathcal{F}^b$ и компактно в Θ^{loc}.

Заметим, что притяжение к траекторному аттрактору имеет место также в более сильной топологии. Действительно, из леммы 3.1 вытекает, что шар в $\mathcal{F}_+^b$

$$B_0 \Subset L_2^{loc}(\mathbb{R}_+; H^{1-\delta}), \tag{4.13}$$

$$B_0 \Subset C^{loc}(\mathbb{R}_+; H^{-\delta}), \quad 0 < \delta \leq 1. \tag{4.14}$$

Вложение (4.13) следует из (3.14), где надо взять $E_0 = H^{-1},\ E = H^{1-\delta},\ E_1 = H^1$ и $p_1 = 2$, $p_0 = 4/3$. Вложение (4.14) вытекает из (3.15) и из вложений $H \Subset H^{-\delta} \subset H^{-1}$, если положить $E_0 = H^{-1},\ E = H^{-\delta},\ E_1 = H$ и $p_0 = 4/3$.

С помощью компактных вложений (4.13) и (4.14), свойство притяжения к аттрактору (4.12) усиливается следующим образом.

Следствие 4.1 *Для любого множества $B \subset \mathcal{K}_\varepsilon^+$, ограниченного в пространстве $\mathcal{F}_+^b$ имеем с вероятность 1 следующие предельные соотношения:*

$$\mathrm{dist}_{L_2(0,M;H^{1-\delta})}\left(\Pi_{0,M} S(t)B, \Pi_{0,M}\mathcal{K}_\varepsilon\right) \to 0 \ (t \to \infty),$$
$$\mathrm{dist}_{C([0,M];H^{-\delta})}\left(\Pi_{0,M} S(t)B, \Pi_{0,M}\mathcal{K}_\varepsilon\right) \to 0 \ (t \to \infty),$$

где M — это произвольное число.

Наконец, перейдем к рассмотрению гомогенизированной системе и ее траекторному аттрактору.

Вместо со случайной системой (4.1) рассмотрим детерминированную систему

$$\partial_t u_0 + \nu L u_0 + B(u_0) = P g^{\mathrm{hom}}(x)\,(x)\,, \quad \mathrm{div}\, u_0 = 0, \quad u_0|_{\partial D} = 0. \tag{4.15}$$

В системе (4.15) детерминированная внешняя сила $g^{\mathrm{hom}}(x)$ связана со случайной силой $g(x, \frac{x}{\varepsilon}, \omega)$ системы (4.1) предельным соотношением (4.5).

Очевидно, система (4.15) также имеет траекторный аттрактор $\overline{\mathfrak{A}}$ в пространстве траекторий $\overline{\mathcal{K}}^+$, которое соответствует уравнению (4.15) (см. определение 4.1), причем

$$\overline{\mathfrak{A}} = \Pi_+ \overline{\mathcal{K}}, \tag{4.16}$$

где $\overline{\mathcal{K}}$ — это ядро уравнения (4.15) в $\mathcal{F}^b$.

Сформулируем основную теорему о сходимости случайных траекторных аттракторов 3D систем Навье–Стокса при $\varepsilon \to 0+$ к траекторному аттрактору детерминированной гомогенизированной системы (4.15).

Теорема 4.2 *С вероятностью 1 выполнено следующее предельное соотношение в топологии пространства* Θ_+^{loc} :

$$\mathfrak{A}_\varepsilon \to \overline{\mathfrak{A}} \ \ \textit{при } \varepsilon \to 0. \tag{4.17}$$

Кроме того, с вероятностью 1

$$\mathcal{K}_\varepsilon \to \overline{\mathcal{K}} \ \ \textit{при } \varepsilon \to 0 \ \textit{в } \Theta^{loc}. \tag{4.18}$$

Доказательство. Ясно, что соотношение (4.18) влечет (4.17), поэтому достаточно проверить (4.18), то есть, с вероятностью 1 для любой окрестности $\mathcal{O}\left(\overline{\mathcal{K}}\right)$ в Θ^{loc} найдется такое $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\mathcal{O}) > 0$, что

$$\mathcal{K}_\varepsilon \subset \mathcal{O}\left(\overline{\mathcal{K}}\right) \quad \text{при } \varepsilon < \varepsilon_1. \tag{4.19}$$

Предположим, что (4.19) не верно. Рассмотрим соответствующее множество случаев $\Omega' \subset \Omega$, для которого (4.19) не выполнено при всех $\omega \in \Omega'$ и $\mu(\Omega') > 0$. Тогда, для каждого $\omega \in \Omega'$ найдется окрестность $\mathcal{O}'\left(\overline{\mathcal{K}}\right)$ in Θ^{loc}, последовательность $\varepsilon_n \to 0$ $(n \to \infty)$, и последовательность $u_{\varepsilon_n}(\cdot) = u_{\varepsilon_n}(\omega, s) \in \mathcal{K}_{\varepsilon_n}^+$, такие, что

$$u_{\varepsilon_n} \notin \mathcal{O}'\left(\overline{\mathcal{K}}\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{4.20}$$

Из условия (4.3) следует, что последовательность $\left\{Pg\left(x, \frac{x}{\varepsilon_n}, \omega\right)\right\}$ ограничена в H^{-1} при почти всех $\omega \in \Omega$. Следовательно, из утверждения 4.1 заключаем, что последовательность $\{u_{\varepsilon_n}\}$ также ограничена в $\mathcal{F}^b$ при почти всех $\omega \in \Omega'$. Напомним, что шар в $\mathcal{F}^b$ компактен в топологии Θ^{loc}. Поэтому, переходя к подпоследовательности и не меняя обозначений, можно считать, что

$$u_{\varepsilon_n} \to u_0 \ (n \to \infty) \ \text{ в } \Theta^{loc},$$

где $u_0 = u_0(\omega)$. Утверждается, что $u_0 \in \overline{\mathcal{K}}$. В самом деле, для каждого $\omega \in \Omega'$ функции $u_{\varepsilon_n}(x, s)$ удовлетворяют уравнению

$$\partial_t u_{\varepsilon_n} + \nu L u_{\varepsilon_n} + B(u_{\varepsilon_n}) = Pg\left(x, \frac{x}{\varepsilon_n}, \omega\right), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{4.21}$$

а также неравенству

$$-\frac{1}{2}\int_{-M}^{M} \|u_{\varepsilon_n}(s)\|^2 \psi'(s) ds + \nu \int_{-M}^{M} \|u_{\varepsilon_n}(s)\|_1^2 \psi(s) ds \leq \int_{-M}^{M} \left(g\left(x, \frac{x}{\varepsilon_n}, \omega\right), u_{\varepsilon_n}(s)\right) \psi(s) ds \tag{4.22}$$

при всех $M > 0$ и для любой функции $\psi \in C_0^\infty(]-M, M[)$, $\psi \geq 0$. Кроме того, $u_{\varepsilon_n}(s) \rightharpoonup u_0(s)$ $(n \to \infty)$ слабо в $L_2(-M, M; H^1)$, $*$-слабо в $L_\infty(-M, M; H)$, и $\partial_t u_{\varepsilon_n}(s) \rightharpoonup \partial_t u_0(s)$ $(n \to \infty)$ слабо в $L_{4/3}(-M, M; H^{-1})$. В силу леммы 3.1 (см. включение (4.13) при $\delta = 0$) можно предполагать, что $u_{\varepsilon_n}(s) \to u_0(s)$ $(n \to \infty)$ сильно в $L_2(-M, M; H)$

и $u_{\varepsilon_n}(x,s) \to \bar{u}(x,s)$ $(n \to \infty)$ для почти всех $(x,s) \in D\times]-M,M[$. В частности, $u_{\varepsilon_n}(s) \to u_0(s)$ $(n \to \infty)$ сильно в $\Theta_+^{loc} = L_2^{loc}(\mathbb{R};H)$.

В силу (4.5) имеем $Pg\left(x,\frac{x}{\varepsilon_n},\omega\right) \rightharpoonup Pg^{\mathrm{hom}}(x)$ $(n \to \infty)$ слабо в H^{-1}. Осталось перейти к пределу в уравнении (4.21) и в неравенстве (4.22) с использованием стандартных рассуждений подобно [36] (см. также доказательства в [21, 22, 42]). Следовательно, $u_0 \in \overline{\mathcal{K}}$, т.е., u_0 — это решение (4.15), которое удовлетворяет соответствующему энергетическому неравенству (4.22) для внешней силы $g^{\mathrm{hom}}(x)$. Одновременно с этим было установлено, что при каждом $\omega \in \Omega'$ последовательность $u_{\varepsilon_n}(s) \to u_0(s)$ $(n \to \infty)$ в Θ_+^{loc} и, следовательно, $u_{\varepsilon_n}(s) \in \mathcal{O}'(u_0(s)) \subset \mathcal{O}'\left(\overline{\mathcal{K}}\right)$ при $\varepsilon_n \ll 1$ и при всех $\omega \in \Omega'$. Это противоречит соотношению (4.20). Теорема доказана. $\square$

Применяя вложения (4.13) и (4.14), получаем следующее усиление сходимости (4.17).

Следствие 4.2 *С вероятностью 1 для любого* $0 < \delta \le 1$ *и при всех* $M > 0$ *выполнены предельные соотношения:*

$$\begin{aligned} \mathrm{dist}_{L_2(0,M;H^{1-\delta})}\left(\Pi_{0,M}\mathfrak{A}_\varepsilon, \Pi_{0,M}\overline{\mathfrak{A}}\right) \to 0 \quad (\varepsilon \to 0), \\ \mathrm{dist}_{C([0,M];H^{-\delta})}\left(\Pi_{0,M}\mathfrak{A}_\varepsilon, \Pi_{0,M}\overline{\mathfrak{A}}\right) \to 0 \quad (\varepsilon \to 0). \end{aligned} \tag{4.23}$$

Список литературы

[1] Amirat Y., Bodart O., Chechkin G.A., Piatnitski A.L. Boundary homogenization in domains with randomly oscillating boundary // Stochastic Processes and their Applications. 2011. V. 121, No 1. P. 1–23.

[2] Arnol'd V.I., Avez A. Ergodic Problems of Classical Mechanics. W.A. Benjamin., New York, NY (1968).

[3] Babin A.V., Vishik M.I. Attractors of evolution equations. North–Holland, Amsterdam (1992); Nauka, Moscow (1989).

[4] Bakhvalov N.S., Panasenko G.P. Averaging Processes in Periodic Media, Kluwer Academic Publ., Dordrecht (1989).

[5] Bekmaganbetov K.A., Chechkin G.A., Chepyzhov V.V. Homogenization of Random Attractors for Reaction–Diffusion Systems // C R Mécanique. 2016. V. 344. N 11–12. P. 753–758.

[6] Bekmaganbetov K.A., Chechkin G.A., Chepyzhov V.V., Goritsky A.Yu. Homogenization of Trajectory Attractors of 3D Navier–Stokes system with Randomly Oscillating Force // Disc. Contin. Dyn. Syst. A. 2017. V.37. 2017. N 5. P. 2375-2393.

[7] Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolau G. Asymptotic Analysis for Periodic Structures, North–Holland, Amsterdam (1978).

[8] Birkhoff, G.D. Proof of the ergodic theorem // Proc Natl Acad Sci USA. 1931. V.17. N 12. P. 656–660.

[9] Boyer F., Fabrie P. Mathematical Tools for the Study of the Incompressible Navier-Stokes Equations and Related Models. Applied Mathematical Sciences, 183. Springer, New York (2013).

[10] Bogolyubov N.N., Mitropolski Ya.A. Asymptotic methods in the theory of non-linear oscillations, Gordon & Breach, New York (1961).

[11] Chechkin G.A., Piatnitski A.L., Shamaev A.S. Homogenization. Methods and Applications, Am. Math. Soc., Providence, RI (2007).

[12] Chechkin G.A., Chechkina T.P., D'Apice C., De Maio U. Homogenization in Domains Randomly Perforated Along the Boundary // Disc. Contin. Dyn. Syst., Ser. B. 2009. V. 12, No 4. P. 713–730.

[13] Chechkin G.A., Chechkina T.P., D'Apice C., De Maio U., Mel'nyk T.A. Asymptotic Analysis of a Boundary Value Problem in a Cascade Thick Junction with a Random Transmission Zone // Applicable Analysis. 2009. V. 88, No 10–11. P. 1543–1562.

[14] Chechkin G.A., Chechkina T.P., D'Apice C., De Maio U., Mel'nyk T.A. Homogenization of 3D Thick Cascade Junction with the Random Transmission Zone Periodic in One direction // Russ. J. Math. Phys. 2010. V. 17, No 1. P. 35–55.

[15] Chechkin G.A., D'Apice C., De Maio U., Piatnitski A.L. On the Rate of Convergence of Solutions in Domain with Random Multilevel Oscillating Boundary // Asymptotic Analysis. 2014. V. 87, No 1-2. P. 1–28.

[16] Chechkin G.A., Chechkina T.P., Ratiu T.S., Romanov M.S. Nematodynamics and Random Homogenization // Applicable Analysis. 2016. V. 95, No 10. P. 2243–2253.

[17] Chechkin G.A., Chepyzhov V.V., Pankratov L.S. Homogenization of trajectory attractors of Ginzburg-Landau equations with randomly oscillating terms // Disc. Contin. Dyn. Syst. B. 2018. V.23. N 3. P. 1133-1154.

[18] Chepyzhov V.V. , Goritsky A.Yu., Vishik M.I. Integral manifolds and attractors with exponential rate for nonautonomous hyperbolic equations with dissipation // Russ. J. Math. Phys. 2005. V.12. P.17–39.

[19] Chepyzhov V.V., Pata V., Vishik M.I. // Averaging of nonautonomous damped wave equations with singularly oscillating external forces. J. Math. Pures Appl. 2008. V.90. P. 469—491.

[20] Chepyzhov V.V., Pata V., Vishik M.I. Averaging of 2D Navier-Stokes equations with singularly oscillating forces // Nonlinearity. 2009. V.22. P.351-370.

[21] Chepyzhov V.V., Vishik M.I. Evolution equations and their trajectory attractors // J.Math.Pures Appl. 1997. V.76. N 10. P.913–964.

[22] Chepyzhov V.V.,Vishik M.I. Attractors for equations of mathematical physics. Amer. Math. Soc. Providence, RI (2002).

[23] Chepyzhov V.V.,Vishik M.I. Non-autonomous 2D Navier-Stokes system with a simple global attractor and some averaging problems // ESAIM Control Optim. Calc. Var. 2002. V.8. 467–487.

[24] Chepyzhov V.V.,Vishik M.I. Global attractors for non-autonomous Ginzburg-Landau equation with singularly oscillating terms // Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. Appl. 2005. V.29. P.123–148.

[25] Chepyzhov V.V.,Vishik M.I. Non-autonomous 2D Navier-Stokes system with singularly oscillating external force and its global attractor // J. Dynam. Diff. 2007. Eq. V.19. P.655–684.

[26] Chepyzhov V.V., Vishik M.I., Wendland W.L. On non-autonomous sine-Gordon type equations with a simple global attractor and some averaging // Disc. Contin. Dyn. Syst. 2005. V.12. P.27–38.

[27] Dunford N., Schwartz J.T. Linear Operators. Part I: General Theory. Interscience Publishers. New–York, London, 1958.

[28] Efendiev M., Zelik S. Attractors of the reaction-diffusion systems with rapidly oscillating coefficients and their homogenization // Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire. 2002. V.19. P.961–989.

[29] Efendiev M., Zelik S. The regular attractor for the reaction-diffusion system with a nonlinearity rapidly oscillating in time and its averaging // Adv. Diff. Eq. 2003. V.8. 673–732.

[30] Fiedler B., Vishik M.I. Quantitative homogenization of analytic semigroups and reaction-diffusion equations with Diophantine spatial sequences // Adv. Diff. Eq. 2001. V.6. P.1377–1408.

[31] Fiedler B., Vishik M.I. Quantitative homogenization of global attractors for reaction–diffusion systems with rapidly oscillating terms // Asymptotic Anal. 2003. V.34. P.159–185.

[32] Hale J.K., Verduyn Lunel S.M. Averaging in infinite dimensions // J. Int. Eq. Appl. 1990. V.2. P.463–494.

[33] Jikov V.V., Kozlov S.M., Oleinik O.A. Homogenization of Differential Operators and Integral Functionals, Springer–Verlag, Berlin etc. (1994).

[34] Ilyin A.A. Averaging principle for dissipative dynamical systems with rapidly oscillating right-hand sides // Sb. Math. 1996. V.187 P.635—677.

[35] Ilyin A.A. Global averaging of dissipative dynamical systems // Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. Appl. 1998. V.22. P.165–191.

[36] Lions J.-L. Quelques méthodes de résolutions des problèmes aux limites non linéaires. Dunod, Gauthier-Villars, Paris (1969).

[37] Marchenko V.A., Khruslov E.Ya. Boundary Value Problems in Domains with Fine-Grain Boundary [in Russian], Naukova Dumka, Kiev (1974).

[38] Marchenko V.A., Khruslov E.Ya. Homogenization of partial differential equations., Birkhäuser, Boston, MA (2006).

[39] Pankratov L.S., Chueshov I.D. Averaging of attractors of nonlinear hyperbolic equations with asymptotically degenerate coefficients // Sb. Math. 1999. V.190. P.1325–1352.

[40] Sánchez-Palencia E. Homogenization Techniques for Composite Media, Springer–Verlag, Berlin etc. (1987).

[41] Temam R. Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. Applied Mathematics Series. V. 68, Springer-Verlag, New York (1988).

[42] Vishik M.I., Chepyzhov V.V. Averaging of trajectory attractors of evolution equations with rapidly oscillating terms // Sb. Math. 2001. V.192. P.11—47.

[43] Vishik M.I., Chepyzhov V.V. Approximation of trajectories lying on a global attractor of a hyperbolic equation with an exterior force that oscillates rapidly over time // Sb. Math. 2003. V.194. P.1273–1300.

[44] Vishik M.I., Chepyzhov V.V. Attractors of dissipative hyperbolic equations with singularly oscillating external forces // Math. Notes. 2006. V.79. P.483–504.

[45] Vishik M.I., Chepyzhov V.V. Trajectory attractors of equations of mathematical physics. // Russian Math. Surveys. 2011. V.66. P.3–102.

[46] Vishik M.I., Fiedler B. Quantitative averaging of global attractors of hyperbolic wave equations with rapidly oscillating coefficients // Russian Math. Surveys. 2002. V.57. P.709–728.

[47] Zelik S. Global averaging and parametric resonances in damped semilinear wave equations // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect.A. 2006. V.136. P.1053–1097.

[48] Zhikov V.V. On Two–Scale Convergence // Journal of Mathematical Sciences. 2004. V. 120, No. 3. P. 1328–1352.