Гонцов Р. Р.

Алгебраические кривые с особенностями

1. Введение

В учебном году, предшедствовавшем десятой Коломенской конференции, на учебно-методическом дополнении к нашему семинару по аналитической теории дифференциальных уравнений мы разбирали записи лекций Б. А. Дубровина по компактным римановым поверхностям [1]. В данной книге поверхности появляются как компактификации комплексных алгебраических кривых $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid P(x, y) = 0\}$ при их вложении в проективную плоскость $\mathbb{C}P^2$. При этом основное внимание уделено неособым кривым: предполагается, что все точки исходной кривой, а также добавленные к ней при компактификации бесконечно удаленные точки являются неособыми. Среди изученных нами понятий и вопросов, касающихся неособых алгебраических кривых (компактных римановых поверхностей), были род поверхности, мероморфные функции, голоморфные и мероморфные дифференциалы и их периоды, многообразия Якоби, теоремы Абеля и Римана–Роха и др. В настоящей заметке предлагается небольшое расширение данной тематики: речь пойдет об алгебраических кривых с особыми точками и, в частности, о понятии (геометрического) рода для таких кривых. Мы излагаем некоторые фрагменты курса лекций В. А. Шрамченко [3], основанных на книге [2].

2. Проективизация плоской алгебраической кривой

Определение 1. Непостоянный полином $P(x, y)$ определяет плоскую алгебраическую кривую

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid P(x, y) = 0\}, \tag{1}$$

степенью которой называют степень полинома P.

Непостоянный *однородный* полином $\widetilde{P}(x,y,z)$ определяет *проективную* кривую

$$\widetilde{\Gamma} = \{(x:y:z) \in \mathbb{C}P^2 \mid \widetilde{P}(x,y,z) = 0\}. \qquad (2)$$

Проективизация плоской кривой Γ состоит в ее вложении в проективную плоскость $\mathbb{C}P^2$, при котором к Γ добавляется конечное число бесконечно удаленных точек вида $(x:y:0) \in \mathbb{C}P^2$ и она становится проективной кривой. Прежде чем дать формальное определение, заметим, что если полином $P(x,y)$ степени d не является однородным, то существует единственный однородный полином $\widetilde{P}(x,y,z)$ такой, что $P(x,y) = \widetilde{P}(x,y,1)$.

Определение 2. *Проективизацией* алгебраической кривой (1) называется проективная кривая (2), определяемая однородным полиномом $\widetilde{P}(x,y,z)$ таким, что $P(x,y) = \widetilde{P}(x,y,1)$. Исходная кривая Γ называется *аффинной частью* своей проективизации $\widetilde{\Gamma}$ или *аффинной кривой*. Бесконечно удаленные точки проективной кривой $\widetilde{\Gamma}$ – точки множества

$$\widetilde{\Gamma} \setminus \Gamma = \{(x:y:0) \in \mathbb{C}P^2 \mid \widetilde{P}(x,y,0) = 0\}.$$

Пример 1. Рассмотрим алгебраическую кривую Γ седьмой степени, заданную уравнением

$$P(x,y) = y^7 + x^3y^4 + xy^5 + x^2 = 0.$$

Ее проективизация $\widetilde{\Gamma}$ определяется однородным полиномом

$$\widetilde{P}(x,y,z) = y^7 + x^3y^4 + xy^5z + x^2z^5.$$

Бесконечно удаленные точки суть

$$\widetilde{\Gamma} \setminus \Gamma = \{(x:y:0) \in \mathbb{C}P^2 \mid y^4(x^3+y^3) = 0\} =$$
$$= \{(1:0:0), (-1:1:0), (e^{\pi i/3}:1:0), (e^{5\pi i/3}:1:0)\}.$$

Упражнение 1. 1) Покажите, что всякий однородный многочлен $P(x,y)$ степени d представляется в виде произведения d линейных функций:

$$P(x,y) = (\alpha_1 x + \beta_1 y)\dots(\alpha_d\, x + \beta_d\, y), \quad \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{C}.$$

2) Покажите, что множество $\widetilde{\Gamma}\setminus\Gamma$ бесконечно удаленных точек проективизации $\widetilde{\Gamma}$ алгебраической кривой Γ степени d конечно и состоит не более чем из d элементов.

3. Особые точки алгебраических и проективных кривых

Определение 3. Точку $(x_0, y_0) \in \Gamma$ алгебраической кривой (1) называют особой, если $\frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$. Соответственно, точка $(a : b : c) \in \widetilde{\Gamma}$ проективной кривой (2) называется *особой*, если

$$\frac{\partial \widetilde{P}}{\partial x}(a,b,c) = \frac{\partial \widetilde{P}}{\partial y}(a,b,c) = \frac{\partial \widetilde{P}}{\partial z}(a,b,c) = 0. \tag{3}$$

Таким образом, даже если алгебраическая кривая неособа (т. е. если у нее отсутствуют особые точки), при проективизации она может стать особой, засчет появления особенностей среди добавленных бесконечно удаленных точек. Если же и проективизация не имеет особых точек, то она является компактным ориентируемым одномерным комплексным многообразием (компактной римановой поверхностью), топологически эквивалентным сфере с g ручками. При этом число g – род поверхности – определяется формулой

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2},$$

где d – степень кривой.

Пример 2. 1) Рассмотрим проективную кривую $\widetilde{\Gamma}$ четвертой степени, заданную уравнением

$$\widetilde{P}(x,y,z) = 3x^4 + 4y^4 - 19z^4 = 0.$$

Поскольку условие (3) в данном случае выполнено только для $a = b = c = 0$, эта кривая неособа и топологически представляет собой компактную риманову поверхность рода $g = \frac{(4-1)(4-2)}{2} = 3$.

2) Алгебраическая кривая $y^2 = x^3$ имеет особенность в начале координат, которая переносится на проективизацию $y^2 z - x^3 = 0$ в виде точки $(0 : 0 : 1)$. Бесконечно удаленная точка $(0 : 1 : 0)$ не является особой.

Как определяется род проективной кривой, имеющей особые точки? Удалив особые точки, мы получаем неособую кривую с проколами, т. е. компактную риманову поверхность с выколотыми точками (число которых, вообще говоря, может быть больше числа особенностей исходной кривой). Род этой поверхности и называют (геометрическим) родом проективной кривой. Более формально данный процесс разрешения особенностей описывается в следующем разделе, после чего уже речь идет о том как найти род особой кривой.

Упражнение 2. Найдите особые точки проективизации алгебраической кривой

$$P(x, y) = y^3 - 2x^3 y - x^5 = 0.$$

4. Разрешение особенностей проективной кривой

Теорема 1. *Для всякой неприводимой проективной кривой* $\widetilde{\Gamma} \subset \mathbb{C}P^2$ *со множеством особенностей* $\mathrm{Sing}(\widetilde{\Gamma})$ *существует компактная риманова поверхность* X *и голоморфное отображение* $\pi : X \to \mathbb{C}P^2$ *такие, что*

$$\pi : X \setminus \pi^{-1}\big(\mathrm{Sing}(\widetilde{\Gamma})\big) \to \widetilde{\Gamma} \setminus \mathrm{Sing}(\widetilde{\Gamma})$$

является биголоморфным отображением.

Данное утверждение означает, что топологически проективная кривая представляет собой компактную риманову поверхность, точки некоторых конечных подмножеств которой склеиваются в одну. После удаления всех особых точек проективной кривой и всех склееных точек поверхности получаем топологически эквивалентные многообразия.

Определение 4. Род римановой поверхности X из теоремы 1 называют (*геометрическим*) *родом* проективной кривой $\widetilde{\Gamma}$.

В одном частном случае – когда все особые точки проективной кривой *обыкновенные* – для нахождения ее рода достаточно посчитать *кратности* особых точек. Расскажем об этом подробнее.

5. Кратность особой точки алгебраической кривой

Определение 5. *Кратностью* алгебраической кривой (1) в точке $(x_0, y_0) \in \Gamma$ называется число m такое, что

$$\frac{\partial^m P}{\partial x^i \partial y^j}(x_0, y_0) \neq 0 \quad \text{для некоторых} \quad i, j \geqslant 0,\ i + j = m,$$

и все производные полинома P порядка, меньшего m, равны нулю в этой точке.

Для точки кратности m полином

$$Q(x, y) = \sum_{i+j=m} \frac{\partial^m P}{\partial x^i \partial y^j}(x_0, y_0) \frac{(x - x_0)^i (y - y_0)^j}{i!\, j!} \not\equiv 0 \qquad (4)$$

– однородный степени m относительно переменных $(x - x_0)$, $(y - y_0)$, следовательно,

$$Q(x, y) = \prod_{i=1}^{m} \big(\alpha_i (x - x_0) + \beta_i (y - y_0)\big), \qquad (5)$$

$(\alpha_i, \beta_i) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0, 0\}$ (см. упр. 1). При этом прямые

$$\{\alpha_i (x - x_0) + \beta_i (y - y_0) = 0\} \subset \mathbb{C}^2, \quad i = 1, \ldots, m,$$

называют *касательными* к Γ в точке (x_0, y_0). Таким образом, в неособой точке кривая имеет кратность 1 и одну касательную, а в особой точке кратность кривой больше 1 и касательных, вообще говоря, несколько.

Определение 6. Особая точка $(x_0, y_0) \in \Gamma$ кратности m называется *обыкновенной*, если кривая имеет m различных касательных в этой точке (т. е. если все линейные сомножители в разложении (5) различны).

Для того чтобы найти кратность проективной кривой в бесконечно удаленной особой точке вида $(a : b : 0)$ и число касательных в этой точке, нужно записать уравнение кривой в аффинных координатах $u = y/x$, $v = z/x$ (или $u = x/y$, $v = z/y$, если $a = 0$) карты, содержащей эту точку, и исследовать полученную алгебраическую кривую в соответствующей точке $(u_0, v_0) = (b/a, 0)$ (или $(u_0, v_0) = (a/b, 0)$).

Пример 3. Найдем кратность бесконечно удаленной особой точки $(1 : 0 : 0)$ проективной кривой $\widetilde{\Gamma}$ из примера 1. Соответствующая алгебраическая кривая Γ' в аффинных координатах $u = y/x$, $v = z/x$ в окрестности особой точки $(0, 0)$ задается уравнением

$$P(u, v) = u^7 + u^4 + u^5 v + v^5 = 0.$$

Поскольку все производные полинома P вплоть до третьего порядка равны нулю в начале координат, а из производных четвертого порядка ненулевой является только

$$\frac{\partial^4 P}{\partial u^4}(0, 0) = 4!,$$

то полином (4) имеет вид

$$Q(u, v) = \frac{\partial^4 P}{\partial u^4}(0, 0)\frac{u^4}{4!} = u^4,$$

т. е. представляется в виде произведения четырех одинаковых линейных сомножителей. Следовательно, особая точка $(0, 0)$ алгебраической кривой Γ' имеет кратность 4 и не является обыкновенной. Поэтому, то же самое можно сказать и о бесконечно удаленной особой точке $(1 : 0 : 0)$ проективной кривой $\widetilde{\Gamma}$.

Теорема 2. *Если все особые точки проективной кривой $\widetilde{\Gamma}$ степени d обыкновенные, то род g такой кривой выражается формулой*

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i(m_i - 1)}{2},$$

где m_i – кратность i-й особой точки (n – число особых точек).

Пример 4. Найдем род проективной кривой $\widetilde{\Gamma}$

$$\widetilde{P}(x,y,z) = x^3yz + y^5 + z^5 = 0$$

пятой степени. Несложно убедиться, что бесконечно удаленная точка $(1:0:0)$ – ее единственная особенность. Соответствующая алгебраическая кривая Γ' в аффинных координатах $u = y/x$, $v = z/x$ в окрестности особой точки $(0,0)$ задается уравнением

$$P(u,v) = u^5 + v^5 + uv = 0.$$

Вторая производная $\frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v}(0,0) = 1$ отлична от нуля, остальные производные второго порядка нулевые, поэтому полином (4) имеет вид

$$Q(u,v) = \frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v}(0,0)uv = uv,$$

т. е. представляется в виде произведения двух различных линейных сомножителей. Следовательно, точка $(0,0)$ алгебраической кривой Γ', а вместе с ней и бесконечно удаленная точка $(1:0:0)$ проективной кривой $\widetilde{\Gamma}$, – обыкновенная особая точка кратности 2. Таким образом, согласно теореме 2, род g кривой $\widetilde{\Gamma}$ равен

$$g = \frac{(5-1)(5-2)}{2} - \frac{2(2-1)}{2} = 5.$$

Упражнение 3. Найдите род проективной кривой

$$\widetilde{P}(x,y,z) = x^4 + y^4 - xyz^2 = 0.$$

6. Формула для рода неприводимой кривой

В случае когда не все особые точки проективной кривой обыкновенные, ее род может быть посчитан с помощью следующей теоремы.

Теорема 3. *Пусть* $\widetilde{\Gamma}$ *– неприводимая проективная кривая степени* d *и* $(0:1:0) \notin \widetilde{\Gamma}$. *Тогда ее род* g *выражается формулой*

$$g = 1 - d + \frac{1}{2}\Big(\sum_{p \in \widetilde{\Gamma}:\, \nu(p) \geqslant 2} (\nu(p) - 1) - \sum_{q \in \mathrm{Sing}(\widetilde{\Gamma})} (\#\pi^{-1}(q) - 1) \Big), \quad (6)$$

где $\nu(p)$ – индекс ветвления накрытия

$$\phi : \widetilde{\Gamma} \to \mathbb{C}P^1, \quad (x:y:z) \mapsto (x:z),$$

в точке $p \in \widetilde{\Gamma}$.

Индекс ветвления ν определяется следующим образом. Пусть $\widetilde{\Gamma}$ задается уравнением

$$\widetilde{P}(x,y,z) = 0,$$

и $p = (a:b:c) \in \widetilde{\Gamma}$. Тогда $\nu(p)$ – это кратность нуля полинома $\widetilde{P}(a,y,c)$ в точке $y = b$. Таким образом, $\nu(p) \geqslant 1$, а если $\nu(p) > 1$, то точку p называют *точкой ветвления* накрытия ϕ. Следовательно, в формуле (6) первая сумма берется по точкам ветвления накрытия ϕ.

Пример 5. Рассмотрим проективную кривую, заданную уравнением

$$\widetilde{P}(x,y,z) = y^2 - xz = 0.$$

Полином $\widetilde{P}(a,y,c) = y^2 - ac$ имеет кратный нуль только если $ac = 0$: $\widetilde{P}(0,y,1) = \widetilde{P}(1,y,0) = y^2$. Поэтому для данной кривой точками ветвления накрытия ϕ будут две точки – $(0:0:1)$ и $(1:0:0)$, и индекс ветвления в них (кратность нуля полинома y^2) равен 2.

Упражнение 4. Найдите точки ветвления накрытия ϕ и их индексы ветвления для проективной кривой

$$\widetilde{P}(x,y,z) = x^3 + y^3 - z^3 = 0.$$

Итак, для того чтобы воспользоваться формулой (6) и найти род проективной кривой $\widetilde{\Gamma}$ в общем случае, нам остается понять, как подсчитать число $\#\pi^{-1}(q)$ точек соответствующей римановой поверхности X, склеивающихся в одну особую точку $q \in \widetilde{\Gamma}$. Для этого используют многоугольник Ньютона алгебраической кривой и разложение соответствующей алгебраической функции в ряд Пюизе в особой точке.

7. Многоугольники Ньютона и разложения Пюизе

Если (x_0, y_0) – неособая точка алгебраической кривой (1) (скажем, $\frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$), то согласно теореме о неявной функции, существует голоморфная в окрестности U точки x_0 функция

$$f(x) = y_0 + y_1(x - x_0) + y_2(x - x_0)^2 + \dots$$

такая, что $P(x, f(x)) = 0$ для всех $x \in U$. Если же точка кривой особая, то мы не можем, вообще говоря, представить в ее окрестности соответствующую алгебраическую функцию сходящимся степенным рядом. Однако, например, в окрестности особой точки $(0,0)$ кривой $\{y^2 - x^3 = 0\}$ имеем $y = x^{3/2}$. Оказывается, что это общий факт – представление y в виде сходящегося ряда по рациональным степеням $(x - x_0)$ возле особой точки кривой.

Теорема 4. *Пусть $(0,0)$ – особая точка алгебраической кривой (1). Тогда найдется натуральное число m такое, что ряд*

$$y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left(x^{1/m}\right)^k$$

сходится при x близких к нулю, и $P(x, y(x)) = 0$.

Данный ряд называют *разложением Пюизе* алгебраической функции в особой точке. Такое разложение может быть не одно, и чтобы найти их все, используют конструкцию многоугольника Ньютона алгебраической кривой.

Пусть

$$P(x, y) = \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+} c_{\alpha,\beta} x^\alpha y^\beta. \tag{7}$$

Определим

$$\Delta(P) := \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}_+^2 \mid c_{\alpha,\beta} \neq 0\}.$$

Определение 7. *Многоугольником Ньютона* полинома P (или соответствующей алгебраической кривой) называют (выпуклое) подмножество (α, β)-плоскости, являющееся объединением четвертей $\{\alpha \geqslant a,\ \beta \geqslant b\}$ по всем (a, b), принадлежащим выпуклой оболочке множества $\Delta(P)$.

Таким образом, граница многоугольника Ньютона состоит из одного вертикального луча, одного горизонтального луча и нескольких наклонных отрезков. Именно наклонные отрезки играют роль при нахождении разложений Пюизе.

Пример 6. Для алгебраической кривой, заданной уравнением

$$P(x,y) = y^3 + 2x^3y - x^7 = 0,$$

имеем $\Delta(P) = \{(0,3),(3,1),(7,0)\}$, следовательно, многоугольник Ньютона данной кривой состоит из точек первой четверти (α,β)-плоскости, удовлетворяющих неравенствам

$$\alpha + \frac{3}{2}\beta \geqslant \frac{9}{2}, \quad \alpha + 4\beta \geqslant 7.$$

Очевидно, для каждого наклонного отрезка границы многоугольника Ньютона полинома (7), заданного уравнением $\alpha + \mu\beta = \lambda$ $(\mu, \lambda \in \mathbb{Q})$, полином может быть представлен в виде

$$P(x,y) = \sum_{\alpha+\mu\beta=\lambda} c_{\alpha,\beta} x^\alpha y^\beta + \sum_{\alpha+\mu\beta>\lambda} c_{\alpha,\beta} x^\alpha y^\beta. \tag{8}$$

Так, для полинома из предыдущего примера имеем соответствующие двум наклонным отрезкам представления

$$y^3 + 2x^3y - x^7 = (y^3 + 2x^3y) - x^7 = (2x^3y - x^7) + y^3.$$

Далее, каждый наклонный отрезок определяет первое слагаемое разложения Пюизе $y = \gamma x^\mu + \ldots$, подставляя которое в (8), имеем

$$P(x,y) = x^\lambda \sum_{\alpha+\mu\beta=\lambda} c_{\alpha,\beta}\gamma^\beta + \sum_{\alpha+\mu\beta>\lambda} c_{\alpha,\beta}\gamma^\beta x^{\alpha+\mu\beta} + \ldots .$$

Первая сумма в этом представлении содержит все слагаемые наименьшего порядка λ по x. Таким образом, получаем уравнение на коэффициент γ:

$$\sum_{\alpha+\mu\beta=\lambda} c_{\alpha,\beta}\gamma^\beta = 0,$$

все ненулевые решения которого должны быть исследованы.

Пример 7. Рассмотрим алгебраическую кривую из примера 6, для которой точка $(0,0)$ является особой. Найдем первые слагаемые разложений Пюизе соответсвующей алгебраической функции в этой точке.

При подстановке разложения $y = \gamma x^{3/2} + \ldots$, соответствующего отрезку $\{\alpha + \frac{3}{2}\beta = \frac{9}{2}\}$ границы многоугольника Нютона, в уравнение кривой, получаем

$$(\gamma^3 + 2\gamma)x^{9/2} + \cdots = 0,$$

что дает нам два ненулевых решения $\gamma = \pm i\sqrt{2}$ и, соответственно, два разложения Пюизе вида

$$y = \pm i\sqrt{2}\, x^{3/2} + \ldots .$$

При подстановке разложения $y = \gamma x^4 + \ldots$, соответствующего отрезку $\{\alpha + 4\beta = 7\}$ границы многоугольника Нютона, в уравнение кривой, получаем

$$(2\gamma - 1)x^7 + \cdots = 0,$$

что дает нам решение $\gamma = 1/2$ и разложение Пюизе вида

$$y = \frac{1}{2}\, x^4 + \ldots .$$

Замечание. Сколько всего разложений Пюизе допускает алгебраическая функция в особой точке $(0,0)$? Для неприводимой кривой число разложений β_0 таково, что точка $(0,\beta_0)$ – граничная точка многоугольника Ньютона кривой. Так, в приведенном выше примере мы нашли первые слагаемые всех трех возможных разложений Пюизе. Если же число найденных первых слагаемых разложений Пюизе меньше β_0, то нужно приступить к нахождению следующих слагаемых, пока не получим β_0 различных начальных сумм разложений (см. пример 7.27 на стр. 229 в [2]).

Теперь мы можем сказать, чему равно число $\#\pi^{-1}(q)$ точек римановой поверхности X, склеивающихся в одну особую точку $q = (0:0:1)$ проективной кривой $\widetilde{\Gamma}$ при проекции $\pi : X \to \widetilde{\Gamma}$.

Это число – число *существенно различных* разложений Пюизе соответсвующей алгебраической функции в особой точке $(0,0)$. Под существенно различными понимают разложения, не являющиеся разными ветвями одного и того же разложения (т. е. не переходящие друг в друга при обходах переменной x вокруг нуля). Так, в примере 7 разложения $y = \pm i\sqrt{2}\,x^{3/2} + \ldots$ не являются существенно различными, и число $\#\pi^{-1}(0:0:1)$ равно 2.

8. Примеры вычисления рода в общем случае

1) Найдем род проективизации $\widetilde{\Gamma}$ особой кривой $y^2 = x^3$,

$$\widetilde{P}(x,y,z) = y^2z - x^3 = 0.$$

Ее единственная особая точка – $q = (0:0:1)$. Как видим, эта точка имеет кратность 2, но не является обыкновенной. Поэтому для вычисления рода будем применять формулу (6) теоремы 3. Однако, $(0:1:0) \in \widetilde{\Gamma}$, и для применения теоремы требуется сделать проективное преобразование кривой, так чтобы преобразованная кривая уже не содержала точку $(0:1:0)$. Поскольку $(1:0:0) \notin \widetilde{\Gamma}$, в качестве такого преобразования можно взять $(x:y:z) \mapsto (y:x:z)$. Тогда преобразованная кривая $\widetilde{\Gamma}_1$ будет задаваться уравнением

$$\widetilde{P}_1(x,y,z) = x^2z - y^3 = 0,$$

ее единственной особой точкой будет та же точка q, но точка $(0:1:0)$ уже не будет принадлежать новой кривой $\widetilde{\Gamma}_1$. Очевидно, алгебраическая функция $\widetilde{P}_1(x,y,1) = x^2 - y^3 = 0$ имеет одно существенно различное разложение Пюизе $y = x^{2/3}$ в особой точке $(0,0)$, поэтому $\#\pi^{-1}(q) = 1$.

Точки ветвления накрытия $\phi : \widetilde{\Gamma}_1 \to \mathbb{C}P^1$ суть $q = (0:0:1)$ и $q' = (1:0:0)$. Поскольку

$$\widetilde{P}_1(0,y,1) = \widetilde{P}_1(1,y,0) = -y^3,$$

имеем $\nu(q) = \nu(q') = 3$. Таким образом, род g кривой $\widetilde{\Gamma}$ по формуле (6) оказывается равным

$$g = 1 - 3 + \frac{1}{2}\Big(2(3-1) - (1-1)\Big) = 0,$$

т. е. в данном случае риманова поверхность X – это сфера S^2. А поскольку $\#\pi^{-1}(q) = 1$, то проекция $\pi : S^2 \to \widetilde{\Gamma}$ является гомеоморфизмом.

Упражнение 5. Найдите род проективизации особой алгебраической кривой $y^2 = x^2 + x^3$ и дайте ее топологическое описание.

2) Найдем род особой проективной кривой $\widetilde{\Gamma}$,

$$\widetilde{P}(x, y, z) = y^3z^2 - 2x^3yz - x^5 = 0.$$

Ее особые точки суть $(0:0:1)$, $(0:1:0)$ (см. упр. 2). Они не являются обыкновенными, поэтому для вычисления рода воспользуемся формулой (6). Поскольку $(0:1:0) \in \widetilde{\Gamma}$, а $(1:0:0) \notin \widetilde{\Gamma}$, для применения формулы, как и в первом примере, сделаем проективное преобразование $(x:y:z) \mapsto (y:x:z)$. Тогда преобразованная кривая $\widetilde{\Gamma}_1$ будет задаваться уравнением

$$\widetilde{P}_1(x, y, z) = x^3z^2 - 2xy^3z - y^5 = 0,$$

при этом $(0:1:0) \notin \widetilde{\Gamma}_1$, а ее особые точки – $(0:0:1)$, $(1:0:0)$.

Исследуем сначала возможные разложения Пюизе соответствующих алгебраических функций в аффинных картах в окрестности этих точек. Первая особая точка $q_1 = (0:0:1)$ превращается в особую точку $(0,0)$ аффинной кривой

$$P_1(x, y) = x^3 - 2xy^3 - y^5 = 0.$$

Граница многоугольника Ньютона этой кривой содержит два наклонных отрезка. Отрезок, соединяющий точки $(0,5)$ и $(1,3)$, задается уравнением $\alpha + \frac{1}{2}\beta = \frac{5}{2}$. Подставляя $y = \gamma\, x^{1/2} + \ldots$ в $P_1(x, y)$, получаем уравнение на γ:

$$-\gamma^5 - 2\gamma^3 = 0,$$

ненулевые решения которого $\gamma = \pm i\sqrt{2}$ определяют два разложения Пюизе вида

$$y = \pm i\sqrt{2}\, x^{1/2} + \ldots .$$

Отрезок, соединяющий точки $(1,3)$ и $(3,0)$, задается уравнением $\alpha + \frac{2}{3}\beta = 3$. Подставляя $y = \gamma\, x^{2/3} + \dots$ в $P_1(x,y)$, получаем уравнение на γ:

$$1 - 2\gamma^3 = 0,$$

три решения которого $\gamma_k = \sqrt[3]{1/2}\, e^{2\pi i k/3}$, $k = 0,1,2$, определяют три разложения Пюизе вида

$$y = \gamma_k\, x^{2/3} + \dots .$$

Таким образом, найдены первые слагаемые всех пяти разложений Пюизе для особой точки q_1, из которых существенно различными являются два, следовательно, $\#\pi^{-1}(q_1) = 2$.

Вторая особая точка $q_2 = (1:0:0)$ превращается в особую точку $(0,0)$ аффинной кривой

$$P_2(x,y) = x^5 + 2x^3y - y^2 = 0.$$

Граница многоугольника Ньютона этой кривой содержит один наклонный отрезок, который соединяет точки $(0,2)$ и $(5,0)$ и задается уравнением $\alpha + \frac{5}{2}\beta = 5$. Подставляя $y = \gamma\, x^{5/2} + \dots$ в $P_2(x,y)$, получаем уравнение на γ:

$$1 - \gamma^2 = 0,$$

два решения которого $\gamma = \pm 1$ определяют два разложения Пюизе вида

$$y = \pm x^{5/2} + \dots .$$

Таким образом, найдены первые слагаемые обоих разложений Пюизе для особой точки q_2, из которых существенно различным является одно, следовательно, $\#\pi^{-1}(q_2) = 1$.

Теперь найдем точки ветвления накрытия $\phi : \widetilde{\Gamma}_1 \to \mathbb{C}P^1$ и их индексы ветвления. Имеем

$$\frac{\partial \widetilde{P}_1}{\partial y} = -6xy^2z - 5y^4 = -y^2(6xz + 5y^2).$$

Данная производная обращается в нуль в следующих точках кривой $\widetilde{\Gamma}_1$:

$$q_1 = (0:0:1), \quad q_2 = (1:0:0), \quad p = \Big(-\frac{24}{25} : 1 : \frac{125}{144}\Big),$$

которые и являются точками ветвления накрытия ϕ. Поскольку

$$\widetilde{P}_1(0:y:1) = \widetilde{P}_1(1:y:0) = -y^5,$$

то $\nu(q_1) = \nu(q_2) = 5$. Для точки ветвления p имеем

$$\widetilde{P}_1\big(-\frac{24}{25}:y:\frac{125}{144}\big) = -y^5 + \frac{5}{3}y^3 - \frac{2}{3},$$

поэтому $\nu(p) = 2$.

Окончательно, применяем формулу (6) и находим род g проективной кривой $\widetilde{\Gamma}$ пятой степени:

$$g = 1 - 5 + \frac{1}{2}\Big(2(5-1) + (2-1) - (2-1) - (1-1)\Big) = 0.$$

Литература

1. Дубровин Б. А. Римановы поверхности и нелинейные уравнения. — М.-Ижевск: РХД, 2001.
2. Kirwan F. Complex Algebraic Curves. London Mathematical Society Students Texts, **23**. — Cambridge: Cambridge University Press, 1992.
3. Shramchenko V. Notes for the Summer school 2017: Algebraic curves (Université de Sherbrooke). Manuscript, 22 pp.

Сведения об авторе

Гонцов Ренат Равилевич, к. ф.-м. н.,

ИППИ РАН, ст. научн. сотр.,

gontsovrr@gmail.com