УДК 514.18

Замечание о круговых сечениях

Александр Владиславович Селиверстов
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича Российской академии наук, Москва

Аннотация

Дан краткий обзор истории конических сечений. Рассмотрены круговые сечения эллипсоидов и гиперболоидов плоскостями, проходящими через центр поверхности. В общем случае существует два таких сечения.

Ключевые слова: круговое сечение; конус; эллипсоид; гиперболоид; ось Галуа; история.

Note on circular sections

Alexandr Vladislavovich Seliverstov
Institute for Information Transmission Problems of the Russian Academy of Sciences (Kharkevich Institute), Moscow

Аннотация

A brief review of the history of conic sections is given. We also consider circular sections of ellipsoids and hyperboloids by planes passing through the center of the surface. In the general case, there exist two such sections.

Key words: circular section; cone; ellipsoid; hyperboloid; Galois axis; history.

Основная цель этой работы — описать круговые сечения поверхности второго порядка — эллипсоида или гиперболоида — плоскостями, инцидентными центру поверхности. Но вначале кратко опишем близкие результаты о конических сечениях [1]. В IV веке до н. э. Менехм использовал конические сечения для решения задачи об удвоении куба. Также о конических сечениях писали Аристей, Евклид и Конон Самосский, но эти сочинения до нас не дошли и известны лишь по упоминаниям в других работах. Известно, что Конон был моложе Архимеда, но умер раньше, то есть не позднее 212 г. до н. э., когда римляне захватили Сиракузы. К сожалению, история геометрии остаётся недостаточно исследованной. В частности, признано, что Начала Евклида включают работы многих предшественников. Однако можно предполагать, что некоторые фрагменты Начал были добавлены позднее при компиляции анонимными комментаторами, но не были известны самому Евклиду [2].

Известно сочинение Архимеда “О коноидах и сфероидах”, где доказано, что эллиптический конус обладает круговыми сечениями. Следовательно, наклонный (или косой) круговой конус обладает плоскостью симметрии, которая проходит через вершину конуса и некоторую ось эллипса, который служит сечением. Также известны семь из восьми книг “Конических сечений”, которые написал Аполлоний Пергский, собрав и значительно обогатив работы своих предшественников. В частности, он показал, что наклонный круговой конус обладает и существенно другим, то есть непараллельным основанию, круговым сечением. Эти круговые сечения возникают при стереографической проекции. Окружность на плоскости проекции служит образом окружности на сфере. И обе эти окружности лежат на одном конусе, вершина которого лежит на сфере.

Интересным продолжением исследований конических сечений служит метод построения сфер Данделена (Dandelin), получивший развитие в других работах [3, 4].

Задача о сечениях эллипсоидов менее известна, однако недавно была обнаружена связь этой задачи с приложениями в теоретической механике, что объясняет интерес к ней. Изначально осью Галуа названа прямая, проходящая через центр эллипсоида Мак-Куллага (MacCullagh) и ортогональная плоскости, также проходящей через центр и пересекающей этот эллипсоид по окружности. Для тела с осевой симметрией ось Галуа совпадает с осью симметрии, но в общем случае осей Галуа две и ни одна из них не совпадает ни с одной из главных центральных осей инерции. Ось Галуа не имеет выделенного направления. Положение осей Галуа относительно твёрдого тела определяется независимо от его вращения. Важная роль этого понятия иллюстрируется тем, что ось Галуа равномерно и устойчиво вращается в случае перманентного вращения твёрдого тела относительно его промежуточной оси инерции [5, 6]. При этом вращение самого тела вокруг промежуточной оси инерции неустойчиво при любой угловой скорости вращения. Анализ такого движения интересен, в частности, для вычисления траектории полёта и ориентации в пространстве космического аппарата. Эварист Галуа (Évariste Galois) не занимался такой задачей [7], однако название было дано из-за связи с вычислением эллиптических интегралов третьего рода, которым можно дать новую интерпретацию [8].

Обобщая понятие, возникшее в теоретической механике, проходящую через центр эллипсоида прямую назовём осью Галуа, если ортогональная плоскость, также проходящая через центр эллипсоида, пересекает этот эллипсоид по окружности. Ось Галуа служит осью симметрии того кругового сечения эллипсоида, о котором говорится в её определении, хотя эта ось не лежит в плоскости сечения. Поэтому её иногда называют обобщённой осью симметрии.

Сечение сферы плоскостью — окружность. С другой стороны, если сечением эллипсоида вращения (или сфероида) служит окружность, то секущая плоскость ортогональна оси симметрии. Рассмотрим трёхосный эллипсоид, то есть отличный от сфероида, не имеющий оси симметрии. Рассмотрим пучок плоскостей, проходящих через среднюю ось эллипсоида. Каждое сечение эллипсоида такой плоскостью — эллипс, одна из осей которого совпадает со средней осью эллипсоида. При повороте секущей плоскости вокруг средней оси эллипсоида длина другой оси эллипса непрерывно меняется, принимая значения между длинами малой и большой осей эллипсоида. Поэтому некоторое такое сечение — это окружность, диаметром которой служит средняя ось эллипсоида. Более того, для трёхосного эллипсоида таких сечений два. Они переходят друг в друга при зеркальном отражении относительно плоскости, проходящей через среднюю и другую оси эллипсоида.

Круговые сечения эллипсоида получаются как пересечение эллипсоида и сферы, диаметр которой равен средней оси, а центр совпадает с центром эллипсоида. В общем случае пересечение двух поверхностей второго порядка — это пространственная кривая четвёртого порядка. В случае пересечения трёхосного эллипсоида и сферы с тем же центром, диаметр которой равен средней оси эллипсоида, эта кривая распадается на две пересекающиеся окружности. В случае эллипсоида вращения, отличного от сферы, получается двойная окружность, по которой эллипсоид и сфера касаются друг друга.

При данном построении видно, что обе оси Галуа ортогональны средней оси трёхосного эллипсоида, а для отличного от сферы эллипсоида вращения обе оси Галуа совпадают с одной осью и ортогональны другим осями эллипсоида. И только у сферы бесконечно много осей Галуа. Это позволяет сказать, что сфера одновременно служит примером самой простой и самой сложной поверхности второго порядка.

Аналогично доказывается существование двух круговых сечений плоскостями, проходящими через центр однополостного гиперболоида. Если однополостный гиперболоид является поверхностью вращения, то круговые сечения совпадают. Прямые, ортогональные плоскостям этих круговых сечений, также можно назвать осями Галуа. Однако их физический смысл уже менее понятен.

Никакая плоскость, проходящая через центр, не пересекает двуполостный гиперболоид по окружности. Однако такое сечение может быть мнимой окружностью, на которой нет вещественных точек.

Автор благодарен С. Ф. Адлаю за многочисленные замечания и поправки.

Список литературы

[1] Б. А. Розенфельд, *Аполлоний Пергский.* М.: МЦНМО, 2004.

[2] K. Saito, “Re-examination of the different origins of the arithmetical books of Euclid’s Elements”, *Historia Mathematica*, vol. 47, pp. 39–53, 2019.
`https://doi.org/10.1016/j.hm.2019.03.002`

[3] А. Л. Хейфец, В. Н. Васильева, “Реализация обобщенной теоремы Данделена для произвольных квадрик вращения в AutoCAD”, *Геометрия и графика*, том 2, № 2, с. 9–14, 2014.
`https://doi.org/10.12737/5584`

[4] А. Л. Хейфец, “Коники как сечения квадрик плоскостью (обобщенная теорема Данделена)”, *Геометрия и графика*, том 5, № 2, с. 45–58, 2017.
`https://doi.org/10.12737/article_5953f32172a8d8.94863595`

[5] S. F. Adlaj, S. A. Berestova, N. E. Misyura, E. A. Mityushov, “Illustrations of rigid body motion along a separatrix in the case of Euler–Poinsot”, *Computer Tools in Education*, no. 2, pp. 5–13, 2018.
`http://cte.eltech.ru/ojs/index.php/kio/article/view/1517`

[6] S. Adlaj, “Galois axis”, in: *International scientific conference “Infinite-dimensional analysis and mathematical physics”*, MSU, Moscow, 2019, pp. 9–11.
`http://semjonadlaj.com/GaloisAxis190129.pdf`

[7] P. M. Neumann, “The editors and editions of the writings of Évariste Galois”, *Historia Mathematica*, vol. 39, pp. 211–221, 2012.
`https://doi.org/10.1016/j.hm.2012.01.003`

[8] S. Adlaj, “An Arithmetic-Geometric Mean of a Third Kind!”, in: M. England, W. Koepf, T. Sadykov, W. Seiler, E. Vorozhtsov E. (eds) *Computer Algebra in Scientific Computing. CASC 2019.* Lecture Notes in Computer Science, vol. 11661. Springer, Cham, 2019, pp. 37–56.
`https://doi.org/10.1007/978-3-030-26831-2_3`